

EP8.7 Suponha que a bola de massa m parta do repouso, $v_0 = 0$, e ganhe uma velocidade de módulo V ao longo do eixo x (horizontal), após receber o impulso da força $\vec{F}(t)$ do taco por um intervalo de tempo τ .

A força $\vec{F}(t)$ é basicamente um pulso rápido e intenso e não esperamos que outras forças, como o peso da bola, sejam importantes para definir a velocidade final da bola com a tacada. Sendo assim, vamos assumir que $\vec{F}(t)$ é a força resultante \vec{R} na bola durante a tacada.

O teorema do impulso-momento linear (teorema J-P) diz que o impulso de \vec{R} é a variação de \vec{P} :

$$\vec{J} = \int_A^B \vec{F}(t) dt = \vec{P}(B) - \vec{P}(A)$$

sendo A e B os dois instantes limites desse impulso, ou seja, o intervalo de tempo de atuação de $\vec{F}(t)$.

A força média de $\vec{F}(t)$ é definida através do valor constante \vec{F}_{MED} que produz o mesmo impulso e, portanto, o mesmo $\Delta\vec{P}$. Para uma força constante vale:

$$\int_A^B \vec{F}_{MED} dt = \vec{F}_{MED} \int_A^B dt = \vec{F}_{MED} \Delta t = \vec{J}$$

sendo $\Delta t = t(B) - t(A)$. Portanto, a força média de $\vec{F}(t)$ é dada por:

$$\vec{F}_{MED} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}(B) - \vec{P}(A)}{t(B) - t(A)} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

Voltando à bola de golfe, obtemos:

$$\vec{P}(A) = m v_0 \hat{x} = \vec{0} \qquad \vec{P}(B) = m V \hat{x} \qquad \Delta t = \tau$$

Portanto, a força média taco/bola nessa tacada foi:

$$\vec{F}_{MED} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{m V \hat{x} - \vec{0}}{\tau} = \frac{m V}{\tau} \hat{x}$$

A força $\vec{F}(t)$ se deu ao longo do eixo x e sua média está nessa direção. Podemos notar que os dados numéricos levarão a uma força bastante intensa ($\cong 562 \text{ N}$) e muito maior que o peso mg da bola ($\cong 0,44 \text{ N}$), o que justifica nossa ideia inicial de simplesmente desconsiderar o impulso dessa força durante a tacada.

Por essa razão assumimos que $\vec{F}(t)$ é a força resultante \vec{R} na bola durante a tacada. Após a tacada, não havendo mais a força $\vec{F}(t)$, o peso da bola volta a ganhar relevância, definindo a trajetória de queda da bola. Outras forças, como o arraste na bola, também podem voltar a ter relevância.

EP8.8 Suponha que a bola de massa m chegue no bastão com velocidade de módulo v_0 e seja rebatida com velocidade (oposta) de módulo V , sempre ao longo do eixo x (horizontal). A bola recebe o impulso da força $\vec{F}(t)$ do bastão por um intervalo de tempo τ .

A força $\vec{F}(t)$ é basicamente um pulso rápido e intenso e não esperamos que outras forças, como o peso da bola, sejam importantes para definir a velocidade final da bola com a rebatida. Sendo assim, vamos assumir que $\vec{F}(t)$ é a força resultante \vec{R} na bola durante a rebatida.

O teorema do impulso-momento linear (teorema J-P) diz que o impulso \vec{J} de \vec{R} é a variação de \vec{P} :

$$\vec{J} = \int_A^B \vec{F}(t) dt = \vec{P}(B) - \vec{P}(A)$$

sendo A e B os dois instantes limites desse impulso, ou seja, o intervalo de tempo de atuação de $\vec{F}(t)$ na bola.

A força média de $\vec{F}(t)$ é definida através do valor constante \vec{F}_{MED} que produz o mesmo impulso e, portanto, mesmo $\Delta\vec{P}$. Para uma força constante vale:

$$\int_A^B \vec{F}_{MED} dt = \vec{F}_{MED} \Delta t = \vec{J}$$

sendo $\Delta t = t(B) - t(A)$. Portanto, a força média de $\vec{F}(t)$ é dada por:

$$\vec{F}_{MED} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}(B) - \vec{P}(A)}{t(B) - t(A)} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

Voltando à bola de beisebol, obtemos:

$$\vec{P}(A) = m v_0 \hat{x} \qquad \vec{P}(B) = -m V \hat{x} \qquad \Delta t = \tau$$

A variação no momento linear da bola foi: $\Delta\vec{P} = -m V \hat{x} - m v_0 \hat{x} = -m (V + v_0) \hat{x}$. Esse foi o impulso que o bastão aplicou na bola no intervalo de tempo $\Delta t = \tau$.

b) Portanto, a força média bastão/bola nessa tacada foi:

$$\vec{F}_{MED} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{-m V \hat{x} - m v_0 \hat{x}}{\tau} = -\frac{m (V + v_0)}{\tau} \hat{x}$$

A força $\vec{F}(t)$ se deu ao longo do eixo x , no sentido de $-x$, e sua média está nessa direção/sentido. Podemos notar que os dados numéricos levarão a uma força bastante intensa ($\cong 7.250 N$) e muito maior que o peso mg da bola ($\cong 1,4 N$), o que justifica nossa ideia inicial de simplesmente desconsiderar o impulso dessa força durante a rebatida. Por isso consideramos que a força $\vec{F}(t)$ é a força resultante na bola durante a rebatida.

EP8.11 O foguete de massa M recebe o impulso de uma força (do motor) de módulo variável no tempo $F(t) = A t^2$ ao longo do eixo x .

a) Conhecendo o valor de $F(t)$ em um instante t_1 qualquer, digamos $F(t_1) = F_1$, podemos determinar o valor da constante A :

$$F(t_1) = F_1 = A t_1^2 \Rightarrow A = \frac{F_1}{t_1^2}$$

A unidade de A no SI seria N/s^2 . Com os dados numéricos obtemos $A = 781,25/(1,25)^2 = 500 N/s^2$.

b) O impulso de uma força qualquer é:

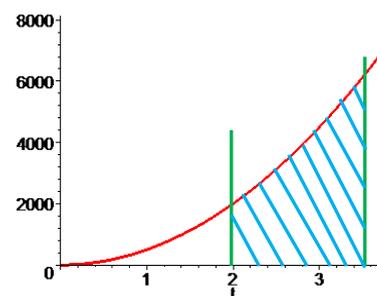
$$\vec{J} = \int_A^B \vec{F}(t) dt$$

sendo A e B os dois instantes limites desse impulso, ou seja, o intervalo de tempo de atuação de $\vec{F}(t)$.

Voltando à força do motor no foguete, no intervalo de tempo $[t_0, t_f]$ o impulso foi:

$$\vec{J} = \int_A^B \vec{F}(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} A t^2 \hat{x} dt = \frac{A}{3} [t_f^3 - t_0^3] \hat{x}$$

J é a área abaixo da curva da função $F(t)$. A Figura ao lado ilustra essa área para o intervalo de tempo (em segundos) $[t_0 = 2, t_f = 2 + 1,5]$, para o qual obtemos $J \cong 5,8 \times 10^3 N s$.



c) O teorema do impulso-momento linear (teorema J-P) diz que o impulso

\vec{J} da resultante \vec{R} é a variação de \vec{P} :

$$\vec{J} = \int_A^B \vec{R}(t) dt = \vec{P}(B) - \vec{P}(A)$$

sendo A e B os dois instantes limites desse impulso. Assumindo que $\vec{F}(t)$ é a força resultante no foguete, obtemos:

$$\vec{J} = \frac{A}{3} [t_f^3 - t_0^3] \hat{x} = \vec{P}(t_f) - \vec{P}(t_0) = M V_f \hat{x} - M V_0 \hat{x}$$

Concluindo, graças a esse impulso do motor, a velocidade do foguete variou (em módulo) de:

$$\Delta V = V_f - V_0 = \frac{J}{M} = \frac{A}{3M} [t_f^3 - t_0^3]$$

Considerando o intervalo de tempo (em segundos) $[t_0 = 2, t_f = 2 + 1,5]$, obtemos $J \cong 5,8 \times 10^3 N s$ e $\Delta V \cong 2,7 m/s$.

EP8.13 Vamos chamar de x um eixo horizontal que aponta da esquerda para a direita. A pedra de massa M possui velocidade inicial $V_0 \hat{x}$. A pedra recebe um pulso de uma força horizontal de módulo $F(t)$ conforme o gráfico dado. A força é constante de módulo $F_0 (= 2.500 \text{ N})$ durante um intervalo de tempo $\tau (= 1 \text{ ms})$.

a) O impulso \vec{J} de uma força qualquer é:

$$\vec{J} = \int_A^B \vec{F}(t) dt$$

sendo A e B os dois instantes limites desse impulso, ou seja, o intervalo de tempo de atuação de $\vec{F}(t)$. Sendo $\vec{F}(t)$ horizontal, segue que \vec{J} é horizontal e de módulo $J = F_0 \tau$, que é a área do retângulo no gráfico de $F(t) \times t$. Com os dados numéricos obtemos $J = 2,5 \text{ N s}$.

b) O teorema do impulso-momento linear (teorema J-P) diz que o impulso da resultante \vec{R} é a variação de \vec{P} :

$$\int_A^B \vec{R}(t) dt = \vec{P}(B) - \vec{P}(A)$$

sendo A e B os dois instantes limites desse impulso. Assumindo que $\vec{F}(t)$ é a força resultante na pedra (não há atrito), obtemos:

$$\vec{J} = \pm F_0 \tau \hat{x} = \vec{P}(t_f) - \vec{P}(t_0) = M V_f \hat{x} - M V_0 \hat{x}$$

Os sinais \pm permitem assumir que a força $\vec{F}(t)$ atuou (na horizontal) para a esquerda ou para a direita e $V_f \hat{x}$ é a velocidade da pedra após ela receber esse impulso. Obtemos:

$$V_f \hat{x} = V_0 \hat{x} \pm \frac{F_0 \tau}{M} \hat{x}$$

i) Se $\vec{F}(t)$ atua para a direita, então $\vec{F}(t) = F(t) \hat{x}$ e $\vec{J} = F_0 \tau \hat{x}$. A velocidade final da pedra será:

$$V_f \hat{x} = V_0 \hat{x} + \frac{F_0 \tau}{M} \hat{x} = \left(V_0 + \frac{F_0 \tau}{M} \right) \hat{x}$$

A velocidade da pedra continua horizontal e aumenta de magnitude (passa de 5 m/s para $6,25 \text{ m/s}$).

ii) Se $\vec{F}(t)$ atua para a esquerda, então $\vec{F}(t) = -F(t) \hat{x}$ e $\vec{J} = -F_0 \tau \hat{x}$. A velocidade final da pedra será:

$$V_f \hat{x} = V_0 \hat{x} - \frac{F_0 \tau}{M} \hat{x} = \left(V_0 - \frac{F_0 \tau}{M} \right) \hat{x}$$

A velocidade da pedra continua horizontal e diminui de magnitude (passa de 5 m/s para $3,75 \text{ m/s}$).

EP8.17 Vamos chamar de x o eixo horizontal para a direita de deslocamento dos discos, de massas M_1 e M_2 . Os “dados” para os movimentos dos discos são:

Disco	A (massa M_1)	B (massa M_2)
Velocidade inicial	$V_0 \hat{x}$ (incógnita)	$\vec{0}$
Velocidade final	$-V_{fA} \hat{x}$	$V_{fB} \hat{x}$

a) Da conservação do momento linear do sistema de dois discos (A+B) obtemos:

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final} \Rightarrow M_1 V_0 \hat{x} + M_2 \vec{0} = M_1 (-V_{fA} \hat{x}) + M_2 V_{fB} \hat{x}$$

Portanto:

$$M_1 V_0 = -M_1 V_{fA} + M_2 V_{fB} \Rightarrow V_0 = -V_{fA} + \frac{M_2}{M_1} V_{fB}$$

Obtemos $V_0 = 0,79 \text{ m/s}$. As forças internas entre os discos não são capazes de alterar o valor de $\vec{P} = \vec{P}_A + \vec{P}_B$.

b) Antes da colisão a energia cinética do sistema A+B era:

$$K_{inicial} = M_1 \frac{V_0^2}{2}$$

Depois da colisão a energia cinética do sistema A+B passou a ser:

$$K_{final} = M_1 \frac{V_{fA}^2}{2} + M_2 \frac{V_{fB}^2}{2}$$

Obtemos $\Delta K = K_{final} - K_{inicial} = -0,0023 \text{ J}$. A colisão foi inelástica. Parte da energia cinética do sistema foi convertida em energia interna (calor) e/ou elástica (deformações, como em molas) dos dois discos.

8.20 Trata-se de uma espécie de explosão, ou anti-colisão, em que dois corpos A e B se separam subitamente. Vamos chamar de x o eixo horizontal para a direita. Não há atrito nos blocos, o que sugere logo a conservação do momento linear P_x do sistema A+B (a mola não possui massa e nem momento linear).

O momento linear inicial é nulo, pois os blocos são liberados do repouso. Portanto, as velocidades finais dos blocos obedecem à equação:

$$P_x = 0 = m_A V_{fA} + m_B V_{fB} \Rightarrow V_{fA} = -\frac{m_B}{m_A} V_{fB}$$

As velocidades são opostas, daí o sinal de $-$, e obtemos $|V_{fA}| = 3,6 \text{ m/s}$.

b) Antes não havia energia cinética no sistema e depois passou a ter (a mola não possui massa e nem energia cinética):

$$K_f = \frac{m_A}{2} V_{fA}^2 + \frac{m_B}{2} V_{fB}^2$$

Obtemos $K_f = 8,64 \text{ J}$.

Aplicando o teorema do trabalho-energia ao sistema de dois blocos+mola obtemos:

$$[K_f + U_f] - [K_0 + U_0] = W_{outras\ for\ ças} = 0 \Rightarrow U_0 = K_f$$

O sistema é conservativo, pois não há outras forças realizando trabalho. Antes a mola estava comprimida (U_0) e os blocos parados ($K_0 = 0$) e depois a mola está relaxada ($U_f = 0$) e os blocos estão se movendo (K_f). A energia K_f veio da energia elástica inicial U_0 armazenada na mola. O momento linear do sistema se conservou, por causa da ausência de forças externas no sistema A+B. Durante a “explosão” atuaram somente forças internas ao sistema A+B+mola. A mola fez força nos blocos e vice-versa. Essas forças internas não são capazes de alterar o momento linear P_x do sistema A+B+mola.

Isso ocorre com uma granada que explode. Seus fragmentos se espalham para todos os lados e o momento linear final total de todos os fragmentos continua sendo nulo. Do ponto de vista do centro de massa (CM), como $\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$, o fato de valer $\vec{P} = \vec{0}$ corresponde ao CM dos fragmentos permanecer em repouso, no mesmo lugar, enquanto esses se espalham. Note que no presente caso, dos dois blocos, o repouso do CM do sistema A+B corresponde exatamente à equação $0 = m_A V_{fA} + m_B V_{fB} = (m_A + m_B)v_{CM}$.

EP8.27 Suponha um referencial com eixo x horizontal ao longo do movimento do vagão e eixo y vertical para cima. Considere o vagão de massa M se movendo (sozinho, por inércia) com velocidade inicial $V_0 \hat{x}$. Uma gota de chuva possui massa m e velocidade inicial $-v_0 \hat{y}$. Não há atrito no vagão (que seria ao longo de x).

Considere a colisão vagão+gota. Ao longo de y o momento linear do sistema vagão+gota não se conserva, porque quando a gota bate no vagão o piso rígido reage com uma força $\vec{\eta}$ que impede o afundamento (por menor que fosse) do vagão. Essa força produz um impulso vertical para cima, que produz a variação em P_y do sistema vagão+gota (note que o p_y da gota “desaparece” após a colisão). Ao longo de x não há forças externas ao sistema vagão+gota e, portanto, P_x deve se conservar. Com a queda de uma gota, a velocidade ao longo de x do vagão (e da gota) deve passar a ser V_f tal que:

$$P_x = M V_0 = M V_f + m V_f = (M + m)V_f \Rightarrow V_f = \frac{M}{M + m} V_0$$

Com a queda da segunda gota a velocidade em x do vagão passa a ser V_f' tal que:

$$P_x = (M + m)V_f = (M + m)V_f' + m V_f' = (M + 2m)V_f' \Rightarrow V_f' = \frac{M + m}{M + 2m} V_f = \frac{M}{M + 2m} V_0$$

Enfim, com o acúmulo de uma massa total m_G de gotas de água, a velocidade em x do vagão passará a ser:

$$V_f = \frac{M}{M + m_G} V_0$$

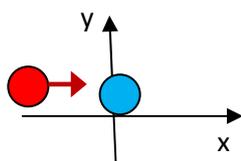
Obtemos $V_f = 3,56 \text{ m/s}$.

Cada gota que cai no vagão recebe um peteleco de força paralelo ao movimento do vagão e um impulso, que aumenta o momento linear em x da gota. A gota, por sua vez, dá um peteleco no vagão no sentido oposto (ação e reação) e gera um impulso no vagão, que reduz seu momento linear. Com isso, as gotas

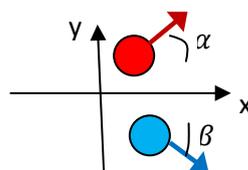
vão caindo e ganhando momento linear enquanto que o vagão vai perdendo momento linear. O momento linear horizontal do sistema gotas+vagão se conserva, porque não há forças externas nesse sistema ao longo da horizontal x. O momento P_y do sistema não se conserva, por causa do contato do vagão com o piso ($\vec{\eta}$). Pelo contrário, cada gota cai com um p_y para baixo, que “desaparece” por causa do impulso de $\vec{\eta}$ para cima.

EP8.28

Antes



Depois



As figuras acima resumem a ideia da colisão (bidimensional) entre A (vermelho) e B (azul). Considere que antes da colisão $\vec{V}_{A0} = V_{A0} \hat{x}$ e $\vec{V}_{B0} = \vec{0}$ e que depois da colisão o asteróide A possui velocidade de módulo V_A que forma um ângulo α com o eixo x e que o asteróide B possui velocidade de módulo V_B que forma um ângulo β com o eixo x. O eixo x é apenas a direção original de movimento do asteróide A.

Os asteróides colidem no vácuo e não há nenhuma força externa importante ao sistema A+B durante a colisão. Por isso o momento linear \vec{P} do sistema A+B deve se conservar na colisão. Um asteróide faz força no outro (ação e reação) e essas forças internas não são capazes de alterar o valor de \vec{P} do sistema A+B.

$$\text{Ao longo de x obtemos: } P_x = M_A V_{A0} = M_A V_A \cos(\alpha) + M_B V_B \cos(\beta)$$

$$\text{Ao longo de y obtemos: } P_y = 0 = M_A V_A \sin(\alpha) - M_B V_B \sin(\beta) \Rightarrow M_A V_A = M_B V_B \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$$

Portanto:

$$M_A V_{A0} = M_A V_A \cos(\alpha) + M_B V_B \cos(\beta) = M_B V_B \left(\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \cos(\alpha) + \cos(\beta) \right)$$

$$M_A V_{A0} = M_A V_A \cos(\alpha) + M_B V_B \cos(\beta) = M_A V_A \left(\cos(\alpha) + \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \cos(\beta) \right)$$

Obtemos (fazendo $M_A = M_B$):

$$V_B = \frac{V_{A0}}{\left(\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \cos(\alpha) + \cos(\beta) \right)} \cong 20,7 \text{ m/s}$$

$$V_A = \frac{V_{A0}}{\left(\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \cos(\beta) + \cos(\alpha) \right)} \cong 29,3 \text{ m/s}$$

b) O asteróide A possuía antes da colisão a energia cinética:

$$K_{A0} = \frac{1}{2} M_A V_{A0}^2$$

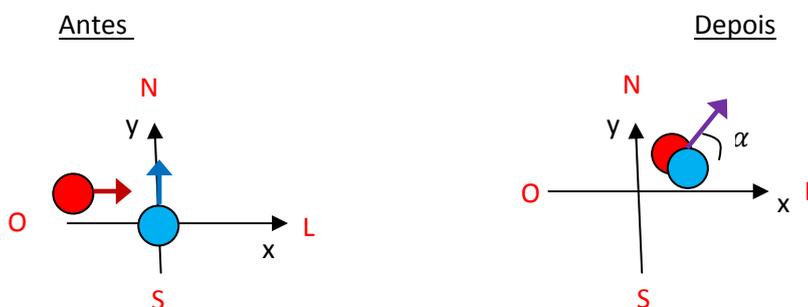
Após a colisão o sistema A+B possui a energia cinética total:

$$K_f = \frac{1}{2} M_A V_A^2 + \frac{1}{2} M_B V_B^2$$

A variação na energia cinética do sistema foi: $\Delta K = K_f - K_{A0}$. Obtemos que ΔK (que é negativo) é, em módulo, basicamente 20% de K_{A0} . Isso significa que aproximadamente 20% da energia cinética inicial de A é convertida em outras formas de energia (interna+elástica/deformações, como em molas) durante a colisão, que é inelástica.

Colisões entre bolas de sinuca podem ser parecidas com a discutida aqui, mas estas são bem próximas de colisões elásticas ($\Delta K = 0$). Isso ocorre basicamente por causa da dureza das bolas de sinuca.

EP8.33



As figuras acima resumem a ideia da colisão (bidimensional) entre MC (vermelho, de massa M_{MC}) e Z (azul, de massa M_Z). Trata-se de uma colisão completamente inelástica em que, ao final, há apenas um corpo de massa $M_{MC} + M_Z$ se movendo com velocidade de módulo V_f que faz um ângulo α com o eixo x.

A ideia da presença de lama (escorregadia) no piso sugere que as forças externas horizontais que atuam nos jogadores são desprezíveis e que, portanto, nesse plano xy o momento linear \vec{P} do sistema MC+Z se conserva. Os jogadores fazem força um no outro, mas essas forças são internas ao sistema MC+Z e não são capazes de alterar o valor de $\vec{P} = \vec{P}_{MC} + \vec{P}_Z$.

Considere que antes da colisão o jogador MC se movia com $\vec{V}_{MC} = V_{MC} \hat{x}$ e o jogador Z se movia com $\vec{V}_Z = V_Z \hat{y}$.

Da conservação de P_x obtemos (olhando as figuras acima):

$$M_{MC} V_{MC} = (M_{MC} + M_Z) V_f \cos(\alpha)$$

Da conservação de P_y obtemos (olhando as figuras acima):

$$M_Z V_Z = (M_{MC} + M_Z) V_f \sin(\alpha)$$

Elevando essas duas equações ao quadrado e somando obtemos (lembrando que $[\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2 = 1$):

$$[M_{MC}V_{MC}]^2 + [M_ZV_Z]^2 = [(M_{MC} + M_Z) V_f]^2$$

Concluindo, o módulo da velocidade final comum aos dois jogadores é:

$$V_f = \frac{\sqrt{[M_{MC}V_{MC}]^2 + [M_ZV_Z]^2}}{M_{MC} + M_Z} \cong 5,9 \text{ m/s}$$

Dividindo uma equação pela outra obtemos:

$$\frac{M_ZV_Z}{M_{MC}V_{MC}} = \frac{(M_{MC} + M_Z) V_f \sin(\alpha)}{(M_{MC} + M_Z) V_f \cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha \cong 58^\circ$$

EP8.38 Há aqui dois processos independentes entre si. Primeiramente há uma colisão completamente inelástica entre a bala (de massa m e velocidade inicial horizontal (x) de módulo v_{0B}) e o bloco de madeira (de massa M e inicialmente em repouso) e depois o deslizamento do bloco (com a bala incrustada) que parte com velocidade horizontal de módulo V_f e vai deslizando e parando pela ação do atrito cinético.

Vamos considerar primeiramente a colisão bala+bloco. Nesse processo as forças externas são desprezíveis e podemos considerar a conservação de P_x do sistema bala+bloco. Obtemos:

$$P_x = m v_{0B} = (m + M)V_f$$

Portanto, logo após a colisão, o bloco e a bala se deslocam juntos ao longo de x com velocidade de módulo:

$$V_f = \frac{m}{M + m} v_{0B}$$

Agora vamos aplicar o teorema W-K ao bloco+bala que vai parando pela ação do atrito. Se a força resultante na partícula é \vec{R} e a partícula se desloca desde A até B, o teorema W-K fica:

$$W_{\vec{R}}(A, B) = \Delta K = K(B) - K(A)$$

sendo $K = m v^2/2$. Considere que a partícula é o bloco+bala, que $K(A) = (M + m)V_f^2/2$, $K(B) = 0$ e que a força resultante na partícula é a força de atrito cinético de módulo: $F_A^{(C)} = \mu_c \eta = \mu_c (M + m)g$ (peso e normal não realizam trabalho para um deslocamento horizontal do bloco).

Se o bloco avança uma distância D até parar, o trabalho de $\vec{F}_A^{(C)}$ será (note que força de atrito e o deslocamento são opostos entre si: $\theta = 180^\circ$):

$$W_{F_A^{(C)}} = F_A^{(C)} D \cos(180^\circ) = -F_A^{(C)} D = -\mu_c (M + m) g D$$

Portanto:

$$W_{\vec{R}}(A, B) = -\mu_c (M + m) g D = \Delta K = -K(A) = -(M + m)V_f^2/2$$

Obtemos:

$$V_f^2 = 2 \mu_c g D$$

$$V_f \cong 0,95 \text{ m/s.}$$

Portanto, a velocidade de incidência da bala no bloco foi:

$$V_f^2 = \left[\frac{m}{M+m} v_{0B} \right]^2 = 2 \mu_c g D \Rightarrow v_{0B} = \frac{M+m}{m} \sqrt{2 \mu_c g D} \cong 229 \text{ m/s}$$

A força de atrito cinético é irrelevante para a colisão, que é um evento intenso e rápido, mas é relevante para o processo (lento) de levar o bloco e a bala ao repouso após a colisão. Esse dispositivo pode constituir um sistema prático de medição de velocidades de projéteis de armas de fogo.

EP8.43 Considere um eixo x horizontal para a direita. A bola A, de massa M_A se movia com velocidade inicial $V_{0A} \hat{x}$. A bola B, de massa M_B se movia com velocidade inicial $-V_{0B} \hat{x}$. A colisão é frontal, ou seja, unidimensional, e após a colisão as duas bolas continuam a se mover ao longo de x com velocidades $V_A \hat{x}$ e $V_B \hat{x}$. A colisão é, por hipótese, elástica (basicamente porque as bolas de gude são muito duras). Mas isso não está claro no enunciado.

a) Não havendo atritos ou outras forças externas importantes nas bolas ao longo de x durante a colisão, podemos apelar para a conservação de P_x do sistema de duas bolas. Obtemos:

$$P_x = M_A V_{0A} - M_B V_{0B} = M_A V_A + M_B V_B$$

Do fato da colisão ser elástica obtemos (precisamos dessa hipótese, pois há duas incógnitas):

$$2 K = M_A V_{0A}^2 + M_B V_{0B}^2 = M_A V_A^2 + M_B V_B^2$$

Para simplificar essas duas equações vamos definir a razão entre as massas $r = M_A/M_B$. Ficamos com:

$$r V_{0A} - V_{0B} = r V_A + V_B \Rightarrow r(V_{0A} - V_A) = V_{0B} + V_B$$

$$r V_{0A}^2 + V_{0B}^2 = r V_A^2 + V_B^2 \Rightarrow r(V_{0A}^2 - V_A^2) = V_B^2 - V_{0B}^2$$

Note que $V_{0A}^2 - V_A^2 = (V_{0A} - V_A)(V_{0A} + V_A)$ e $V_B^2 - V_{0B}^2 = (V_B - V_{0B})(V_B + V_{0B})$. Portanto:

$$r(V_{0A}^2 - V_A^2) = V_B^2 - V_{0B}^2 \Rightarrow r(V_{0A} - V_A)(V_{0A} + V_A) = (V_B - V_{0B})(V_B + V_{0B}) \Rightarrow$$

$$(V_{0B} + V_B)(V_{0A} + V_A) = (V_B - V_{0B})(V_B + V_{0B}) \Rightarrow V_{0A} + V_A = V_B - V_{0B}$$

Substituindo essa última equação na primeira da lista acima obtemos:

$$r(V_{0A} - V_A) = V_{0B} + V_B \Rightarrow r(V_{0A} - V_A) = V_{0B} + V_{0A} + V_A + V_{0B} \Rightarrow V_A = -\frac{2 V_{0B} + (1-r)V_{0A}}{1+r}$$

Para V_B obtemos:

$$r(V_{0A} - V_A) = V_{0B} + V_B \Rightarrow r(V_{0A} + V_{0A} - V_B + V_{0B}) = V_{0B} + V_B \Rightarrow V_B = \frac{2 r V_{0A} - (1-r) V_{0B}}{1+r}$$

Para saber o sentido de movimento de cada bola deveremos determinar os sinais de V_A e de V_B . Assumimos que as duas velocidades estão ao longo de $+x$. Uma velocidade negativa significará uma velocidade ao longo de $-x$. Somente os dados numéricos poderão determinar esses sinais.

Vamos analisar o caso particular $r = M_A/M_B = 1$, como ocorreria com bolas iguais. Obtemos:

$$V_A = -\frac{2V_{0B} + (1-r)V_{0A}}{1+r} = -V_{0B}$$

$$V_B = \frac{2rV_{0A} - (1-r)V_{0B}}{1+r} = V_{0A}$$

Nesse caso a bola A rebate para a esquerda e a bola B rebate para a direita, suas velocidades trocam em módulo: A assume a velocidade que era de B e vice-versa.

Cada bola sofre uma variação de momento linear ao longo de x , devido ao impulso da força de impacto da outra bola (a força que A faz em B é uma força externa para B e vice-versa).

Para a bola A (usando as equações obtidas acima):

$$\Delta p_A = M_A(V_A - V_{0A}) = -M_A\left(\frac{V_{0B} + V_B}{r}\right) = -M_B(V_{0B} + V_B)$$

Para a bola B:

$$\Delta p_B = M_B(V_B - (-V_{0B})) = M_B(V_B + V_{0B}) = -\Delta p_A$$

Para o sistema A+B (como já assumimos):

$$\Delta p = \Delta p_A + \Delta p_B = -M_B(V_{0B} + V_B) + M_B(V_B + V_{0B}) = 0$$

As forças (internas) de A em B e de B em A (ação e reação) não são capazes de variar o momento linear do sistema A+B. A força que B faz em A altera o valor de p_A e a força que A faz em B altera o valor de p_B . Somente forças externas, exercidas pela vizinhança em A e B, poderiam alterar o valor de $p_A + p_B$.

c) Quanto às variações de energia cinética obtemos:

Para a bola A:

$$\Delta K_A = \frac{M_A}{2}(V_A^2 - V_{0A}^2) = \frac{M_A}{2}\left(\frac{V_{0B}^2 - V_B^2}{r}\right) = \frac{M_B}{2}(V_{0B}^2 - V_B^2)$$

Para a bola B:

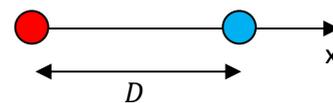
$$\Delta K_B = \frac{M_B}{2}(V_B^2 - V_{0B}^2) = -\Delta K_A$$

Para o sistema A+B (como já assumimos, colisão elástica):

$$\Delta K = \Delta K_A + \Delta K_B = 0$$

Não há forças dissipativas no sistema, o ganho de energia cinética de uma bola vem da perda de energia cinética da outra bola e a energia cinética total se conserva. Isso ocorre basicamente por causa da dureza, ou ausência de deformação, das bolas de gude. Algo similar ocorre em um jogo de sinuca.

EP8.49 A Figura ao lado resume a ideia: Plutão (vermelho) e Charon (azul) formam basicamente um haltere gigantesco. Colocamos Plutão na origem $x=0$ de nosso referencial. D é a distância entre seus centros. Os diâmetros desses corpos não importam para o desenho, pois a ideia do centro de massa (CM) é exatamente a de que esses corpos se comportam como partículas localizadas em seus CMs e concentrado toda a massa.



O centro de massa desse haltere está em x_{CM} tal que:

$$x_{CM} = \frac{M_P \cdot 0 + M_C D}{M_P + M_C} = \frac{M_C}{M_P + M_C} D$$

Fica claro que $0 < x_{CM} < D$, ou seja, que o CM do haltere está em um ponto entre as duas massas (como não poderia deixar de ser).

As massas não foram dadas, mas podem ser calculadas pelos volumes (das esferas) e pela densidade de massa ρ .

$$M_C = \rho \frac{4}{3} \pi R_C^3$$

$$M_P = \rho \frac{4}{3} \pi R_P^3$$

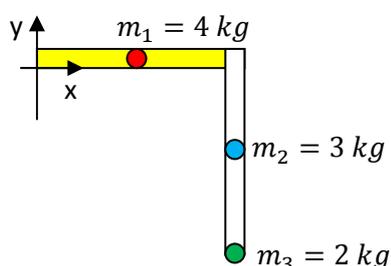
Portanto:

$$x_{CM} = \frac{M_C}{M_P + M_C} D = \frac{R_C^3}{R_P^3 + R_C^3} D$$

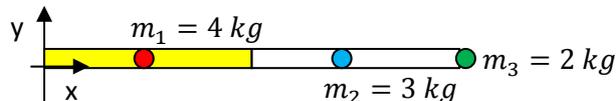
Com os dados numéricos obtemos $x_{CM} \cong 2.500 \text{ km}$. Como o centro de Plutão está em $x=0$, esta é a distância do CM do sistema Plutão+Charon até o centro de Plutão. O CM está 1.315 km além da superfície de Plutão.

EP8.51 Vamos fazer uma Figura que simplifica a ideia: Cada barra se comporta como uma partícula localizada em seu CM (o centro geométrico) concentrando toda a massa. A bola pequena se comporta como uma partícula.

Antes



Depois



Vamos imaginar a barra horizontal (amarela) de comprimento A fixa e a barra que gira de comprimento B . Nas duas figuras considere um referencial (fixo) xy com origem na extremidade esquerda da barra fixa.

Antes, a posição do CM do sistema estava em (à direita e abaixo de m_1):

$x_{CM} = \frac{m_1 \left(\frac{A}{2}\right) + m_2 A + m_3 A}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} A$	$y_{CM} = \frac{m_1 0 + m_2 \left(-\frac{B}{2}\right) + m_3 (-B)}{m_1 + m_2 + m_3} =$ $= -\frac{\frac{m_2}{2} + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} B$
---	--

Depois, a posição do CM do sistema passou a estar em (mais à direita e alinhada na vertical y com m_1):

$x_{CM} = \frac{m_1 \left(\frac{A}{2}\right) + m_2 \left(A + \frac{B}{2}\right) + m_3 (A + B)}{m_1 + m_2 + m_3}$	$y_{CM} = \frac{m_1 0 + m_2 0 + m_3 0}{m_1 + m_2 + m_3} = 0$
--	--

Portanto, nessa mudança de posição das peças da máquina o CM dessa peça se deslocou de:

Ao longo de x:

$$\Delta x = \frac{m_1 \left(\frac{A}{2}\right) + m_2 \left(A + \frac{B}{2}\right) + m_3 (A + B)}{m_1 + m_2 + m_3} - \frac{\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} A = \frac{\frac{m_2}{2} + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} B$$

Ao longo de y:

$$\Delta y = 0 - \left[-\frac{\frac{m_2}{2} + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} B \right] = \frac{\frac{m_2}{2} + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} B$$

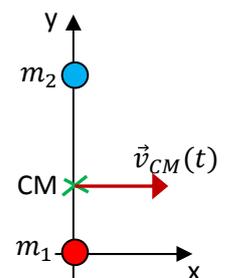
O CM se deslocou para a direita de Δx e para cima de Δy . Note que $\Delta x = \Delta y = 0,7 \text{ m}$.

EP8.54

a) A posição do CM desse haltere em $t = 0$ é:

$$x_{CM} = \frac{m_1 0 + m_2 0}{m_1 + m_2} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 0 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} y_2$$



Portanto, a massa total (constante) do sistema é:

$$m_1 + m_2 = \frac{y_2}{y_{CM}} m_2 = 1,25 \text{ kg}$$

Note que $m_1 = (m_1 + m_2) - m_2 = 0,75 \text{ kg}$.

b) A velocidade do CM é $\vec{v}_{CM}(t) = k t^2 \hat{x}$, portanto, a aceleração do CM é:

$$\vec{a}_{CM}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}_{CM}(t) = 2 k t \hat{x}$$

c) O CM se move como se fosse uma partícula concentrando toda a massa do sistema e submetida à força externa resultante \vec{R}_{ext} atuando no sistema. Portanto:

$$\vec{R}_{ext} = (m_1 + m_2) \vec{a}_{CM}$$

Concluindo, atua nesse haltere a força resultante externa (variável no tempo):

$$\vec{R}_{ext}(t) = (m_1 + m_2) \vec{a}_{CM}(t) = (m_1 + m_2) 2 k t \hat{x}$$

Enfim, forças externas atuam nas duas partículas desse haltere e fazem com que ele acelere e se desloque no espaço. O CM do sistema vai junto, como se ele fosse uma partícula de massa $m_1 + m_2$ em que atua a resultante das forças externas que estão de fato atuando nas duas partículas. As forças internas ao sistema, de uma partícula na outra ou de uma partícula na haste que conecta as duas partículas etc. não mudam nada disso.

EP8.86 Considere um eixo x horizontal para a direita. O objeto A, de massa M_A se movia com velocidade inicial $V_0 \hat{x}$. O objeto B, de massa M_B estava em repouso. A colisão é frontal, ou seja, unidimensional, e após a colisão os dois objetos continuam a se mover ao longo de x com velocidades $V_A \hat{x}$ e $V_B \hat{x}$. A colisão é, por hipótese, elástica.

a) Não havendo atritos ou outras forças externas importantes nos objetos ao longo de x durante a colisão, podemos apelar para a conservação de P_x do sistema de dois objetos. Obtemos:

$$P_x = M_A V_0 = M_A V_A + M_B V_B$$

Do fato da colisão ser elástica obtemos:

$$2 K = M_A V_0^2 = M_A V_A^2 + M_B V_B^2$$

Para simplificar essas duas equações vamos definir a razão entre as massas $r = M_A/M_B$. Ficamos com:

$$r V_0 = r V_A + V_B \Rightarrow r(V_0 - V_A) = V_B$$

$$r V_0^2 = r V_A^2 + V_B^2 \Rightarrow r(V_0^2 - V_A^2) = V_B^2$$

Note que $V_0^2 - V_A^2 = (V_0 - V_A)(V_0 + V_A)$. Portanto:

$$r(V_0^2 - V_A^2) = V_B^2 \Rightarrow r(V_0 - V_A)(V_0 + V_A) = r^2(V_0 - V_A)^2 \Rightarrow V_0 + V_A = r(V_0 - V_A)$$

Concluindo:

$$V_A = \frac{r-1}{r+1} V_0$$

$$V_B = r(V_0 - V_A) \Rightarrow V_B = \frac{2r}{r+1} V_0$$

A energia cinética original era: $K_0 = \frac{M_A}{2} V_0^2$.

Após a colisão:

$$K_A = \frac{M_A}{2} V_A^2 = \frac{M_A}{2} \left[\frac{r-1}{r+1} V_0 \right]^2 = \left[\frac{r-1}{r+1} \right]^2 K_0$$

$$K_B = \frac{M_B}{2} V_B^2 = \frac{M_B}{2} \left[\frac{2r}{r+1} V_0 \right]^2 = \frac{1}{r} \left[\frac{2r}{r+1} \right]^2 K_0 = \frac{4r}{(r+1)^2} K_0$$

Note que a colisão é elástica, como já assumimos desde o início:

$$K_A + K_B = \left\{ \left[\frac{r-1}{r+1} \right]^2 + \frac{4r}{(r+1)^2} \right\} K_0 = \left\{ \frac{r^2 + 2r + 1}{(r+1)^2} \right\} K_0 = K_0$$

Para o caso particular $r = M_A/M_B = 1$ obtemos:

$$K_A = \left[\frac{r-1}{r+1} \right]^2 K_0 = 0 \qquad K_B = \frac{4r}{(r+1)^2} K_0 = K_0$$

Vemos que nesse caso o objeto A fica parado após a colisão ($V_A = 0$) e o objeto B assume a velocidade V_0 . Portanto, a energia cinética (conservada) é toda transferida de A para B.

Haveria um compartilhamento igualitário da energia cinética após a colisão se valesse:

$$K_A = K_B \Rightarrow \left[\frac{r-1}{r+1} \right]^2 = \frac{4r}{(r+1)^2} \Rightarrow (r-1)^2 = 4r \Rightarrow r^2 - 6r + 1 = 0$$

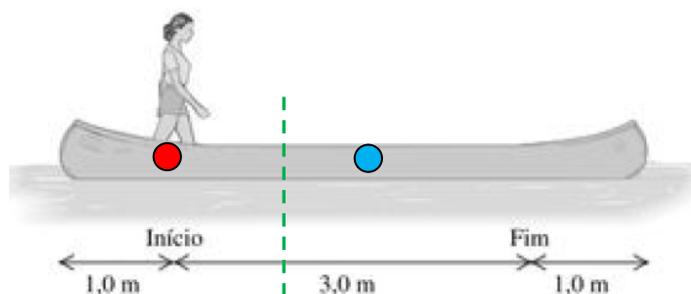
Portanto:

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{M_A}{M_B}$$

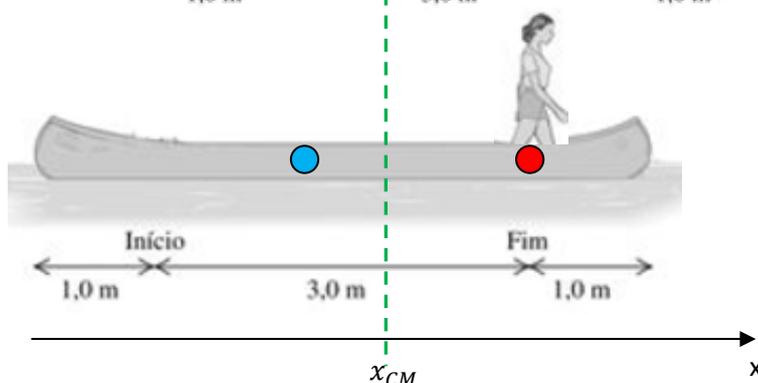
Obtemos, portanto, as duas possibilidades (raízes): $r \cong 5,83$ e $r \cong 0,172$.

EP8.100

Antes



Depois



A ideia está ilustrada acima. Não havendo forças externas importantes em x (resistência da água), o momento linear do sistema canoa+jovem se conserva enquanto ela se desloca dentro da canoa. Pensando no centro de massa (CM) desse sistema, isso equivale a dizer que a velocidade do CM não muda enquanto a jovem caminha dentro do barco (porque $\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$). Sendo a velocidade inicial nula, segue que o CM do sistema permanece em repouso, no mesmo lugar: enquanto a jovem muda sua posição, o barco também muda de posição, de tal forma a manter o CM do sistema fixo no mesmo valor x_{CM} . Na figura acima representamos a jovem e a canoa por partículas de massas M_J e M_C . Essas partículas estão nos CMs desses corpos. Mas, como não estamos interessados na direção vertical, preferimos representar a jovem por uma partícula (vermelha) no mesmo nível da partícula (azul) que representa a canoa (que está no centro da canoa). Na vertical não acontece nada de importante (o CM da jovem está de fato próximo da barriga dela).

Vamos chamar de D (3 m) a distância percorrida pela jovem dentro do barco e de L (1 m) as distâncias das extremidades da canoa até as duas posições inicial e final da jovem. Vamos chamar de x_J a posição em x da jovem e de x_C a posição em x da canoa. Queremos determinar Δx_C . Note que antes vale: $x_J = x_C - D/2$ (a jovem está atrás do barco) e que depois vale $x_J' = x_C' + D/2$ (a jovem está na frente do barco).

A posição do CM antes era:

$$x_{CM} = \frac{M_J x_J + M_C x_C}{M_J + M_C} = \frac{M_J (x_C - D/2) + M_C x_C}{M_J + M_C}$$

A posição do CM depois passou a ser:

$$x_{CM} = \frac{M_J x_J' + M_C x_C'}{M_J + M_C} = \frac{M_J (x_C' + D/2) + M_C x_C'}{M_J + M_C}$$

Como a posição do CM não mudou, podemos igualar essas duas posições:

$$\frac{M_J (x_C - D/2) + M_C x_C}{M_J + M_C} = \frac{M_J (x_C' + D/2) + M_C x_C'}{M_J + M_C} \Rightarrow M_J \left(x_C - \frac{D}{2} \right) + M_C x_C = M_J \left(x_C' + \frac{D}{2} \right) + M_C x_C'$$

Queremos determinar $\Delta x_C = x_C' - x_C$. Obtemos:

$$M_J \left(x_C - \frac{D}{2} \right) + M_C x_C = M_J \left(x_C' + \frac{D}{2} \right) + M_C x_C' \Rightarrow (M_J + M_C) \Delta x_C = -M_J D \Rightarrow \Delta x_C = -\frac{M_J}{M_J + M_C} D$$

O valor é negativo porque a canoa recua para a esquerda (x_C diminui). Obtemos $\Delta x_C \cong -1,29$ m.

A posição da jovem variou de $\Delta x_J = x_J' - x_J$, que pode ser determinado da equação:

$$x_{CM} = \frac{M_J x_J + M_C x_C}{M_J + M_C} = \frac{M_J x_J' + M_C x_C'}{M_J + M_C} \Rightarrow M_J \Delta x_J + M_C \Delta x_C = 0 \Rightarrow \Delta x_J = \frac{M_C}{M_J + M_C} D$$

O valor é positivo porque a jovem vai para a direita (x_J aumenta). Obtemos $\Delta x_J \cong 1,71$ m.

A jovem se desloca D (3 m) para a direita em relação à canoa. Mas, enquanto ela faz isso, a canoa recua $|\Delta x_C| \cong 1,29$ m para a esquerda. Portanto, a jovem se desloca apenas $D - |\Delta x_C| \cong 1,71$ m para a direita em relação ao chão fixo.

Enquanto caminha na canoa a jovem faz força (atrito estático) e empurra a canoa para trás. A canoa, por sua vez, empurra a jovem para a frente (reação). Essas forças internas ao sistema jovem+canoa não são

capazes de modificar o momento linear desse sistema, ou, equivalentemente, de alterar a velocidade do CM do sistema. Daí vem a ideia de considerar que o CM do sistema permanece no mesmo lugar durante esse processo.