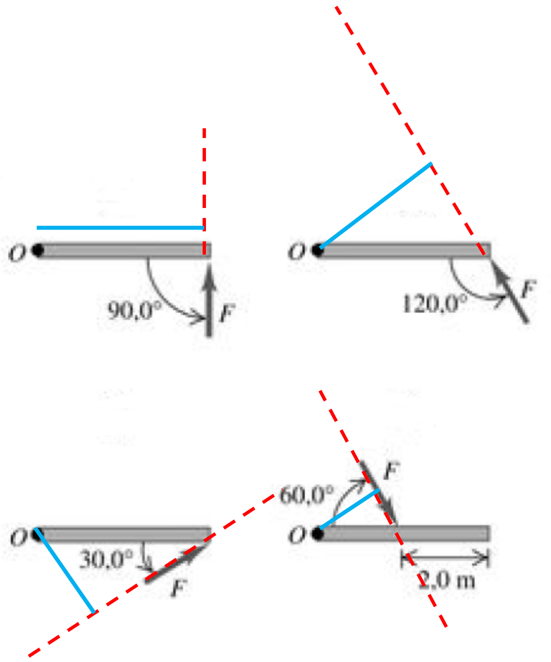
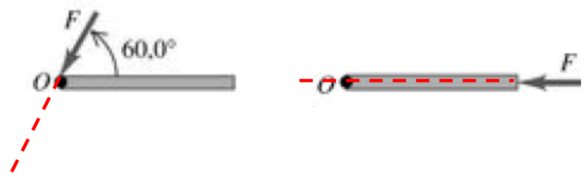
EP10.1 Vamos chamar de F o módulo da força aplicada e de L o comprimento da barra. Imagine sempre um eixo z ortogonal ao plano da página, passando por O e apontando para fora da página. Vamos calcular o torque τ_z que a força $\vec{F}$ produz na barra ao longo do eixo z. O módulo de τ_z é sempre $\tau_z = F\,b$, sendo b o braço de alavanca de $\vec{F}$, em relação ao eixo z, definido nas Figuras abaixo (a linha tracejada vermelha é a linha de ação de $\vec{F}$). A direção de τ_z é sempre z, posto que uma força sempre produz um torque que está na direção ortogonal ao plano que contém a força. O sentido de τ_z é dado pela regra da mão direita: colocando o polegar da mão direita ao longo do eixo de rotação, com essa mão curvada no sentido apontado pela força $\vec{F}$, o sentido do polegar é o sentido de τ_z.



Note que o braço de alavanca b (em azul) sempre faz um ângulo de 90° com a linha de ação de $\vec{F}$ (linha vermelha).



a) $b = L$ e $\tau_z = F\,L$. A mão direita gira no sentido anti-horário, polegar para fora da página, τ_z para fora da página (positivo no nosso referencial).

b) O ângulo interno é 60° e b é o cateto oposto: $b\; = L\,\text{sen}(60) = L\sqrt{3}/2$ e $\tau_z = F\,L\,\sqrt{3}/2$. A mão direita gira no sentido anti-horário, polegar para fora da página, τ_z para fora da página (positivo no nosso referencial).

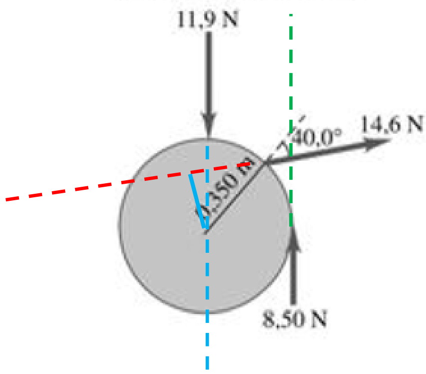
c) O ângulo interno é 30° e b é o cateto oposto: $b\; = L\,\text{sen}(30) = L1/2$ e $\tau_z = F\,L/2$. A mão direita gira no sentido anti-horário, polegar para fora da página, τ_z para fora da página (positivo no nosso referencial).

d) O ângulo interno é 60° e b é o cateto oposto: $b\; = L/2\,\text{sen}(60) = L\,\sqrt{3}/4$ e $\tau_z = F\,L\,\sqrt{3}/4$. A mão direita gira no sentido horário, polegar para dentro da página, τ_z para dentro da página (negativo no nosso referencial).

e) A linha de ação passa pelo eixo z: $b\; = 0$ e $\tau_z = 0$.

f) A linha de ação passa pelo eixo z: $b\; = 0$ e $\tau_z = 0$.

EP10.4



Sejam R o raio e M a massa da roda. A Figura ao lado mostra as linhas de ação das forças que atuam na roda. Considere um eixo z ortogonal ao plano da página que passa pelo centro da roda, apontando para fora. Já podemos ver que a força com $F_1 = 11{,}9\ N$ não produz torque τ_{z1} porque sua linha de ação (azul) passa pelo eixo z e $b_1 = 0$.

A força tangencial com $F_2 = 8{,}5\ N$ (linha de ação em verde) possui $b_2 = R$ e $\tau_{z2} = 8{,}5\ R\ N\ m$. A mão direita gira no sentido anti-horário, polegar para fora da página, τ_{z2} para fora da página (positivo no nosso referencial).

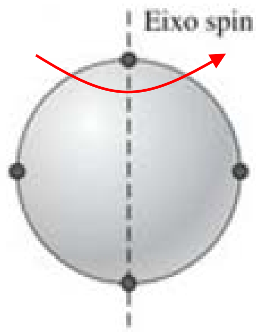
Para a força com $F_3 = 14{,}6\ N$ (linha de ação em vermelho) o ângulo interno é 40° e b_3 é o cateto oposto (em azul): $b_3 = R\,\mathrm{sen}(40) = R\ 0{,}642$ e $\tau_{z3} = 14{,}6\ R\ 0{,}642\ N\ m$. A mão direita gira no sentido horário, polegar para dentro da página, τ_{z3} para dentro da página (negativo no nosso referencial).

O torque resultante na roda é:

$$\tau_z = \tau_{z1} + \tau_{z2} + \tau_{z3} = 0 + 8{,}5\ R - 14{,}6\ R\ 0{,}642 = -8{,}81\ R\ N\ m$$

O torque resultante está para dentro da página (porque é negativo) e vai produzir uma rotação/aceleração angular da roda no sentido horário, de acordo com: $\tau_z = I\ \alpha$.

EP10.8 Considere que z é o eixo de rotação (linha tracejada), apontando para cima.



Tendo em vista que $\tau_z = I\ \alpha$, segue que o torque resultante na casca ao longo de z deve ser tal que produza uma α ao longo de z dada por:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t}$$

Sendo o momento de inércia do conjunto (em relação a z) dado por (tabela 9.2):

$$I = I_{CASCA} + 2\ I_{MASSA} = \frac{2}{3} M\ R^2 + 2\ m\ R^2$$

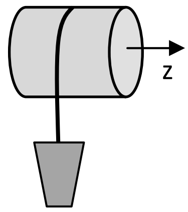
Note que as duas massas sobre o eixo de rotação possuem raio de giração nulo e não contribuem para I.

Concluindo, o torque necessário ao longo do eixo z de rotação é, em módulo:

$$\tau_z = I\ \alpha = \left[\frac{2}{3} M\ R^2 + 2\ m\ R^2\right] \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t}$$

Esse torque deve ser oposto à velocidade ω, para frear a rotação. Por exemplo, se a rotação se dá no sentido indicado pela seta curva vermelha na Figura acima, então ω estaria para cima (regra da mão direita: dedos curvados no sentido da rotação, polegar para cima) e τ_z deveria estar para baixo (negativo no nosso referencial).

EP10.14 A ideia está ilustrada ao lado. Enquanto o balde (massa m) cai (translada) com velocidade de módulo V e aceleração de módulo a, o cilindro (massa M e raio R) gira em torno do eixo z com velocidade angular ω e aceleração angular α. A corda (que não desliza) vincula esses dois movimentos: $V = \omega\, R$ e $a = \alpha\, R$. O balde cai uma altura H até chegar na água.



Os diagramas de força são simples e não vamos fazê-los aqui.

No balde o peso puxa para baixo e a tensão T transmitida pela corda puxa para cima. Então:

$$m\, g - T = m\, a$$

No cilindro só há uma força que produz torque ao longo de z, a tensão tangencial transmitida pela corda. Então: $T\, R = I\, \alpha$.

a) Concluindo, a tensão na corda possui módulo:

$$T\, R = I\, \alpha = I \frac{a}{R} = \frac{I}{R}\left(g - \frac{T}{m}\right) \Rightarrow T = \frac{I/R^2}{1 + I/m\, R^2}\, g$$

Para um cilindro maciço (tabela 9.2): $I = \frac{1}{2}\, M\, R^2$. Concluindo:

$$T = \frac{M/2}{1 + M/2m}\ \ g = \frac{M\, m}{M + 2m}\ \ g \cong 4{,}29\, m\, g$$

b) Aplicando a conservação da energia mecânica do sistema balde+cilindro (sem atrito cinético):

$$E(A) = E(B) \Rightarrow 0 + 0 + m\, g\, H = M\frac{V^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} + 0$$

Portanto, usando o vínculo entre os movimentos:

$$m\, g\, H = M\frac{V^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} = M\frac{V^2}{2} + I\frac{(V/R)^2}{2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2\, m\, g\, H}{M + I/R^2}}$$

c) Considerando o MRUV do balde: $V(t) = V_0 + a\, t$. Considerando $V_0 = 0$ (parte do repouso) e $V(t_1) = V$, segue que o tempo t_1 de queda foi:

$$t_1 = \frac{V}{a} = \frac{V}{g - T/m}$$

Que pode ser obtido do que já calculamos acima.

d) O cilindro apenas gira, não translada. Segue que a resultante das forças no cilindro é nula. Portanto, a força de módulo F vertical para cima atuando no eixo do cilindro deve ser tal que:

$$F - M\,g - T = 0$$

EP10.21 A energia cinética de um corpo que rola sem deslizar é:

$$K = M\frac{V^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} = K_{TRANS} + K_{ROT}$$

Nesse movimento vale o vínculo translação/rotação: $V = \omega\, R$. Portanto:

$$K = M\frac{V^2}{2} + I\frac{(V/R)^2}{2} = \left[M + \frac{I}{R^2}\right]\frac{V^2}{2}$$

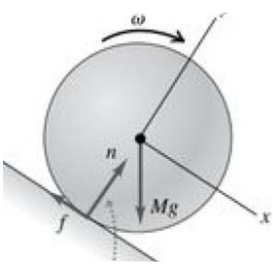
A fração K_{ROT}/K é:

$$\frac{K_{ROT}}{K} = \frac{I/R^2}{M + \frac{I}{R^2}} = \frac{1}{1 + M\,R^2/I}$$

Olhando a tabela 9.2:

a) cilindro maciço	$I = M\,R^2/2$	$\frac{K_{ROT}}{K} = 1/3$
b) esfera maciça	$I = 2\,M\,R^2/5$	$\frac{K_{ROT}}{K} = \frac{2}{7}$
c) esfera oca (casca)	$I = 2\,M\,R^2/3$	$\frac{K_{ROT}}{K} = \frac{2}{5}$
d) cilindro oco (raios R e $R/2$)	$I = M\,[R^2 + (R/2)^2]/2 = 5\,M\,R^2/8$	$\frac{K_{ROT}}{K} = \frac{5}{13}$

10.23 Para que não haja deslizamento da bola deve atuar nela o atrito estático. A Figura ao lado mostra a bola rolando para baixo de um plano inclinado de θ. A força de atrito estático, que impede que a bola deslize para baixo, é a representada pela letra f (o módulo dessa força).



A ausência de deslizamento da bola é caracterizada exatamente pela validade dos vínculos entre os dois movimentos translação/rotação: $V = \omega\, R$ e $a = \alpha\, R$. Havendo qualquer deslizamento da bola, esses vínculos deixam de valer.

Analisando as forças na bola, obtemos:

$$M\ g\ \text{sen}(\theta) - f = M\ a$$

$$f\ R = I\ \alpha$$

Usando o vínculo $a = \alpha\ R$ obtemos o módulo da força de atrito na bola, sem deslizamentos:

$$f = M\ g\ \text{sen}(\theta) - M\ a = M\ g\ \text{sen}(\theta) - M\alpha R = M\ g\ \text{sen}(\theta) - \frac{M\ R^2}{I} f \Rightarrow f = \frac{M\ g\ \text{sen}(\theta)}{1 + M\ R^2/I}$$

Supondo agora que a bola esteja na iminência de deslizar, ou seja, que f tenha atingido seu valor máximo possível: $f_{MAX} = \mu_E\ \eta = \mu_E\ M\ g\cos(\theta)$, o coeficiente μ_E mínimo compatível com essa ideia seria tal que:

$$f = \frac{M\ g\ \text{sen}(\theta)}{1 + M\ R^2/I} = f_{MAX} = \mu_E\ M\ g\cos(\theta) \Rightarrow \mu_E = \frac{tan(\theta)}{1 + M\ R^2/I}$$

Um μ_E menor que esse valor não permitiria que a força de atrito estático tivesse o valor f necessário para produzir o vínculo $a = \alpha\ R$.

Para uma bola maciça (tabela 9.2):

$$\mu_E = \frac{tan(\theta)}{1 + 5/2} = \frac{2}{7}\ tan(\theta)$$

Para uma bola oca (tabela 9.2):

$$\mu_E = \frac{tan(\theta)}{1 + 3/2} = \frac{2}{5}\ tan(\theta)$$

Como $2/5 > 2/7$, segue que o atrito mínimo que impede o deslizamento da bola maciça não impede o deslizamento da bola oca. A bola oca tem mais facilidade de deslizar e precisa de mais atrito estático para impedir que isso aconteça.

EP10.38 Sejam R o raio e M a massa da casca esférica. Seu momento de inércia em relação a um eixo (z) que passa pelo centro de massa é (tabela 9.2): $I = 2/3\ MR^2$.

A posição angular da casca varia de acordo com: $\theta(t) = A\ t^2 + B\ t^4$.

a) A unidade de A é rad/s^2 e a unidade de B é rad/s^4.

b) A velocidade angular da casca ao longo do eixo z é:

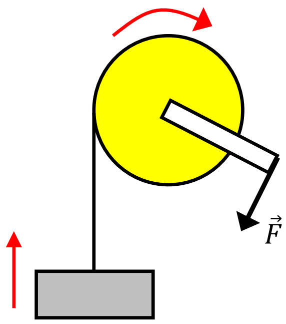
$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t) = \frac{d}{dt}[A\ t^2 + B\ t^4] = 2\ A\ t + 4\ B\ t^3 = 2\ t\ [A + 2B\ t^2]$$

O momento angular da casca ao longo do eixo z é: $L_z = I\ \omega = \frac{2}{3}MR^2 2\ t\ [A + 2B\ t^2] = \frac{4}{3}MR^2\ t\ [A + 2B\ t^2]$

Note que $L_z = L_z(t)$ e que essa mudança em L_z é produzida pelo torque resultante na casca ao longo do eixo z de rotação:

$$\tau_z = \frac{d}{dt}L_z \Rightarrow \tau_z = \frac{d}{dt}\frac{2}{3}MR^2\ [2\ A\ t + 4\ B\ t^3] = \frac{2}{3}MR^2\ [2\ A\ + 12\ B\ t^2]$$

EP10.62



A ideia está ilustrada ao lado, visão de perfil. Enquanto o engradado (massa m) sobe (translada) com velocidade de módulo V e aceleração de módulo a, o cilindro (massa M e momento de inércia I) gira em torno do eixo z (eixo de simetria do cilindro, apontando para dentro da página) com velocidade angular ω e aceleração angular α. A corda (que não desliza) vincula esses dois movimentos: $V = \omega\, R$ e $a = \alpha\, R$. A força $\vec{F}$, aplicada conforme a Figura, produz o torque necessário para essas acelerações. Considere que a manivela tem comprimento l.

Os diagramas de força são simples e não vamos fazê-los aqui.

Queremos saber o valor de F para produzir uma aceleração a do engradado.

No engradado o peso puxa para baixo e a tensão T transmitida pela corda puxa para cima. Então:

$$T - m\, g = m\, a$$

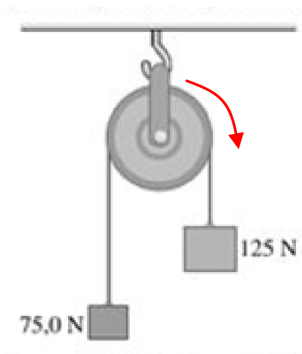
No cilindro há duas forças que produzem torque ao longo de z, a tensão tangencial transmitida pela corda e a força na manivela. Considerando o eixo z para dentro da página, de acordo com a rotação indicada na Figura, obtemos o torque resultante ao longo de z:

$$\tau_z = F\, l - T\, R = I\, \alpha$$

Concluindo, eliminando a tensão na corda e usando o vínculo $a = \alpha\, R$:

$$F\, l - T\, R = I\, \alpha \Rightarrow F\, l - (mg + ma)\, R = I\frac{a}{R} \Rightarrow F = mg\frac{R}{l} + \left(m\frac{R}{l} + \frac{I}{R\, l}\right)\, a$$

Quanto maior o braço l da manivela, menos força precisamos aplicar para obter uma dada aceleração a.



EP10.67 É comum vermos aqui estudantes que consideram que a tensão na corda é igual à soma dos pesos pendurados, como se tudo estivesse estático, e que o teto devesse, portanto, apenas equilibrar o peso total do conjunto. Mas, a ideia é que os pesos estão se movendo e que a tensão na corda não tem que equilibrar os pesos, posto que tudo está acelerado.

Considere os pesos P_1 (75 N), que sobe, e P_2 (125 N), que desce. Há um erro no enunciado, a polia possui peso P_P (50 N) e raio R. Como já dissemos, não é verdade que a força do teto na polia é $P_1 + P_2 + P_P$. Isso seria verdade se tudo estivesse estático (1ª lei de Newton). Não é o caso. Precisamos calcular as tensões na corda. As massas são conhecidas, assim como o momento de inércia I da polia.

Os diagramas de força são simples e não vamos fazê-los aqui.

No peso P_1 (75 N), que sobe:

$$T_1 - P_1 = m_1\, a_1$$

No peso P_2 (125 N), que desce:

$$P_2 - T_2 = m_2\, a_2$$

T_1 é o módulo da tensão no lado esquerdo da corda e T_2 é a tensão no lado direito. Essa não é uma corda livre e a tensão não tem que ser, e não é, a mesma ao longo de todo seu comprimento. A corda vincula os movimentos dos pesos, de tal forma que $a_1 = a_2 = a$. Note que $T_2 - T_1 = P_2 - P_1 - (m_1 + m_2)a.$

Na polia há duas forças que produzem torque ao longo de z, as tensões tangenciais transmitidas pela corda. Considerando o eixo z para dentro da página, de acordo com a rotação indicada na Figura, obtemos o torque resultante ao longo de z (sinais definidos pela regra da mão direita):

$$\tau_z = T_2 R - T_1\, R = I\, \alpha$$

A corda produz também o vínculo $a = \alpha\, R$. Precisamos determinar T_1 e T_2.

$$T_2 R - T_1\, R = I\, \alpha = I\frac{a}{R} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{I}{R^2}\, a$$

$$T_2 - T_1 = \frac{I}{R^2}\, a = P_2 - P_1 - (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{P_2 - P_1}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2}$$

Portanto:

$$T_1 = P_1 + m_1\, a = P_1 + \frac{m_1}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2}[P_2 - P_1]$$

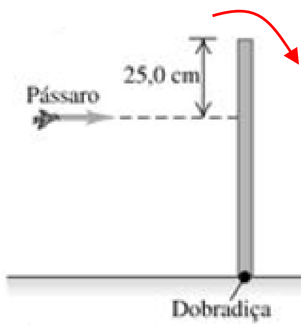
$$T_2 = P_2 - m_2\, a = P_2 - \frac{m_2}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2}[P_2 - P_1]$$

Finalmente, para que a polia esteja em equilíbrio, com centro de massa estático, a resultante das forças nela deve ser nula e o teto deve aplicar, para cima, uma força de módulo:

$$F = P_P + T_1 + T_2$$

Note que se valesse $P_2 = P_1$ teríamos a solução simples de F ser apenas a soma dos pesos.

EP10.91 Considere o pássaro de massa m e velocidade inicial V_0 e a barra de massa M e comprimento L. O pássaro colide com a barra em uma altura h (25 cm) abaixo da extremidade superior. Considere um eixo (z) de rotação que passa pela dobradiça no piso, apontando para dentro da página.



Note que trata-se de uma colisão barra/pássaro e que o sistema barra+pássaro sofre uma força externa importante durante a colisão, a força que fixa a extremidade inferior da barra. Por isso o momento linear desse sistema não se conserva durante essa colisão.

Mas, essa força de fixação não produz torque ao longo de z, posto que ela não possui braço de alavanca. Portanto, o sistema barra+pássaro está livre de torques externos ao longo de z durante a colisão e seu momento angular ao longo de z se conserva.

a) Usando a conservação de L_z obtemos que logo após a colisão a velocidade angular ω da barra ao longo de z será (pássaro parado após a colisão):

$$L_Z^{(antes)} = L_Z^{(depois)} \Rightarrow m\,V_0\,[L-h] = I\,\omega \Rightarrow \omega = \frac{m}{I}\,[L-h]\,V_0$$

Para uma barra que gira em torno de um eixo que passa por uma extremidade (tabela 9.2): $I = \frac{1}{3}\,M\,L^2$. Portanto:

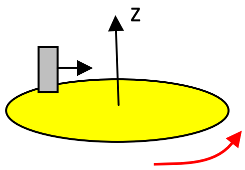
$$\omega = 3\frac{m}{M}\,\frac{L-h}{L^2}\,V_0$$

Quanto mais alto o pássaro bate (menor $h \leq L$), mais rapidamente a barra gira. Se o pássaro batesse na dobradiça ($h = L$), a barra continuaria estática.

b) Após a colisão a barra apenas cai, conservando sua energia mecânica (sem atritos). Antes o CM da barra estava em uma altura $L/2$ e ao final o CM da barra estará na altura nula (deitada no piso). Portanto:

$$E(em\ pé) = E(deitada) \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 + M\,g\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\,\omega_f^2 + 0 \Rightarrow \omega_f = \sqrt{\omega^2 + \frac{M}{I}g\,L}$$

EP10.96 Considere o corredor de massa m com velocidade inicial de módulo V_0 e a mesa de momento de inércia I e raio R com velocidade angular inicial ω_0. A Figura ao lado ilustra a ideia. O eixo z é o eixo de rotação da mesa.



Vamos considerar que enquanto o corredor corre sobre a mesa ele faz forças e torques na mesa, assim como a mesa faz forças e torques no corredor. Esses torques são internos ao sistema corredor+mesa e não alteram o momento angular desse sistema ao longo de z. Da mesma forma, atuam forças externas de fixação no eixo da mesa, forças que não produzem torque ao longo de z, porque não possuem braço de alavanca. Concluindo usaremos aqui a conservação de L_z. O corredor é uma partícula de massa m. O corredor corre com raio de giração R e ao final ele estará com a mesma velocidade angular ω_f da mesa.

$$L_Z^{(antes)} = L_Z^{(depois)} \Rightarrow -m\,V_0 R\ + I\,\omega_0 = [m\,R^2 + I]\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I\,\omega_0 - m\,V_0 R}{m\,R^2 + I}$$

Note os sinais de L_z. De acordo com a regra da mão direita: dedos curvados no sentido de V_0 para o corredor, polegar sobre o eixo z para baixo (L_z negativo no nosso referencial) e dedos curvados no sentido de ω_0 para a mesa, polegar sobre o eixo z para cima (L_z positivo no nosso referencial). Em módulo, para o corredor (uma partícula) vale $L_z = braço \times mV_0 = R\,m\,V_0$ e para o disco vale $L_z = I\,\omega$.

Os dados numéricos vão levar a um $\omega_f < 0$, significando que o momento angular final do sistema, $L_Z^{(depois)}$, estará apontando para baixo e que a rotação final terá sentido oposto ao de ω_0.