

EP1.2 Seja $V = 0,473 \text{ l}$. Sabemos que 1 litro é o volume de um cubo de lado 10 cm . Portanto, como está dito:

$$1 \text{ l} = 10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3 = 1.000 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$$

Sabemos também que $1 \text{ mm} = 1/1.000 \text{ m}$ e $1 \text{ cm} = 1/100 \text{ m}$, ou seja: $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$. Portanto:

$$V = 0,473 \text{ l} = 0,473 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 0,473 \times 10^3 (10 \text{ mm})^3 = 0,473 \times 10^3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Concluindo: $V = 0,473 \times 10^6 \text{ mm}^3 = 473.000 \text{ mm}^3$.

EP1.3 A velocidade da luz no vácuo é $c \cong 300.000 \text{ km/s} = 3 \times 10^5 \text{ km/s}$. Isso significa que em apenas $\Delta t = 1 \text{ s}$ a luz percorre a distância incrível $\Delta l = 300.000 \text{ km}$. Portanto:

$$c = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta l'}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta l'}{c}$$

sendo $\Delta l'$ uma distância qualquer que a luz percorre em um tempo $\Delta t'$ qualquer. Fixando $\Delta l' = 1 \text{ km}$, obtemos o tempo:

$$\Delta t' = \frac{\Delta l'}{c} = \frac{1 \text{ km}}{300.000 \text{ km/s}} = \frac{1}{300.000} \text{ s} \cong 3,33 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Para expressar esse tempo em nanossegundos (ns), devemos nos lembrar que $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$. Portanto, $1 \text{ s} = 10^9 \text{ ns}$ e obtemos:

$$\Delta t' \cong 3,33 \times 10^{-6} \text{ s} = 3,33 \times 10^{-6} \times 10^9 \text{ ns} = 3,33 \times 10^3 \text{ ns} = 3.330 \text{ ns}$$

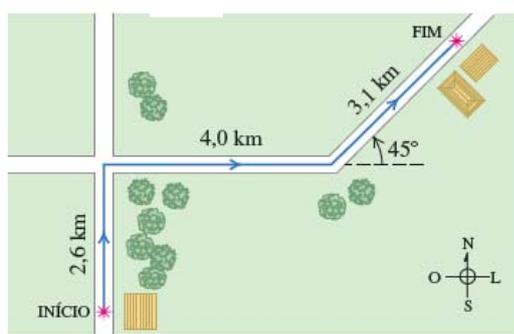
Ninguém precisa se lembrar disso. Basta saber que a velocidade da luz é incrível.

Quando acendemos uma lanterna, em um piscar de olhos, a luz emitida percorre uma distância que é cerca de 24 vezes o diâmetro do planeta Terra.

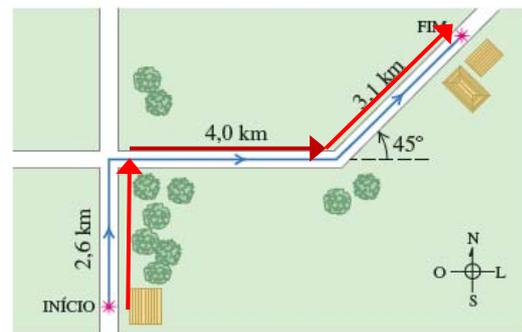
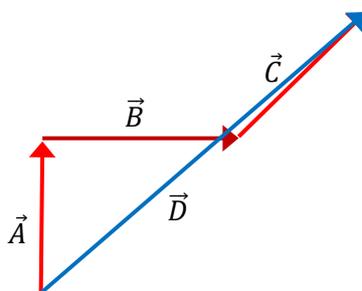
EP1.6 Ficamos sabendo que 1 hectare é igual a $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$: $1 \text{ ha} = 100^2 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ m}^2$. Descobrimos também que: $1 \text{ acre} = 4.046,84 \text{ m}^2$. Se $1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2$ então $1 \text{ m}^2 = 10^{-4} \text{ ha}$. Portanto:

$$A = 12 \text{ acres} = 12 \times 4.046,84 \text{ m}^2 = 12 \times 4.046,84 \times 10^{-4} \text{ ha} = 4,856208 \text{ ha} \cong 4,86 \text{ ha}$$

EP1.31



Nas Figuras ao lado mostramos os três deslocamentos \vec{A} , \vec{B} e \vec{C} feitos pelo caminhão. Os módulos desses vetores (em km) são: $A = 2,6$, $B = 4,0$ e $C = 3,1$. O deslocamento (total, ou resultante) do caminhão foi: $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$. A regra do paralelogramo diz que para somar vetores devemos desenhar um vetor na ponta do outro e conectar as pontas. Aplicando essa regra, obtemos o vetor mostrado em azul na Figura ao lado. Podemos ver que a direção de \vec{D} é basicamente a direção que liga o sudoeste ao nordeste, com esse sentido, apontando do sudoeste para o nordeste.

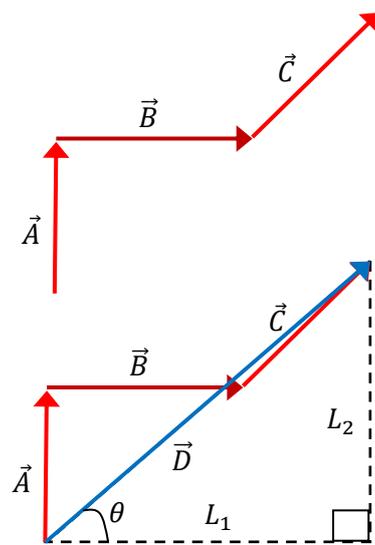


Determinar o módulo de \vec{D} , o tamanho do vetor azul, através desse método geométrico pode ser bastante trabalhoso. Uma forma de fazer é considerar o triângulo retângulo na Figura ao lado, cuja hipotenusa é exatamente $D = |\vec{D}|$. Note que os lados desse triângulo são: $L_1 = B + C \cos(45^\circ)$ e $L_2 = A + C \sin(45^\circ)$. Portanto, do teorema de Pitágoras:

$$D = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{(B + C \cos(45^\circ))^2 + (A + C \sin(45^\circ))^2}$$

Numericamente (em km): $L_1 = 4,0 + 3,1/\sqrt{2} \cong 6,19$ e $L_2 = 2,6 + 3,1/\sqrt{2} \cong 4,79$. Portanto: $D \cong 7,83$ km.

O ângulo θ que \vec{D} faz com a direção de L_1 é tal que $\tan(\theta) = L_2/L_1 \cong 0,774$, ou seja, $\theta \cong 37,7^\circ$.



EP1.38 Agora vamos abordar esse exercício escrevendo os vetores deslocamento \vec{A} , \vec{B} e \vec{C} em termos de suas componentes em um referencial cartesiano xy conveniente. Esse referencial está mostrado na Figura ao lado.

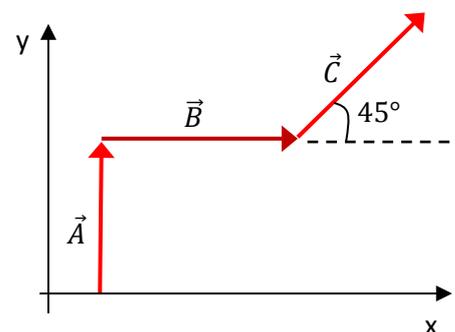
Nesse referencial obtemos (em km):

$$\vec{A} = A \hat{y} = 2,6 \hat{y}$$

$$\vec{B} = B \hat{x} = 4,0 \hat{x}$$

$$\vec{C} = C \cos(45^\circ) \hat{x} + C \sin(45^\circ) \hat{y} = \frac{C}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y}) = \frac{3,1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y})$$

Portanto, nesse mesmo referencial, a expressão de \vec{D} é:



$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (B + C/\sqrt{2})\hat{x} + (A + C/\sqrt{2})\hat{y}$$

O módulo desse vetor é:

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(B + C/\sqrt{2})^2 + (A + C/\sqrt{2})^2}$$

Vemos que, como não poderia deixar de ser, obtivemos aqui o mesmo vetor \vec{D} que desenhamos na solução do exercício 1.31. Um vetor que coincide com a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados (em km):

$$L_1 = D_x = 4,0 + 3,1/\sqrt{2} \cong 6,19$$

$$L_2 = D_y = 2,6 + 3,1/\sqrt{2} \cong 4,79$$

EP1.32

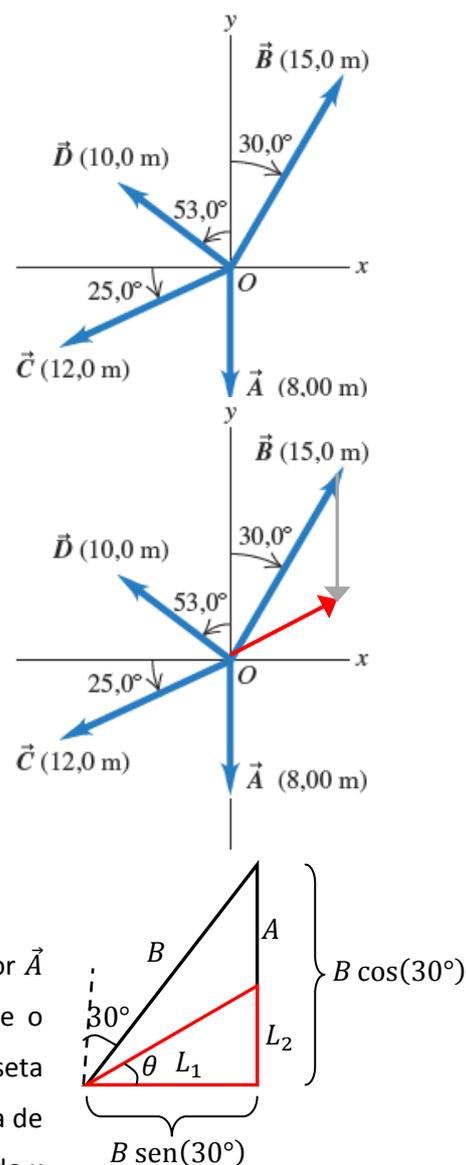
a) A Figura ao lado mostra a seta de $\vec{A} + \vec{B}$ (em vermelho) construída através da regra do paralelogramo: desenhamos o vetor \vec{A} (em cinza) na ponta do vetor \vec{B} e conectamos as pontas. A direção e o sentido de $\vec{A} + \vec{B}$ estão mostrados na Figura, são a direção e o sentido da seta vermelha. Quanto ao módulo, note que $\vec{A} + \vec{B}$ está ao longo da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados são: $L_1 = B \sin(30^\circ) = 7,5$ ao longo de x e $L_2 = B \cos(30^\circ) - A = 5$ ao longo de y . Portanto, do teorema de Pitágoras:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{(B \sin(30^\circ))^2 + (B \cos(30^\circ) - A)^2}$$

Esse triângulo retângulo está mostrado na Figura ao lado (em vermelho). Obtemos: $|\vec{A} + \vec{B}| = 9$ m. O ângulo θ que $\vec{A} + \vec{B}$ faz com a direção de L_1 é tal que $\tan(\theta) = L_2/L_1 \cong 0,665$, ou seja, $\theta \cong 33,6^\circ$.

b) A Figura abaixo mostra a seta de $\vec{A} - \vec{B}$ (em vermelho) construída através da regra do paralelogramo. Note que $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ e que $-\vec{B}$ é apenas o vetor \vec{B} com o sentido invertido. Portanto, primeiro desenhamos o vetor $-\vec{B}$ (em verde) e depois desenhamos o vetor \vec{A} (em cinza) na ponta do vetor $-\vec{B}$ e conectamos as pontas. A direção e o sentido de $\vec{A} - \vec{B}$ estão mostrados na Figura, são a direção e o sentido da seta vermelha. Quanto ao módulo, note que $\vec{A} - \vec{B}$ está ao longo da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados são: $L_1 = B \sin(30^\circ) = 7,5$ ao longo de x e $L_2 = B \cos(30^\circ) + A = 21$ ao longo de y . Portanto, do teorema de Pitágoras:

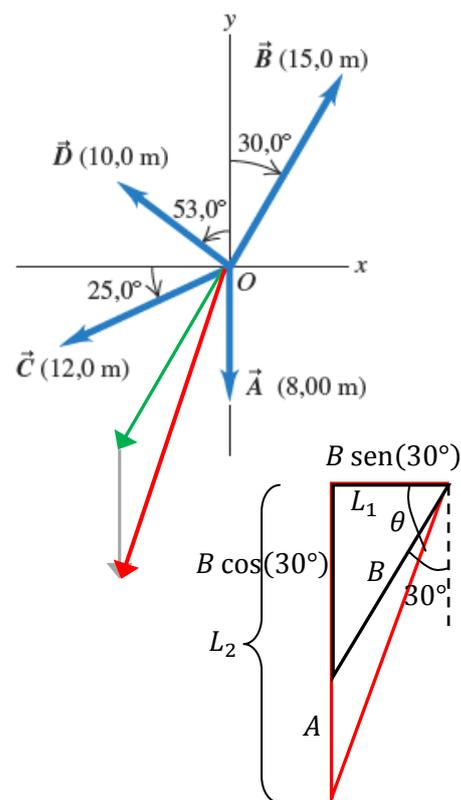
$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{(B \sin(30^\circ))^2 + (B \cos(30^\circ) + A)^2}$$



Esse triângulo retângulo está mostrado na Figura ao lado (em vermelho). Obtemos: $|\vec{A} - \vec{B}| = 22,3$ m. O ângulo θ que $\vec{A} - \vec{B}$ faz com a direção de L_1 é tal que $\tan(\theta) = L_2/L_1 \cong 2,8$, ou seja, $\theta \cong 70,3^\circ$.

c) Note que $-\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{A} + \vec{B})$, ou seja, o vetor $-\vec{A} - \vec{B}$ é apenas o vetor $\vec{A} + \vec{B}$ com o sentido invertido. Portanto, fica claro que $|\vec{A} + \vec{B}| = |-\vec{A} - \vec{B}|$ e que a seta de $-\vec{A} - \vec{B}$ é a seta de $\vec{A} + \vec{B}$ com o sentido invertido.

d) Analogamente, $\vec{B} - \vec{A} = -(\vec{A} - \vec{B})$, ou seja, o vetor $\vec{B} - \vec{A}$ é apenas o vetor $\vec{A} - \vec{B}$ com o sentido invertido. Portanto, fica claro que $|\vec{A} - \vec{B}| = |\vec{B} - \vec{A}|$ e que a seta de $\vec{B} - \vec{A}$ é a seta de $\vec{A} - \vec{B}$ com o sentido invertido.



EP1.39 Agora vamos abordar esse exercício escrevendo os vetores \vec{A} e \vec{B} em termos de suas componentes no referencial cartesiano xy já definido na Figura. Nesse referencial obtemos (em m):

$$\vec{A} = -A \hat{y} = -8,00 \hat{y}$$

$$\vec{B} = B \sin(30^\circ) \hat{x} + B \cos(30^\circ) \hat{y} = \frac{15}{2} \hat{x} + \frac{15\sqrt{3}}{2} \hat{y}$$

Portanto, nesse mesmo referencial, as expressões dos vetores que já calculamos no exercício 1.32 são:

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = B \sin(30^\circ) \hat{x} + [-A + B \cos(30^\circ)] \hat{y} = \frac{15}{2} \hat{x} + \left(-8,00 + \frac{15\sqrt{3}}{2}\right) \hat{y} = 7,5 \hat{x} + 5 \hat{y}$$

O módulo desse vetor é:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(7,5)^2 + (5)^2} = 9$$

$$\begin{aligned} \vec{D} = \vec{A} - \vec{B} &= -B \sin(30^\circ) \hat{x} + [-A - B \cos(30^\circ)] \hat{y} \\ &= -\frac{15}{2} \hat{x} - \left(\frac{15\sqrt{3}}{2} + 8,00\right) \hat{y} = -7,5 \hat{x} - 21 \hat{y} \end{aligned}$$

O módulo desse vetor é:

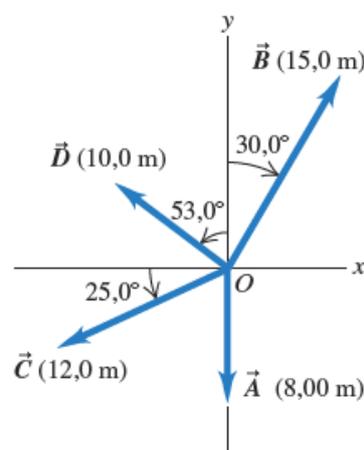
$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(-7,5)^2 + (-21)^2} = 22,3$$

O vetor $-\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{A} + \vec{B})$ é:

$$-\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{A} + \vec{B}) = -\vec{S} = -7,5 \hat{x} - 5 \hat{y}$$

O vetor $\vec{B} - \vec{A} = -(\vec{A} - \vec{B})$ é:

$$\vec{B} - \vec{A} = -(\vec{A} - \vec{B}) = -\vec{D} = 7,5 \hat{x} + 21 \hat{y}$$



EP1.49 a) Considere a próxima Figura onde mostramos um triângulo retângulo (em vermelho) cuja hipotenusa está ao longo do vetor \vec{A} . A componente x de \vec{A} é positiva e coincide com o lado de comprimento $A \cos(70^\circ)$, portanto: $A_x = A \cos(70^\circ)$. A componente y também é positiva e coincide com o lado de comprimento $A \sin(70^\circ)$: Portanto: $A_y = A \sin(70^\circ)$. Concluindo, a expressão algébrica do vetor \vec{A} é:

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} = A (\cos(70^\circ)\hat{x} + \sin(70^\circ)\hat{y})$$

Sendo $A = 3,60$ m, obtemos (em metros):

$$\vec{A} = 1,23 \hat{x} + 3,38 \hat{y}$$

Mostramos também um triângulo retângulo (em azul) cuja hipotenusa está ao longo do vetor \vec{B} . A componente x de \vec{B} é negativa e coincide com o lado de comprimento $B \cos(30^\circ)$, portanto: $B_x = -B \cos(30^\circ)$. A componente y também é negativa e coincide com o lado de comprimento $B \sin(30^\circ)$: Portanto: $B_y = -B \sin(30^\circ)$. Concluindo, a expressão algébrica do vetor \vec{B} é:

$$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} = -B (\cos(30^\circ)\hat{x} + \sin(30^\circ)\hat{y})$$

Sendo $B = 2,4$ m, obtemos (em metros): $\vec{B} = -2,1 \hat{x} - 1,2 \hat{y}$.

b) Considere o vetor $\vec{C} = 3,00\vec{A} - 4,00\vec{B}$, ou seja: $\vec{C} = 3,00\vec{A} + (-4,00\vec{B})$. A seta desse vetor está esboçada na Figura ao lado (em verde). Ela está ao longo da diagonal do paralelogramo com lados $3,00\vec{A}$ e $-4,00\vec{B}$.

As componentes de \vec{C} são (usando \vec{A} e \vec{B} já calculados):

$$\vec{C} = 3,00(1,23 \hat{x} + 3,38 \hat{y}) - 4,00(-2,1 \hat{x} - 1,2 \hat{y})$$

$$\vec{C} = 12,1 \hat{x} + 14,9 \hat{y}$$

O módulo de \vec{C} é:

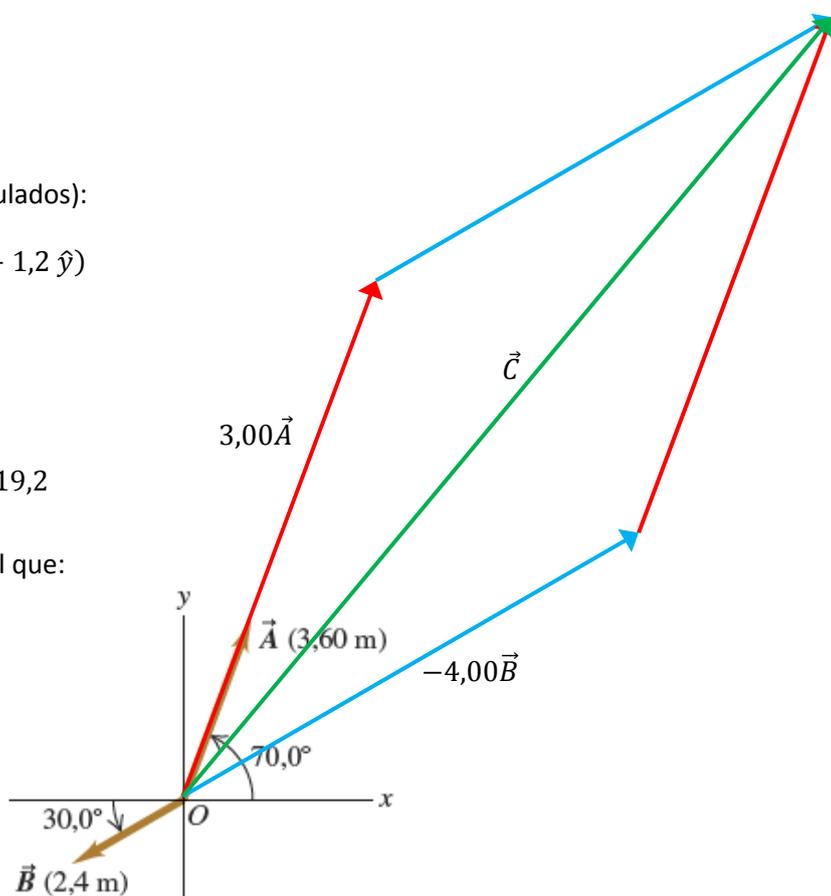
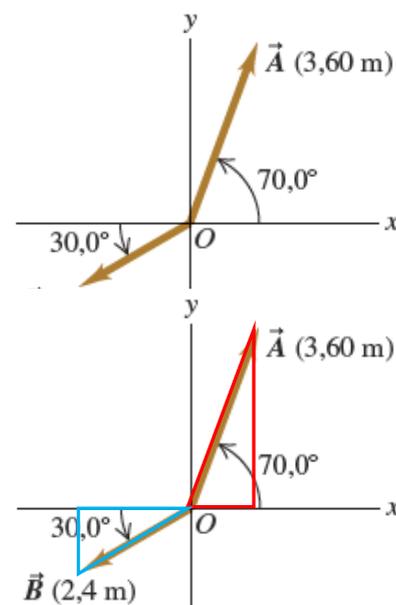
$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(12,1)^2 + (14,9)^2} = 19,2$$

O ângulo θ que a seta de \vec{C} faz com o eixo x é tal que:

$$\tan(\theta) = \frac{C_y}{C_x} = 1,23$$

Portanto:

$$\theta = 50,9^\circ$$



EP1.51 a) Considere o vetor $\vec{V} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$. Esse vetor é unitário? Vamos ver quanto vale o módulo de \vec{V} :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Como $\sqrt{3} \neq 1$, segue que \vec{V} não é unitário.

Se \vec{V} fosse unitário, deveria valer:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 1$$

Como todos os termos V_i^2 são positivos, fica claro que não tem como essa igualdade acima valer se alguma componente V_i for maior que 1. Um vetor que tem pelo menos uma componente maior que 1 não pode ser unitário, pois seu módulo será maior que 1.

Não há restrição nos sinais das componentes V_i , elas podem ser positivas ou negativas. Todos os vetores abaixo são unitários:

$\vec{A} = \frac{\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{3}}$	$\vec{B} = \frac{\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{3}}$	$\vec{C} = \frac{-\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{3}}$
--	--	---

Posto que:

$$A = B = C = \sqrt{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$$

c) Seja $\vec{A} = a(3,0 \hat{x} + 4,0 \hat{y})$. O módulo de \vec{A} é:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(3,0 a)^2 + (4,0 a)^2} = \sqrt{a^2(25)} = 5|a|$$

A condição para que \vec{A} seja unitário é:

$$A = 1 = 5|a| \Rightarrow |a| = \frac{1}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{5}$$

Concluindo, o vetor unitário \vec{A} pode ser:

$\vec{A} = \frac{3,0 \hat{x} + 4,0 \hat{y}}{5}$	$\vec{A} = -\frac{3,0 \hat{x} + 4,0 \hat{y}}{5}$
---	--

Posto que:

$$A = \sqrt{\left(\pm \frac{3,0}{5}\right)^2 + \left(\pm \frac{4,0}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9,0}{25} + \frac{16}{25}} = 1,0$$

EP1.72 Considere o vetor resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$. Esse vetor está mostrado na Figura ao lado, em vermelho, de acordo com a regra do paralelogramo: primeiro desenhamos o vetor \vec{C} (verde) na ponta do vetor \vec{B} e depois desenhamos \vec{A} (cinza) na ponta desse \vec{C} . Finalmente, conectamos as pontas com a seta vermelha, que é \vec{R} .

A expressão de \vec{R} em termos de vetores unitários pode ser obtida de:

$$\vec{A} = -A \hat{y} = -8,00 \hat{y}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B \sin(30^\circ) \hat{x} + B \cos(30^\circ) \hat{y} = \frac{15}{2} \hat{x} + \frac{15\sqrt{3}}{2} \hat{y} \\ &= 7,5 \hat{x} + 13 \hat{y} \end{aligned}$$

$$\vec{C} = -C \cos(25^\circ) \hat{x} - C \sin(25^\circ) \hat{y} = -10,9 \hat{x} - 5,07 \hat{y}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} &= (7,5 - 10,9) \hat{x} + (-8,00 + 13 - 5,07) \hat{y} \\ &= -3,4 \hat{x} - 0,1 \hat{y} \end{aligned}$$

O módulo de \vec{R} é: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-3,4)^2 + (-0,1)^2} = 3,4$

Considere agora o vetor $\vec{S} = \vec{C} - \vec{A} - \vec{B} = \vec{C} + (-\vec{A}) + (-\vec{B})$. Esse vetor está mostrado na Figura ao lado, em vermelho, de acordo com a regra do paralelogramo: primeiro desenhamos o vetor $-\vec{A}$ (cinza) na ponta do vetor \vec{C} e depois desenhamos $-\vec{B}$ (verde) na ponta desse $-\vec{A}$. Finalmente, conectamos as pontas com a seta vermelha.

A expressão de \vec{S} em termos de vetores unitários pode ser obtida de:

$$\vec{A} = -A \hat{y} = -8,00 \hat{y}$$

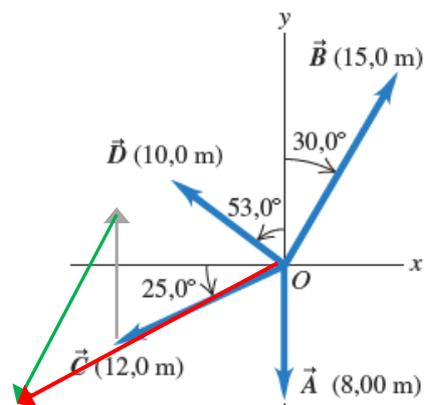
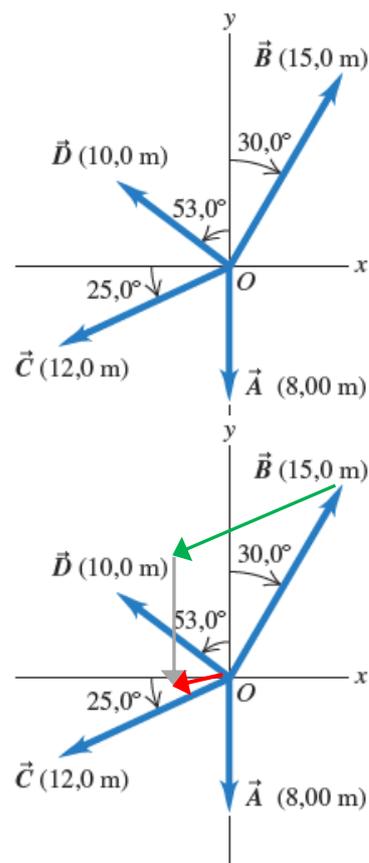
$$\begin{aligned} \vec{B} &= B \sin(30^\circ) \hat{x} + B \cos(30^\circ) \hat{y} = \frac{15}{2} \hat{x} + \frac{15\sqrt{3}}{2} \hat{y} \\ &= 7,5 \hat{x} + 13 \hat{y} \end{aligned}$$

$$\vec{C} = -C \cos(25^\circ) \hat{x} - C \sin(25^\circ) \hat{y} = -10,9 \hat{x} - 5,07 \hat{y}$$

$$\vec{S} = \vec{C} - \vec{A} - \vec{B} = (-10,9 - 7,5) \hat{x} + (-5,07 + 8,00 - 13) \hat{y} = -18,4 \hat{x} - 10,1 \hat{y}$$

O módulo de \vec{S} é: $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(-18,4)^2 + (-10,1)^2} = 21$

O ângulo θ que a seta de \vec{S} faz com o eixo x negativo é tal que:

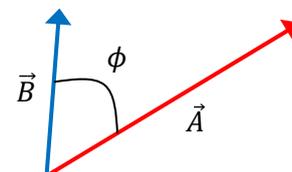


$$\tan(\theta) = \frac{S_y}{S_x} = 0,55$$

Portanto:

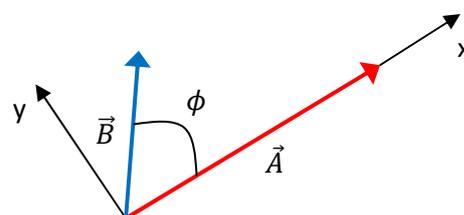
$$\theta = 28,8^\circ$$

EP1.92 Considere os vetores \vec{A} e \vec{B} como na Figura ao lado. Dois vetores sempre determinam um plano e nesse caso esse é o plano da tela. Considere o vetor resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$. Quanto vale o módulo de \vec{R} ?



Vamos calcular R através das expressões de \vec{A} e \vec{B} em termos de um referencial xy conveniente.

A Figura ao lado mostra um referencial xy conveniente, em que o eixo x foi colocado paralelo ao vetor \vec{A} . Nesse referencial obtemos as expressões:



$$\vec{A} = A \hat{x}$$

$$\vec{B} = B \cos(\phi) \hat{x} + B \sin(\phi) \hat{y}$$

Portanto:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A + B \cos(\phi)) \hat{x} + B \sin(\phi) \hat{y}$$

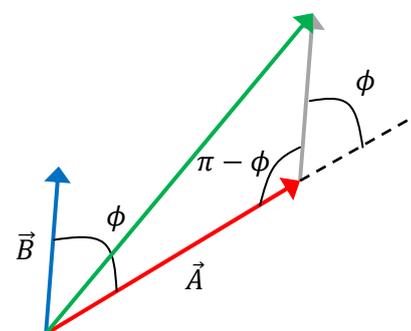
Concluindo:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A + B \cos(\phi))^2 + (B \sin(\phi))^2} = \sqrt{A^2 + B^2 [(\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2] + 2AB \cos(\phi)}$$

Sabendo que $[(\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2] = 1$ para todo ϕ , segue que:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\phi)}$$

A Figura ao lado tenta convencer que essa é a lei dos cossenos, aplicada ao triângulo formado por \vec{A} , \vec{B} (cinza) e \vec{R} (verde) com o ângulo $\pi - \phi$. Lembre-se que $\cos(\pi - \phi) = -\cos(\phi)$.



b) Se $A = B$, segue que:

$$R = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos(\phi)} = A \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\phi)}$$

Para que valha $R = A$ devemos ter:

$$A \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\phi)} = A \Rightarrow \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\phi)} = 1$$

Portanto:

$$1 + \cos(\phi) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\phi) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 120^\circ$$

Seria algo como esboçado ao lado. Um triângulo equilátero: todos os ângulos internos iguais a 60°

