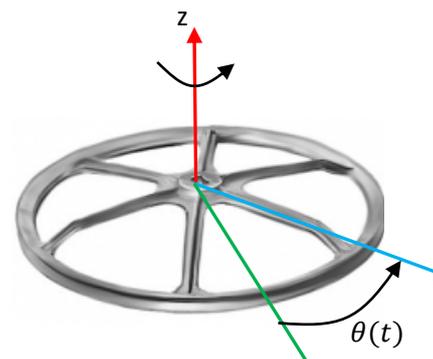


EP9.3 A Figura ao lado ilustra um volante que gira em torno do eixo z . Considere que a linha verde está fixa no espaço e que a linha azul está fixa no volante. Então, $\theta(t)$ é a posição angular do volante. Enquanto o volante gira, $\theta(t)$ vai crescendo no tempo. A cada volta completa do volante, $\theta(t)$ incrementa de 2π radianos. Vamos considerar que a velocidade angular do volante ao longo de z varia no tempo t de acordo com:



$$\omega_z(t) = A + B t^2$$

a) Vemos que a unidade de A é a mesma de ω_z , o radiano/segundo. De fato, A é o valor de ω_z para $t = 0$: $A = \omega_z(t = 0) = \omega_{z0}$. A unidade de B é radiano/segundo/tempo², pois $B t^2$ tem unidade radiano/segundo: $[B] = \text{rad}/\text{s}^3$.

b) A aceleração angular do volante em qualquer instante t é:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega_z(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[A + B t^2] = 2 B t$$

c) Considere os primeiros T segundos de giro. O volante parte com velocidade inicial $\omega_z(t = 0) = A$, vai acelerando com a aceleração crescente $\alpha(t) = 2 B t$ até atingir a velocidade angular final $\omega_z(t = T)$. Quanto vale $\omega_z(t = T)$? $\omega_z(t = T) = A + B T^2$. Quantas voltas o volante dá nesse intervalo de tempo? Sabemos que

$$\omega_z(t) = A + B t^2 = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \theta(t) = A t + \frac{B}{3} t^3 + C$$

A constante C tem um significado simples: $\theta(t = 0) = \theta_0 = C$. Portanto, a posição angular do volante vai variando no tempo de acordo com:

$$\theta(t) = \theta_0 + A t + \frac{B}{3} t^3$$

No intervalo de tempo $[0, T]$ o volante gira um ângulo total (um deslocamento angular):

$$\Delta\theta = \theta(T) - \theta_0 = A T + \frac{B}{3} T^3$$

Quantas voltas completas o volante dá nesse intervalo de tempo?

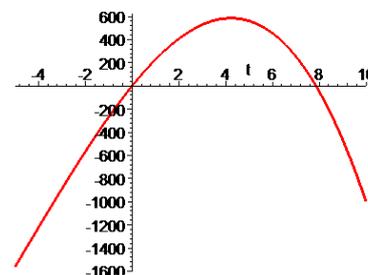
$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[A T + \frac{B}{3} T^3 \right] \cong 1,5 \text{ voltas}$$

EP9.6 Ao inverter o sentido da corrente no motor, em $t = 0$, ele começa a frear sua rotação, de tal forma que sua posição angular para $t > 0$ varia no tempo de acordo com:

$$\theta(t) = A t - B t^2 - C t^3$$

com A , B e C constantes positivas.

A Figura ao lado mostra um gráfico de $\theta(t)$ versus t . Vemos que a posição angular $\theta(t)$ estava crescendo no tempo e em um certo instante ($t \cong 4$) ela começa a diminuir, porque o sentido da rotação se inverteu.



a) A velocidade angular do motor é:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[A t - B t^2 - C t^3] = A - 2 B t - 3 C t^2$$

Essa velocidade se anula em t' tal que:

$$\omega(t') = 0 \Rightarrow A - 2 B t' - 3 C t'^2 \Rightarrow 3 C t'^2 + 2 B t' - A = 0$$

Portanto (note que somente a raiz com + vai dar um $t' > 0$):

$$t' = \frac{-2 B + \sqrt{4 B^2 - 4 (3 C)(-A)}}{6 C} \cong 4,23 \text{ s}$$

A velocidade se anula no instante em que motor inverte seu sentido de rotação. Esse é o instante do máximo no gráfico de $\theta(t)$ versus t mostrado acima, pois nesse máximo a inclinação da curva é $d\theta(t)/dt = \omega(t) = 0$.

b) A aceleração angular do motor enquanto ele freia é:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[A - 2 B t - 3 C t^2] = -2 B - 6 C t$$

A aceleração é sempre negativa (frenagem), ou seja, oposta à velocidade angular $\omega(t)$. Em t' : $\alpha(t') \cong -78 \text{ rad/s}^2$. No instante em que o motor para há uma aceleração angular e ele já inverte sua rotação.

c) Nesse intervalo de tempo $[0, t']$ o deslocamento angular do eixo do motor foi:

$$\Delta\theta = \theta(t') - \theta(t=0) = A t' - B t'^2 - C t'^3 - 0 \cong 586 \text{ rad}$$

O número de voltas completas do eixo do motor foi:

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 93 \text{ voltas}$$

d) No instante $t = 0$ em que a corrente se inverteu a velocidade angular do motor era:

$$\omega(t=0) = A - 2 B \cdot 0 - 3 C \cdot 0^2 = A$$

e) A velocidade angular média no intervalo de tempo $[0, t']$ é:

$$\omega_{MED} = \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} = \frac{\theta(t') - \theta(0)}{t' - 0} = \frac{A t' - B t'^2 - C t'^3 - 0}{t'} \cong 138 \text{ rad/s}$$

EP9.11 Sendo a aceleração angular constante α , segue que: $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$. Se a lâmina parte do repouso, $\omega_0 = 0$, então: $\omega(t) = \alpha t$ para $t > 0$.

a) Para atingir uma velocidade angular ω_1 qualquer a lâmina vai levar um tempo t_1 tal que:

$$\omega(t_1) = \omega_1 \Rightarrow \alpha t_1 = \omega_1 \Rightarrow t_1 = \omega_1/\alpha = 24 \text{ s se } \omega_1 = 36 \text{ rad/s}$$

b) Se $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$, segue que (por integração) a posição angular da lâmina varia de acordo com:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Essas são relações cinemáticas análogas ao caso do MRUV para uma partícula.

No intervalo de tempo $[0, t_1]$ o deslocamento angular da lâmina será:

$$\Delta\theta = \theta(t_1) - \theta(t=0) = \theta_0 + \omega_0 t_1 + \frac{\alpha}{2} t_1^2 - \theta_0 = \omega_0 t_1 + \frac{\alpha}{2} t_1^2 = 432 \text{ rad}$$

O número de voltas completas do eixo da lâmina nesse intervalo de tempo foi:

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \cong 69 \text{ voltas}$$

EP9.19 Enquanto a aceleração angular da roda é constante α (30 rad/s^2), segue que: $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ com $\omega_0 = 24 \text{ rad/s}$. Em t_1 um freio é acionado e a roda passa a frear com aceleração angular constante (não conhecida) $-\alpha_1$ (considere $\alpha_1 > 0$). Enquanto freia, até parar, o deslocamento angular da roda foi $\Delta\theta_1 = 432 \text{ rad}$.

Há duas etapas no movimento dessa roda:

1. No intervalo de tempo $[0, t_1]$, enquanto ela parte de ω_0 e vai acelerando sua rotação com aceleração angular α . A posição angular da roda varia de acordo com (θ_0 é um valor qualquer de posição inicial da roda e que não precisa ser conhecido):

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Portanto, no intervalo de tempo $[0, t_1]$ o deslocamento angular da roda foi:

$$\Delta\theta = \theta(t_1) - \theta(t=0) = \theta_0 + \omega_0 t_1 + \frac{\alpha}{2} t_1^2 - \theta_0 = \omega_0 t_1 + \frac{\alpha}{2} t_1^2 = 108 \text{ rad}$$

Ao final dessa etapa, a velocidade angular da roda será:

$$\omega(t_1) = \omega_0 + \alpha t_1 = 84 \text{ rad/s}$$

2. No intervalo de tempo que inicia em t_1 (que será o novo $t = 0$, zeramos novamente nosso cronômetro) e termina em t_f (quando a roda para, valor não conhecido) vale (novamente, θ_0 é um valor qualquer que não precisa ser conhecido, diferente do θ_0 anterior):

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{\alpha_1}{2} t^2 \Rightarrow \Delta\theta_1 = 432 \text{ rad} = \theta(t_f) - \theta_0 = \omega_0 t_f - \frac{\alpha_1}{2} t_f^2$$

sendo $\omega_0 = \omega(t_1) = 84 \text{ rad/s}$. A velocidade angular cai de acordo com $\omega(t) = \omega(t_1) - \alpha_1 t$. Note que os valores de α_1 e de t_f não foram dados. Se a roda para em t_f , segue que:

$$\omega(t_f) = 0 = \omega_0 - \alpha_1 t_f \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\omega_0}{t_f}$$

Se enquanto para a roda desloca um ângulo total $\Delta\theta_1$ segue que:

$$\Delta\theta_1 = \theta(t_f) - \theta_0 = \omega_0 t_f - \frac{\alpha_1}{2} t_f^2 = \omega_0 t_f - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{t_f} \right) t_f^2 = \frac{\omega_0}{2} t_f \Rightarrow t_f = \frac{2 \Delta\theta_1}{\omega_0} = \frac{2 \Delta\theta_1}{\omega(t_1)} \cong 10,3 \text{ s}$$

c) Agora podemos determinar α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{\omega_0}{t_f} = \frac{\omega(t_1)}{t_f} \cong 8,16 \text{ rad/s}^2$$

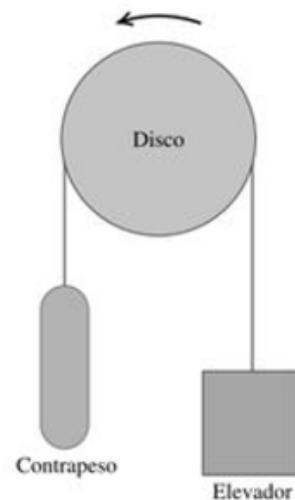
Essa foi a aceleração angular constante de frenagem da roda.

No intervalo de tempo $[0, t_1]$, a roda parte de ω_0 e vai acelerando sua rotação com aceleração angular $\alpha = 30 \text{ rad/s}^2$. Depois de $t_1 = 2 \text{ s}$ a roda passa a frear, até parar em um instante t_f .

No intervalo de tempo $[0, t_f]$, a roda parte de $\omega_0 = \omega(t_1)$ e vai freando sua rotação com aceleração angular de módulo $\alpha_1 = 8,16 \text{ rad/s}^2$. Note que zeramos nosso cronômetro no início de cada uma das duas etapas.

EP9.20

Suponha que o disco possua raio r . O cabo (que não desliza na periferia do disco, atrito estático) cria um vínculo entre os movimentos dos três corpos: rotação do disco (em torno de um eixo fixo) e translação do contrapeso e do elevador. Se o elevador desce uma altura H , o contrapeso sobe uma altura H e um ponto na periferia do disco percorre um arco de círculo de comprimento H . Derivando no tempo essas relações, obtemos que a velocidade do contrapeso v_{CP} é igual (em módulo) à velocidade do elevador v_E . Ainda, a velocidade linear de um ponto na periferia do disco tem esse mesmo valor: $\omega r = v_{CP} = v_E$.



a) Para que o elevador suba com uma velocidade v_{E1} , o disco deve girar com velocidade angular (rad/s):

$$\omega_1 = \frac{v_{E1}}{r}$$

Para converter essa velocidade para RPM devemos levar em conta que $1R = 2\pi \text{ rad}$ e $1 \text{ min} = 1 M = 60 \text{ s}$.

Portanto (note que $v_{E1} = 0,25 \text{ m/s}$):

$$\omega_1 = \frac{v_{E1}}{r} \frac{1 \text{ rad}}{1 \text{ s}} = \frac{v_{E1}}{r} \frac{1/2\pi R}{1/60 M} = \frac{30}{\pi} \frac{v_{E1}}{r} \text{ RPM} \cong 1,91 \text{ RPM}$$

A cada minuto o disco deve dar 1,91 voltas completas em torno de seu eixo fixo de rotação.

c) Novamente, derivando no tempo o vínculo entre as velocidades obtemos um vínculo entre as acelerações:

$$\omega r = v_{CP} = v_E \Rightarrow \alpha r = a_{CP} = a_E$$

Portanto: $\alpha = a_E/r$. Para $a_E = g/8 \text{ m/s}^2$ obtemos:

$$\alpha = \frac{a_E}{r} = \frac{g}{8r} = \frac{9,8}{8(1,25)} = 0,98 \text{ rad/s}^2$$

c) Da relação cinemática $\omega r = v_E$ obtemos:

$$\omega r = v_E \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} r = \frac{dl_E}{dt} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta l_E}{r}$$

sendo $\Delta\theta$ o deslocamento angular do disco e Δl_E o deslocamento linear do elevador (= o comprimento de arco na periferia do disco). Para $\Delta l_E = 3,25 \text{ m}$ obtemos $\Delta\theta = \Delta l_E/r = 2,6 \text{ rad}$. Como $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, segue que $\Delta\theta = 2,6 \text{ rad} \cong 149^\circ$.

9.31 As velocidades angulares dadas são ω_{MIN} e ω_{MAX} . O tambor possui raio r . Considere um ponto pertencente a uma roupa que está girando com velocidade angular ω juntamente com o tambor. A roupa está aderida à periferia do tambor. Portanto, esse ponto percorre um círculo de raio r com velocidade angular ω .

a) A aceleração centrípeta desse ponto da roupa é $a_{CEN} = \omega^2 r$. Da 2ª lei de Newton, a força resultante centrípeta nesse ponto da roupa (de massa m) é (em módulo) $F = m \omega^2 r$. A razão entre forças MAX e MIN é:

$$\frac{F_{MAX}}{F_{MIN}} = \frac{m \omega_{MAX}^2 r}{m \omega_{MIN}^2 r} = \left(\frac{\omega_{MAX}}{\omega_{MIN}}\right)^2 \cong 2,3$$

b) Esse mesmo ponto dessa roupa percorre sua órbita circular de raio r com velocidade linear (tangencial, ou seja, ao longo do círculo) $v = \omega r$. A razão entre velocidades MAX e MIN é:

$$\frac{v_{MAX}}{v_{MIN}} = \frac{\omega_{MAX} r}{\omega_{MIN} r} = \frac{\omega_{MAX}}{\omega_{MIN}} \cong 1,5$$

c) $v_{MAX} = \omega_{MAX} r$ mas note que ω_{MAX} não está dada na unidade “conveniente” rad/s .

Para converter essa velocidade de RPM (ou rev/min) para rad/s devemos levar em conta que $1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad}$ e $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$. Portanto:

$$\omega_{MAX} = x \frac{1 \text{ rev}}{1 \text{ min}} = x \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{\pi}{30} x \text{ rad/s} \cong 67 \text{ rad/s}$$

Daí obtemos: $v_{MAX} = \omega_{MAX} r \cong 15,7 \text{ m/s}$ e $a_{CEN MAX} = \omega_{MAX}^2 r = 1.060 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cong 108 \text{ g}$.

Uma gota de água aderida a esse ponto da roupa experimenta uma aceleração centrípeta de módulo 108 g . Ela vai precisar de muita força de adesão à roupa para produzir essa aceleração. Se não houver essa força, a gota de água sai pela tangente e assim a roupa que gira vai se livrando da água. Enquanto ω aumenta, mais difícil vai ficando haver essa força de adesão água/tecido e mais água vai se destacando da roupa.

EP9.34 Considere cada esfera de massa M e o quadrado de lado L . O momento de inércia de um corpo rígido é dado por:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

sendo m_i a massa e r_i o raio de giração (distância ao eixo de rotação) da partícula i que compõe esse corpo.

a) A Figura ao lado ilustra esse quadrado girando em torno de um eixo ortogonal ao plano da tela que passa por O (bolinha vermelha). A linha verde é o raio de giração r de uma das esferas (todos os raios são iguais): $r = L \sqrt{2}/2$.

O momento de inércia desse quadrado em relação a esse eixo de rotação é:

$$I_1 = \sum_i m_i r_i^2 = 4 m r^2 = 4 m \left(L \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2 m L^2$$

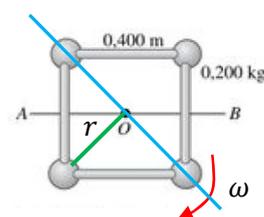
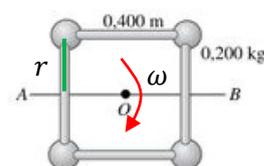
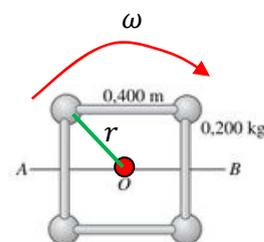
b) A Figura ao lado ilustra esse mesmo quadrado girando em torno do eixo AB. A linha verde é o raio de giração r de uma das esferas (todos os raios são iguais): $r = L/2$.

O momento de inércia desse quadrado em relação a esse eixo de rotação é:

$$I_2 = \sum_i m_i r_i^2 = 4 m r^2 = 4 m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = m L^2$$

c) A Figura ao lado ilustra esse mesmo quadrado girando em torno de um eixo (azul) diagonal. A linha verde é o raio de giração r de uma das esferas: $r = L \sqrt{2}/2$. Note que duas esferas estão sobre o eixo de rotação e $r = 0$ para elas e que para as outras duas esferas o raio de giração é $r = L \sqrt{2}/2$. O momento de inércia desse quadrado em relação a esse eixo de rotação é:

$$I_3 = \sum_i m_i r_i^2 = 0 + 0 + 2 m r^2 = 2 m \left(L \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = m L^2 = I_2$$

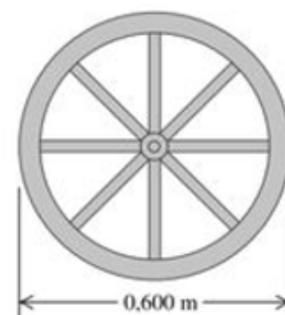


EP9.39 O eixo de rotação é o esperado, ortogonal ao plano da tela passando pelo centro da roda.

Considere que cada raio da roda tem comprimento R e massa m e que o aro de raio R possui massa M . O momento de inércia de um corpo rígido é dado por:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

sendo m_i a massa e r_i o raio de giração (distância ao eixo de rotação) da partícula i que compõe esse corpo. Esse momento de inércia pode ser fatorado:



$$I_{RODA} = I_{ARO} + 8 I_{RAIO}$$

Na tabela 9.2, o aro é um cilindro oco com paredes finas (casca cilíndrica) e:

$$I_{ARO} = M R^2$$

Na tabela 9.2, um raio é uma haste delgada com eixo de rotação passando por uma extremidade e:

$$I_{RAIO} = \frac{1}{3} m R^2$$

Concluindo:

$$I_{RODA} = I_{ARO} + 8 I_{RAIO} = M R^2 + \frac{8}{3} m R^2 = \left(M + \frac{8}{3} m \right) R^2$$

EP9.40

O momento de inércia de um corpo rígido é dado por:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

sendo m_i a massa e r_i o raio de giração (distância ao eixo de rotação) da partícula i que compõe esse corpo. Para corpos maciços contínuos, substituímos o somatório por uma integral de volume \mathcal{V} fazendo $dm = \rho d\mathcal{V}$. Para placas, substituímos o somatório por uma integral de área A fazendo $dm = \rho dA$.

A ideia é tomar limite do contínuo:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int_{PLACA} r^2 dm = \int_{PLACA} r^2 \rho dA = \rho \int_{PLACA} r^2 dA$$

sendo ρ a densidade de massa por unidade de área na placa.

A Figura ao lado mostra um fragmento de placa (em vermelho) e seu raio de giração r (em azul) em relação a um eixo de rotação ortogonal ao plano da tela que passa por A. Em coordenadas polares esse fragmento possui área $dA = (r d\theta)(dr) = r dr d\theta$. Agora devemos integrar em toda a placa, ou seja, varrer $r \in [0, R]$ e $\theta \in [0, \pi]$. Portanto:

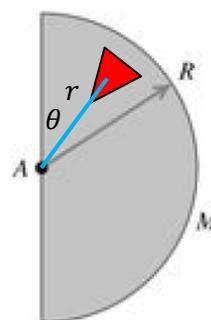
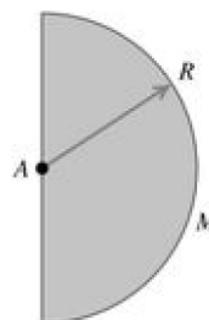
$$I = \rho \int_{PLACA} r^2 dA = \rho \int_0^R \int_0^\pi r^2 r dr d\theta = \rho \int_0^R \int_0^\pi r^3 dr d\theta = \rho \frac{R^4}{4} \pi$$

A massa da placa é $M = \rho \pi R^2/2$. Portanto:

$$I = \rho \frac{R^4}{4} \pi = \rho \frac{R^2}{2} \pi \frac{R^2}{2} = M \frac{R^2}{2}$$

Note que esse é o mesmo I de um disco de massa M e raio R .

b) Para um disco completo de massa M , com mesmo eixo de rotação, o momento de inércia seria:



$$I_{DC} = I_{1/2} + I_{1/2} = 2 I_{1/2}$$

sendo $I_{1/2}$ o momento de inércia de meio disco, com massa $M/2$. Portanto, tendo em vista nosso resultado em (a), que considerou meio disco com massa M (há uma compensação fortuita de dois fatores 2: uma metade apenas com massa M equivale a duas metades, cada uma com massa $M/2$):

$$I_{DC} = 2 I_{1/2} = 2 \frac{M R^2}{2} = M \frac{R^2}{2}$$

EP9.45 A energia cinética do volante girando com velocidade angular ω é:

$$K_{ROT} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Se a velocidade angular do volante cai de ω_0 para $\omega_f < \omega_0$, a energia cinética “liberada” será:

$$\Delta K = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} I \Delta \omega^2$$

Dados ΔK e $\Delta \omega^2$ o momento de inércia do volante deve ser:

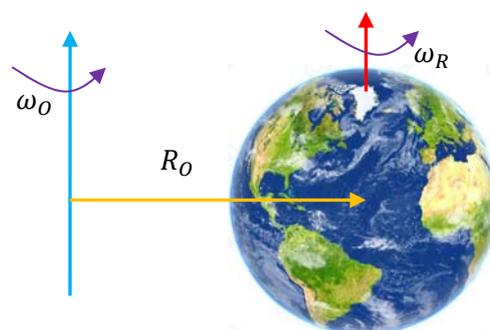
$$I = 2 \frac{\Delta K}{\Delta \omega^2}$$

EP9.79

A Figura ao lado ilustra os dois movimentos combinados da Terra: rotação em torno de um eixo (vermelho) que passa por seus pólos, com período $T_R = 1 \text{ dia}$ e rotação (órbita basicamente circular) em torno de um eixo que passa pelo Sol (azul) com período $T_O = 1 \text{ ano}$. As velocidades angulares de rotação são dadas por:

$$\omega_R = \frac{2\pi}{1 \text{ dia}} = \frac{2\pi}{86.400} \text{ rad/s}$$

$$\omega_O = \frac{2\pi}{1 \text{ ano}} = \frac{2\pi}{31.536.000} \text{ rad/s}$$



Para o movimento de rotação o momento de inércia é $I_R = 0,3308 M R^2$. Para o movimento orbital tudo se passa como se a Terra fosse uma partícula de massa M com raio de giração R_O que é a distância da Terra ao Sol (de centro a centro): $I_O = M R_O^2$.

Portanto, as energias cinéticas associadas a essas rotações são:

$$K_{ROT R} = \frac{1}{2} I_R \omega_R^2$$

$$K_{ROT O} = \frac{1}{2} I_O \omega_O^2$$

c) Da tabela 9.2, vemos que se a Terra fosse uma esfera maciça com distribuição uniforme de massa, seu momento de inércia seria:

$$I_{UNIF} = \frac{2}{5} M R^2 = 0,4 M R^2$$

Se a Terra fosse uma casca esférica, com sua massa concentrada em sua superfície (crosta), seu momento de inércia seria:

$$I_{CASCA} = \frac{2}{3} M R^2 = 0,67 M R^2$$

Sendo $I_R = 0,3308 M R^2$ e $0,3308 < 0,4$, segue que podemos concluir que a massa da Terra se concentra mais próxima de seu eixo de rotação. Isso porque a Terra possui de fato uma estrutura de camadas, como uma cebola. Há mais massa concentrada no núcleo da Terra, que é composto de materiais mais densos, como o ferro.