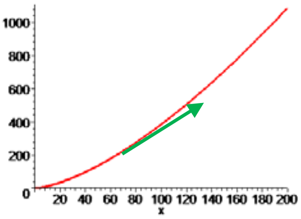
EP3.4 Considere um referencial com eixo x horizontal e eixo y vertical para cima. A posição de uma partícula nesse referencial é dada por (b e c são constantes positivas):

$$\vec{r}(t) = b\,t^2\hat{x} + c\,t^3\hat{y}$$



Podemos calcular a trajetória da partícula, a função $y(x)$, eliminando o tempo nas equações (paramétricas):

$$x(t) = b\,t^2 \text{ e } y(t) = c\,t^3$$

Obtemos: $t = \sqrt{x/b}$ e $y(x) = c\,(x/b)^{3/2}$. O gráfico ao lado ilustra essa trajetória no plano xy. Note que a escala vertical é bem maior que a escala horizontal.

A velocidade dessa partícula varia no tempo de acordo com:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(b\,t^2\hat{x} + c\,t^3\hat{y}) = 2b\,t\,\hat{x} + 3c\,t^2\hat{y}$$

A seta de $\vec{v}(t)$ é, em cada instante, tangente à curva $y(x)$, como a seta verde na Figura acima. A partícula parte da origem, $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$, do repouso, $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$, e se move com velocidade crescente no plano xy. Para $t = 1$, quando a partícula está em $\vec{r}(1) = b\,\hat{x} + c\,\hat{y}$, sua velocidade é $\vec{v}(1) = 2b\,\hat{x} + 3c\,\hat{y}$. Depois, em $t = 2$, quando a partícula está em $\vec{r}(2) = 4b\,\hat{x} + 8c\,\hat{y}$, sua velocidade é $\vec{v}(2) = 4b\,\hat{x} + 12c\,\hat{y}$.

A aceleração da partícula é:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(2b\,t\,\hat{x} + 3c\,t^2\hat{y}) = 2b\,\hat{x} + 6c\,t\,\hat{y}$$

A aceleração é constante ao longo de x, mas crescente ao longo de y.

O ângulo θ que um vetor $\vec{A}$ qualquer faz com o eixo x é tal que $\tan(\theta) = A_y/A_x$. Para o vetor velocidade obtemos:

$$\tan(\theta) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{3c\,t^2}{2b\,t} = \frac{3c}{2b}t$$

Vemos que para $t \cong 0$ a seta de $\vec{v}(t)$ é basicamente horizontal ($\tan(\theta) \cong 0$) e que essa seta vai se tornando cada vez mais vertical, pois, para $t \to \infty$ vale $\tan(\theta) \to \infty$ e $\theta \to 90°$ ($\pi/2$ rad). Isso pode ser conferido na curva de $y(x)$ no gráfico acima, que inicia horizontal e vai se tornando cada vez mais íngreme.

O ângulo de $45°$ ($\pi/4$ rad) se caracteriza por: $\tan(45°) = 1$. Portanto, a seta de $\vec{v}(t)$ fará esse ângulo com o eixo x no instante t_1 tal que:

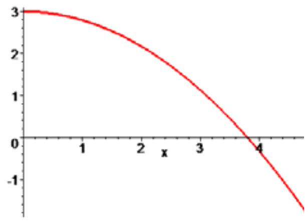
$$\tan(\theta) = \frac{3c}{2b}t_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{2b}{3c}$$

Nesse instante, as duas componentes v_x e v_y têm tamanhos iguais e o vetor $\vec{v}(t_1)$ está formando um ângulo de $45°$ com o eixo x (e com o eixo y também).

EP3.7 Considere um referencial com eixo x horizontal e eixo y vertical para cima. A posição de um pássaro nesse referencial é dada por (k, α e β são constantes positivas):

$$\vec{r}(t) = \alpha\, t\, \hat{x} + (k - \beta\, t^2)\hat{y}$$

a) Podemos calcular a trajetória do pássaro, a função $y(x)$, eliminando o tempo nas equações (paramétricas):



$$x(t) = \alpha\, t \;\text{ e }\; y(t) = k - \beta\, t^2$$

Obtemos: $t = x/\alpha$ e $y(x) = k - \beta\,(x/\alpha)^2$. Podemos ver que essa é a equação de uma parábola com a "boca para baixo". O gráfico ao lado ilustra essa trajetória no plano xy (com os dados numéricos). Note que para $t = 2{,}0$ s a coordenada x vale $x(2) = 4{,}8$ m. Fizemos o gráfico ao lado para $0 \le x \le 4{,}8\, m$.

b) A velocidade do pássaro varia no tempo de acordo com:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha\, t\, \hat{x} + (k - \beta\, t^2)\hat{y}) = \alpha\, \hat{x} - 2\beta t\, \hat{y}$$

A aceleração do pássaro é:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha\, \hat{x} - 2\beta t\, \hat{y}) = -2\beta\, \hat{y}$$

A aceleração é constante e está ao longo de –y (apontando para baixo).

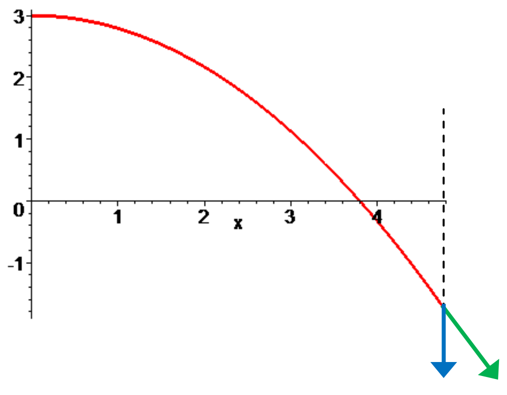
c) No instante $t = 2\, s$ a velocidade do pássaro é $\vec{v}(t=2) = \alpha\, \hat{x} - 2\beta\, 2\, \hat{y} = \alpha\, \hat{x} - 4\beta\, \hat{y}$ e a aceleração é $\vec{a}(t=2) = -2\beta\, \hat{y}$. O módulo da velocidade é $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + 16\,\beta^2} \cong 5{,}4\, m/s$ e o módulo da aceleração é $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 4\,\beta^2} = 2|\beta| = 2\beta = 2{,}4\, m/s^2$.

Nesse instante, o ângulo θ que a seta de $\vec{v}$ faz com o eixo x é:

$$\tan(\theta) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-4\beta}{\alpha} = -4\frac{\beta}{\alpha}$$

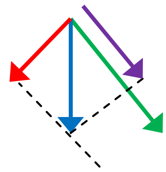
Obtemos $\theta \cong -63{,}4°$. A seta de $\vec{v}(t=2)$ está oblíqua para baixo e, por isso, está abaixo do eixo x, fazendo um ângulo de 63,4° (medido no sentido horário) com esse eixo. Quanto à seta da aceleração, é sempre ao longo de y e faz, portanto, 90° com o eixo x.

d) No gráfico ao lado adicionamos as setas de $\vec{v}(t=2)$, seta verde tangente à curva $y(x)$ da trajetória e $\vec{a}(t=2)$, seta azul ao longo de y e com sentido oposto a esse eixo.

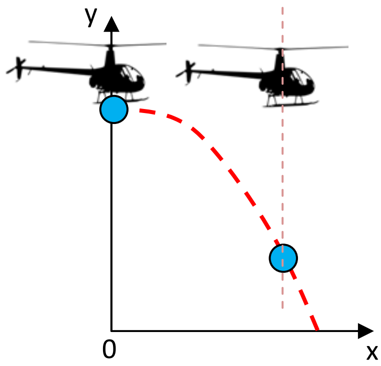


A aceleração $\vec{a}$ de uma partícula pode ser (sempre) dividida em duas componentes: uma ortogonal à velocidade $\vec{v}$, $\vec{a}_\perp$, "responsável" pela variação na direção de $\vec{v}$ e outra paralela à velocidade $\vec{v}$, $\vec{a}_\parallel$, "responsável" pela variação no módulo de $\vec{v}$ (v).

Na Figura ao lado destacamos as acelerações $\vec{a}_{\parallel}$ (seta roxa) e $\vec{a}_{\perp}$ (seta vermelha) desse pássaro no instante $t = 2\,s$. Podemos afirmar, portanto, que o módulo da velocidade está aumentando, posto que $\vec{a}_{\parallel}$ está no mesmo sentido de $\vec{v}$ e que o pássaro está descrevendo uma curva para a esquerda (como é evidente na curva), pois $\vec{a}_{\perp}$ aponta para a esquerda.



EP3.10 Considere um referencial com eixo x horizontal e eixo y vertical para cima. A origem desse referencial está no solo na posição horizontal em que a bomba é solta do helicóptero: $\vec{r}_0 = H\,\hat{y}$ ($H = 300\,m$). Após ser largada, a bomba vai descrever uma trajetória de queda livre com velocidade inicial $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{x}$ ($v_0 = 60{,}0\,m/s$). Ela cai com aceleração da gravidade $\vec{g} = -g\,\hat{y}$ ($g = 9{,}8\,m/s^2$).



A Figura ao lado ilustra a trajetória (em vermelho) da bomba (bolinha azul) vista de um observador fixo no solo, que vê o helicóptero passar. São mostrados dois instantes $t = 0$ e $t > 0$. Na ausência de arraste, a bomba continua com velocidade horizontal $v_0\,\hat{x}$, acompanhando o helicóptero (caso ele mantenha sua velocidade), ao mesmo tempo em que cai na vertical com aceleração $\vec{g}$.

a) A posição vertical da bomba varia de acordo com a seguinte equação horária (queda livre):

$$y(t) = y_0 + v_{0y}\,t + a_y\frac{t^2}{2} = H + 0\,t - g\frac{t^2}{2} = H - g\frac{t^2}{2}$$

Portanto, a bomba vai atingir o solo no instante t_1 tal que:

$$y(t_1) = 0 \Rightarrow H - g\frac{t_1^2}{2} = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cong 7{,}8\,s$$

b) No instante em que vai tocar o solo, a bomba vai ter percorrido na horizontal a distância:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}\,t + a_x\frac{t^2}{2} = 0 + v_0 t + 0 = v_0 t \Rightarrow x(t_1) = v_0 t_1 = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}} \cong 469\,m$$

c) A velocidade da bomba é dada por:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t = v_0\,\hat{x} - g\,t\,\hat{y}$$

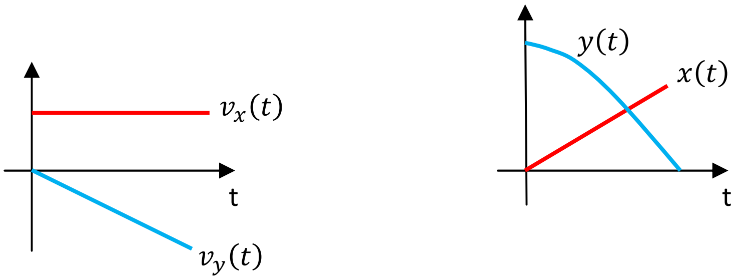
Portanto, quando vai tocar o solo, a velocidade da bomba será:

$$\vec{v}(t_1) = v_0\,\hat{x} - g\,t_1\,\hat{y} = v_0\,\hat{x} - g\sqrt{\frac{2H}{g}}\,\hat{y} = v_0\,\hat{x} - \sqrt{2\,g\,H}\,\hat{y}$$

Na horizontal a bomba mantém sua velocidade horizontal inicial: v_0.

Na vertical a velocidade da bomba é crescente em módulo e ao final vale $\sqrt{2\,g\,H} \cong 76{,}7\,m/s$ (para baixo).

d)



e) Com já está ilustrado na primeira Figura, na ausência de arraste, a bomba continua com velocidade horizontal $v_0\,\hat{x}$, acompanhando o helicóptero (caso ele mantenha sua velocidade). Portanto, a bomba estará sempre abaixo do helicóptero. Quando a bomba atingir o solo, ela estará na posição:

$$\vec{r}(t_1) = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}\,\hat{x} + 0\,\hat{y}$$

e o helicóptero estará logo acima dela, na posição:

$$\vec{r}_h(t_1) = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}\,\hat{x} + H\,\hat{y}$$

As posições horizontais são iguais, mas a bomba estará no solo ($y = 0$) enquanto que o helicóptero estará na altura H em relação ao solo ($y_h = H$).

EP3.14 Considere um referencial com eixo x horizontal e eixo y vertical para cima. A origem desse referencial está no nível do solo na posição horizontal em que a bola é lançada: $\vec{r}_0 = H\,\hat{y}$ ($H = 2{,}75\ m$). Após ser lançada, a bola vai descrever uma trajetória de queda livre com velocidade inicial $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{x}$ ($v_0 =?$). Ela cai com aceleração da gravidade $\vec{g} = -g\,\hat{y}$ ($g = 9{,}8\ m/s^2$). Na ilustração acima a bola cai dentro do buraco.

A posição vertical da bola varia de acordo com a seguinte equação horária (queda livre):

$$y(t) = y_0 + v_{0y}\,t + a\frac{t^2}{2} = H + 0\,t - g\frac{t^2}{2} = H - g\frac{t^2}{2}$$

Portanto, a bola vai atingir o solo no instante t_1 tal que:

$$y(t_1) = 0 \Rightarrow H - g\frac{t_1^2}{2} = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

No instante em que vai tocar o solo, a bola vai ter percorrido na horizontal a distância (o alcance):

$$x(t) = x_0 + v_{0x}\,t + a_x\frac{t^2}{2} = 0 + v_0 t + 0 = v_0 t \Rightarrow x(t_1) = v_0 t_1 = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Concluindo, a bola aterrissará dentro do buraco se valer a condição:

$$x_{BI} < x(t_1) < x_{BF}$$

Sendo x_{BI} ($= 2{,}0\ m$) e x_{BF} ($= 3{,}5\ m$) as coordenadas dos limites horizontais do buraco. Portanto, a bola cai no buraco se:

$$x_{BI} < v_0\sqrt{\frac{2H}{g}} < x_{BF} \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{2H}}x_{BI} < v_0 < \sqrt{\frac{g}{2H}}x_{BF}$$

A velocidade máxima para não cair no buraco (cair antes) é:

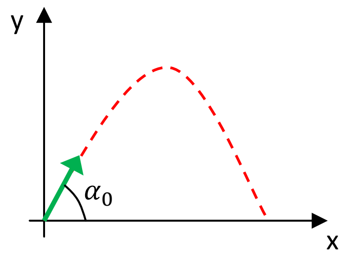
$$v_{0MAX} = \sqrt{\frac{g}{2H}}x_{BI} \cong 2{,}7\ m/s$$

A velocidade mínima para não cair no buraco (cair depois) é:

$$v_{0MIN} = \sqrt{\frac{g}{2H}}x_{BF} \cong 4{,}7\ m/s$$

Para $v_{0MAX} < v_0 < v_{0MIN}$, a bola cai no buraco.

3.18 Considere um referencial com eixos x horizontal e y vertical para cima. Uma bala é lançada (da origem) com velocidade inicial $\vec{v}_0$ de módulo v_0 ($125\ m/s$) que faz um ângulo α_0 (55°) com a horizontal. A Figura ao lado ilustra a trajetória parabólica do projétil. O movimento de queda livre é o movimento com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}$. A aceleração da gravidade $\vec{g}$ é vertical para baixo com módulo $g \cong 9{,}8\ m/s^2$ (na Terra). Portanto, nesse referencial obtemos:



Para a aceleração:

$$a_x(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad a_y(t) = -g$$

Das leis da cinemática (com aceleração constante) obtemos para a velocidade:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t = v_0\cos(\alpha_0) \qquad \text{e} \qquad v_y(t) = v_{0y} + a_y t = v_0\,\mathrm{sen}(\alpha_0) - g\,t$$

Das mesmas leis da cinemática (com aceleração constante) obtemos para a posição:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2 = \\ &= v_0\cos(\alpha_0)\,t \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0y}t + a_y t^2/2 \\ &= v_0\,\mathrm{sen}(\alpha_0)\,t - g\,t^2/2 \end{aligned}$$

A altura máxima se dá no instante t_1 quando a velocidade vertical da bala se anula. Portanto:

$$v_y(t_1) = v_0\,\mathrm{sen}(\alpha_0) - g\,t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}\mathrm{sen}(\alpha_0)$$

A altura máxima h_{MAX} da bala é sua coordenada vertical em relação ao solo: $y(t_1)$. Portanto:

$$h_{MAX} = y(t_1) = v_0\,\mathrm{sen}(\alpha_0)\,t_1 - g\frac{t_1^2}{2} = v_0\,\mathrm{sen}(\alpha_0)\left[\frac{v_0}{g}\mathrm{sen}(\alpha_0)\right] - \frac{g}{2}\left[\frac{v_0}{g}\mathrm{sen}(\alpha_0)\right]^2$$

Concluindo:

$$h_{MAX} = \frac{[v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)]^2}{2g}$$

A bala aterrissa no solo no instante t_2 em que vale $y(t_2) = 0$. Já sabemos que nesse instante vale $t_2 = 2t_1$, posto que o tempo de subida é igual ao tempo de descida. Nesse instante a bala terá percorrido na horizontal a distância A que chamamos de alcance. Portanto, A é a coordenada horizontal da bala no instante t_2:

$$A = x(t_2) = x(2t_1) = v_0 \cos(\alpha_0)\,[2t_1] = v_0 \cos(\alpha_0) \left[2 \frac{v_0}{g} \operatorname{sen}(\alpha_0)\right] = \frac{v_0^2}{g} 2 \operatorname{sen}(\alpha_0) \cos(\alpha_0)$$

Utilizando a identidade trigonométrica: $\operatorname{sen}(2\alpha_0) = 2 \operatorname{sen}(\alpha_0) \cos(\alpha_0)$ obtemos:

$$A = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}(2\alpha_0)$$

Note, A é o alcance, e não o "alcance máximo". É simplesmente o alcance, que significa exatamente a distância máxima Δx percorrida pelo projétil na horizontal, durante sua trajetória de queda livre.

Com os dados numéricos obtemos, para um tiro na Terra: $h_{MAX} \cong 535\ m$ e $A \cong 1.498\ m$.

Para um tiro na Lua obtemos: $h_{MAX} \cong 3.276\ m$ e $A \cong 9.177\ m$.

Na Lua as coisas são bem mais leves (apesar de terem a mesma massa) e voam muito mais distante.

EP3.28 Uma centrífuga é basicamente um reservatório cilíndrico que gira em torno de seu eixo de simetria com uma velocidade angular ω. Enquanto o reservatório gira, tudo que está dentro dele também é convidado a girar na mesma velocidade. Uma partícula que gira com velocidade angular ω a uma distância (raio) R do eixo de rotação está descrevendo um movimento circular uniforme (MCU) com esse raio R e com essa velocidade ω. A aceleração centrípeta dessa partícula tem módulo $a_{cen} = \omega^2 R$ (que é igual a v^2/R já que $v = \omega\, R$).

Em breve veremos que aceleração é produzida por força e que, para que essa partícula tenha essa aceleração centrípeta, ela tem que ser capaz de se "agarrar" em sua vizinhança com uma força capaz de produzir essa aceleração. E se ela não conseguir se "agarrar"? Ela sai pela tangente. Esse é o mecanismo pelo qual a roupa molhada dentro da centrífuga vai se livrando da água aderida a ela: aumentando ω, aumentando a_{cen} , requerendo mais força de adesão, até que essa força se torne impossível e ocorra a "ejeção".

Para triplicar $a_{cen} = \omega^2 R$ (mantendo o mesmo raio), devemos multiplicar ω por $\sqrt{3}$ pois:

$$a'_{cen} = \left(\sqrt{3}\, \omega\right)^2 R = 3\, \omega^2 R = 3\, a_{cen}$$

A chefe vai ficar impressionada com isso?

EP3.29 Uma partícula que gira com velocidade angular ω a uma distância (raio) R do eixo de rotação está descrevendo um movimento circular uniforme com esse raio R e com essa velocidade ω. A aceleração centrípeta dessa partícula tem módulo $a_{cen} = \omega^2 R$ (que é igual a v^2/R já que $v = \omega\, R$). Uma partícula localizada no equador da Terra vai ter aceleração centrípeta de módulo: $a_{cen} = \omega_T^2\, R_T$, sendo ω_T a velocidade angular de rotação da Terra em torno de seu eixo que passa pelos pólos e R_T o raio da Terra.

A cada $T = 24\ h$ (período de rotação) a Terra dá uma volta completa em torno de seu eixo de rotação que passa pelos pólos. Portanto, a velocidade angular de rotação da Terra em torno de seu eixo que passa pelos pólos é:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24}\ rad/h$$

Para converter a unidade de ω_T para rad/s basta lembrar que $24\ h = 86.400\ s$ e, portanto:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{86.400} \cong 0{,}0000727\ rad/s$$

A aceleração centrípeta no equador é ($R_T = 6.380.000\ m$):

$$a_{cen} = \omega_T^2\, R_T \cong 0{,}034\ m/s^2$$

Sabemos que (em média) $g \cong 9{,}8\ m/s^2$ na vizinhança da superfície da Terra. Portanto:

$$\frac{a_{cen}}{g} = 0{,}0034$$

b) Para que valesse $a_{cen} = g$, a velocidade ω_T deveria ser:

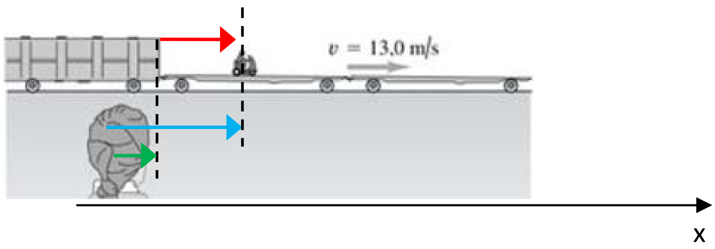
$$\omega_T^2\, R_T = g \Rightarrow \omega_T = \sqrt{\frac{g}{R_T}} \cong 0{,}00124$$

aproximadamente 17 vezes o valor atual. Como $\omega_T = 2\pi/T$ segue que T deveria ser aproximadamente 1/17 vezes o período atual, ou seja, T deveria ser $1{,}41\ h$. O dia na Terra deveria durar apenas $1{,}41\ h$.

Conforme nossa discussão anterior, sobre a centrífuga, é como se nós e tudo que está na superfície da Terra estivéssemos dentro de uma centrífuga gigante. Em breve veremos que aceleração é produzida por força e que, para que uma partícula tenha aceleração centrípeta, ela tem que ser capaz de se "agarrar" em sua vizinhança com uma força capaz de produzir essa aceleração. E se ela não conseguir se "agarrar"? Ela sai pela tangente. Qual a força que nos mantém "agarrados" à Terra? A Gravidade, ou seja, a força peso. Se a gravidade não fosse forte suficiente para fazer isso, seja porque g fosse bem menor do que é, seja porque a Terra girasse muito rapidamente, seríamos lançados ao espaço, como gotas de água em uma centrífuga.

No caso limite $a_{cen} = g$ estaríamos no limiar de sermos lançados ao espaço (no equador).

EP3.36



Na Figura acima mostramos as setas de $\vec{r}_{L/T}\,(t)$ (seta vermelha), a posição da lambreta em relação a um ponto fixo no trem, de $\vec{r}_{L/S}\,(t)$ (seta azul), a posição da lambreta em relação a um observador fixo no solo e de $\vec{r}_{T/S}\,(t)$ (seta verde), a posição do trem em relação a um observador fixo no solo. Para definir esses vetores tomamos como referência no trem um ponto fixo na roda de trás do penúltimo vagão, no observador um ponto fixo na cabeça dele e na lambreta um ponto na cabeça do piloto. Finalmente, definimos um eixo x fixo no solo orientado para a direita.

Da cinemática, a velocidade da lambreta em relação ao trem é:

$$\vec{v}_{L/T} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{L/T}\,(t)$$

A velocidade da lambreta em relação ao solo é:

$$\vec{v}_{L/S} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{L/S}\,(t)$$

Finalmente, a velocidade do trem em relação ao solo é:

$$\vec{v}_{T/S} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{T/S}\,(t)$$

Podemos ver na Figura a seguinte adição vetorial para as posições (seta azul=seta vermelha+seta verde):

$$\vec{r}_{L/S}\,(t) = \vec{r}_{L/T}\,(t) + \vec{r}_{T/S}\,(t)$$

Escrevendo esses vetores em termos do eixo x obtemos: $r_{L/S}\,(t)\hat{x} = r_{L/T}\,(t)\hat{x} + r_{T/S}\,(t)\hat{x}$. Portanto, obtemos a seguinte "regra" de composição para as posições ao longo de x:

$$r_{L/S}\,(t) = r_{L/T}\,(t) + r_{T/S}\,(t)$$

Se derivarmos essa equação em relação ao tempo, obtemos enfim a seguinte "regra" de composição de velocidades ao longo de x:

$$v_{L/S} = v_{L/T} + v_{T/S}$$

Note a mnemônica: $v_{A/B} = v_{A/C} + v_{C/B}$.

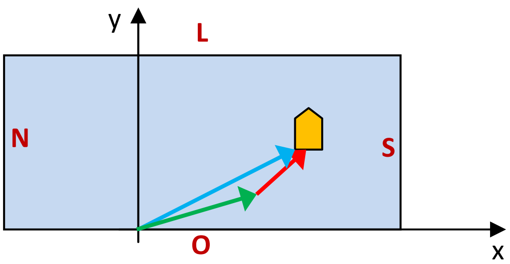
Portanto: $v_{L/T} = v_{L/S} - v_{T/S}$. Considerando $v_{T/S} = 13\ m/s$, obtemos:

Se $v_{L/S} = +18\, m/s$ (velocidade para a direita): $v_{L/T} = 18 - 13 = 5\, m/s$. Se vejo o trem indo para a direita com $13\, m/s$ e a lambreta indo para a direita com $18\, m/s$, é porque a lambreta está avançando com $5\, m/s$ em relação ao trem.

Se $v_{L/S} = 0$ (lambreta parada): $v_{L/T} = 0 - 13 = -13\, m/s$. Se vejo o trem indo para a direita com $13\, m/s$ e a lambreta parada na minha frente, é porque a lambreta está voltando para a esquerda com $13\, m/s$ em relação ao trem. O trem avança para a direita e a lambreta volta para a esquerda. Ela fica parada.

Se $v_{L/S} = -3\, m/s$ (velocidade para a esquerda): $v_{L/T} = -3 - 13 = -16\, m/s$. Se vejo o trem indo para a direita com $13\, m/s$ e a lambreta indo para a esquerda com $3\, m/s$, é porque a lambreta está voltando para a esquerda com $16\, m/s$ em relação ao trem. No item anterior vimos que se a lambreta volta com $13\, m/s$, ela fica parada (em relação ao solo), então, se ela volta com $16\, m/s = 13 + 3\, m/s$, ela volta para a esquerda com $3\, m/s$ (em relação ao solo).

EP3.41 Na Figura ao lado mostramos as setas de $\vec{r}_{B/A}(t)$ (seta vermelha), a posição do barco em relação a um ponto fixo na água, de $\vec{r}_{B/S}(t)$ (seta azul), a posição do barco em relação a um observador fixo no solo e de $\vec{r}_{A/S}(t)$ (seta verde), a posição desse ponto fixo na água em relação ao observador fixo no solo. Para definir esses vetores tomamos como referência um ponto fixo na traseira do barco, na água um ponto fixo em uma pequena bolinha de isopor que é levada pela água e no solo um ponto fixo na margem oeste do rio. Finalmente, definimos um eixo x fixo no solo orientado para o sul e um eixo y que atravessa o rio, de oeste para leste.



Da cinemática, a velocidade do barco em relação à água é:

$$\vec{v}_{B/A} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{B/A}(t)$$

A velocidade do barco em relação ao solo é:

$$\vec{v}_{B/S} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{B/S}(t)$$

Finalmente, a velocidade da água em relação ao solo é:

$$\vec{v}_{A/S} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{A/S}(t)$$

Podemos ver na Figura a seguinte adição vetorial para as posições (regra do paralelogramo: seta azul=seta vermelha+seta verde):

$$\vec{r}_{B/S}(t) = \vec{r}_{B/A}(t) + \vec{r}_{A/S}(t)$$

Derivando essa identidade em relação ao tempo obtemos enfim a seguinte "regra" de composição de velocidades:

$$\vec{v}_{B/S}(t) = \vec{v}_{B/A}(t) + \vec{v}_{A/S}(t)$$

Note a mnemônica: $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{A/C} + \vec{v}_{C/B}$.

Considerando: $\vec{v}_{A/S} = v_{A/S}\,\hat{x}$ e $\vec{v}_{B/A} = v_{B/A}\,\hat{y}$ obtemos:

$$\vec{v}_{B/S} = v_{B/A}\,\hat{y} + v_{A/S}\,\hat{x}$$

O barco é levado pelo rio ao longo de sua correnteza. O módulo da velocidade do barco em relação ao solo é:

$$v_{B/S} = \sqrt{\left(v_{B/S\,x}\right)^2 + \left(v_{B/S\,y}\right)^2} = \sqrt{\left(v_{A/S}\right)^2 + \left(v_{B/A}\right)^2} \cong 4{,}7\ m/s$$

O ângulo θ que essa velocidade faz com o eixo x paralelo à margem é tal que:

$$\tan(\theta) = \frac{v_{B/s\,y}}{v_{B/s\,x}} = \frac{v_{B/A}}{v_{A/S}} = 2{,}1 \Rightarrow \theta \cong 64{,}5°$$

b) A velocidade com que o barco atravessa o rio (ao longo de y) é constante de módulo $v_{B/A}$. O tempo que o barco leva para atravessar o rio de largura L é:

$$\Delta t = \frac{L}{v_{B/A}} \cong 190{,}5\ s$$

c) Enquanto atravessa o rio, o barco é levado pela correnteza (ao longo de x) com velocidade $v_{A/S}$. Portanto, no tempo Δt o barco vai percorrer a distância paralela ao rio:

$$\Delta l = v_{A/S}\,\Delta t \cong 381\ m$$

EP3.59 Considere um referencial com eixos x horizontal e y vertical para cima ($y = 0$ no solo). Um projétil é lançado da posição ($x_0 = 0, y_0 = h$) com velocidade inicial $\vec{v}_0$ de módulo v_0 que faz um ângulo α_0 com a horizontal. O movimento de queda livre é o movimento com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}$. A aceleração da gravidade $\vec{g}$ é vertical para baixo com módulo $g \cong 9{,}8\ m/s^2$ (na Terra). Portanto, nesse referencial obtemos:

Para a aceleração:

$$a_x(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad a_y(t) = -g$$

Das leis da cinemática (com aceleração constante) obtemos para a velocidade:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t = v_0\cos(\alpha_0) \qquad \text{e} \qquad v_y(t) = v_{0y} + a_y t = v_0\,\mathrm{sen}(\alpha_0) - g\,t$$

Das mesmas leis da cinemática (com aceleração constante) obtemos para a posição do projétil:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2 = \\ &= v_0\cos(\alpha_0)\,t \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} \\ &= h + v_0\,\mathrm{sen}(\alpha_0)\,t - g\,t^2/2 \end{aligned}$$

A altura máxima se dá no instante t_1 quando a velocidade vertical do projétil se anula. Portanto:

$$v_y(t_1) = v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0) - g\, t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen}(\alpha_0)$$

A altura máxima h_{MAX} do projétil é sua coordenada vertical em relação ao solo: $y(t_1)$. Portanto:

$$h_{MAX} = y(t_1) = h + v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)\, t_1 - g\frac{t_1^2}{2} = h + v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)\left[\frac{v_0}{g}\operatorname{sen}(\alpha_0)\right] - \frac{g}{2}\left[\frac{v_0}{g}\operatorname{sen}(\alpha_0)\right]^2$$

Concluindo:

$$h_{MAX} = h + \frac{[v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)]^2}{2g}$$

O projétil aterrissa no solo no instante t_2 em que vale $y(t_2) = 0$. Portanto, t_2 é tal que:

$$y(t_2) = h + v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)\, t_2 - g\frac{t_2^2}{2} = 0 \Rightarrow g\, t_2^2 - 2v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)\, t_2 - 2h = 0$$

As soluções dessa equação do segundo grau são:

$$t_2 = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0) \pm \sqrt{[v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)]^2 + 2\, g\, h}}{g}$$

Sabendo que tem que valer $t_2 > 0$, pois o projétil iniciou seu movimento em $t = 0$, segue que a única solução fisicamente aceitável é:

$$t_2 = \frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0) + \sqrt{[v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)]^2 + 2\, g\, h}}{g}$$

Nesse instante o projétil terá percorrido na horizontal a distância A que chamamos de alcance. Portanto, A é a coordenada horizontal do projétil no instante t_2:

$$A = x(t_2) = v_0 \cos(\alpha_0)\left[\frac{v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0) + \sqrt{[v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)]^2 + 2\, g\, h}}{g}\right]$$

Utilizando a identidade trigonométrica: $\operatorname{sen}(2\alpha_0) = 2 \operatorname{sen}(\alpha_0)\cos(\alpha_0)$ obtemos:

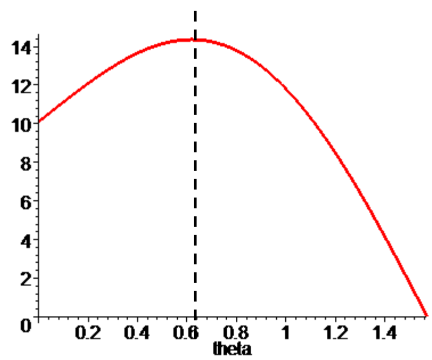
$$A = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}(2\alpha_0) + \frac{v_0}{g}\cos(\alpha_0)\sqrt{[v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)]^2 + 2\, g\, h}$$

Note, A é o alcance, e não o “alcance máximo”. É simplesmente o alcance, que significa exatamente a distância máxima percorrida pelo projétil na horizontal durante sua trajetória de queda livre.

Para o caso particular $h = 0$ recuperamos a expressão do alcance de um projétil lançado da origem (do solo):

$$A = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}(2\alpha_0) + \frac{v_0}{g}\cos(\alpha_0)\sqrt{[v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)]^2 + 0} = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}(2\alpha_0)$$

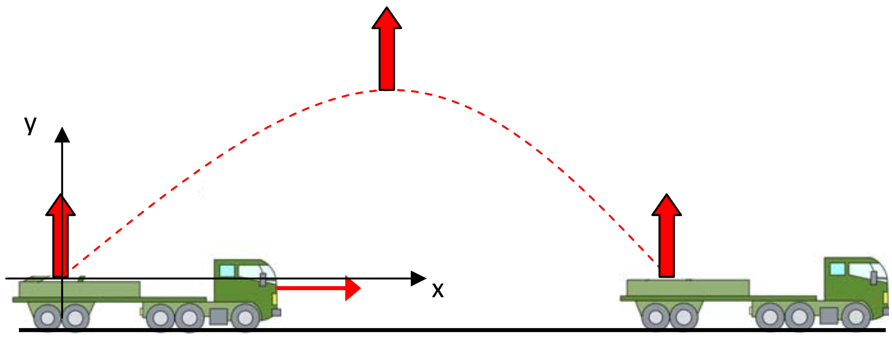
O gráfico ao lado mostra A versus $0 < \alpha_0 < 90°$ (escala em radianos) para os dados numéricos no exercício. A linha tracejada indica ($\pm$) o alcance máximo. O alcance não é nulo para $\alpha_0 = 0$ porque trata-se de um lançamento horizontal de uma altura h. Para $\alpha_0 = 90°$ o projétil sobe e cai no mesmo lugar e, por isso, $A = 0$.



Note que $45° \cong 0{,}785\,rad$ e que podemos ver no gráfico que o ângulo α_0 em que o alcance máximo se dá é menor do que $45°$, que seria o ângulo de alcance máximo para $h = 0$ (lançamento do solo).

Resolvendo numericamente a equação $dA/d\alpha_0 = 0$ (através do Maple) obtemos que o ponto de máximo de A (para os dados numéricos no exercício) está na posição $\alpha_0 \cong 35{,}4°$ ($0{,}618\,rad$).

EP3.65



A Figura acima ilustra a ideia, visão de um observador no solo. O foguete é lançado com a mesma velocidade horizontal $\vec{v}_C = v_C\hat{x}$ da carreta, que se mantém constante em toda a trajetória. Portanto, o foguete acompanha a carreta na horizontal, sobe e desce e cai no mesmo lugar de onde saiu na plataforma de lançamento. Ao mesmo tempo o foguete sobe e desce na vertical. Considere um referencial com eixos x horizontal e y vertical para cima fixos no solo, com origem na posição de lançamento do foguete. O foguete é lançado em $t = 0$ (da origem) com velocidade inicial $\vec{v}_0 = v_C\hat{x} + v_F\,\hat{y}$ (sendo $v_C = 30{,}0\,m/s$ e $v_F = 40{,}0\ m/s$). O movimento de queda livre do foguete é o movimento com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}$. A aceleração da gravidade $\vec{g}$ é vertical para baixo com módulo $g \cong 9{,}8\,m/s^2$ (na Terra). Portanto, nesse referencial obtemos:

Para a aceleração:

$$a_x(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad a_y(t) = -g$$

Das leis da cinemática (com aceleração constante) obtemos para a velocidade do foguete:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t = v_C \qquad \text{e} \qquad v_y(t) = v_{0y} + a_y t = v_F - g\,t$$

Das mesmas leis da cinemática (com aceleração constante) obtemos para a posição do foguete:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2 = \\ = v_C\,t \qquad \text{e} \qquad y(t) = y_0 + v_{0y}t + a_y t^2/2 \\ = v_F\,t - g\,t^2/2$$

A altura máxima se dá no instante t_1 quando a velocidade vertical da bala se anula. Portanto:

$$v_y(t_1) = v_F - g\,t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_F}{g} \cong 4{,}08\,s$$

A altura máxima h_{MAX} do foguete é sua coordenada vertical em relação ao solo: $y(t_1)$. Portanto:

$$h_{MAX} = y(t_1) = v_F\, t_1 - g\frac{t_1^2}{2} = v_F\left[\frac{v_F}{g}\right] - \frac{g}{2}\left[\frac{v_F}{g}\right]^2$$

Concluindo:

$$h_{MAX} = \frac{v_F^2}{2g} \cong 81{,}6\, m$$

Na direção x tanto o foguete como a carreta se movem com velocidade constante v_C e, por isso, o foguete está sempre localizado sobre a carreta.

c) O foguete sobe e aterrissa sobre a carreta no instante t_2 em que vale $y(t_2) = 0$. Já sabemos que esse instante vale $t_2 = 2t_1$, posto que na queda livre o tempo de subida é igual ao tempo de descida. Nesse instante o foguete terá percorrido na horizontal a distância A que chamamos de alcance. Portanto, A é a coordenada horizontal do foguete (e da carreta) no instante t_2:

$$A = x(t_2) = x(2t_1) = v_C[2t_1] = v_C\left[2\frac{v_F}{g}\right] = 2\frac{v_C\, v_F}{g} \cong 245\, m$$

d) O ângulo θ que a velocidade inicial $\vec{v}_0 = v_C\hat{x} + v_F\,\hat{y}$ do foguete (em relação ao solo) faz com o eixo x é tal que:

$$\tan(\theta) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{v_F}{v_C} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta \cong 53{,}1°$$

e) A trajetória do foguete em relação ao solo já foi mostrada na Figura acima. Do ponto de vista de um observador na carreta, o foguete apenas sobe e desce ao longo de uma mesma linha vertical. Ele sobe, desce e cai no mesmo lugar sobre o caminhão.

3.75 O vetor posição da pedra é: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(y)\hat{y} = R\cos(\omega\, t)\hat{x} + R\mathrm{sen}(\omega\, t)\hat{y}$. Esse vetor nasce na origem e termina na pedra. Portanto, a distância D entre a pedra e a origem é o módulo de $\vec{r}(t)$, ou seja:

$$D = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = \sqrt{[R\cos(\omega\, t)]^2 + [R\mathrm{sen}(\omega\, t)]^2}$$

Usando a identidade trigonométrica: $[\cos(\theta)]^2 + [\mathrm{sen}(\theta)]^2 = 1$ para todo θ, obtemos:

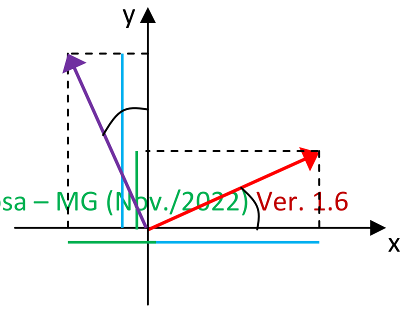
$$D = R\sqrt{[\cos(\omega\, t)]^2 + [\mathrm{sen}(\omega\, t)]^2} = R$$

A distância pedra/origem é constante e igual a R. Portanto, enquanto se move, a pedra descreve um círculo no plano xy, em torno da origem.

b) A velocidade $\vec{v}(t)$ da pedra é:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}[R\cos(\omega\, t)\hat{x} + R\mathrm{sen}(\omega\, t)\hat{y}] = -R\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega\, t)\hat{x} + R\,\omega\cos(\omega\, t)\hat{y}$$

Para mostrar que dois vetores são ortogonais entre si basta mostrar que o produto escalar entre eles é nulo. Como não discutimos ainda a operação de



produto escalar, preferimos dar aqui uma demonstração geométrica. A Figura ao lado mostra dois vetores (vermelho e roxo) tais que a componente x do roxo é igual à componente y do vermelho com o sinal trocado e a componente y do roxo é igual à componente x do vermelho. Então eles são ortogonais entre si. Mas, se você já teve contato com a operação de produto escalar entre dois vetores, basta perceber que $\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = R^2\, \omega\, [-\cos(\omega\, t)\mathrm{sen}(\omega\, t) + \mathrm{sen}(\omega\, t)\cos(\omega\, t)] = 0$ e que isso implica em dois vetores ortogonais entre si, posto que $\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = r(t)v(t)\cos(\theta)$.

c) A aceleração $\vec{a}(t)$ da pedra é:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}[-R\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega\, t)\hat{x} + R\,\omega\cos(\omega\, t)] = -R\,\omega^2[\cos(\omega\, t)\hat{x} + \mathrm{sen}(\omega\, t)\hat{y}] = -\omega^2\vec{r}(t)$$

A posição da pedra é um vetor radial e a aceleração também é radial apontando para a origem no centro do círculo. É uma aceleração centrípeta. O módulo da aceleração é:

$$a = \sqrt{[a_x(t)]^2 + \left[a_y(t)\right]^2} = \sqrt{[-R\,\omega^2]^2\{[\cos(\omega\, t)]^2 + [\mathrm{sen}(\omega\, t)]^2\}} = \omega^2 R$$

A aceleração $\vec{a}(t)$ varia no tempo (em direção e sentido), mas seu módulo a é constante.

d) O módulo da velocidade da pedra é:

$$v = \sqrt{[v_x(t)]^2 + \left[v_y(t)\right]^2} = \sqrt{[R\,\omega]^2\{[-\mathrm{sen}(\omega\, t)]^2 + [\cos(\omega\, t)]^2\}} = \omega\, R$$

A velocidade $\vec{v}(t)$ varia no tempo, mas seu módulo v é constante.

e) a aceleração (centrípeta) da pedra tem módulo $a = \omega^2 R$. Como o módulo da velocidade é $v = \omega\, R$, segue que: $a = \omega^2 R = \left(\frac{v}{R}\right)^2 R = \frac{v^2}{R}$.