EP2.1 Considere que o foguete parta do repouso ($v_0 = 0$) em $t = 0$ e acelere verticalmente. Assuma um eixo y vertical para cima com origem ($y = 0$) no ponto de lançamento do foguete, ou seja, $y_0 = 0$ (no solo).

No instante $t = t_1$ ($1{,}15\ s$) o foguete atinge a altura $y(t_1) = H_1$ ($63\ m$). No instante $t = t_1 + t_2$ (com $t_2 = 4{,}75\ s$) a altura do foguete já é $y(t_1 + t_2) = H_2$ ($1.000\ m$).

Se $\vec{D}(t_i, t_f) = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)$ é o deslocamento do foguete no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$, a velocidade média nesse mesmo intervalo de tempo é:

$$\vec{v}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{D}(t_i, t_f)}{t_f - t_i} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i}$$

Para um movimento unidimensional, ao longo de y, segue que:

$$\vec{v}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{D}(t_i, t_f)}{t_f - t_i} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{y(t_f) - y(t_i)}{t_f - t_i}\hat{y}$$

a) No intervalo de tempo $[t_i = t_1, t_f = t_1 + t_2]$ obtemos:

$$\vec{r}(t_i) = y(t_1)\hat{y} = H_1\hat{y}$$

$$\vec{r}(t_f) = y(t_1 + t_2)\hat{y} = H_2\hat{y}$$

Portanto:

$$\vec{v}_M(t_1, t_1 + t_2) = \frac{y(t_1 + t_2) - y(t_1)}{t_1 + t_2 - t_1}\hat{y} = \frac{H_2 - H_1}{t_2}\hat{y} \qquad (v_M \cong 196\ m/s)$$

b) No intervalo de tempo total $[t_i = 0, t_f = t_1 + t_2]$ obtemos:

$$\vec{r}(t_i) = y(0)\hat{y} = y_0\hat{y} = \vec{0}$$

$$\vec{r}(t_f) = y(t_1 + t_2)\hat{y} = H_2\hat{y}$$

Portanto:

$$\vec{v}_M(0, t_1 + t_2) = \frac{y(t_1 + t_2) - y_0}{t_1 + t_2 - 0}\hat{y} = \frac{H_2 - 0}{t_1 + t_2}\hat{y} = \frac{H_2}{t_1 + t_2}\hat{y} \qquad (v_M \cong 170\ m/s)$$

EP2.5 Considere o comprimento de arco de círculo L percorrido por cada corredor. Supondo que ambos partam do mesmo ponto em $t = 0$, o corredor A percorre arco de círculo de acordo com ($v_A = 6{,}2\ m/s$):

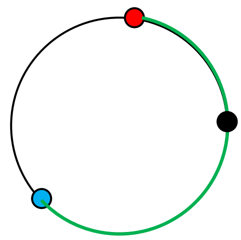
$$L_A(t) = v_A\, t$$

enquanto que o corredor B percorre arco de círculo (no sentido oposto) de acordo com ($v_B = 5{,}5\ m/s$):

$$L_B(t) = v_B\, t$$

Portanto, o comprimento de arco completo que separa os dois corredores é dado pela função:

$$\Delta L(t) = L_A(t) + L_B(t) = (v_A + v_B)\, t$$



A Figura ao lado ilustra a ideia: o corredor A é a bolinha azul e o corredor B é a bolinha vermelha. Os dois corredores partiram do ponto marcado pela bolinha preta. O arco destacado em verde é o arco completo que separa os dois corredores, de comprimento $\Delta L(t)$. A Figura pressupõe $v_A > v_B$ e, por isso, o corredor A percorreu um arco maior no mesmo tempo t.

a) Para determinar o momento t_1 em que eles se cruzam, basta considerar que, nesse instante, o arco completo que separa os dois corredores tem comprimento $\Delta L(t_1) = 2\,\pi\,R$ $(= 200\,m)$, que é o comprimento do círculo todo. Portanto:

$$\Delta L(t_1) = (v_A + v_B)\,t_1 = 2\,\pi\,R \Rightarrow t_1 = \frac{2\,\pi\,R}{v_A + v_B} = \frac{200}{11{,}7} \cong 17{,}1\,s$$

b) Nesse instante, o corredor A vai ter percorrido um arco de comprimento:

$$L_A(t_1) = v_A\,t_1 = \frac{v_A}{v_A + v_B} 2\,\pi\,R \cong 106\,m$$

enquanto que o corredor B vai ter percorrido um arco de comprimento:

$$L_B(t_1) = v_B\,t_1 = \frac{v_B}{v_A + v_B} 2\,\pi\,R \cong 94\,m$$

EP2.6 Agora os corredores correm no mesmo sentido. O mais rápido (A) sai na frente e deixa o mais lento (B) para trás. Em um dado instante (t_2) o corredor A já vai ter dado uma volta completa a mais que B e vai alcançar novamente o corredor B. Concluindo: no instante t_2 o corredor B vai ter percorrido o arco de comprimento $L_B(t_2) = v_B\,t_2$. Enquanto isso, o corredor A já deu uma volta completa a mais, ou seja: $L_A(t_2) = 2\,\pi\,R + v_B\,t_2$. Portanto, a condição que determina t_2 é:

$$L_A(t_2) = 2\,\pi\,R + v_B\,t_2 = v_A t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{2\,\pi\,R}{v_A - v_B} \cong 286\,s$$

Nesse instante, corredor B terá percorrido um arco de comprimento:

$$L_B(t_2) = v_B\,t_2 = \frac{v_B}{v_A - v_B} 2\,\pi\,R \cong 1.571\,m$$

Chegamos aqui à conclusão de que, antes de ser alcançado por A, o corredor B dá 7 voltas completas no círculo ($1.400\,m$) e percorre mais $171\,m$ além do ponto de partida. De fato, note que velocidade de A em relação à B é muito pequena, $v_A - v_B = 0{,}7\,m/s$, e que demora bastante ($286\,s$) para que A consiga dar uma volta a mais que B, alcançando B. Concluindo: no instante t_2 o corredor B já deu 7 voltas completas no círculo e avançou mais $171\,m$ e o corredor A já deu 8 voltas completas e também avançou mais $171\,m$, alcançando B. Nesse instante ambos estarão (juntos) a uma distância de $171\,m$ do ponto de largada (ou $29\,m$, se olharmos a (menor) distância que ainda falta para A e B voltarem ao ponto de partida).

b) Após o instante t_2, o corredor A ultrapassa o corredor B e continua se afastando, até que no instante t_3 o corredor A já vai ter dado mais uma (segunda) volta completa e vai alcançar novamente o corredor B. Aqui a ideia é a mesma que no item (a), mas, para duas voltas completas a mais de A devemos considerar que $L_A(t_3) = 2(2\,\pi\,R) + v_B\,t_3$, ou seja:

$$L_A(t_3) = 4\,\pi\,R + v_B\,t_3 = v_A t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{4\,\pi\,R}{v_A - v_B} = 2\,t_2$$

O corredor A demorou um tempo t_2 para ultrapassar B pela primeira vez e vai demorar mais t_2 para alcançar B pela segunda vez, e assim por diante.

Nesse instante, o corredor B terá percorrido um arco de comprimento:

$$L_B(t_3) = v_B\,t_3 = \frac{v_B}{v_A - v_B} 4\,\pi\,R = 2\,L_B(t_2) \cong 3.143\,m$$

o corredor B dá 15 voltas completas no círculo (3.000 m) e percorre mais 143 m além do ponto de partida. Nesse instante t_3 ambos estarão (juntos) a uma distância de 143 m do ponto de largada (ou 57 m, se olharmos a (menor) distância que ainda falta para A e B voltarem ao ponto de partida).

EP2.9 Considere um eixo x horizontal com origem ($x = 0$) no semáforo ($x_0 = 0$) e que o carro parte do repouso ($v_0 = 0$) no instante $t = 0$. O carro segue ao longo de x com a seguinte equação horária da posição:

$$x(t) = b\,t^2 - c\,t^3$$

a) Se $\vec{D}(t_i, t_f) = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)$ é o deslocamento do carro no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$, a velocidade média nesse mesmo intervalo de tempo é:

$$\vec{v}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{D}(t_i, t_f)}{t_f - t_i} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i}$$

Para um movimento unidimensional, ao longo de x, segue que:

$$\vec{v}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{D}(t_i, t_f)}{t_f - t_i} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i}\hat{x}$$

a) No intervalo de tempo $[t_i = 0, t_f = t_1]$ obtemos:

$$\vec{r}(0) = x(0)\hat{x} = (b\,0^2 - c\,0^3)\hat{x} = \vec{0}$$

$$\vec{r}(t_1) = x(t_1)\hat{x} = (b\,t_1^2 - c\,t_1^3)\hat{x} = t_1^2(b - c\,t_1)\hat{x}$$

Portanto:

$$\vec{v}_M(0, t_1) = \frac{x(t_1) - x(0)}{t_1 - 0}\hat{x} = \frac{t_1^2(b - c\,t_1) - 0}{t_1}\hat{x} = t_1(b - c\,t_1)\,\hat{x}$$

Levando em conta os dados numéricos com $t_1 = 10\,s$, obtemos (em m/s): $\vec{v}_M(0, t_1) = 12\,\hat{x}$.

b) a velocidade instantânea (ou simplesmente velocidade) do carro é:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t)\hat{x}] = \frac{dx(t)}{dt}\hat{x} = \frac{d}{dt}[b\,t^2 - c\,t^3]\hat{x} = [2\,b\,t - 3\,c\,t^2]\hat{x} = t\,(2b - 3c\,t)\,\hat{x}$$

Levando em conta os dados numéricos obtemos (em m/s):

$\vec{v}(t=0) = 0\,(2b - 3c\,0)\,\hat{x} = \vec{0}$
O carro parte do repouso, como está dito.

$\vec{v}(t=5) = 5\,(2b - 3c\,5)\,\hat{x} = 15\,\hat{x}$

$\vec{v}(t=10) = 10\,(2b - 3c\,10)\,\hat{x} = 12\,\hat{x}$

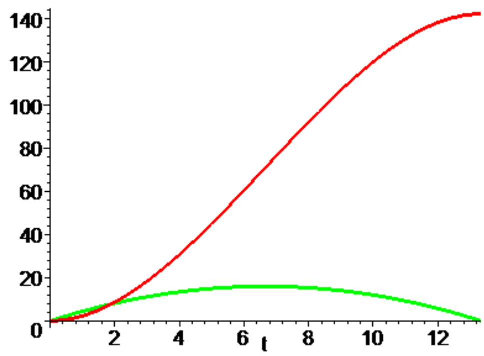
Note que a velocidade do carro está diminuindo após os 5 s.

c) O carro volta a parar no instante $t_P > 0$ em que sua velocidade se anula (instantaneamente≠ repouso):

$$\vec{v}(t_P) = \vec{0} \Rightarrow t_P\,(2b - 3c\,t_P)\,\hat{x} = \vec{0} \Rightarrow t_P\,(2b - 3c\,t_P) = 0 \Rightarrow 2b - 3c\,t_P = 0 \Rightarrow t_P = \frac{2b}{3c}$$

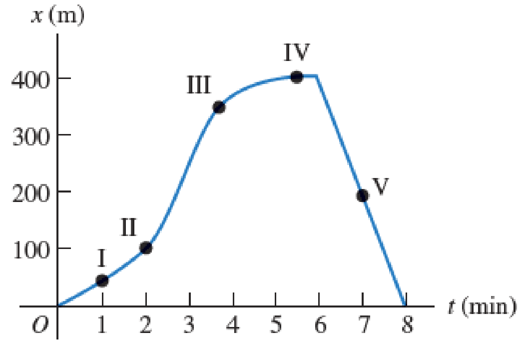
Levando em conta os dados numéricos obtemos (em s): $t_P = 40/3 \cong 13{,}3$.

O gráfico ao lado mostra as curvas de $x(t)$ (vermelho) e $v(t)$ (verde) em função do tempo t. Vemos que o carro parte da origem em $t = 0$ com $v(0) = v_0 = 0$. Na curva verde vemos que ele acelera, atinge uma velocidade máxima e depois começa a frear, até parar no instante t_P. Enquanto faz isso ele vai se afastando da origem, primeiro lentamente (curva vermelha "deitada" perto da origem), depois rapidamente (curva vermelha mais "em pé") e de novo lentamente (curva vermelha "deitando" perto de t_P) antes de parar.



2.10

Considere um eixo x horizontal com origem ($x = 0$) na casa da professora ($x_0 = 0$) e que esta parte no instante $t = 0$. O gráfico ao lado mostra a curva $x(t) \times t$ para essa professora. Ela sai de casa ($x = 0$), se afasta cerca de $400\ m$ e depois retorna para casa, chegando no instante $t = 8\ min$.



A velocidade instantânea (ou simplesmente velocidade) da professora é:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t)\hat{x}] = \frac{dx(t)}{dt}\hat{x} = v(t)\hat{x}$$

Portanto, a velocidade $v(t)$ ao longo de x é dada pela derivada $dx(t)/dt$, que corresponde à inclinação da curva $x(t) \times t$ mostrada no gráfico acima.

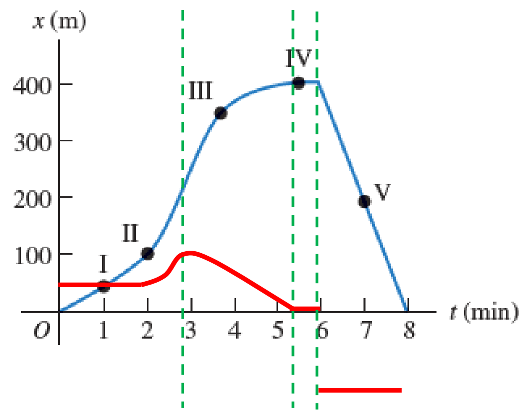
a) A velocidade da professora é zero, $v(t) = 0$, nos instantes em que a curva $x(t) \times t$ é horizontal. Isso ocorre apenas no ponto IV da curva. Deve ser o instante t_{IV} em que a professora parou e resolveu voltar para casa.

b) A velocidade da professora é constante positiva, $v(t) = v_1 > 0$, nos instantes em que a curva $x(t) \times t$ é uma reta crescente (pois a derivada de uma reta ascendente é uma constante positiva). Isso ocorre apenas no ponto I da curva. Nesse instante a professora estava se afastando de casa com uma velocidade que se mantinha constante dentro de um intervalo de tempo centrado no instante t_I.

c) A velocidade da professora é constante negativa, $v(t) = v_2 < 0$, nos instantes em que a curva $x(t) \times t$ é uma reta decrescente (pois a derivada de uma reta descendente é uma constante negativa). Isso ocorre apenas no ponto V da curva. Nesse instante a professora estava se aproximando de casa com uma velocidade que se mantinha constante dentro de um intervalo de tempo centrado no instante t_V.

d) A velocidade da professora é crescente em módulo, $v(t)$ aumenta com t, nos instantes em que a curva $x(t) \times t$ é uma curva que vai se tornando mais "em pé", mais íngreme (pois a derivada aumenta, em módulo). Isso ocorre apenas no ponto II da curva. Nesse instante a professora estava se afastando de casa ($v(t) > 0$) com velocidade aumentando, talvez porque já houvesse um prenúncio de chuva.

e) A velocidade da professora é decrescente em módulo, $v(t)$ cai com t, nos instantes em que a curva $x(t) \times t$ é uma curva que vai se tornando mais "deitada", mais horizontal (pois a derivada diminui, em módulo). Isso ocorre apenas no ponto III da curva. Nesse instante a professora estava se afastando de casa ($v(t) > 0$) com velocidade diminuindo, talvez porque ela já estava pensando em parar e voltar.



No gráfico ao lado a curva vermelha é um esboço do comportamento de $v(t) \times t$. Note que a professora já parte de casa (em $t = 0$) com uma certa velocidade (v_1) que ela mantém por alguns instantes. Depois ela resolve acelerar (II), mas em seguida resolve frear (III) até parar no instante t_{IV}, ficar parada por alguns instantes e sair correndo com velocidade constante de volta para casa. Trata-se de um esboço porque na curva azul os comportamentos não são tão bem definidos como poderíamos desejar. Note que usamos aqui os termos "acelerar" e "frear" como estes são usados na nossa linguagem cotidiana. Os dois movimentos são movimentos com aceleração, ou seja, acelerados, mas, usamos usualmente o termo "acelerar" quando queremos dizer que a velocidade aumenta (em módulo) e usamos o termo "frear" quando queremos dizer que a velocidade diminui (em módulo). No movimento dito "acelerado", a aceleração é paralela à velocidade enquanto que no movimento dito "freado" a aceleração é oposta à velocidade. Mas, não podemos esquecer que, de fato, os dois movimentos possuem aceleração e são, portanto, movimentos acelerados.

EP2.12 Considere um eixo x horizontal com origem ($x = 0$) no ponto de partida do automóvel ($x_0 = 0$) e que este parte no instante $t = 0$, do repouso ($v_0 = 0$), conforme podemos ver nas medidas acima.

a) A aceleração média do automóvel no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ é:

$$\vec{a}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i}$$

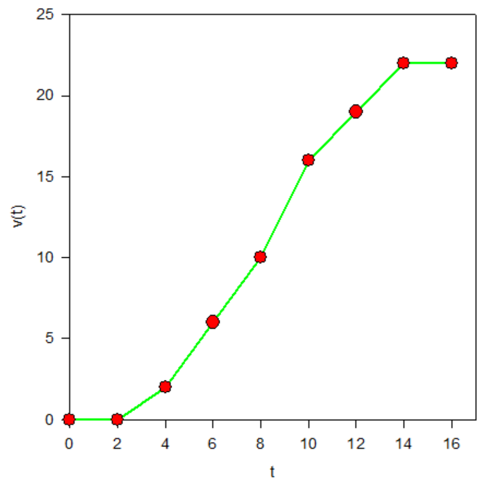
Para um movimento unidimensional, ao longo de x, segue que:

$$\vec{a}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{v(t_f) - v(t_i)}{t_f - t_i}\hat{x} = a_M(t_i, t_f)\hat{x}$$

A tabela abaixo mostra os valores numéricos de $a_M(t_i, t_f)$ (em m/s^2) para os intervalos de tempo $[t_i, t_f = t_i + 2]$, conforme os dados das medidas. A aceleração média não é constante, ela cresce e depois diminui.

0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{6}{2} = 3$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{0}{2} = 0$

b) A Figura ao lado mostra a curva (obtida com o programa Sigma Plot) de $v(t) \times t$ que se ajusta aos pontos (em vermelho) fornecidos pelas medidas na tabela acima. A inclinação $\Delta v/\Delta t$ de cada segmento de reta que une dois pontos sucessivos t_i e $t_i + 2$ é exatamente o valor da aceleração média $a_M(t_i, t_i + 2)$ contida na tabela acima.



A aceleração instantânea (ou simplesmente aceleração) do automóvel é:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[v(t)\hat{x}] = \frac{dv(t)}{dt}\hat{x} = a(t)\hat{x}$$

Portanto, a aceleração $a(t)$ ao longo de x é dada pela derivada $dv(t)/dt$, que corresponde à inclinação da curva (verde) $v(t) \times t$ mostrada no gráfico acima.

Para $t = 9\ s$, que está no intervalo de tempo $[8{,}10]$, uma estimativa para a aceleração instantânea é a inclinação da reta $v(t) \times t$ nesse intervalo de tempo, ou seja: $a(t = 9) \cong a_M(8{,}10) = 3\ m/s^2$.

Para $t = 13\ s$, que está no intervalo de tempo $[12{,}14]$, uma estimativa para a aceleração instantânea é a inclinação da reta $v(t) \times t$ nesse intervalo de tempo, ou seja: $a(t = 13) \cong a_M(12{,}14) = 1{,}5\ m/s^2$.

Para $t = 15\ s$, que está no intervalo de tempo $[14{,}16]$, uma estimativa para a aceleração instantânea é a inclinação da reta $v(t) \times t$ nesse intervalo de tempo, ou seja: $a(t = 15) \cong a_M(14{,}16) = 0$.

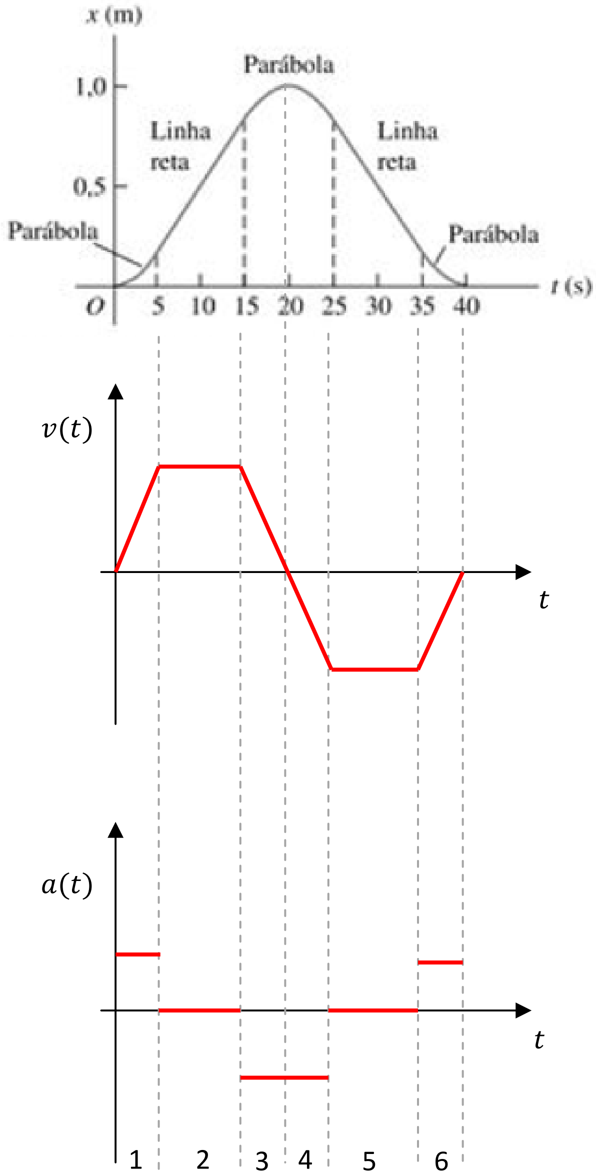
Nos cálculos acima nos referimos a uma “estimativa” para $a(t)$ porque imaginamos que, se mais medidas fossem feitas, poderíamos desenhar uma curva $v(t) \times t$ mais suave (menos “quadriculada”) e que representaria melhor o movimento real desse automóvel: o crescimento contínuo e suave de sua velocidade.

EP2.19 Considere um eixo x horizontal com origem ($x = 0$) no ponto de partida da aranha ($x_0 = 0$) e que esta parte no instante $t = 0$. O gráfico acima é o gráfico da função horária $x(t)$ versus o tempo t (note que nesse gráfico vale $x_0 = x(0) = 0$). A aranha se afasta da origem e depois retorna. Esse gráfico não representa a trajetória da aranha, que seria apenas uma reta paralela ao eixo x. Trata-se de um gráfico da equação horária $x(t)$ versus o tempo t.

a) Para esboçar gráficos da velocidade $v(t) = dx(t)/dt \times t$ e da aceleração $a(t) = dv(t)/dt \times t$ ao longo de x vamos usar a ideia de que a derivada de uma reta (função linear) é uma constante e de que a derivada de uma parábola (função quadrática) é uma reta. Mais ainda, a derivada de uma reta crescente é uma constante positiva e a derivada de uma reta decrescente é uma constante negativa. Finalmente, a derivada de uma parábola com a “boca para cima” é uma reta crescente e a derivada de uma parábola com a “boca para baixo” é uma reta decrescente. Tudo isso pode ser expresso mais precisamente conforme a tabela abaixo:

reta crescente	$x(t) = a\,t + b$	com $a > 0$	$\dfrac{dx(t)}{dt} = a > 0$	constante positiva
reta decrescente	$x(t) = a\,t + b$	com $a < 0$	$\dfrac{dx(t)}{dt} = a < 0$	constante negativa
parábola com a “boca para cima”	$x(t) = a\,t^2 + b\,t + c$	com $a > 0$	$\dfrac{dx(t)}{dt} = 2a\,t + b$	reta crescente
parábola com a “boca para baixo”	$x(t) = a\,t^2 + b\,t + c$	com $a < 0$	$\dfrac{dx(t)}{dt} = 2a\,t + b$	reta decrescente
constante	$x(t) = a$	para todo a	$\dfrac{dx(t)}{dt} = 0$	

Tendo tudo isso em vista, não fica difícil concluir que os gráficos pedidos ficam como ilustrado abaixo. Primeiro usamos essas idéias para fazer o gráfico de $v(t) = dx(t)/dt$ versus t. Note que $v(0) = 0$, pois a curva de $x(t) \times t$ inicia horizontal na origem. Depois aplicamos novamente essas idéias olhando para o gráfico de $v(t) \times t$ para obter o gráfico de $a(t) = dv(t)/dt \times t$.

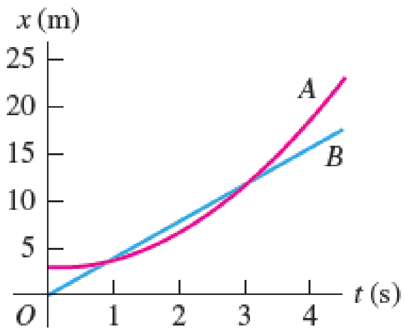


Note que $v(t) = 0$ nos instantes $t = 0$, $t = 20$ (ponto de máximo de $x(t)$) e $t = 40$. Esses são os instantes em que a curva $x(t) \times t$ fica "deitada".

Nos intervalos de tempo numerados acima a aranha está:

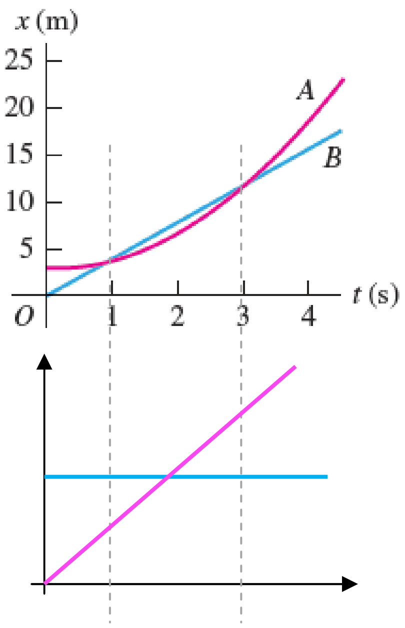
1	Se afastando da origem com velocidade crescente: $v > 0$ e $a > 0$. v e a paralelos entre si.
2	Se afastando da origem com velocidade constante: $v > 0$ e $a = 0$. MRU
3	Se afastando da origem com velocidade decrescente: $v > 0$ e $a < 0$. v e a antiparalelos entre si.
4	Se aproximando da origem com velocidade crescente em módulo: $v < 0$ e $a < 0$. v e a paralelos entre si.
5	Se aproximando da origem com velocidade constante: $v < 0$ e $a = 0$. MRU
6	Se aproximando da origem com velocidade decrescente em módulo: $v < 0$ e $a > 0$. v e a antiparalelos.

Entre o 3 e o 4 notamos que a aranha estava se afastando e depois se aproximando, ou seja, sua velocidade muda de sinal e isso ocorre exatamente em $t = 20$, quando a velocidade se anula instantaneamente ($v = 0$ e $a < 0$) mas há aceleração ($\neq$ repouso).



EP2.35 Aqui a ideia é parecida com a do exercício anterior. Vamos inverter um pouco a ordem dos itens. b) Fica claro que A e B ocupam a mesma posição nos dois instantes em que as curvas $x(t) \times t$ se cruzam: $t_1 \cong 1$ e $t_2 \cong 3$. d) A e B possuirão a mesma velocidade nos instantes em que as curvas $x(t) \times t$ tiverem a mesma inclinação, ou seja, forem paralelas. Isso ocorre em um instante $t_3 \cong 2$. e) B ultrapassa A quando x_B passa a ser maior que x_A e isso ocorre em $t_1 \cong 1$. Depois A ultrapassa B, em $t_2 \cong 3$. Nesses exatos momentos de ultrapassagem A e B estão instantaneamente na mesma posição x.

c) os gráficos de $v(t) = dx(t)/dt \times t$ ficam como mostrado abaixo.



O carro B se move com velocidade constante, pois seu gráfico de $x(t) \times t$ é uma reta: $v_B > 0$ e $a_B = 0$. B se afasta da origem o tempo todo, com a mesma velocidade.

O carro A parte do repouso, pois seu gráfico de $x(t) \times t$ é “deitado” próximo da origem, e vai ganhando velocidade enquanto se afasta da origem continuamente. Imaginei que acurva $x(t) \times t$ para A é uma parábola, mas isso não está dito. $v_A(t) > 0$ cresce com t e $a_A > 0$.

Note que A parte de um ponto mais adiantado, pois $x_B(t = 0) = 0$ e $x_A(t = 0) > 0$. Por isso, B logo ultrapassa A, mas depois A ultrapassa B, pois a velocidade de A é crescente.

EP2.39 Vamos considerar aqui um salto vertical (não está dito), caso contrário não haveria solução possível.

Suponha um eixo y vertical para cima com origem ($y = 0$) no solo de onde a pulga inicia seu salto ($y_0 = 0$). A pulga salta com velocidade inicial vertical $v_0 > 0$ e tem uma trajetória de queda livre (sem arraste com o ar). O movimento de queda livre se dá com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}$, sendo $\vec{g}$ a aceleração da gravidade, que é vertical para baixo: $\vec{a} = \vec{g} = -g\,\hat{y}$ nesse referencial. A velocidade inicial é $\vec{v}_0 = v_o\,\hat{y}$ e durante a queda a velocidade da pulga varia de acordo com a equação horária:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t = v_o\,\hat{y} - g\,t\,\hat{y} = (v_0 - g\,t)\,\hat{y} = v(t)\hat{y}$$

$v(t)$ é a velocidade da pulga (em módulo) ao longo do eixo y.

A posição da pulga ao longo do eixo y varia de acordo com a equação horária:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2 = v_o\, t\, \hat{y} - \frac{g}{2}\, t^2\, \hat{y} = t\, \left(v_0 - \frac{g}{2}\, t\right)\, \hat{y} = y(t)\hat{y}$$

$y(t)$ é a posição da pulga ao longo do eixo y, com origem $y = 0$ no solo.

A pulga atinge sua altura máxima h_{MAX} no instante t_1 em que sua velocidade ao longo de y se anula, ou seja:

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow v_0 - g\, t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = v_0/g$$

Portanto, a altura máxima é $y(t_1)$, ou seja:

$$h_{MAX} = y(t_1) = t_1\, \left(v_0 - \frac{g}{2}\, t_1\right) = \frac{v_0}{g}\left(v_0 - \frac{g}{2}\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g}$$

a) Portanto:

$$\frac{v_0^2}{2g} = h_{MAX} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2\, g\, h_{MAX}}$$

b) O tempo de subida é $t_1 = v_0/g$. Para encontrar o tempo total de queda $t_2 > 0$, de subida e descida, basta calcular o tempo em que a posição vertical da pulga se anula novamente (no solo):

$$y(t_2) = 0 \Rightarrow t_2\, \left(v_0 - \frac{g}{2}\, t_2\right) = 0 \Rightarrow v_0 - \frac{g}{2}\, t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2v_0}{g} = 2\, t_1$$

Vemos que, como já discutimos, na queda livre o tempo de descida é igual ao tempo de subida e o tempo total de queda é, portanto, $2\, t_1 = 2v_0/g$.

EP2.42 Suponha um eixo y vertical para baixo com origem ($y = 0$) no alto do edifício de onde o tijolo inicia sua queda ($y_0 = 0$), partindo do repouso ($v_0 = 0$). O tijolo tem uma trajetória de queda livre (sem arraste com o ar). O movimento de queda livre se dá com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}$, sendo $\vec{g}$ a aceleração da gravidade, que é vertical para baixo: $\vec{a} = \vec{g} = g\, \hat{y}$ nesse referencial. A velocidade inicial é $\vec{v}_0 = 0\, \hat{y}$ e durante a queda a velocidade do tijolo varia de acordo com a equação horária:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\, t = 0\, \hat{y} + g\, t\, \hat{y} = g\, t\, \hat{y} = v(t)\hat{y}$$

$v(t)$ é a velocidade crescente do tijolo ao longo do eixo y.

A posição do tijolo ao longo do eixo y varia de acordo com a equação horária:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2 = 0\, \hat{y} + 0\, t\, \hat{y} + \frac{g}{2}\, t^2\, \hat{y} = \frac{g}{2}\, t^2\, \hat{y} = y(t)\hat{y}$$

$y(t)$ é a posição crescente do tijolo ao longo do eixo y.

a) Se t_1 ($= 2{,}50\, s$) é o instante em que tijolo atinge o solo, segue que a altura H do edifício é dada por:

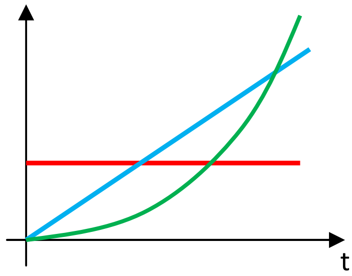
$$y(t_1) = H \Rightarrow \frac{g}{2}\, t_1^2 = H \Rightarrow H = \frac{g}{2}\, t_1^2$$

Considerando $g = 9{,}8\, m/s^2$, segue que $H = 30{,}6\, m$.

b) Nesse instante a velocidade do tijolo é:

$$\vec{v}(t_2) = g\, t_1\, \hat{y}$$

O módulo da velocidade (vertical para baixo) é $v(t_1) = g\, t_1 = 24{,}5\ m/s$.



c) No gráfico ao lado vemos as curvas (em função do tempo) de:

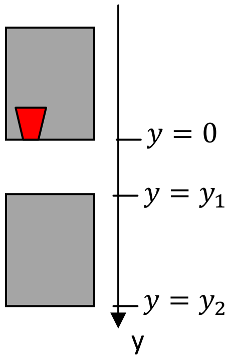
1. a aceleração do tijolo: $a(t) = g$=constante (reta vermelha).

2. a velocidade crescente do tijolo: $v(t) = g\, t$ (reta azul).

3. a posição crescente do tijolo: $y(t) = g\, t^2/2$ (parábola verde). Não é a trajetória do tijolo, que consiste apenas em uma reta vertical.

Todas as curvas terminam no instante t_1, quando o tijolo chega ao chão e a queda livre termina. Note que o gráfico teria três escalas verticais diferentes, uma para cada curva, e os pontos de cruzamento dessas curvas não tem nenhum significado especial (esses cruzamentos dependem das escalas arbitrárias).

EP2.80 Aqui vale a pena fazer uma figura, como mostrado ao lado.



Suponha um eixo y vertical para baixo com origem ($y = 0$) no peitoril da janela de cima de onde o vaso inicia sua queda ($y_0 = 0$), partindo do repouso ($v_0 = 0$) em $t = 0$. Marcamos no eixo y as posições y_1 do topo e y_2 do peitoril da janela de baixo. Foi dada a altura $y_2 - y_1 = H$ ($= 1{,}90\ m$) dessa janela e se pergunta quanto vale y_1.

O vaso tem uma trajetória de queda livre (sem arraste com o ar). O movimento de queda livre se dá com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}$, sendo $\vec{g}$ a aceleração da gravidade, que é vertical para baixo: $\vec{a} = \vec{g} = g\,\hat{y}$ nesse referencial. A velocidade inicial é $\vec{v}_0 = 0\,\hat{y}$ e durante a queda a velocidade do vaso cresce de acordo com a equação horária:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\, t = 0\,\hat{y} + g\, t\,\hat{y} = g\, t\,\hat{y} = v(t)\hat{y}$$

$v(t)$ é a velocidade crescente do tijolo ao longo do eixo y.

A posição do vaso ao longo do eixo y varia de acordo com a equação horária:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2 = 0\,\hat{y} + 0\, t\,\hat{y} + \frac{g}{2}\, t^2\,\hat{y} = \frac{g}{2}\, t^2\,\hat{y} = y(t)\hat{y}$$

$y(t)$ é a posição crescente do vaso ao longo do eixo y.

O vaso parte do repouso em $t = 0$ e chega ao topo da janela de baixo (y_1) no instante t_1 que está definido por y_1, pois $y_1 = y(t_1)$, ou seja:

$$y(t_1) = \frac{g}{2}\, t_1^2 = y_1 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\, y_1}{g}}$$

Analogamente, se $t_2 = t_1 + \Delta t$ é o instante em que o vaso atinge o peitoril da janela de baixo, nesse instante vale $y_2 = y(t_2)$. Portanto:

$$y(t_2) = \frac{g}{2}\, t_2^2 = y_2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2\, y_2}{g}}$$

Conhecemos o intervalo de tempo Δt ($= 0{,}420\ s$) que leva para o vaso percorrer a janela de baixo, a altura H ($= 1{,}90\ m$) dessa janela. Portanto, as duas equações acima podem ser combinadas para fornecer uma equação para y_1:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2\, y_2}{g}} - \sqrt{\frac{2\, y_1}{g}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2\,(y_1 + H)}{g}} - \sqrt{\frac{2\, y_1}{g}}$$

O que resta fazer é resolver essa última equação e explicitar o valor de y_1 em termos de Δt, H e g (os dados do exercício). Não parece que isso vai ser simples. Vamos começar definindo $k = \sqrt{g/2}\,\Delta t$. Ficamos com:

$$k = \sqrt{y_1 + H} - \sqrt{y_1} \Rightarrow k + \sqrt{y_1} = \sqrt{y_1 + H}$$

Elevando os dois lados ao quadrado:

$$\left(k + \sqrt{y_1}\right)^2 = y_1 + H \Rightarrow k^2 + 2\,k\,\sqrt{y_1} + y_1 = y_1 + H \;\Rightarrow\; k^2 + 2\,k\,\sqrt{y_1} = H \Rightarrow y_1 = \left(\frac{H - k^2}{2k}\right)^2$$

Com os dados numéricos (e $g = 9{,}8\ m/s^2$) obtemos: $k \cong 0{,}93\ m^{1/2}$ e $y_1 \cong 0{,}31\ m$.

2.93 Considere um eixo x horizontal ao longo dessa estrada reta. Os dois carros partem juntos da origem $x = 0$. O carro A se desloca nesse eixo obedecendo à seguinte equação horária da posição:

$$x_A(t) = \alpha\, t + \beta\, t^2$$

O carro B se desloca nesse mesmo eixo obedecendo à seguinte equação horária da posição:

$$x_B(t) = \gamma\, t^2 - \delta\, t^3$$

Sendo α (alfa), β (beta), γ (gama) e δ (delta) constantes positivas.

a) O enunciado da questão não especifica o instante em que os movimentos iniciam. Vamos supor que seja a escolha mais comum: os dois carros começam a se mover no instante $t = 0$. Nesse instante, o carro A está na posição: $x_A(t = 0) = \alpha\, 0 + \beta\, 0^2 = 0$, ou seja, na origem do eixo x. Nesse mesmo instante o carro B está na posição: $x_B(t = 0) = \gamma\, 0^2 - \delta\, 0^3 = 0$, ou seja, os carros partem juntos da origem. Logo depois, digamos em $t = 0{,}1\ s$, as posições dos carros serão: $x_A(t = 0{,}1) \cong 0{,}27\ m$ e $x_B(t = 0{,}1) \cong 0{,}028\ m$. Vemos, portanto, que o carro A dispara na frente logo no início do movimento.

b) Os carros estão juntos no mesmo ponto quando $x_A(t) = x_B(t)$, ou seja, nos instantes t_1 que satisfazem à equação:

$$x_A(t_1) = x_B(t_1) \Rightarrow \alpha\, t_1 + \beta\, t_1^2 = \gamma\, t_1^2 - \delta\, t_1^3$$

Já sabemos que $t_1 = 0$ é solução dessa equação, pois os carros partem juntos. Portanto, supondo desde já que vale $t_1 \neq 0$, podemos dividir a equação acima por t_1 para obter:

$$\alpha\, t_1 + \beta\, t_1^2 = \gamma\, t_1^2 - \delta\, t_1^3 \Rightarrow \alpha\, + \beta\, t_1 = \gamma t_1\, - \delta\, t_1^2 \Rightarrow \delta\, t_1^2 + (\beta - \gamma) t_1 + \alpha = 0$$

Trata-se de uma equação de segundo grau para t_1, cujas soluções são:

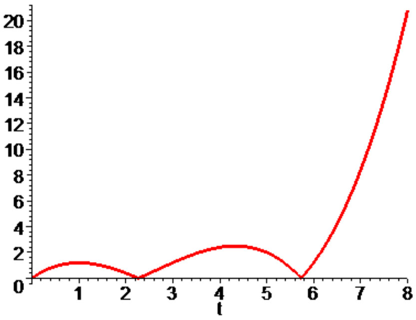
$$t_1 = \frac{1}{2\delta}\left[\gamma - \beta \pm \sqrt{(\beta - \gamma)^2 - 4\,\delta\,\alpha}\right]$$

Na equação acima devemos considerar válidas apenas as soluções positivas. Com os dados numéricos obtemos: $t_1 \cong 2{,}27\ s$ e $t_1 \cong 5{,}73\ s$. Nesses instantes um dos carros está ultrapassando o outro.

c) A distância $d(t)$ entre os carros é dada por $d(t) = |x_A(t) - x_B(t)|$. Essa distância não cresce nem diminui nos instantes em que sua derivada em relação à t se anula (pontos de máximo e mínimo). Portanto:

$$d(t) = |x_A(t) - x_B(t)| = |\alpha\, t + \beta\, t^2 - (\gamma\, t^2 - \delta\, t^3)| = |\alpha\, t + (\beta - \gamma)t^2 + \delta\, t^3|$$

A Figura ao lado mostra o comportamento de $d(t)$ versus t. Vemos que a distância entre A e B inicialmente aumenta, mas depois diminui e ocorre uma ultrapassagem no instante $t_1 \cong 2{,}27\, s$, como calculado acima. Depois a distância aumenta de novo, mas ocorre mais uma ultrapassagem em $t_1 \cong 5{,}73\, s$. Depois a distância cresce continuamente. Dá para ver que existem dois pontos de máximo em $d(t)$ e é nesses instantes que vale $dd(t)/dt = 0$.



Para nos vermos livres da função módulo ($|x| = x$ se $x > 0$ ou $= -x$ se $x < 0$), podemos assumir, para simplificar, que $d(t) = |x_A(t) - x_B(t)| = x_A(t) - x_B(t)$. A hipótese contrária, de que $d(t) = |x_A(t) - x_B(t)| = -[x_A(t) - x_B(t)]$ vai levar à mesma solução (apenas máximos viram mínimos e vice-versa).

Portanto, assumindo que:

$$d(t) = |\alpha\, t + (\beta - \gamma)t^2 + \delta\, t^3| = \alpha\, t + (\beta - \gamma)t^2 + \delta\, t^3$$

Obtemos:

$$\frac{dd(t)}{dt} = \alpha\, + 2(\beta - \gamma)t + 3\delta\, t^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6\delta}\left[2(\gamma - \beta) \pm \sqrt{4(\beta - \gamma)^2 - 12\,\delta\,\alpha}\right]$$

Note que tem que valer $t > 0$ e somente a substituição dos valores numéricos em t vai dizer se isso é verdade ou não. Obtemos: $t = 1\ s$ e $t \cong 4{,}33\ s$, concordando com o que sugere o gráfico acima.

d) As acelerações dos carros são:

$$x_A(t) = \alpha\, t + \beta\, t^2 \Rightarrow v_A(t) = \frac{dx_A(t)}{dt} = \alpha + 2\beta\, t \Rightarrow a_A(t) = \frac{dv_A(t)}{dt} = 2\beta$$

$$x_B(t) = \gamma\, t^2 - \delta\, t^3 \Rightarrow v_B(t) = \frac{dx_B(t)}{dt} = 2\gamma\, t - 3\delta\, t^2 \Rightarrow a_B(t) = \frac{dv_B(t)}{dt} = 2\gamma - 6\delta\, t$$

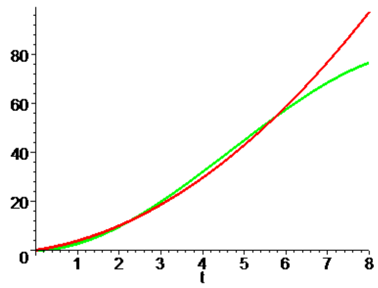
O carro A possui aceleração constante e positiva, ele sempre aumenta sua velocidade. O carro B começa acelerando ($a_B > 0$), mas depois freia ($a_B < 0$). As acelerações são iguais quando:

$$a_A(t) = a_B(t) \Rightarrow 2\beta = 2\gamma - 6\delta\, t \Rightarrow t = \frac{\gamma - \beta}{3\delta}$$

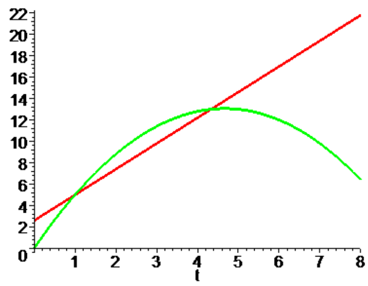
Numericamente: $t \cong 2{,}67\ s$.

Abaixo mostramos os gráficos (versus t) de $x_A(t)$ e $x_B(t)$, $v_A(t)$ e $v_B(t)$ e $a_A(t)$ e $a_B(t)$.

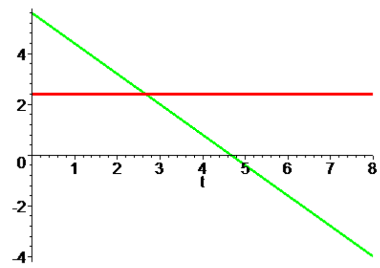
$x_A(t)$ e $x_B(t)$



$v_A(t)$ e $v_B(t)$



$a_A(t)$ e $a_B(t)$



Note que B (verde) parte do repouso, mas com aceleração maior do que A. A parte com velocidade inicial α e sai na frente. Como B possui aceleração maior, acaba que ele ultrapassa A. Mas, depois B resolve frear, e é ultrapassado por A.