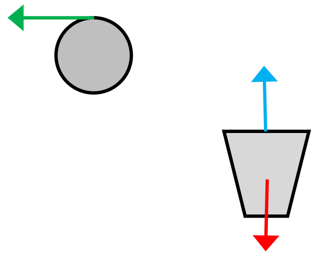
EP6.1 A Figura ao lado ilustra a ideia. Puxamos a extremidade superior da corda com uma força horizontal $\vec{F}_1$ (seta verde) para a esquerda. A corda transmite essa força para o balde de massa m, aplicando no balde uma força vertical $\vec{F}_2$ (seta azul). O peso $\vec{P}$ do balde (seta vermelha) puxa ele para baixo. Note que $F_2 = F_1 = F$ (corda leve e livre).



Vamos supor que o balde suba lentamente uma altura h com velocidade constante. Portanto, a 1ª lei de Newton aplicada ao balde diz que: $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow F = P = m\,g$.

a) Se o balde sobe uma altura h, a extremidade superior da corda se desloca horizontalmente uma distância h, ou seja (força e deslocamento paralelos entre si, $\theta = 0°$):

$$W_{F_1} = F_1\,h\,\cos(0°) = F\,h = mg\,h$$

Esse é o trabalho realizado pela pessoa que puxa a corda (pela força $\vec{F}_1$).

b) O peso do balde realiza o trabalho (note que peso e deslocamento são opostos: $\theta = 180°$):

$$W_P = P\,h\,\cos(180°) = -P\,h = -mg\,h$$

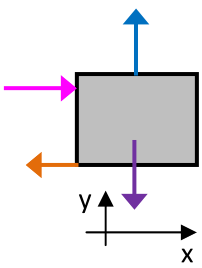
c) O teorema do trabalho (W) energia cinética (K) (teorema W-K) afirma que o trabalho total, ou seja, o trabalho da força resultante, em uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa partícula. Se a força resultante na partícula é $\vec{R}$ e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

sendo $K = m\,v^2/2$. Sendo o balde a partícula, nossa hipótese de que ele sobe com velocidade constante nos leva diretamente ao resultado: $W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = 0$.

Esse resultado é compatível com o fato de que a força que puxa o balde para cima realiza nele o trabalho positivo: $W_{F_2} = F_2 h = F\,h = mg\,h$ e, portanto, o trabalho da resultante no balde é $W_{\vec{R}}(A,B) = W_{\vec{P}}(A,B) + W_{\vec{F}_2}(A,B) = -mg\,h + mg\,h = 0 = \Delta K$.

EP6.3 A Figura ilustra o bloco/engradado de massa m se deslocando para a direita ao longo de x sob ação da força $\vec{F}$ (seta rosa) aplicada pelo trabalhador. A força de atrito cinético $\vec{F}_A^{(C)}$ (seta laranja) se opõe ao deslizamento do bloco (enquanto ele ocorre). Na vertical (y), peso $\vec{P}$ (seta roxa) e normal $\vec{\eta}$ se cancelam: $\eta = P = m\,g$ (não há nenhum movimento do bloco nessa direção). Não está dito, mas entendemos que o bloco se desloca com velocidade constante (sem essa informação, não há solução para o exercício).



a) A 1ª lei de Newton aplicada ao bloco diz que: $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow R_x = 0 \Rightarrow F - F_A^{(C)} = F - \mu_C \eta = F - \mu_C m\, g = 0$. Portanto, o trabalhador aplica uma força de módulo $F = \mu_C m\, g$ para vencer o atrito cinético no bloco.

b) Se o bloco vai para a direita uma distância D, o trabalho de $\vec{F}$ será (note que força e deslocamento são paralelos entre si: $\theta = 0°$):

$$W_F = F\ D\ \cos(0°) = \mu_C m\ g\ D$$

c) Se o bloco vai para a direita uma distância D, o trabalho de $\vec{F}_A^{(C)}$ será (note que força e deslocamento são opostos entre si: $\theta = 180°$):

$$W_{F_A^{(C)}} = F_A^{(C)}\ D\ \cos(180°) = -F_A^{(C)}\ D = -\mu_C m\ g\ D$$

d) Se o bloco vai para a direita uma distância D ao longo de x, o trabalho de $\vec{\eta}$, que está ao longo de y será (note que força e deslocamento são ortogonais entre si: $\theta = 90°$):

$$W_{\vec{\eta}} = \eta\ \ D \cos(90°) = 0$$

Quanto à gravidade ($\vec{P}$), a ideia é a mesma (força e deslocamento são ortogonais entre si: $\theta = 90°$):

$$W_{\vec{P}} = mg\ \ D \cos(90°) = 0$$

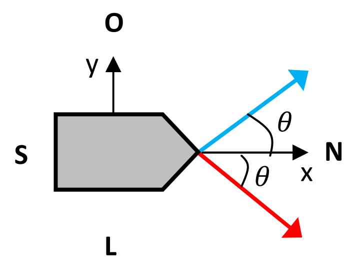
e) O teorema do trabalho (W) energia cinética (K) (teorema W-K) afirma que o trabalho total, ou seja, o trabalho da força resultante, em uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa partícula. Se a força resultante na partícula é $\vec{R}$ e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

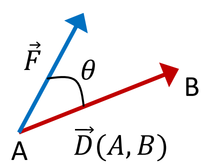
sendo $K = m\, v^2/2$. Sendo o bloco/engradado a partícula, nossa hipótese de que ele desliza com velocidade constante nos leva diretamente ao resultado: $W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = 0$. De fato, como foi mostrado:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = W_F + W_{F_A^{(C)}} + W_{\vec{\eta}} + W_{\vec{P}} = \mu_C m\ g\ D - \mu_C m\ g\ D + 0 + 0 = 0 = \Delta K$$

EP6.6 A Figura ilustra o navio se deslocando para a direita ao longo de x (de S para N) sob ação da força $\vec{F}_1$ (seta azul) e da força $\vec{F}_2$ (seta vermelha) aplicadas pelos rebocadores. Não há outras forças nesse plano, por hipótese. Na vertical (z) peso $\vec{P}$ (seta roxa) e empuxo $\vec{e}$ se cancelam e o navio flutua: $e = P = m\, g$. Está dito que $F_1 = F_2 = F$ e as inclinações são ambas θ. Será considerado um deslocamento do navio de módulo D ao longo de x.



Apenas para relembrar, a Figura ao lado ilustra a configuração em que uma força constante $\vec{F}$ (seta azul) atua em uma partícula que se desloca de A até B, ou seja, sofre o deslocamento $\vec{D}(A,B) = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ (seta vermelha). O trabalho que essa força constante $\vec{F}$ realiza nessa partícula enquanto ela se desloca de A até B é dado por:



$$W_F(A,B) = \vec{F} \cdot \vec{D}(A,B) = F\ D(A,B)\cos(\theta)$$

sendo θ o (menor) ângulo entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{D}(A,B)$. Uma força constante é uma força que tem módulo, direção e sentido constantes. É o caso das forças aqui.

As forças na vertical (z), peso $\vec{P}$ (seta roxa) e empuxo $\vec{e}$, não realizam trabalho porque $\theta = 90°$ (o deslocamento do navio é horizontal) e:

$$W_{\vec{P}} = W_{\vec{e}} = mg\ \ D\cos(90°) = 0$$

Para as duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ a ideia é a mesma, $\theta = \theta$ e $F_1 = F_2 = F$:

$$W_{\vec{F}_1} = W_{\vec{F}_2} = F\ D\cos(\theta)$$

O trabalho total (o trabalho da força resultante no navio) é:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = W_{\vec{F}_1} + W_{\vec{F}_2} + W_{\vec{e}} + W_{\vec{P}} = 2\ F\ D\cos(\theta)$$

O teorema do trabalho (W) energia cinética (K) (teorema W-K) afirma que o trabalho total, ou seja, o trabalho da força resultante, em uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa partícula. Se a força resultante na partícula é $\vec{R}$ e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

sendo $K = m\,v^2/2$. Sendo o navio a partícula, concluímos que nesse percurso de comprimento D os rebocadores fornecem ao navio a energia cinética: $\Delta K = W_{\vec{R}}(A,B) = 2\ F\ D\cos(\theta)$. Eles conseguem isso graças à queima de seus combustíveis fósseis.

EP6.10 Energia cinética é $K = m\,v^2/2$. Se $v \to v/2$ segue que $K \to m\,(v/2)^2/2 \to K/4$. Para que valha $K \to K/2$ deve ocorrer de $v \to v/\sqrt{2}$, pois, nesse caso $K \to m\,(v/\sqrt{2})^2/2 \to K/2$.

Com os valores numéricos $m = 750\ kg$ e $v = 65\ mi/h$ quanto vale K? Primeiro devemos converter a velocidade para m/s, para obter K diretamente em joules. Sabendo que $1\ mi \cong 1{,}609\ km = 1.609\ m$ e $1\ h = 3.600\ s$, obtemos:

$$v = 65\frac{mi}{h} = 65\ \frac{1.609\ m}{3.600\ s} \cong 29{,}1\ m/s$$

Portanto: $K \cong 316.494\ J$. Para ter metade dessa energia, sua velocidade deveria ser $v' = v/\sqrt{2} \cong 20{,}5\ m/s \cong 46\ mi/h$.

6.14 A melancia tem massa m, é largada do repouso e cai por um deslocamento vertical de módulo H. Não há arraste com o ar (queda livre).

a) O peso $\vec{P} = m\ \vec{g}$ é vertical para baixo e, portanto, força e deslocamento (H) são paralelos na queda vertical da melancia ($\theta = 0°$). Concluindo:

$$W_{\vec{P}} = mg\,H\cos(0°) = mg\,H$$

b) O teorema do trabalho (W) energia cinética (K) (teorema W-K) afirma que o trabalho total, ou seja, o trabalho da força resultante, em uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa partícula. Se a força resultante na partícula é $\vec{R}$ e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

Senda a melancia a partícula, segue que $K(A) = 0$ (repouso) e antes de tocar o solo sua energia cinética será:

$$K(B) - K(A) = K(B) = W_{\vec{R}}(A,B) = W_{\vec{P}}(A,B) = mg\,H$$

Sendo $K = m\,v^2/2$, segue que $v = \sqrt{2K/m}$. Portanto:

$$v = \sqrt{2\,mg\,H/m} = \sqrt{2\,g\,H}$$

A velocidade final da melancia não depende da massa, o que é uma característica marcante da queda livre.

c) Se houvesse arraste do ar, a melancia ganharia menos energia cinética, pois uma parte dessa energia seria transferida para o ar, na colisão melancia/ar (a queda da melancia agitaria o ar circundante, através da força de arraste melancia/ar).

De fato, se $\vec{A}$ é a força de arraste na melancia, esta aponta sempre oposta à velocidade da melancia, ou seja, $\theta = 180°$. Portanto, o trabalho do arraste será necessariamente negativo:

$$W_{\vec{A}} < 0$$

A força resultante na melancia passa a ser $\vec{R} = \vec{P} + \vec{A}$ e o trabalho da força resultante passa a ser:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = W_{\vec{P}}(A,B) + W_{\vec{A}}(A,B) < W_{\vec{P}}(A,B) = mg\,H$$

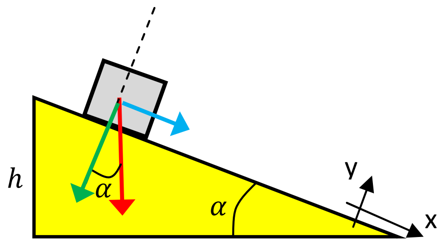
O trabalho do peso não muda, posto que nem o peso e nem o deslocamento da melancia mudaram.

Portanto, a variação da energia cinética da melancia passa a ser:

$$K(B) - K(A) = K(B) = W_{\vec{R}}(A,B) = mg\,H + W_{\vec{A}}(A,B) < mg\,H$$

A energia cinética final e a velocidade final da melancia seriam menores, devido à ação do arraste com o ar na melancia.

A ideia é simples, se não há arraste, todo o trabalho do peso, $W_{\vec{P}}(A,B) = mg\,H$, resulta no aumento de K e v da melancia. Havendo arraste, esse mesmo trabalho resulta no aumento de K e v da melancia e do ar (agitação do ar). Sobra menos para a melancia.



EP6.18 A Figura ao lado ilustra um bloco de massa m deslizando (ao longo de x) pela superfície de um plano inclinado de α.

O peso $\vec{P}$ (seta vermelha vertical) pode ser decomposto em componentes x: $P_x = P\,\mathrm{sen}(\alpha)$ (seta azul), e y: $P_y = -P\cos(\alpha)$ (seta verde). Portanto: $\vec{P} = P\,\mathrm{sen}(\alpha)\ \hat{x} - P\cos(\alpha)\ \hat{y}$.

O deslocamento do bloco se dá ao longo de x: $\vec{D} = D\,\hat{x}$. Portanto, nessa queda do bloco de uma altura h o trabalho do peso é (lembre-se que $\hat{y}\cdot\hat{x} = 0$ (90°)):

$$W_{\vec{P}} = \vec{P}\cdot\vec{D} = [P\,\mathrm{sen}(\alpha)\ \hat{x} - P\cos(\alpha)\ \hat{y}]\cdot D\,\hat{x} = P\,D\,\mathrm{sen}(\alpha)$$

Essa expressão está mostrando que o trabalho de uma força é a soma dos trabalhos das componentes dessa força: $W_{\vec{P}} = W_{P_x} + W_{P_y}$.

Podemos ver que no triângulo retângulo (de hipotenusa de tamanho D) vale: $\mathrm{sen}(\alpha) = h/D$. Portanto, como não poderia deixar de ser:

$$W_{\vec{P}} = P\,D\,\mathrm{sen}(\alpha) = P\,D\,\frac{h}{D} = P\,h = mg\,h$$

Esse é o mesmo trabalho que o peso realizaria se o bloco caísse em uma trajetória qualquer de altura h.

b) O teorema do trabalho (W) energia cinética (K) (teorema W-K) afirma que o trabalho total, ou seja, o trabalho da força resultante, em uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa partícula. Se a força resultante na partícula é $\vec{R}$ e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

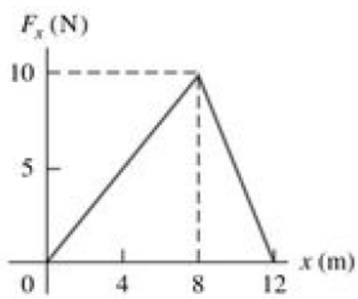
$$W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

Senda o bloco a partícula, se ele parte do repouso, $K(A) = 0$, e não há atritos sobre ele, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\eta}$ (a força normal $\vec{\eta}$ não realiza trabalho, $\theta = 90°$) antes de tocar o solo a energia cinética do bloco será:

$$K(B) - K(A) = K(B) = W_{\vec{R}}(A,B) = W_{\vec{P}}(A,B) = mg\,h$$

A velocidade do bloco terá módulo: $v = \sqrt{2\,mg\,h/m} = \sqrt{2\,g\,h}$. Essa velocidade não depende da massa do bloco e nem do percurso que ele percorreu. Essas são características marcantes da queda livre, que estamos provando aqui. Basicamente, o peso é vertical e sua capacidade de realizar trabalho está associada somente ao deslocamento vertical h. O deslocamento horizontal é irrelevante.

c) Com os dados numéricos obtemos: $v = \sqrt{2\,g\,h} \cong 17{,}1\ m/s$ (desprezando também o arraste do ar).



EP6.30 Vamos assumir um trenó de massa m e que $\vec{F}$ atinge um módulo máximo F_M em x_1 ($8\ m$), até se anular em x_2 ($12\ m$), conforme o gráfico dado (comportamentos lineares). Note que $F = F(x)$. A força $\vec{F}$ está sempre paralela ao deslocamento $\vec{D}$ do trenó ($\theta = 0°$). Para um

deslocamento infinitesimal dx em torno da posição x, o trabalho de $\vec{F}$ é $dW = F(x)dx\cos(0°) = F(x)\,dx$.

a) Se o trenó vai de $x = 0$ até $x = x_1$, o trabalho é a área abaixo da curva de $F(x)$ (a área de um triângulo retângulo):

$$W_{\vec{F}} = \int_0^{x_1} F(x)dx = \frac{F_M\,x_1}{2}$$

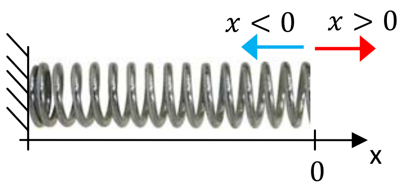
b) Se o trenó vai de $x = x_1$ até $x = x_2$, o trabalho é a área:

$$W_{\vec{F}} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{F_M\,(x_2 - x_1)}{2}$$

c) No percurso completo o trenó vai de $x = 0$ até $x = x_2$ e, como não poderia deixar de ser, o trabalho é a área total:

$$W_{\vec{F}} = \int_0^{x_2} F(x)dx = \int_0^{x_1} F(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{F_M\,x_1}{2} + \frac{F_M\,(x_2 - x_1)}{2} = \frac{F_M\,x_2}{2}$$

EP6.36 Uma mola faz uma força que depende de seu estado de deformação (compressão ou dilatação). Se chamarmos de x essa deformação, sendo $x = 0$ = mola relaxada, $x > 0$ mola dilatada de x e $x < 0$ mola comprimida de uma distância $|x|$, a força de mola tem componente do longo do eixo (x) da mola dada por: $F_M(x) = -k\,x$ (k é a constante de "dureza" da mola). O sinal de – expressa a ideia de que uma mola dilatada puxa ($\vec{F}_M$ é oposta ao eixo x) e uma mola comprimida empurra ($\vec{F}_M$ é paralela ao eixo x) o corpo que está atado à extremidade livre da mola (a outra extremidade está fixa em alguma posição à esquerda da origem do eixo x. A Figura ao lado ilustra essas ideias. Note o eixo x padrão, com x=0 na posição da extremidade da mola relaxada. Em situações que envolvem molas, sempre usamos esse referencial com x ao longo da direção de alongamento da mola, com origem $x = 0$ na posição da mola relaxada. Ele nos permite dizer que $F_M(x) = -k\,x$.



Note que $F_M = F_M(x)$. Enquanto a mola comprimida empurra o bloco, a força $\vec{F}_M$ está sempre paralela ao deslocamento do bloco ($\theta = 0°$). Para um deslocamento infinitesimal dx em torno da posição $x < 0$ (compressão), o trabalho de $\vec{F}_M$ é $dW = F_M(x)dx = -k\,x\,dx$. Note que dW é positivo, pois para uma mola comprimida vale $x < 0$ e para uma mola descomprimindo também vale $dx > 0$ (x aumentando). Se a mola estivesse comprimida e ainda comprimindo, valeria $dx < 0$ (x diminuindo) e continuaria valendo $dW = -k\,x\,dx$. Nesse caso valeria $dW < 0$, pois a mola estaria freando o bloco. Enfim, sempre vale $dW = -k\,x\,dx$.

a) Se a mola parte de uma compressão inicial $x_0 < 0$ e empurra o bloco até se tornar relaxada ($x = 0$), o trabalho (positivo) da força de mola será:

$$W_{\vec{F}_M} = \int_{x_0}^{0} F_M(x)dx = \int_{x_0}^{0} -k\,x\,dx = \left.\frac{-k\,x^2}{2}\right|_{x_0}^{0} = -0 - \left[\frac{-k\,x_0^2}{2}\right] = \frac{k\,x_0^2}{2}$$

b) O teorema do trabalho (W) energia cinética (K) (teorema W-K) afirma que o trabalho total, ou seja, o trabalho da força resultante, em uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa partícula. Se a força resultante na partícula é $\vec{R}$ e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

Senda o bloco a partícula, se ele parte do repouso, $K(A) = 0$, e não há atritos sobre ele, $\vec{R} = \vec{F}_M + \vec{P} + \vec{\eta} = \vec{F}_M$ (a força normal $\vec{\eta}$ cancela o peso $\vec{P}$), quando a mola relaxar a energia cinética do bloco será:

$$K(B) - K(A) = K(B) = W_{\vec{R}}(A,B) = W_{\vec{F}_M}(A,B) = \frac{k\,x_0^2}{2}$$

A velocidade do bloco terá módulo:

$$K(B) = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{k\,x_0^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k\,x_0^2}{m}}$$

Se o bloco estava apenas encostado na extremidade livre da mola, quando a mola relaxar ele vai continuar fluindo ao longo de x, deixando a mola relaxada para trás. Quanto mais dura a mola (maior k) e quanto mais deformada ela estava (maior $|x_0|$), mais velocidade o bloco vai adquirir. Com os dados numéricos obtemos:

$$v = \sqrt{\frac{k\,x_0^2}{m}} \cong 0{,}18\,m/s$$

EP6.48 Para fazer um corpo subir, devemos vencer a ação de seu peso. Se não houvesse gravidade, tudo subiria de graça.

Enquanto um corpo sobe, seu peso realiza um trabalho negativo (força e deslocamento opostos: $\theta = 180°$). O peso retira energia do corpo. Isso significa que o corpo só vai subir se você fornecer essa energia para ele, ele não vai subir de graça. Se você apenas solto o corpo, ele cai, não sobe. Se você lançá-lo para cima, então ele pode subir, porque você forneceu energia inicial para o corpo, que o peso vai tirar. Quanto mais energia inicial, mais alto ele sobe.

Já nos acostumamos com a ideia de que o trabalho do peso $P = m\,g$ de um corpo que sobe uma altura h é:

$$W_{\vec{P}} = P\,h\,\mathrm{sen}(180°) = -mg\,h$$

Esse é o trabalho que o peso realiza no corpo, qualquer que seja sua trajetória, que sobe uma altura h. Portanto, para fazer com que esse corpo suba essa altura h devemos fornecer a ele a energia:

$$U_{SUBIR} = m\,g\,h$$

Para que ele ganhe altura com a taxa constante dh/dt, devemos fornecer energia com a taxa (potência) constante:

$$P_{SUBIR} = \frac{d}{dt} U_{SUBIR} = m\,g\,\frac{dh}{dt}$$

Se fornecermos mais energia do que isso, ainda vai sobrar energia para o corpo aumentar sua velocidade (aumentar K) e/ou compensar perdas por atritos/arrastes durante a subida. Se fornecermos menos do que isso, ele não vai conseguir subir nessa taxa dh/dt.

Com os dados numéricos obtemos:

$$P_{SUBIR} = m\,g\,\frac{dh}{dt} = (700) \times (9{,}8) \times (2{,}5) = 17.150\frac{J}{s} = 17.150\,W = 17{,}15\,kW$$

O restante da energia fornecida pelo motor compensa a interação do avião com o ar (arraste) e outras perdas internas.

EP6.69 O bloco de massa m gira inicialmente em um círculo de raio r_0 com velocidade linear v_0. Em seguida o raio diminui para o valor r_f e a velocidade aumenta para v_f. A resultante das forças no bloco (peso e normal se cancelam) é a força radial $\vec{T}$ que a extremidade do fio aplica nele. A reação $-\vec{T}$ tensiona o fio.

Uma partícula em MCU está em um movimento acelerado, com aceleração centrípeta de módulo $a_{cen} = v^2/r$. A 2ª lei de Newton diz que tem que haver uma força centrípeta, de módulo:

$$F_{cen} = m\,a_{cen} = \frac{mv^2}{r}$$

Para o bloco em questão, já vimos que $F_{cen} = T$. Portanto, a tensão no barbante necessária para produzir esse MCU do bloco é:

$$T = \frac{mv^2}{r}$$

Note que $T = T(r, v)$, dependendo do raio e da velocidade que queremos, devemos ajustar a tensão para o valor dado por essa função $T(r, v)$.

a) No início, a tensão tinha que ser:

$$T_0 = \frac{m\,v_0^2}{r_0}$$

b) No final, a tensão terá que ser:

$$T_f = \frac{m\,v_f^2}{r_f}$$

c) O teorema do trabalho (W) energia cinética (K) (teorema W-K) afirma que o trabalho total, ou seja, o trabalho da força resultante, em uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa partícula. Se a força resultante na partícula é $\vec{R}$ e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

Senda o bloco a partícula, se ele parte de v_0, $K(A) = m\, v_0^2/2$ e termina com v_f, $K(B) = m\, v_f^2/2$, a variação na sua energia cinética será:

$$K(B) - K(A) = \frac{m}{2}\left(v_f^2 - v_0^2\right)$$

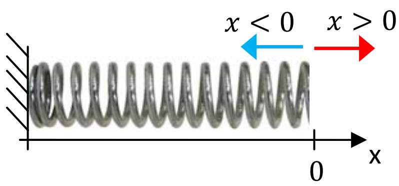
Já vimos que a resultante no bloco é a força radial $\vec{T}$ que a extremidade do fio aplica nele. Portanto, trabalho de $\vec{T}$ nesse processo $i \to f$ foi:

$$W_{\vec{T}}(A,B) = \Delta K = \frac{m}{2}\left(v_f^2 - v_0^2\right)$$

Note que esse trabalho foi positivo, pois $\vec{T}$ é centrípeta e o raio diminuiu. Isso leva a $\Delta K > 0$ e um aumento na velocidade do bloco. O responsável por esse trabalho, por esse fornecimento de energia ao bloco, é a pessoa que foi puxando o fio e modificando a tensão nele.

6.76 Uma mola de constante k é comprimida de $x = x_0 < 0$ e depois empurra uma bala de massa m, até voltar ao seu estado relaxado: $x = 0$. Vamos supor que há uma força de atrito constante na bala, de módulo F_A, enquanto ela percorre essa distância $|x_0|$, que é o comprimento do cano da espingarda.

Uma mola faz uma força que depende de seu estado de deformação (compressão ou dilatação). Se chamarmos de x essa deformação, sendo $x = 0$ = mola relaxada, $x > 0$ mola dilatada de x e $x < 0$ mola comprimida de uma distância $|x|$, a força de mola tem componente do longo do eixo (x) da mola dada por: $F_M(x) = -k\, x$ (k é a constante de "dureza" da mola). O sinal de – expressa a ideia de que uma mola dilatada puxa ($\vec{F}_M$ é oposta ao eixo x) e uma mola comprimida empurra ($\vec{F}_M$ é paralela ao eixo x) o corpo que está em atado à extremidade livre da mola (a outra extremidade está fixa em alguma posição à esquerda da origem do eixo x. A Figura ao lado ilustra essas ideias. O eixo x paralelo à elongação da mola e com origem x=0 na posição da extremidade da mola relaxada é o referencial padrão para representar e discutir a ação de forças de molas.



Note que $F_M = F_M(x)$. Enquanto a mola comprimida empurra o bloco, a força $\vec{F}_M$ está sempre paralela ao deslocamento do bloco ($\theta = 0°$). Para um deslocamento infinitesimal dx em torno da posição $x < 0$ (compressão), o trabalho de $\vec{F}_M$ é $dW = F_M(x)dx = -k\, x\, dx$. Note que dW é positivo, pois para uma mola comprimida vale $x < 0$ e para uma mola descomprimindo também vale $dx > 0$ (x aumentando).

Voltando ao exercício, se a mola parte de uma compressão inicial $x_0 < 0$ e empurra a bala até se tornar relaxada ($x = 0$), o trabalho (positivo) da força de mola será:

$$W_{\vec{F}_M} = \int_{x_0}^{0} F_M(x)dx = \int_{x_0}^{0} -k\, x\, dx = \left.\frac{-k\, x^2}{2}\right|_{x_0}^{0} = -0 - \left[\frac{-k\, x_0^2}{2}\right] = \frac{k\, x_0^2}{2}$$

Por outro lado, a força de atrito se opõe ao movimento da bala ($\theta = 180°$) e enquanto ela avança pelo deslocamento de uma distância $|x_0|$, essa força realiza o trabalho negativo (lembre-se que $x_0 < 0$):

$$W_{\vec{F}_A} = F_A\,|x_0| \cos(180°) = -F_A|x_0| = F_A\,x_0$$

Concluindo, o trabalho da força resultante na bala nesse percurso dentro do cano foi:

$$W_{\vec{F}_M} + W_{\vec{F}_A} = \frac{k\,x_0^2}{2} + F_A\,x_0$$

O teorema do trabalho (W) energia cinética (K) (teorema W-K) afirma que o trabalho total, ou seja, o trabalho da força resultante em uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa partícula. Se a força resultante na partícula é $\vec{R}$ e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

Sendo a bala a partícula, se ela parte do repouso, $K(A) = 0$, e $\vec{R} = \vec{F}_M + \vec{F}_A$ (a força normal $\vec{\eta}$ cancela o peso $\vec{P}$), quando a mola relaxar a energia cinética da bala será:

$$K(B) - K(A) = K(B) = W_{\vec{R}}(A,B) = \frac{k\,x_0^2}{2} + F_A\,x_0$$

A velocidade da bala terá, ao final, módulo:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{k\,x_0^2}{2} + F_A\,x_0\right)} = \sqrt{\frac{k\,x_0^2}{m} + \frac{2\,F_A\,x_0}{m}}$$

Note que o primeiro termo na raiz é positivo, a mola fornece energia para a bala, e o segundo termo é negativo ($x_0 < 0$), o atrito retira energia da bala (que é transformada em energia interna/calor/agitação do ar). Na ausência de atrito, basta fazer $F_A = 0$ na expressão acima.

b) Aqui vamos supor que a mola relaxou somente até um $x < 0$ qualquer (e não $x = 0$ como fizemos em (b)). Se a mola parte de uma compressão inicial $x_0 < 0$ e empurra a bala até a posição $x < 0$ (antes de relaxar totalmente) o trabalho (positivo) da força de mola será:

$$W_{\vec{F}_M} = \int_{x_0}^{x} F_M(x)dx = \int_{x_0}^{x} -k\,x\,dx = \left.\frac{-k\,x^2}{2}\right|_{x_0}^{x} = \frac{-k\,x^2}{2} - \left[\frac{-k\,x_0^2}{2}\right] = \frac{k\,(x_0^2 - x^2)}{2}$$

Da mesma forma, a força de atrito atuará durante um deslocamento $x - x_0$ e seu trabalho será:

$$W_{\vec{F}_A} = F_A\,(x - x_0)\cos(180°) = -F_A\,(x - x_0) = F_A\,(x_0 - x)$$

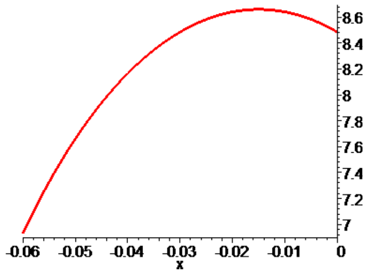
Note que se fizermos $x = 0$ recuperamos os resultados para o percurso total da bala.

A velocidade da bala nesse $x < 0$ será:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{k\,(x_0^2 - x^2)}{2} + F_A\,(x_0 - x)\right)}$$

Essa função está definida no intervalo $x_0 < x < 0$. Note que $v(x = x_0) = 0$ (parte do repouso). À medida que a posição x da bala vai mudando, sua velocidade vai mudando. Ela sempre aumenta? Ela aumenta e depois diminui? Olhando um gráfico de $v(x) \times x$ poderemos chegar a alguma conclusão.

Esse gráfico está mostrado ao lado.



O gráfico foi feito no Maple com os dados numéricos. Dá para ver que o gráfico apresenta um máximo em uma posição x_1 antes da mola relaxar ($x = 0$). Essa posição x_1 é tal que:

$$\left.\frac{dv(x)}{dx}\right|_{x_1} = 0$$

Através do Maple obtemos $x_1 = -F_A/k$ (é o ponto onde a força de mola se iguala à força de atrito, em módulo). Nesse ponto a aceleração (paralela, $a_{\parallel}$) da bala se anula. A velocidade passa por um máximo. Obtemos $x_1 = -0{,}015\ m$ e $v(x_1) \cong 8{,}7\ m/s$.

Concluindo:

$$a_{\parallel} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = v(x)\ \frac{dv(x)}{dx}$$

Os pontos de máximo e mínimo da função $v(x)$ correspondem aos pontos onde a derivada $dv(x)/dx$ se anula, ou seja, onde $a_{\parallel}$ se anula. Da 2ª lei Newton, $a_{\parallel}$ se anula quando a resultante das forças ao longo de x na bala se anula. Isso ocorre quando $F_A = -k\ x$ (atrito=força de mola, em módulo)

6.81 O bloco de massa m com velocidade inicial de módulo v_0 ao longo de –x comprime uma mola de constante k até parar, na compressão máxima $x_{MAX} < 0$ da mola. Quanto vale x_{MAX}?

a) Enquanto comprime a mola, a força resultante no bloco (ao longo de x) é a força de mola $F_M = -k\ x$. Note que, como vale $x < 0$ (mola comprimida), essa força empurra o bloco ao longo de +x, freando o bloco.

Note que $F_M = F_M(x)$. Enquanto a mola comprimida empurra o bloco, a força $\vec{F}_M$ está sempre antiparalela ao deslocamento do bloco ($\theta = 180°$). Para um deslocamento infinitesimal dx em torno da posição $x < 0$ (compressão), o trabalho de $\vec{F}_M$ é $dW = F_M(x)dx = -k\ x\ dx$. Note que dW é negativo, pois para uma mola comprimida vale $x < 0$ e para uma mola comprimindo também vale $dx < 0$ (x diminuindo).

Voltando ao nosso exercício, se a mola parte de sua posição relaxada ($x = 0$) até se tornar comprimida de $x_f < 0$, o trabalho (negativo) da força de mola no bloco será:

$$W_{\vec{F}_M} = \int_0^{x_f} F_M(x)dx = \int_0^{x_f} -k\ x\ dx = \left.\frac{-k\ x^2}{2}\right|_0^{x_f} = \left[\frac{-k\ x_f^2}{2}\right] - 0 = -\frac{k\ x_f^2}{2}$$

Concluindo, o trabalho da força resultante no bloco nesse percurso foi:

$$W_{\vec{F}_M} = -\frac{k\,x_f^2}{2}$$

O teorema do trabalho (W) energia cinética (K) (teorema W-K) afirma que o trabalho total, ou seja, o trabalho da força resultante, em uma partícula é igual à variação da energia cinética dessa partícula. Se a força resultante na partícula é $\vec{R}$ e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

$$W_{\vec{R}}(A,B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

Sendo o bloco a partícula, se ele parte com velocidade v_0, $K(A) = mv_0^2/2$, e $\vec{R} = \vec{F}_M$ (a força normal $\vec{\eta}$ cancela o peso $\vec{P}$), quando a mola estiver comprimida de x_f a energia cinética do bloco será:

$$K(B) - K(A) = -\frac{k\,x_f^2}{2}$$

Note que $\Delta K < 0$, pois o bloco vai freando e perdendo energia cinética à medida que comprime a mola.

Finalmente, para calcular x_{MAX} basta considerarmos que nesse ponto vale $K = 0$, pois o bloco para nessa compressão máxima. Assim:

$$K(B) - K(A) = -K(A) = -\frac{m\,v_0^2}{2} = -\frac{k\,x_{MAX}^2}{2} \Rightarrow x_{MAX} = -\sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0$$

Note que essa equação acima determina o $|x_{MAX}|$ e introduzimos o sinal de – “na mão” porque já sabemos que nesse caso vale $x_{MAX} < 0$ (compressão). Mas enfim, a distância de compressão da mola é $|x_{MAX}|$.

Com os dados numéricos obtemos: $x_{MAX} = -0{,}6\ m$.

b) Se fixarmos um valor de compressão máxima desejado, digamos $x_{MAX} < 0$, a velocidade v_0 de incidência do bloco na mola (que seria a velocidade máxima, posto que a mola freia o bloco) deveria ser:

$$v_0 = -\sqrt{\frac{k}{m}}x_{MAX} = \sqrt{\frac{k}{m}}|x_{MAX}|$$

Se o bloco incidir na mola com uma velocidade maior que esse v_0 acima, fatalmente a mola será comprimida além da distância desejada $|x_{MAX}|$.

6.82 O bloco de massa m_1 desliza para a direita sob ação do atrito cinético (para a esquerda) de módulo $F_A^{(C)} = \mu_C \eta_1$. Na vertical, peso e normal se anulam e $\eta_1 = m_1 g$. Portanto: $F_A^{(C)} = \mu_C m_1 g$. A força que puxa esse bloco é transmitida pela corda, de módulo T.

O bloco pendurado, de massa m_2, cai sob ação de seu peso $P_2 = m_2 g$. Uma força vertical para cima, transmitida pela corda, também de módulo T (corda leve etc.) se opõe à queda desse bloco.

Considere um eixo x ao longo do movimento do bloco 1. A força resultante nesse bloco ao longo de x é:

$$R_x = T - F_A^{(C)} = T - \mu_C m_1 g$$

Suponha que o bloco 1 deslize uma distância D para a direita. O trabalho da força resultante nesse bloco será:

$$W_1 = (T - \mu_C m_1 g)D$$

A força da corda realiza um trabalho positivo ($\theta = 0°$) e a força de atrito realiza um trabalho negativo ($\theta = 180°$).

Nesse percurso, necessariamente o bloco 2 vai cair uma altura D (este é um vínculo entre os movimentos, produzido pela corda). Considere um eixo x ao longo do movimento do bloco 2. A força resultante nesse bloco ao longo de x é:

$$R_x = m_2 g - T$$

O trabalho da força resultante nesse bloco será:

$$W_2 = (m_2 g - T)D$$

O peso realiza um trabalho positivo ($\theta = 0°$) e a força da corda realiza um trabalho negativo ($\theta = 180°$).

O teorema do trabalho energia cinética diz que a energia cinética final do bloco 1 será (supondo que ele parta do repouso):

$$\Delta K_1 = K_{1f} = W_1 = (T - \mu_C m_1 g)D$$

O teorema do trabalho energia cinética diz que a energia cinética final do bloco 2 será (supondo que ele parta do repouso):

$$\Delta K_2 = K_{2f} = W_2 = (m_2 g - T)D$$

A tensão T na corda não foi dada e nem precisamos calculá-la, pois ela pode sumir se somarmos essas duas equações:

$$K_f = K_{1f} + K_{2f} = (m_2 g - \mu_C m_1 g)D$$

Finalmente, para calcular a velocidade final v_f dos blocos temos que reconhecer que a corda produz o vínculo $v_1 = v_2$ e que, portanto: $v_{1f} = v_{2f} = v_f$. Concluindo:

$$K_f = K_{1f} + K_{2f} = \frac{(m_1 + m_2)v_f^2}{2} = (m_2 g - \mu_C m_1 g)D$$

Portanto:

$$v_f = \sqrt{\frac{2(m_2 - \mu_C m_1)g\ D}{m_1 + m_2}}$$