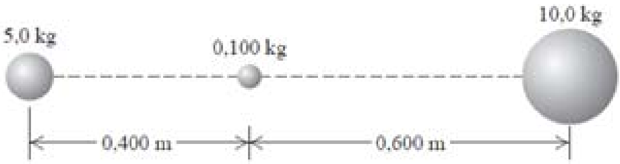
EP12.6



Vamos chamar de M_1 (5 kg) e M_2 (10 kg) as massas das esferas grandes e de m a massa da esfera pequena. As distâncias serão d_1 (0,4 m) e d_2 (0,6 m). Considere um eixo x que passa pela linha tracejada, apontando para a direita.

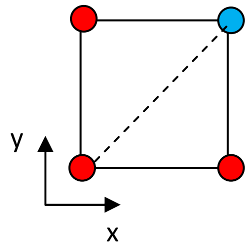
a) Vamos usar aqui o teorema das cascas que diz que uma distribuição esférica e uniforme de massa (seja uma casca fina, uma casca grossa ou uma esfera maciça) faz força nos corpos fora dela como se ela fosse uma partícula localizada no seu próprio centro e concentrando toda a sua massa.

Portanto, a força gravitacional resultante na esfera pequena é:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{G\,M_1 m}{d_1^2}(-\hat{x}) + \frac{G\,M_2 m}{d_2^2}\hat{x} = G\,m\left[\frac{M_2}{d_2^2} - \frac{M_1}{d_1^2}\right]\hat{x}$$

b) Sim, toda interação é mútua e as esferas se atraem mutuamente pela ação da gravidade. A esfera pequena faz uma força $-\vec{F}_1$ na esfera de massa M_1 e uma força $-\vec{F}_2$ na esfera de massa M_2. São dois pares de forças ação/reação, de acordo com a terceira lei de Newton. As esferas de massas M_1 e M_2 também se atraem mutuamente, através da distância $d_1 + d_2$, compondo mais um par ação/reação: $\vec{F}_{1/2}$ e $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$.

EP12.10



Considere massas m em um quadrado de lado L. Na Figura ao lado vamos calcular a força gravitacional resultante na massa em azul. Note o referencial xy para representar os vetores. A força é (a massa azul é atraída por cada uma das outras três):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{G\,m\,m}{L^2}(-\hat{x}) + \frac{G\,m\,m}{L^2}(-\hat{y}) + \frac{G\,m\,m}{\left(\sqrt{2}\,L\right)^2}[\cos(45°)\,(-\hat{y}) + \mathrm{sen}(45°)(-\hat{x})]$$

$$\vec{F} = \frac{G\,m^2}{L^2}\left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)(-\hat{x}) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)(-\hat{y})\right]$$

Note que, por simetria, a força $\vec{F}$ está ao longo da diagonal do quadrado que passa pela massa azul.

EP12.17

a) A aceleração da gravidade na superfície da Terra (uma esfera maciça uniforme de massa M_T e raio R_T) é:

$$g_T = G\ \frac{M_T}{R_T^2} \cong 9{,}8\ m/s^2$$

Portanto, aceleração da gravidade na superfície de Titânia (uma esfera maciça uniforme de massa M_{TI} e raio R_{TI}) é:

$$g_{TI} = G\ \frac{M_{TI}}{R_{TI}^2} = G\ \frac{M_T/1.700}{\left(\frac{R_T}{8}\right)^2} = \frac{64}{1.700}\ g_T \cong 0{,}038\ g_T$$

b) A densidade de massa média da Terra é (V é o volume de uma esfera maciça):

$$\rho_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{3}{4\,\pi}\ \frac{M_T}{R_T^3} \cong 5{,}51\ g/cm^3$$

Portanto, densidade de massa média de Titânia é:

$$\rho_{TI} = \frac{M_{TI}}{V_{TI}} = \frac{3}{4\,\pi}\ \frac{M_T/1.700}{\left(\frac{R_T}{8}\right)^3} = \frac{512}{1.700}\rho_T \cong 0{,}30\ \rho_T$$

EP12.20

Uma pessoa que pesa $P = 675\ N$ aqui na superfície da Terra possui massa $m = P/g_T$, com $g_T \cong 9{,}8\ m/s^2$. Se essa pessoa vai para a superfície de outro planeta ou estrela (uma esfera uniforme de massa M e raio R), seu peso lá será $P' = m\ g$, sendo g a aceleração da gravidade na superfície desse planeta ou estrela. De acordo com a lei de Newton da gravitação (sendo g a aceleração causada pelo peso):

$$g = G\ \frac{M}{R^2}$$

Para uma estrela com a massa do Sol, M_S, e raio R vale:

$$g = G\ \frac{M_S}{R^2} \Rightarrow P' = m\ g = G\ \frac{m\ M_S}{R^2} = G\ \frac{P\ M_S}{g_T\ R^2} = G\ \frac{P\ M_S}{\left(G\ \frac{M_T}{R_T^2}\right)\ R^2} = \left(\frac{R_T}{R}\right)^2 \left(\frac{M_S}{M_T}\right)\ P$$

Com certeza seria um peso incrível ($\cong 10^{14}\ N$). Um corpo astronômico com massa M gigantesca e raio R pequeno se aproxima do que chamamos de um “buraco negro”, possuidor de uma gravidade superficial tão intensa que não deixa escapar nem a luz. Se você acender uma lanterna na superfície de um buraco negro, vai ver o facho de luz cair no chão, como uma pedra.

EP12.27 Basta considerar a relação raio/velocidade válida para um MCU, de acordo com a segunda lei de Newton, tendo em vista que a força resultante (centrípeta) no satélite é a atração gravitacional da Terra:

$$F_{cen} = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow G\ \frac{m\ M_T}{R^2} = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{G\ M_T}{R}}$$

A velocidade linear orbital V (com que o círculo de raio R é percorrido) independe da massa do satélite. Qualquer satélite nesse raio R deve ser posto em órbita com essa velocidade V tangencial.

12.34

Vamos considerar que conhecemos o período T_C e o raio orbital R_C de Caronte. Queremos determinar os períodos T_1 (com $R_1 = 48.000\ km$) e T_2 (com $R_2 = 64.000\ km$) dos outros satélites de Plutão.

Para isso vamos usar a lei dos períodos de Kepler que diz que para todos esses satélites que orbitam <u>um mesmo corpo</u> vale:

$$T^2 = k\ R^3$$

sendo k uma constante, cujo valor depende apenas do corpo que está sendo orbitado, Plutão nesse caso.

Portanto:

$$T_C^2 = k\ R_C^3 \qquad\qquad T_1^2 = k\ R_1^3 \qquad\qquad T_2^2 = k\ R_2^3$$

Concluindo:

$$\frac{T_1^2}{T_C^2} = \frac{k\ R_1^3}{k\ R_C^3} \Rightarrow T_1 = \left(\frac{R_1}{R_C}\right)^{3/2} T_C$$

$$\frac{T_2^2}{T_C^2} = \frac{k\ R_2^3}{k\ R_C^3} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{R_2}{R_C}\right)^{3/2} T_C$$

Não precisamos conhecer a massa de Plutão (que está contida na constante k), posto que k desapareceu.

EP12.39 Vamos chamar de M e R a massa e o raio da esfera sólida, m a massa pontual e d a distância da massa pontual ao centro da esfera sólida (o raio da massa pontual).

Vamos usar aqui o teorema das cascas que diz que uma distribuição esférica e uniforme de massa (seja uma casca fina, uma casca grossa ou uma esfera maciça) faz força nos corpos fora dela como se ela fosse uma partícula localizada no seu próprio centro e concentrando toda a sua massa. Esse mesmo teorema diz que uma casca esférica e uniforme de massa não exerce força gravitacional em uma partícula que está dentro dela. Portanto, juntando essas duas coisas, concluímos que para uma esfera maciça, somente a massa contida na região esférica com raio menor que d exerce força na partícula dentro da esfera em um raio $d < R$.

i) Esse é o caso $d > R$, a partícula está fora da esfera. Portanto, a força gravitacional na partícula aponta para o centro da esfera e tem módulo (tudo funciona como duas partículas que se atraem):

$$F = \frac{G\,M\,m}{d^2}$$

ii) Agora a partícula está dentro da esfera, com $d = R/2$. Portanto, somente a massa da esfera maciça contida na região com raio $R/2$ é capaz de exercer força na partícula. As cascas com raios $\frac{R}{2} < r < R$ não exercem força na partícula que está interior a elas. Concluindo, a força gravitacional na partícula aponta para o centro da esfera e tem módulo:

$$F' = \frac{G\,M'\,m}{d^2}$$

sendo M' a massa dessa esfera maciça central de raio $R/2$. Se ρ é a densidade de massa da esfera maciça, segue que:

$$M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow M' = \rho\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{M}{8}$$

Concluindo:

$$F' = \frac{G\,M'm}{d^2} = \frac{1}{8}\frac{G\,M\,m}{(R/2)^2} = \frac{1}{2}\frac{G\,M\,m}{R^2}$$

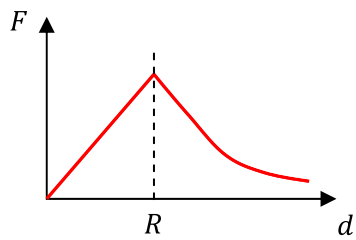
b) Em geral, para uma partícula localizada em um raio $r < R$ qualquer vale:

$$M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow M' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = M\,\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

A massa M' dessa esfera maciça central que atrai a partícula cresce com o raio r da partícula, até que $M' = M$ para $r = R$. Portanto:

$$F' = \frac{G\,M'm}{r^2} = \frac{G\,M\,m}{R^3}\,r$$

A força atrativa produzida pela esfera maciça é proporcional ao raio $r < R$ onde está a partícula.



O gráfico ao lado resume os resultados obtidos aqui, basicamente o que diz o teorema das cascas. Se a partícula está dentro da esfera, $d < R$, a força atrativa da esfera na partícula vai crescendo linearmente à medida que ela vai se aproximando da superfície da esfera (porque a massa M' capaz de atrair vai aumentando). Depois que a partícula sai da esfera ($d > R$), a força simplesmente decai com o quadrado da distância d, como se fossem duas partículas (de massas M e m) se atraindo.

EP12.41

A energia potencial gravitacional de duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância r é (com a referência $U_g(\infty) = 0$):

$$U_g = -G\,\frac{m_1 m_2}{r}$$

a) Tudo que temos que fazer é considerar o princípio da superposição e a ideia do cálculo integral, encarando o anel como uma colagem de infinitos fragmentos infinitesimais de massas dM, totalizando uma massa M. A energia potencial gravitacional da partícula de massa m e de um fragmento de massa dM do anel, separados por uma distância r é:

$$dU_g = -G\,\frac{m\,dM}{r}$$

Note na Figura que vale $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ para qualquer fragmento do anel. Integrando sobre o anel obtemos:

$$U_g = \int_{ANEL} dU_g = \int_{ANEL} -G\,\frac{m\,dM}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{-G\,m}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int_{ANEL} dM = -\frac{G\,m\,M}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

b) Para $x \gg a$, ou seja, se ao anel for muito pequeno e/ou ele for visto de muito longe, segue que, usando a expansão binomial em potências de $\varepsilon = a/x \cong 0$ truncada $((1+\varepsilon)^n = 1 + n\,\varepsilon + \cdots)$ e desprezando potências ε^2 em diante:

$$U_g = -\frac{G\,m\,M}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{G\,m\,M}{x}\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)^{-1/2} = -\frac{G\,m\,M}{x}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}\right) = -\frac{G\,m\,M}{x}$$

Note que deu no mesmo se tivéssemos apenas desprezado o a dentro da raiz. Mas, preferimos fazer a expansão e manter apenas o primeiro termo para ilustrar esse método mais geral. Enfim, como não poderia deixar de ser, obtivemos a energia potencial de duas partículas de massas m e M separadas por x.

c) A força que ao anel faz na partícula ao longo do eixo x (que aponta para a direita) é:

$$F_x = -\frac{dU_g}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[-\frac{G\,m\,M}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right] = -\left[--\frac{G\,m\,M\,x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\right] = -G\,m\,M\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

d) Novamente, para $x \gg a$, ou seja, se ao anel for muito pequeno e/ou ele for visto de muito longe, segue que, usando a expansão binomial em potências de $\varepsilon = a/x \cong 0$ truncada:

$$F_x = -G\,m\,M\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -G\,m\,M\frac{x}{x^3}\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)^{-3/2} = -\frac{G\,m\,M}{x^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{x^2}\right) = -\frac{G\,m\,M}{x^2}$$

Note que deu no mesmo se tivéssemos apenas desprezado o a dentro da raiz. Enfim, como não poderia deixar de ser, obtivemos a força de atração gravitacional entre duas partículas de massas m e M separadas por x. O sinal – diz que a força na partícula aponta ao longo de $-x$ (é atrativa).

e) Para $x = 0$, partícula no centro do anel, obtemos:

$$U_g(0) = -\frac{G\,m\,M}{\sqrt{a^2 + x^2}} \to -\frac{G\,m\,M}{a}$$

que é compatível com o fato de que as massas no anel estão eqüidistantes de a da partícula. A energia $|U_g(0)|$ é o que deveríamos gastar para arrancar e afastar essa partícula do centro do anel, livrando-a da influência gravitacional do anel (no ∞). Obtemos também:

$$F_x(0) = -G\, m\, M \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \to 0$$

Que é compatível com o fato de que a partícula é puxada igualmente em todas as direções no plano do anel e que a resultante das forças na partícula é, portanto, nula (graças à simetria do anel).

EP12.55

Para que um satélite seja geossíncrono ele deve girar juntamente (em sincronia) com a Terra. Isso requer duas coisas: i) que ele tenha o mesmo eixo (pelos pólos) de rotação da Terra e ii) que ele tenha a mesma velocidade angular ω de rotação da Terra (uma rotação por dia). Se o satélite tem que ter o mesmo eixo de rotação da Terra, então ele deve estar com sua órbita circular no plano equatorial, pois só assim a força da gravidade nele será centrípeta e a órbita estável (ver a questão Q12.16).

a) Basta considerar a relação raio/velocidade válida para um MCU, de acordo com a segunda lei de Newton, tendo em vista que a força resultante (centrípeta) no satélite é a atração gravitacional da Terra:

$$F_{cen} = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow G\,\frac{m\,M_T}{R^2} = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R}}$$

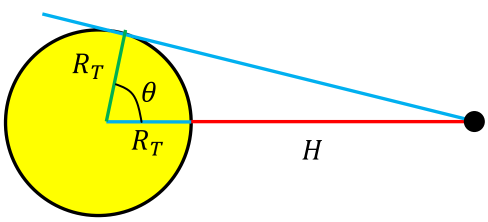
Agora lembramos que a velocidade linear orbital V é tal que $V = 2\pi R/T$, sendo T o período orbital. Portanto:

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R}} \Rightarrow R^3 = \frac{G\,M_T}{4\pi^2}\,T^2$$

Essa é a lei dos períodos de Kepler, para um corpo que orbita a Terra. Para encontrar a altura H do satélite em relação à superfície da Terra, basta subtrair o raio da Terra: $H = R - R_T$. O valor numérico é $H \cong 3{,}6 \times 10^7\ m$. Lembrando que $R_T \cong 6{,}4 \times 10^6\ m$.

b) A Figura ao lado ilustra um "raio de radiação" (em azul) emitido pelo satélite geossíncrono e que tangencia a superfície da Terra próximo ao pólo norte. Pessoas que moram acima dessa latitude não poderiam detectar esses raios. A latitude θ é tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{R_T}{R_T + H} \Rightarrow \theta \cong 81°$$



EP12.67

Se a altura h fosse pequena em relação a R_T utilizaríamos a conservação da energia mecânica do martelo com $U_g = m\ g\ h$. Mas, não sendo o caso, vamos usar a expressão mais geral de U_g que vem da teoria de Newton:

$$E(A) = E(B) \Rightarrow 0 + \left[-\frac{G\ M_T m}{h + R_T}\right] = \frac{m\,V^2}{2} + \left[-\frac{G\ M_T m}{R_T}\right]$$

Concluindo:

$$V = \sqrt{2\ G\ M_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$$

Não importa a massa do martelo ou do que quer que seja. A velocidade final é a mesma. Essa é uma característica marcante da queda livre.

EP12.76

Utilizaremos a conservação da energia mecânica do satélite, igualando periélio (P) com afélio (A):

$$E(P) = E(A) \Rightarrow \frac{m\,V_P^2}{2} + \left[-\frac{G\ M_S m}{R_P}\right] = \frac{m\,V_A^2}{2} + \left[-\frac{G\ M_S m}{R_A}\right]$$

Note que m é a massa de Marte, mas nosso resultado independe de m, ou seja, essa relação entre as velocidades e raios de afélio e periélio vale para qualquer planeta do sistema solar.

$$\frac{V_P^2}{2} + \left[-\frac{G\ M_S}{R_P}\right] = \frac{V_A^2}{2} + \left[-\frac{G\ M_S}{R_A}\right]$$

EP12.80

Para órbitas elípticas a lei dos períodos de Kepler diz que para todos os corpos que orbitam um determinado planeta ou estrela vale: $T^2 = k\ a^3$ sendo T o período orbital, a o semi-eixo maior da elipse e k uma constante, que depende apenas das propriedades do corpo que é orbitado.

Não precisamos memorizar a expressão de k, bastando lembrar que órbitas circulares são casos particulares de órbitas elípticas em que os semi-eixos são iguais ao raio da órbita: $a = b = R$. Nesse caso mais simples, basta considerar a relação raio/velocidade válida para um MCU, de acordo com a segunda lei de Newton, tendo em vista que a força resultante (centrípeta) no satélite é a atração gravitacional do Sol:

$$F_{cen} = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow G\ \frac{m\ M_S}{R^2} = m\frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{G\ M_S}{R}}$$

Agora lembramos que a velocidade linear orbital V é tal que $V = 2\pi R/T$, sendo T o período orbital. Portanto:

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{G\ M_S}{R}} \Rightarrow R^3 = \frac{G\ M_S}{4\pi^2}\ T^2 \Rightarrow k = \frac{4\pi^2}{G\ M_S}$$

para todos os corpos, planetas, asteróides e cometas que orbitam o Sol. Essa expressão da constante k vale para qualquer órbita elíptica ou circular. A diferença está apenas em $T^2 = k\ a^3$ ou $T^2 = k\ R^3$.

Considerando $T = 30.000$ anos e a massa do Sol, obtemos o valor numérico $a \cong 1{,}4 \times 10^{14}\ m$.

A distância média Sol/Plutão é $R \cong 5{,}9 \times 10^{12}\ m$. Alfa Centauro está a uma distância $d_{AC} \cong 4{,}1 \times 10^{16}\ m$.

Enfim, o cometa se aproxima do Sol e se afasta para além de Plutão, completando uma volta a cada 30.000 anos. O cometa orbita o Sol e se mantém distante da outra estrela mais próxima.