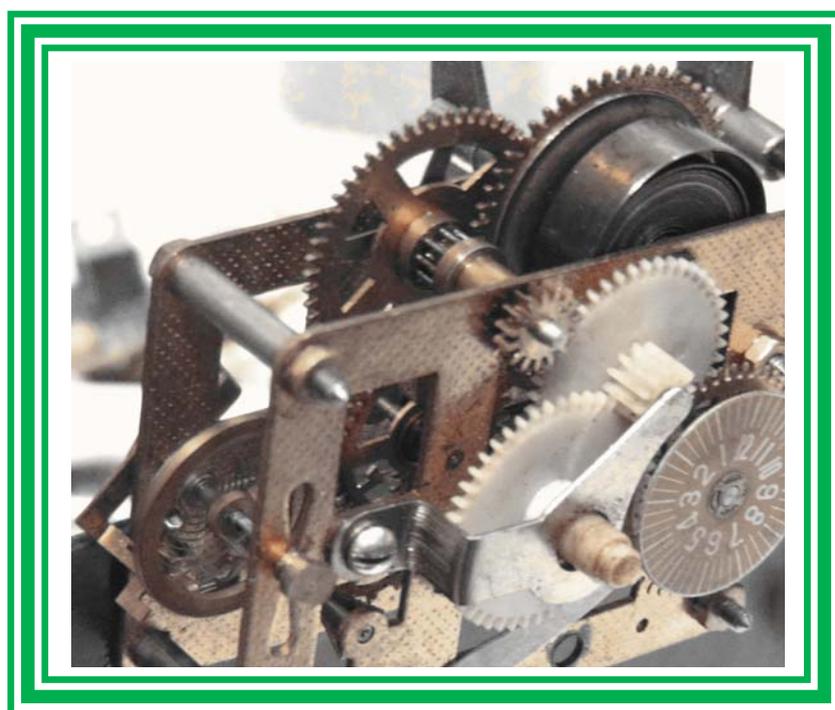


AULAS
DE
MECÂNICA CLÁSSICA NEWTONIANA



José Arnaldo Redinz

redinz@ufv.br

Departamento de Física / Universidade Federal de Viçosa - MG

6ª Edição – 2021

Versão: 15/06/2021

ISBN nº 978-65-00-03605-3

Direitos reservados ao autor



Ao longo dos anos em que ministrei a disciplina FIS 201 (Física 1), que aborda a mecânica clássica newtoniana voltada para aspirantes a físicos, matemáticos, químicos e engenheiros, tive oportunidade de aperfeiçoar minhas aulas. O texto que segue nasceu principalmente do objetivo de registrá-las, antes que elas se apaguem no tempo. Trata-se, basicamente, de uma transcrição de minhas aulas, com algumas (talvez muitas, muitas mesmo) extensões que o tempo curto de aula proíbe, mas que o papel/PDF permite. O conteúdo é basicamente aquele apresentado nos livros já consagrados no segmento, como as coleções Halliday & Resnick e Young & Freedman e que faz parte da disciplina FIS 201 na UFV. Apenas a forma de apresentar esse conteúdo é original, é a forma que encontrei/construí ao longo dos anos, levando em conta minha visão própria do tema e a resposta vinda dos estudantes que percebi nas aulas e nas muitas (muitas mesmo) avaliações (provas e testes) que elaborei e corriji.

Uma coisa que aprendi nesses anos é que nada é trivial, nada é óbvio, nada é simples. Nesse sentido, é melhor pecar pelo excesso do que pela falta, o que muitas vezes, infelizmente, o tempo restrito de aula não permite. Não havendo essa restrição aqui, deixei de lado a pretensão de escrever um texto sintético, enxuto e elegante (já há vários deles por aí) e preferi um texto mais longo e algumas vezes repetitivo, enfatizando os pontos que acredito, dada minha experiência, serem merecedores de mais atenção por parte dos alunos. Os exemplos exibidos no texto pretendem convencer o estudante de que a física, em particular a mecânica clássica, está (muito) presente em nossas vidas e de que vale a pena, portanto, o esforço para compreendê-la. Os vários exercícios resolvidos e exercícios propostos (com as respostas disponíveis) ilustram a aplicação do formalismo em modelos simplificados para o mundo real e desafiam o estudante a provar seu aprendizado do conteúdo.

Procurei combater a ideia, muitas vezes disseminada, de que a física é uma espécie de jogo de adivinhação, um quebra-cabeças, um teste de QI, em que cada problema proposto requer uma espécie de truque, de atalho, de toque de gênio, de fórmula mágica, para ser resolvido. Enfatizo o contrário: a física trata do mundo real (muitas vezes complexo) e os problemas propostos podem ser resolvidos com a aplicação sistemática dos conceitos e do formalismo. Um pouco de bom-senso sempre ajuda.

Não houve nenhuma revisão do texto ou sugestão por parte de terceiros. Os erros/deslizes serão corrigidos pelo autor com o passar dos anos (o arquivo .PDF é atualizado com frequência, corrigindo alguns erros e melhorando/completando o texto). Esta é a que estou chamando de 6ª edição, revisada em meados de 2021: ano de pandemia.

Índice de Capítulos



1. Cinemática de uma partícula	1
2. Leis de Newton: Dinâmica de uma partícula	87
3. Energias mecânicas	158
4. Momento linear	222
5. Rotação de corpos rígidos	279
6. Equilíbrio estático de corpos rígidos	361
7. Elasticidade	393
8. Gravitação de Newton	419
9. Oscilações	471

1

Cinemática de uma partícula



1.1 Conceitos básicos da cinemática de uma partícula

Ao estudar o movimento dos planetas do nosso sistema solar, Isaac Newton intuiu a existência de uma força de atração entre os corpos, a gravitação. Estudando o movimento de partículas alfa (núcleos de átomos de Hélio) espalhadas por uma folha de ouro, Ernest Rutherford vislumbrou a estrutura invisível do átomo, composta por um minúsculo núcleo central rodeado por uma nuvem de elétrons. Ao interpretar as energias de movimento (energias cinéticas) de elétrons emitidos no decaimento beta de núcleos atômicos (basicamente emissão de elétrons), Wolfgang Pauli intuiu a existência de uma nova partícula elementar, o neutrino. Anomalias observadas no movimento do planeta Urano levaram Urbain Le Verrier à previsão da existência do planeta Netuno. Estes exemplos mostram que o estudo dos movimentos dos corpos pode nos levar a desvendar os segredos da natureza. Estudando os movimentos dos corpos podemos entender as causas dos movimentos, podemos prever os possíveis movimentos e podemos projetar máquinas que executam determinados movimentos. A mecânica clássica concentra-se no estudo dos movimentos dos corpos.

O movimento é onipresente, integrando a mecânica clássica a diversas outras áreas da ciência. O movimento é crucial para os animais que estão na natureza, lutando pela sobrevivência. O predador precisa correr mais que a presa, e a presa precisa escapar do predador. Ambos precisam percorrer o espaço, em busca de abrigo, de água e alimentos. A biomecânica integra os fundamentos da mecânica clássica com os da biologia para entender esses movimentos. Os seres humanos precisam se mover e para isso inventaram várias máquinas que facilitam essa tarefa, desde a simples roda até o avião. A mecatrônica, e várias outras engenharias, integram os fundamentos da mecânica clássica com os do eletromagnetismo, da eletrônica e da computação para projetar e produzir essas máquinas. Mais recentemente, a disponibilidade de computadores de alto desempenho abriu uma nova possibilidade: a

de realizar experimentos numéricos com as equações não-lineares que governam sistemas mecânicos. Esses experimentos revelam comportamentos complexos ocultos em sistemas relativamente simples, como o comportamento caótico (imprevisibilidade devido à sensibilidade às condições iniciais) resultante de uma órbita ligada a um atrator estranho (fractal). A imprevisibilidade do clima, por exemplo, está ligada ao comportamento caótico das soluções das equações que governam a evolução temporal dos parâmetros climáticos (basicamente as equações de Navier-Stokes para o escoamento de um fluido, a atmosfera). Nesse contexto, a imprevisibilidade ligada à sensibilidade às condições iniciais recebeu o nome de “efeito borboleta”, se referindo à ideia (talvez meio exagerada) de que um simples bater de asas de uma borboleta pode modificar drasticamente a evolução do clima em uma região.

A mecânica clássica é uma ciência exata, e como tal deve ser expressa na linguagem matemática, que é a linguagem da natureza. Vladimir Arnol'd, um dos maiores matemáticos russos, define a mecânica newtoniana como “o estudo do movimento de sistemas de massas pontuais no espaço euclidiano tridimensional” e o movimento (em \mathbb{R}^N) como “um mapeamento diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, sendo I um intervalo no eixo real” (*Mathematical Methods of Classical Mechanics*, V. I. Arnol'd, Springer-Verlag 1989). Não adotaremos aqui essa visão simples e elegante, mas ao mesmo tempo árida e abstrata, da mecânica. Preferimos uma abordagem mais adequada para um público iniciante heterogêneo, formado por aspirantes a físicos, químicos, matemáticos e engenheiros. O estudante deve ter sempre a percepção de que a mecânica clássica trata do mundo real e que o formalismo matemático não é um fim em si mesmo, mas uma ferramenta poderosa e precisa para representar qualitativamente e quantitativamente as leis que governam esse mundo real.

Vamos nos concentrar aqui na mecânica clássica desenvolvida principalmente, mas não exclusivamente, por Isaac Newton (que, segundo ele mesmo, se apoiou nos ombros de gigantes) no século 17. Devemos sempre ter em mente que a mecânica clássica, assim como qualquer construção do intelecto possui seus limites, além dos quais ela deixa de ser eficaz. Por exemplo, se aplicarmos a mecânica clássica para descrever o movimento de um elétron que se move no interior de um átomo, nos deparamos com dificuldades insuperáveis, como a própria instabilidade deste “átomo clássico” (o átomo clássico irradiaria energia até que o elétron colidisse com o núcleo). Como sabemos que os átomos são estáveis, pois eles perduram no tempo, inferimos que o interior do átomo está além dos domínios de validade da mecânica clássica, ele está de fato no domínio da mecânica quântica. Analogamente, a mecânica clássica prevê que um corpo qualquer pode ser acelerado indefinidamente e assumir velocidades ilimitadas, o que contradiz o fato de que a velocidade da luz é a velocidade máxima na natureza. Movimentos de corpos com altas velocidades, próximas da velocidade da luz c ($c \cong 300.000$ km/s) estão no domínio da mecânica relativística. O mundo dos corpos macroscópicos (corpos compostos de muitos átomos/moléculas, basicamente o número de Avogadro, $\cong 10^{24}$ partículas) que

se movem com velocidades bem menores que c (o que não é muito difícil, dada a imensa magnitude de c) é o domínio da mecânica clássica. O epíteto “clássica” se refere comumente ao contexto de uma teoria não-quântica e não-relativística (no sentido da relatividade de Einstein).

Ao nos concentrarmos na mecânica Newtoniana, centrada nos conceitos de aceleração e força ($\vec{F} = m \vec{a}$), vamos ignorar outras formulações importantes da mecânica, como a Lagrangeana, centrada em princípios variacionais e a Hamiltoniana, centrada no conceito de energia. Essas formulações são matematicamente mais elegantes - mas também mais abstratas - e se estendem mais naturalmente para os domínios relativístico e quântico, domínios que não pretendemos abordar nesse curso.

Pretendemos discutir o movimento de bolas, de carros, de aviões, de hélices, de planetas etc. Mas, o que vamos de fato fazer é discutir o movimento de modelos de bolas, de modelos de carros, de modelos de aviões, de modelos de hélices, de modelos de planetas etc. Um modelo é uma representação simplificada de um objeto real, que mantém apenas os elementos desse objeto que nos interessam. Por exemplo, uma esfera rígida (algo próximo de uma bola de sinuca) pode ser um modelo para um planeta, se estamos interessados em discutir, apenas, seu movimento de translação em torno do sol e de rotação em torno de um eixo que passa por seus pólos. Se, por outro lado, estamos interessados em estudar outros fenômenos, como o efeito das marés provocadas pelo Sol ou por uma lua desse planeta (marés são deformações na forma inicialmente esférica do planeta) ou o achatamento nos pólos produzido pela rotação, então teremos que abandonar a hipótese de rigidez. Teremos que considerar que um planeta se aproxima mais de uma esfera deformável (algo próximo de uma bola de tênis). Obviamente isso levará a um modelo e a uma descrição mais sofisticados e complicados, o que muitas vezes queremos evitar e vamos evitar aqui.

O modelo mais simples para um corpo qualquer é o modelo de partícula. Uma partícula é um corpo pontual, que, portanto, não possui tamanho, não possui forma, não possui estrutura interna, não gira em torno de si mesmo, apenas ocupa, em cada instante, um ponto do espaço. Se pretendemos entender o movimento de um avião, precisamos primeiro entender o movimento de uma partícula, porque, de certa forma, em uma primeira aproximação, o avião é uma partícula. Depois podemos sofisticar nosso modelo, considerando, por exemplo, que o avião é mais parecido com duas placas rígidas unidas entre si formando uma espécie de cruz. Esse processo de sofisticação pode continuar até chegarmos a uma representação fiel de um avião, mas vamos deixar isso para os engenheiros aeronáuticos. Essa idéia de evolução do modelo de um avião está ilustrada na Figura 1.1 que segue.



Figura 1.1: Iniciamos nosso estudo considerando que qualquer corpo, como um avião, por exemplo, pode ser representado por uma partícula. Note que, por conveniência, desenhamos a partícula como uma bolinha preta razoavelmente grande, para podermos enxergá-la. Mas devemos ter em mente que uma partícula é, a todo rigor, invisível, pois ocupa apenas um ponto no espaço.

Note que o termo “partícula” aqui não tem relação com o que chamamos de partícula no ramo da física que estuda os elementos microscópicos constituintes da matéria, a física de partículas. Elétrons, prótons e nêutrons são partículas, mas não são exatamente partículas no sentido matemático que estamos adotando aqui.

Um próton, por exemplo, não é pontual e possui uma estrutura interna, formada por outras partículas, os quarks. Podemos tratar os elétrons, prótons e nêutrons como partículas, no sentido que estamos dando aqui, mas apenas como uma aproximação, que pode ser razoável ou não, dependendo do contexto.

Iniciamos discutindo a teoria que nos permite descrever e quantificar o movimento de uma partícula, teoria cujo nome é cinemática, especificamente cinemática de uma partícula. Em princípio uma partícula pode mover-se em linha reta, em volta de um círculo, ou em uma curva qualquer. Ela pode também mover-se rapidamente ou lentamente. A cinemática vai nos permitir discutir todos esses casos dentro de um formalismo matemático.

Mover-se é basicamente mudar de posição. Assim sendo, a cinemática começa com o conceito de posição: posição de um ponto no espaço. Devemos reconhecer desde já que posição é um conceito relativo. Quando dizemos que um corpo está em cima, embaixo, ou à esquerda, estamos dizendo de fato que esse corpo está em cima disso, embaixo daquilo, ou à esquerda daquilo outro. Nada está absolutamente em cima, se está em cima, está em cima de quê? Esse “quê” é a referência. Como podemos fazer para representar matematicamente a posição de uma partícula? Basta representar a posição de um ponto P no espaço (o ponto ocupado por essa partícula). Como posição é sempre relativa, devemos então representar a posição desse ponto P em relação a outro ponto de referência, que chamaremos de “ O ”. Portanto, a representação da posição de uma partícula começa com a escolha de um ponto fixo qualquer de referência no espaço, que chamamos de “ O ”. Daí, partimos para a representação da posição da partícula, ou do ponto P que a partícula ocupa no espaço, em relação à “ O ”. Isso pode ser feito de uma forma geométrica, através de uma simples seta, que nasce em “ O ” (daí o nome “ O ” de “origem” das setas) e termina em P . Essa seta representa matematicamente, e

geometricamente, a posição da partícula que está em P. Chamamos essa seta de “vetor posição da partícula”, para o qual usaremos o símbolo padrão \vec{r} . A seta de \vec{r} nasce em “O” e tem a ponta em P.

\vec{r} é uma grandeza vetorial. Uma grandeza vetorial é uma grandeza que pode ser representada por uma seta no espaço e que possui, então, as mesmas propriedades de uma seta: módulo (tamanho ou magnitude), direção e sentido. Sendo a posição uma grandeza vetorial, usamos para ela o símbolo \vec{r} com uma setinha em cima, para diferenciá-la de uma grandeza escalar que possui apenas magnitude. A temperatura de uma sala, por exemplo, pode ser representada pelo símbolo T (sem setinha em cima), pois temperatura é uma grandeza escalar (não existe uma temperatura “para cima”, ou “vertical”). Outros exemplos de grandezas escalares são a pressão p de um gás, a massa M de um corpo, a distância d entre dois pontos, o raio R de um círculo, um intervalo Δt de tempo etc. A ausência de setinha em cima dos símbolos p , M , d , R e Δt serve para indicar que esses símbolos representam grandezas escalares. O símbolo r , apenas, não pode representar a posição de uma partícula, pois posição é uma grandeza vetorial. Usamos então o símbolo r para representar apenas o módulo de \vec{r} (o valor de r é dado tipicamente em metros, abreviado por m, ou por seus múltiplos: milímetro (mm), centímetro (cm), quilômetro (km) etc.). Da mesma forma, usamos o símbolo A para o módulo do vetor \vec{A} etc. Essa é uma regra básica da linguagem que usaremos aqui: grandezas vetoriais são escritas com setinha em cima e grandezas escalares não. Aquele que pretende compreender e dominar minimamente a mecânica clássica deve assumir o compromisso de respeitar essa regra básica. Sem ela não é possível expressar corretamente as leis e equações da mecânica. Nesse sentido, uma equação do tipo:

$$\vec{A} = B$$

expressa uma idéia absurda, inaceitável dentro do formalismo que estamos estudando. \vec{A} é uma grandeza vetorial, pode ser representada por uma seta, enquanto que B é apenas um número. Um número não pode ser igual a uma seta (é como se um gato fosse igual a uma melancia). A Tabela 1.1 abaixo mostra exemplos de operações com vetores que são permitidas (válidas) e que não são permitidas (inválidas). Veremos como multiplicar vetores por escalares e como somar/subtrair vetores logo em seguida. Com relação aos produtos escalar e vetorial, serão discutidos mais adiante quando esses conceitos se tornarem necessários, basicamente quando estudaremos os conceitos de trabalho e torque de uma força.

Concluindo, imagine então uma seta de módulo $r = 3$ metros, na direção vertical, com o sentido que aponta de baixo para cima. Essas três propriedades juntas, módulo (3), direção (vertical) e sentido (para cima), definem unicamente uma seta \vec{r} .

Operação válida		Operação inválida	
Produto por escalar	$\vec{A} = k \vec{B}$ ($k \in \mathbb{R}$)	Soma/subtração com escalar	$\vec{A} = \vec{B} \pm C$
Soma/subtração	$\vec{A} = \vec{B} \pm \vec{C}$	Produto simples como se fossem escalares	$\vec{A} = \vec{B} \vec{C}$
Produto escalar	$A = \vec{B} \cdot \vec{C}$	Divisão	$\vec{A} = \vec{B} / \vec{C}$
Produto vetorial	$\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$	Radiciação	$\sqrt{\vec{A}}$

Tabela 1.1: Exemplos de operações válidas, que podemos realizar com vetores e operações inválidas, que não podemos realizar com vetores, porque não fazem o menor sentido.

Na Figura 1.2 ilustramos uma cena em que os vetores posição de quatro corpos são definidos, em relação ao ponto de referência “O” escolhido arbitrariamente. Como sói acontecer, você não deve se preocupar com a escala de comprimentos nessa figura (esse cachorro é maior que um carro?). Os tamanhos dos corpos e as distâncias entre eles foram alterados arbitrariamente para que todos coubessem na mesma figura. De fato, para o que interessa aqui, esses corpos são simples partículas, localizadas em alguma posição arbitrária (central) dentro deles. Mas, mesmo assim, para evitar uma abstração desnecessária, preferimos continuar desenhando os corpos, ao invés de simples bolinhas/partículas. Para simplificar, podemos imaginar que todos esses corpos estão no mesmo plano, o plano do papel.

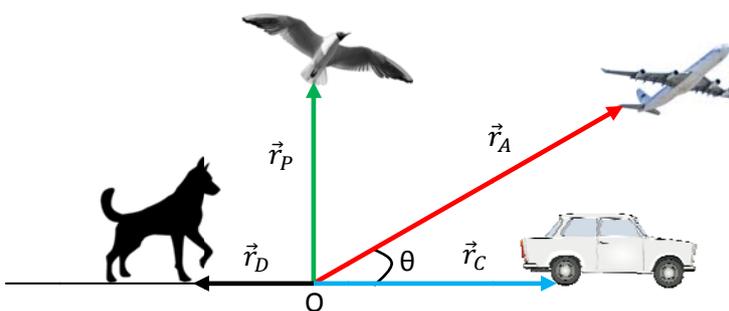


Figura 1.2: Uma cena em que os vetores posição (em relação ao ponto O) de um pássaro (\vec{r}_P), de um avião (\vec{r}_A), de um carro (\vec{r}_C) e de um cachorro (\vec{r}_D) são ilustrados. A escala de comprimentos foi modificada arbitrariamente.

Não se trata, portanto, de uma figura em perspectiva, ou de uma projeção. Trata-se de uma figura plana e todos os vetores (todas as setas) estão contidos no plano da página. As propriedades dos vetores posição mostradas nessa figura, módulo, direção e sentido, estão descritas na Tabela 1.2.

Posição	Módulo (metros)	Direção	Sentido
\vec{r}_P	100	Vertical	Para cima
\vec{r}_A	10.000	Oblíqua, inclinada de um ângulo θ com a horizontal	Para cima
\vec{r}_C	250	Horizontal	Para a sua direita
\vec{r}_D	20	Horizontal	Para a sua esquerda

Tabela 1.2: Propriedades (módulo, direção e sentido) dos vetores posição dos corpos mostrados na Figura 1.2. Para cada direção no espaço, há dois sentidos, opostos entre si. Por exemplo, na direção vertical podemos definir vetores com o sentido para cima e vetores com o sentido para baixo.

Se imaginarmos que os corpos mostrados na Figura 1.2 se movem, ou seja, mudam de posição enquanto o tempo t passa, podemos imaginar então que os vetores posição deles são funções do tempo t : $\vec{r}_P(t)$, $\vec{r}_A(t)$, $\vec{r}_C(t)$ e $\vec{r}_D(t)$. Apenas para recordar, uma função qualquer $f(x)$ é basicamente uma regra que associa a cada valor x de um conjunto (domínio) outro valor $f(x)$ em um conjunto (imagem). Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então $f(-2) = (-2)^2 = 4$, $f(0) = 0$, $f(3) = 9$ etc. Uma função horária vetorial $\vec{r}(t)$ associa a cada instante $t \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} é o conjunto dos números reais), uma seta (um vetor), que é a posição que uma partícula ocupa no instante t . O cálculo dessas funções horárias, que fornecem a posição de uma partícula ao longo do tempo, é o objetivo principal da cinemática. A função $\vec{r}(t)$ descreve a trajetória, ou órbita, que a partícula percorre no espaço. $\vec{r}(t=0) = \vec{r}(0) = \vec{r}_0$ é a posição inicial da partícula no instante $t=0$, $\vec{r}(1)$ é a posição da partícula no instante $t=1$ (1 segundo, por exemplo) e assim por diante. Se unirmos as pontas de todos os vetores $\vec{r}(t)$, obtemos uma curva no espaço, que é a trajetória da partícula. A trajetória de um pássaro no céu é ilustrada na Figura 1.3. Se conhecermos a função horária $\vec{r}(t)$, saberemos qual a trajetória que esse pássaro percorreu no céu. $\vec{r}(t)$ pode ser uma curva parabólica, circular, retilínea, ou enfim, qualquer curva suave e contínua definida no espaço tridimensional. Nosso principal objetivo aqui é estudar/calcular essa curva.

No caso dos planetas, por exemplo, observações astronômicas realizadas ao longo de séculos levaram à conclusão que suas órbitas são elipses com o Sol em um dos focos (primeira lei de Kepler). Esse fato é explicado pela teoria da gravitação de Newton, que permite, entre outras coisas, o cálculo exato da órbita de um planeta em torno do Sol.

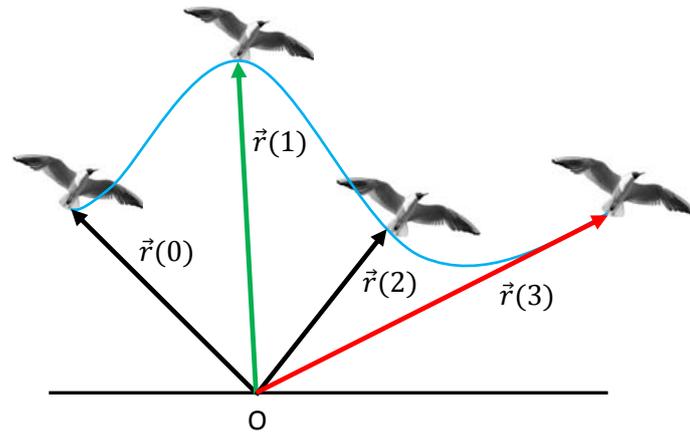


Figura 1.3: Ilustração do movimento de um pássaro (que deve ser pensado como uma simples partícula). São mostrados os vetores posição (em relação a O) em apenas quatro instantes $t=0$, $t=1$, $t=2$ e $t=3$, mas o tempo é uma variável real contínua ($t \in \mathbb{R}$) e poderíamos desenhar infinitas setas, formando um leque, cujas pontas estariam todas sobre a curva suave que representa a trajetória, ou órbita, do pássaro (curva azul). O instante $t=0$ é arbitrário, representa o instante em que começamos a acompanhar/estudar o movimento do pássaro. O que aconteceu antes de $t=0$ não interessa.

A função posição $\vec{r}(t)$ é uma grandeza central da cinemática. A partir dela poderemos definir outras grandezas que estudaremos em seguida: deslocamento $\vec{D}(t, t')$, velocidade instantânea $\vec{V}(t)$ e aceleração instantânea $\vec{a}(t)$, que completam o formalismo da cinemática.

O deslocamento de uma partícula no intervalo de tempo que começa no instante t e termina no instante t' é definido por:

$$\vec{D}(t, t') = \vec{r}(t') - \vec{r}(t)$$

ou seja, o deslocamento é a diferença entre a posição final e a posição inicial da partícula. $\vec{D}(t, t')$ é a variação na posição da partícula no intervalo de tempo desde t até t' ($\vec{D}(t, t') = \Delta\vec{r}$). Para calcular o deslocamento de uma partícula, e avançar na cinemática, precisamos saber como subtrair um vetor do outro, ou seja, precisamos conhecer as regras básicas da álgebra vetorial. Faremos aqui uma breve pausa na cinemática para relembrar essas regras básicas.

Considere um vetor \vec{A} qualquer. A primeira operação que podemos fazer com esse vetor é multiplicá-lo por um escalar, ou seja, por um número qualquer. Por exemplo, quais as propriedades do vetor $2\vec{A}$, do vetor $\vec{A}/2$ ($= 0,5\vec{A}$) e do vetor $-3\vec{A}$? A Figura 1.4 e a Tabela 1.3 respondem a essas perguntas.

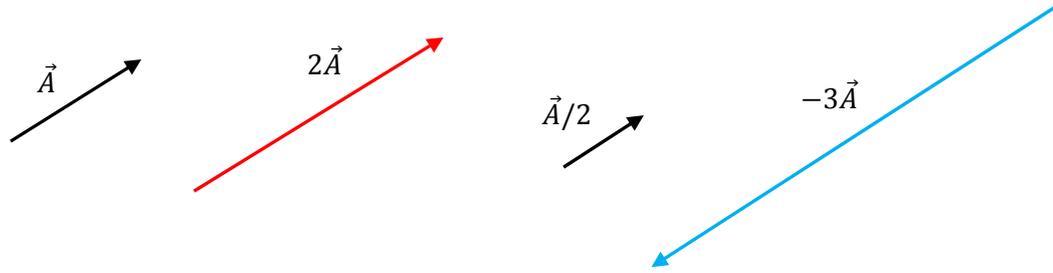


Figura 1.4: Ao multiplicarmos um vetor por um número ($\neq 1$), mudamos seu tamanho (seu módulo), invertemos ou não seu sentido (sim se o número for negativo), mas mantemos sua direção.

Vetor	\vec{A}	$2\vec{A}$	$\vec{A}/2$	$-3\vec{A}$
Módulo	A	2A	A/2	3A
Direção	a de \vec{A}	a mesma de \vec{A}	a mesma de \vec{A}	a mesma de \vec{A}
Sentido	o de \vec{A}	o mesmo de \vec{A}	o mesmo de \vec{A}	oposto ao de \vec{A}

Tabela 1.3: Propriedades (módulo, direção e sentido) dos vetores mostrados na Figura 1.4.

Essa simples propriedade nos permite interpretar o deslocamento como uma soma vetorial, pois já sabemos o que é o vetor $-\vec{r}(t)$ (é o vetor $\vec{r}(t)$ com o sentido invertido):

$$\vec{D}(t, t') = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) = \vec{r}(t') + (-\vec{r}(t))$$

Portanto, precisamos saber agora como realizar a soma de dois vetores. Essa soma é realizada através da regra do paralelogramo, que funciona assim: para somar dois vetores \vec{A} e \vec{B} iniciamos desenhando esses vetores nascendo na mesma origem. Depois traçamos duas linhas paralelas a \vec{A} e a \vec{B} construindo um paralelogramo. O vetor $\vec{A} + \vec{B}$ é o vetor que nasce na origem comum de \vec{A} e \vec{B} e percorre a diagonal desse paralelogramo até o vértice oposto a essa origem. Esse processo está ilustrado na Figura 1.5.

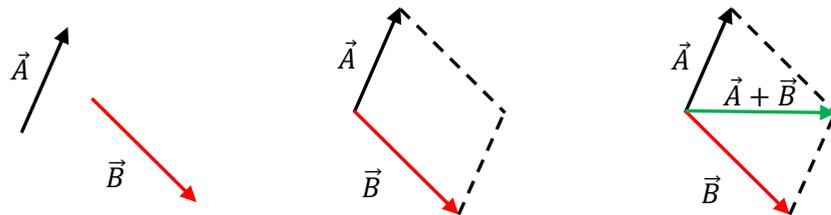


Figura 1.5: Ilustração da regra do paralelogramo para obter a soma vetorial $\vec{A} + \vec{B}$. Note que \vec{A} e \vec{B} sempre definem um plano, que é, por conveniência, o plano do papel no exemplo dessa figura. O paralelogramo é desenhado nesse plano, que contém também o vetor $\vec{A} + \vec{B}$ (seta verde).

A Figura 1.5 sugere que podemos dar outra interpretação para a regra de soma de vetores: para somar dois vetores \vec{A} e \vec{B} , iniciamos desenhando o vetor \vec{A} . Depois desenhamos o vetor \vec{B} nascendo na ponta do vetor \vec{A} . O vetor $\vec{A} + \vec{B}$ é o vetor que nasce onde nasce \vec{A} e tem ponta na ponta de \vec{B} .

Como $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ (a soma de vetores é comutativa), esse processo de desenhar um vetor na ponta do outro tanto pode iniciar com o desenho de \vec{A} como com o desenho de \vec{B} . A Figura 1.6 ilustra essa idéia (começando com \vec{A} e depois com \vec{B}).

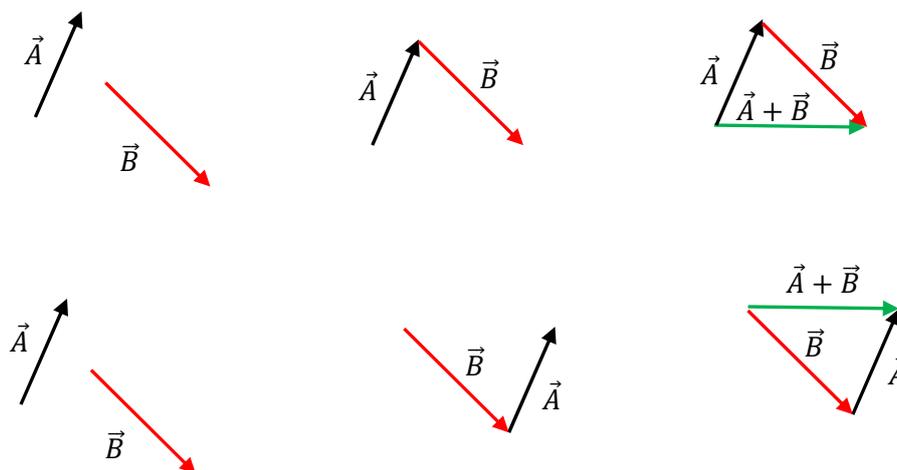


Figura 1.6: Interpretação alternativa da regra do paralelogramo para obter a soma vetorial $\vec{A} + \vec{B}$. Desenhe um vetor na ponta do outro (em qualquer ordem) e conecte as pontas.

Usando esse segundo algoritmo para se obter a soma de dois vetores é fácil provar que, como não poderia deixar de ser, $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{A} - \vec{A} = \vec{0}$, sendo $-\vec{A}$ uma seta oposta a \vec{A} e $\vec{0}$ um vetor nulo.

Agora podemos retornar à cinemática, pois já temos condições de calcular, pelo menos graficamente, o deslocamento de uma partícula. Considere a Figura 1.7 que ilustra a trajetória de uma formiga andando no plano da página. As posições $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t')$ estão ilustradas na figura. t' é um instante posterior qualquer ao instante t .

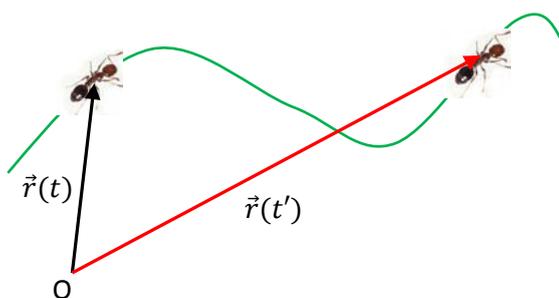


Figura 1.7: Ilustração da trajetória (linha verde) de uma formiga no plano do papel e das duas posições $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t')$ (em relação a O) que ela ocupou nos instantes t e t' (pense na formiga como uma partícula). Para calcular o deslocamento da formiga nesse intervalo de tempo devemos usar a regra do paralelogramo. Note, não são duas formigas, é a mesma formiga em instantes diferentes.

Vamos usar a regra do paralelogramo para calcular (graficamente) o deslocamento da formiga nesse intervalo de tempo que inicia em t e termina em t' : $\vec{D}(t, t') = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) = \vec{r}(t') + (-\vec{r}(t))$. Desenhando então o vetor $-\vec{r}(t)$, completando o paralelogramo e traçando a diagonal obtemos o vetor $\vec{D}(t, t')$ (seta azul) que está ilustrado na Figura 1.8.

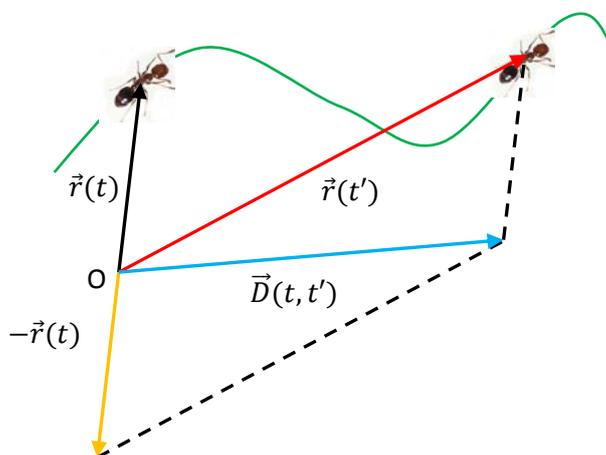


Figura 1.8: Deslocamento $\vec{D}(t, t')$ (seta azul) de uma formiga no intervalo de tempo desde t até t' .

Na Figura 1.8, se você for deslizando o vetor $\vec{D}(t, t')$ para cima, paralelamente a ele mesmo, vai ver que ele se encaixa exatamente entre as duas formigas, que representam as posições da formiga nos instantes t e t' . Podemos mostrar essa propriedade de uma forma mais rigorosa. De fato, note que, como $\vec{D}(t, t') = \vec{r}(t') - \vec{r}(t)$, então, passando $\vec{r}(t)$ para o outro lado, obtemos

$$\vec{D}(t, t') + \vec{r}(t) = \vec{r}(t')$$

Essa igualdade está ilustrada graficamente, através da regra do paralelogramo, na Figura 1.9 que segue (o vetor vermelho é a soma do vetor preto com o vetor azul). Ela vai nos ajudar a compreender melhor o significado do vetor deslocamento: um vetor que conecta duas posições em tempos diferentes na trajetória.

Notamos, portanto, que desenhar o vetor deslocamento é simples, não requer de fato nenhum cálculo, como o feito na Figura 1.8.

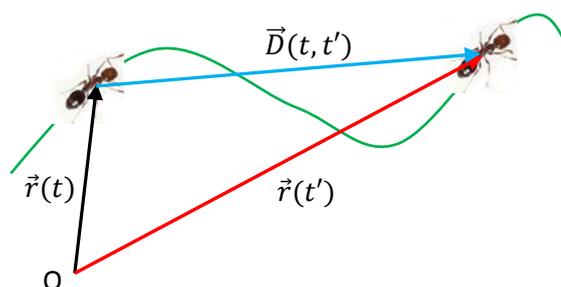


Figura 1.9: Deslocamento de uma formiga no intervalo de tempo desde t até t' , conforme a equação $\vec{r}(t') = \vec{D}(t, t') + \vec{r}(t)$ e a regra do paralelogramo.

Para desenhar o vetor $\vec{D}(t, t')$ basta desenhar uma seta que parte do ponto da trajetória ocupado pela partícula no instante t e termina no outro ponto da trajetória ocupado pela partícula no instante t' . Ao contrário do vetor posição, que é uma grandeza relativa, requerendo uma escolha de uma origem para ser definido/desenhado, o deslocamento é absoluto. Essa idéia está ilustrada na Figura 1.10 onde simplesmente omitimos a origem, as formigas (que foram representadas por bolinhas pretas) e os vetores $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t')$.

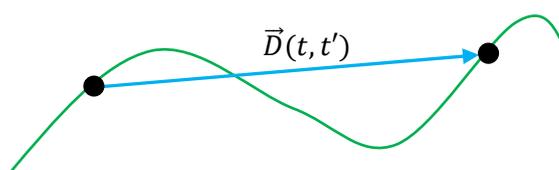


Figura 1.10: Deslocamento de uma formiga (representada pelas bolinhas pretas, uma partícula) no intervalo de tempo desde t até t' : basta conectar os dois pontos da órbita (curva verde) ocupados pela partícula em t e em t' por uma seta orientada de t para t' . Podemos dizer que $\vec{D}(t, t')$ está ao longo de uma corda da curva que define a trajetória.

O vetor $\vec{D}(t, t')$ indica a distância entre os dois pontos da órbita ocupados pela partícula em t e em t' , indica a direção em que a partícula se deslocou e o sentido desse deslocamento. Note que $\vec{D}(t, t')$ não fornece a distância percorrida pela partícula no intervalo de t até t' . Essa distância percorrida é dada pelo comprimento da trajetória entre os instantes t e t' (o comprimento do segmento de curva tracejada na Figura 1.11) e não pelo módulo de $\vec{D}(t, t')$ (que é o comprimento da corda que conecta dois pontos da trajetória, os dois extremos da curva tracejada na Figura 1.11).

Nesse sentido, o deslocamento $\vec{D}(t, t')$ é uma grandeza grosseira, ela só olha o ponto de partida e o ponto de chegada, não leva em conta o que acontece no meio do caminho. Por exemplo, se um automóvel parte da posição \vec{r}_0 em $t = 0$, viaja até uma cidade distante 200 km e após 10 horas retorna para a posição \vec{r}_0 , seu deslocamento nesse intervalo de tempo é $\vec{D}(0, 10) = \vec{r}_0 - \vec{r}_0 = \vec{0}$.

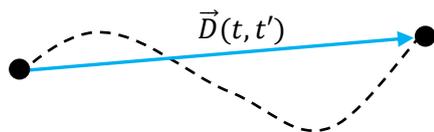


Figura 1.11: O módulo do deslocamento $\vec{D}(t, t')$ (o tamanho da seta azul) não tem relação com a distância que a partícula percorreu ao longo de sua trajetória no intervalo de tempo desde t até t' . Essa distância seria dada pelo comprimento da curva tracejada (a trajetória da formiga). Já o módulo de $\vec{D}(t, t')$ (que seria representado por $D(t, t')$) é o comprimento desse vetor, medido com uma régua ou trena (o comprimento da corda).

Note, o automóvel percorreu uma trajetória de 400 km de comprimento e mesmo assim seu deslocamento nesse intervalo de tempo foi nulo: porque a posição final é igual à posição inicial. O hodômetro desse automóvel marcaria uma distância percorrida de 400 km, mas o deslocamento nesse intervalo de tempo de 10 h é nulo. Outro exemplo: considere uma partícula que percorre uma trajetória circular de raio $R = 2$ m. Ao dar uma volta completa nesse círculo, o deslocamento da partícula será nulo, porque ela voltou para o mesmo ponto de onde saiu. No entanto, a distância percorrida pela partícula nesse mesmo intervalo de tempo foi $d = 2\pi R \cong 12,6$ m. O que pode parecer um defeito da grandeza deslocamento - sua “insensibilidade” ao que acontece no meio do intervalo de tempo - pode se converter em uma vantagem: a grandeza deslocamento é uma grandeza simples, fácil de ser calculada. Ela é a grandeza que precisamos para avançar na cinemática.

Consideremos agora a questão da rapidez com que uma órbita é percorrida. A grandeza que mede essa rapidez é a velocidade. A velocidade média de uma partícula no intervalo de tempo desde t até t' é dada pela razão deslocamento/tempo:

$$\vec{V}_M(t, t') = \frac{\vec{D}(t, t')}{t' - t}$$

Note que se a partícula se desloca rapidamente, então $\Delta t = t' - t$ é um número pequeno e a velocidade média resultará em um vetor de módulo grande (cuja unidade básica é o metro/segundo, abreviado por m/s). De acordo com as regras da álgebra vetorial que já discutimos, a direção e o sentido de $\vec{V}_M(t, t')$ são os mesmos de $\vec{D}(t, t')$, conforme ilustrado na Figura 1.12 (estamos considerando sempre $\Delta t = t' - t > 0$).

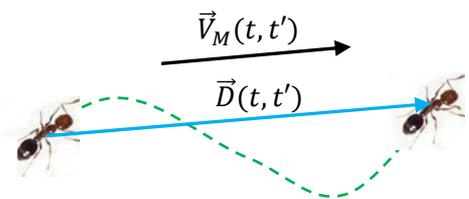


Figura 1.12: O vetor $\vec{V}_M(t, t')$ (seta preta) é paralelo ao vetor $\vec{D}(t, t')$. Ele está, portanto, ao longo da corda que inicia na posição ocupada pela partícula no instante t e termina na posição que a partícula ocupa no instante t' .

O movimento é crucial para os animais que lutam pela sobrevivência na natureza. Aqueles que se moverem mais rapidamente terão maiores chances de escaparem de seus predadores. Há uma relação direta entre a velocidade máxima que um animal consegue atingir e sua massa corporal (ver a referência: “*A general scaling law reveals why the largest animals are not the fastest*” de M. R. Hirt et al., *Nature Ecology & Evolution* vol. 1 (2017) 1116–1122”). Os animais de tamanho intermediário têm uma vantagem em relação aos animais maiores, que são muito pesados, e os menores, que têm pouca musculatura. Na terra as maiores velocidades são atingidas pelo guepardo (chita), que pode chegar a

100 km/h, ou cerca de 28 m/s. Esse número significa que enquanto corre, o guepardo percorre 28 metros a cada segundo, em média. Se ele corresse continuamente por uma hora, com essa velocidade média de 100 km/h, ele percorreria uma distância de 100 km. No ar, dentre os mais rápidos estão a águia e o falcão, que podem chegar a 140 km/h ou 39 m/s. Na água dentre os mais rápidos está o marlim-preto, que alcança 130 km/h ou 36 m/s. Dentre os humanos, os velocistas profissionais conseguem chegar próximos de 45 km/h, ou 13 m/s, mas apenas por alguns instantes. Suas velocidades médias em uma corrida são menores do que esse valor máximo, ou seja, se dividirmos a distância total da corrida pelo tempo total desde a largada até a chegada, vamos obter um valor menor que 13 m/s (algo mais próximo de 10 m/s para um atleta). Um carro de corrida pode chegar facilmente aos 300 km/h, ou 83 m/s. O som se propaga no ar com uma velocidade próxima de 1.220 km/h, ou 340 m/s. A luz, por sua vez, se propaga com uma velocidade incrível próxima de 11×10^8 km/h, ou 300.000.000 m/s. Por isso ouvimos o som (o trovão ou a trovoadas) de um raio (uma descarga elétrica na atmosfera) bem depois de vermos seu clarão (o relâmpago). Por exemplo, se um raio acontecer a uma distância de 5 km de você, você vai ver o relâmpago após um tempo de $5.000/300.000.000 \cong 17 \mu\text{s}$ (17 microsegundos), ou seja, quase que instantaneamente. Quanto ao trovão, você só vai ouvi-lo após um tempo de $5.000/340 \cong 15 \text{ s}$ (15 segundos).

Assim como a grandeza deslocamento, a velocidade média também é uma grandeza grosseira. Voltando ao nosso exemplo anterior, se um automóvel parte da posição \vec{r}_0 em $t = 0$, viaja até uma cidade distante 200 km e após 10 horas retorna para a posição \vec{r}_0 , sua velocidade média nesse intervalo de tempo é dada por $\vec{V}_M(0,10) = (\vec{r}_0 - \vec{r}_0)/10 = \vec{0}$. O velocímetro desse automóvel marcaria diversas velocidades durante o percurso: 10 km/h, 100 km/h etc. A velocidade média é nula. Obviamente o velocímetro não mede a velocidade média do carro. Ele mede a velocidade instantânea $\vec{V}(t)$.

A velocidade instantânea $\vec{V}(t)$ pode ser definida a partir da velocidade média através de um processo de limite: tomando o tempo posterior t' cada vez mais próximo do tempo t , obteremos no limite $t' \rightarrow t$ que $\vec{V}_M(t, t') \rightarrow \vec{V}(t)$. Mais especificamente:

$$\vec{V}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \vec{V}_M(t, t') = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

Note que na equação acima fizemos $t' = t + \Delta t$, para ficar mais evidente que a velocidade instantânea é a derivada no tempo da posição $\vec{r}(t)$. Assim como o vetor $\vec{V}_M(t, t')$ está ao longo da corda que conecta os dois pontos da trajetória ocupados pela partícula nos instantes t e t' , é fácil perceber que a velocidade instantânea $\vec{V}(t)$ é um vetor tangente à trajetória no ponto que a partícula ocupa no instante t , conforme ilustrado na Figura 1.13.

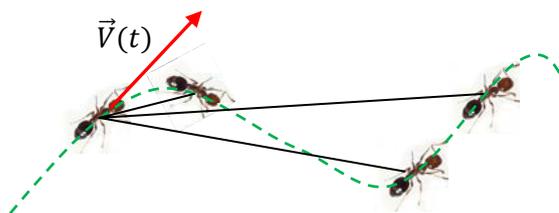


Figura 1.13: No processo de limite $t' \rightarrow t$, a corda cuja direção é a do vetor deslocamento $\vec{D}(t, t')$ vai se tornando tangente à trajetória, resultando em um vetor $\vec{V}(t)$ sempre tangente à trajetória em cada instante de tempo. A magnitude de $\vec{V}(t)$ foi definida arbitrariamente nessa figura.

Na Figura 1.14 mostramos um gráfico (calculado a partir de dados numéricos da distância $x(t)$ em função do tempo obtidos na internet) do módulo da velocidade instantânea $V_x(t)$ do atleta Usain Bolt em função do tempo t em uma prova de 100 m. A trajetória do atleta nessa prova é basicamente uma reta horizontal (eixo x) de comprimento 100 m. A velocidade é paralela a essa trajetória, ou seja, uma seta horizontal, com o sentido apontando do ponto de largada para o ponto de chegada e com magnitude conforme o gráfico mostrado aqui.

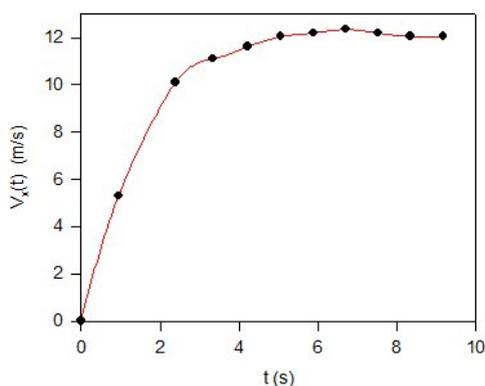


Figura 1.14: Gráfico da velocidade instantânea do atleta Usain Bolt em função do tempo em uma prova de 100 m.

Quando o cronômetro dispara (em $t = 0$) o atleta está ainda em repouso no ponto de largada, $V_x(0) = 0$. Sua velocidade cresce rapidamente e em cerca de 4 segundos atinge um valor próximo dos 12 m/s, se mantendo basicamente constante até o final da prova. Notamos apenas uma queda pequena na velocidade no final da prova, que durou apenas 9,58 s. A velocidade média do atleta nessa prova foi, portanto:

$$V_{xM} = \frac{100}{9,58} \cong 10,44 \text{ m/s}$$

A velocidade instantânea, por sua vez, assumiu vários valores diferentes durante a prova. A velocidade (instantânea) máxima foi atingida próxima do instante $t = 6,7$ s e foi de aproximadamente 12,35 m/s. Ao final da prova a velocidade do atleta caiu para 12,05 m/s.

Na Figura 1.15 abaixo (fora de escala) esboçamos a órbita elíptica do planeta Mercúrio (bolinha preta) em torno do Sol (bolinha vazada laranja) e mostramos esboços dos vetores velocidade orbital (instantânea) de Mercúrio em quatro instantes de tempo selecionados. Conforme já discutimos, esses vetores são sempre tangentes à elipse. Estamos assumindo na figura uma órbita percorrida no sentido anti-horário. As órbitas reais dos planetas do nosso sistema solar não são tão achatadas como mostrado nessa figura, elas são mais próximas de órbitas circulares.

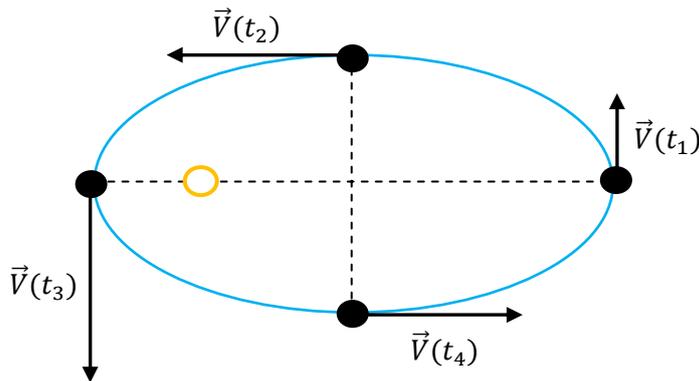


Figura 1.15: Ilustração (fora de escala) da órbita elíptica do planeta Mercúrio (bolinha preta) em torno do Sol (bolinha vazada laranja) e dos vetores velocidade orbital desse planeta $\vec{V}(t)$ nos quatro instantes selecionados t_1, t_2, t_3 e t_4 .

Discutiremos mais sobre essas órbitas no capítulo 8. Aqui exageramos um pouco a excentricidade (achatamento) da órbita de Mercúrio apenas para tornar mais visíveis os aspectos do movimento que são discutidos.

A velocidade de um planeta varia ao longo de sua órbita (varia em módulo, direção e sentido), assim como varia a velocidade de um projétil lançado aqui na Terra. Um planeta é basicamente um projétil em queda livre em torno do Sol.

Da figura, notamos que no instante t_1 Mercúrio está mais afastado do Sol (afélio de Mercúrio) e sua velocidade é mínima. No ponto oposto da órbita (periélio de Mercúrio), que ocorre no instante t_3 , Mercúrio está mais próximo do Sol e sua velocidade orbital é máxima. Nos instantes t_2 e t_4 as velocidades são opostas e iguais em módulo (por simetria), atingindo um valor intermediário entre o máximo no periélio e o mínimo no afélio. Fica evidente na Figura 1.15 que Mercúrio possui uma velocidade variável no tempo, variável em módulo e em direção (em sentido também porque se a direção muda o sentido necessariamente muda, pois o sentido está associado à direção). A grandeza que quantifica a variação do vetor velocidade instantânea é a aceleração instantânea, que definiremos a seguir, completando o formalismo da cinemática.

Considere uma partícula que no instante t possui velocidade $\vec{V}(t)$ e que em um instante posterior t' possui velocidade $\vec{V}(t')$. A aceleração média dessa partícula nesse intervalo de tempo é dada pela razão:

$$\vec{a}_M(t, t') = \frac{\vec{V}(t') - \vec{V}(t)}{t' - t}$$

A unidade padrão de aceleração é o metro por segundo por segundo, abreviado por (m/s)/s ou m/s^2 . Assim, se $\vec{V}(t') = \vec{V}(t)$ segue que $\vec{a}_M(t, t') = \vec{0}$, ou seja, a aceleração média é nula. Caso contrário, se a velocidade muda nesse intervalo de tempo, então $\vec{a}_M(t, t') \neq \vec{0}$ e quanto mais rapidamente a velocidade muda maior a aceleração. Note que $\vec{a}_M(t, t')$ é uma grandeza média e, portanto, “grosseira” pois não leva em conta o que acontece no meio, entre t e t' . Por outro lado, a aceleração instantânea $\vec{a}(t)$ fornece a taxa de variação no tempo da velocidade no instante t . Ela pode ser obtida através de um processo de limite, calculando-se $\vec{a}_M(t, t')$ com t' cada vez mais próximo de t . Mais especificamente:

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \vec{a}_M(t, t') = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{V}(t)$$

A equação horária de $\vec{a}(t)$ é obtida a partir da derivada no tempo da equação horária de $\vec{V}(t)$.

Na Figura 1.14, por exemplo, podemos ver que o atleta Usain Bolt possui uma grande aceleração nos primeiros dois segundos de prova, quando sua velocidade cresce rapidamente (derivada positiva da função $V_x(t)$). Depois de $t = 4$ s a velocidade se torna basicamente constante, ou seja, sua aceleração se aproxima de zero.

Outro exemplo: considere um automóvel que viaja em uma estrada reta e que aumenta com o tempo a magnitude de sua velocidade de acordo com a função: $V(t) = k t^2$, sendo k uma constante. Isso significa que o automóvel parte do repouso em $t = 0$, pois $V(0) = 0$, ele acelera e em $t = 1$, possui velocidade $V(1) = k$, em $t = 2$, possui velocidade $V(2) = 4k$, etc. O tamanho (módulo) do vetor velocidade vai aumentando com o tempo (a direção e o sentido não variariam nesse caso pois a estrada é reta). A aceleração (instantânea) do automóvel é $a(t) = d(k t^2)/dt = 2k t$. Isso significa que o automóvel parte do repouso em $t=0$, com aceleração $a(0) = 0$. A medida que o tempo passa ele ganha uma aceleração $a(t) = 2k t$ ao longo da estrada reta (porque o motorista passa a pisar no acelerador). Ele ganha velocidade e vai acelerando cada vez mais. Em $t = 1$ sua aceleração é $a(1) = 2k$, em $t = 2$ sua aceleração é maior, é $a(2) = 4k$, e assim por diante (talvez porque o motorista passou a pisar mais no acelerador). As unidades de medida nesse exemplo são arbitrárias. Se adotarmos o valor numérico $k = 10 \text{ m/s}^3$, por exemplo, obtemos: em $t = 1$ s, $V(1) = 10 \text{ m/s}$, em $t = 2$ s, $V(2) = 40 \text{ m/s}$, etc. Em $t = 1$ s a aceleração é $a(1) = 20 \text{ m/s}^2$, em $t = 2$ s, $a(2) = 40 \text{ m/s}^2$, e assim por diante. Uma velocidade de 10 m/s significa que se a partícula mantiver essa velocidade (vetor) constante durante 1

segundo, ela vai percorrer uma distância de 10 metros nesse segundo. A distância vai ser percorrida na direção (da estrada reta nesse caso) e no sentido de \vec{V} . Uma aceleração de 5 m/s^2 significa que se a partícula mantiver essa aceleração por um segundo, sua velocidade vai variar de 5 m/s nesse segundo. Essa variação vai se dar na direção (da estrada reta nesse caso) e sentido de \vec{a} .

Consideremos agora a tarefa de representar na Figura 1.15 a aceleração do planeta Mercúrio nos quatro instantes selecionados. Queremos representar as setas $\vec{a}(t_1)$, $\vec{a}(t_2)$, $\vec{a}(t_3)$ e $\vec{a}(t_4)$. Para realizar essa tarefa, graficamente, vamos partir da equação aproximada:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} \Rightarrow \vec{V}(t + \Delta t) \cong \vec{V}(t) + \vec{a}(t)\Delta t$$

com $\Delta t \cong 0$. Note então que estamos apenas omitindo a operação de limite, para obtermos uma equação (aproximada) que dá a evolução do vetor velocidade no tempo:

$$\vec{V}(t + \Delta t) = \vec{V}(t) + \vec{a}(t)\Delta t$$

Vamos omitir aqui o sinal de aproximadamente (\cong), substituindo-o pelo sinal de igualdade, deixando subentendido que essa igualdade só vale mesmo no limite em que $\Delta t \rightarrow 0$.

Consideremos inicialmente o caso particular ilustrado na Figura 1.16, em que a aceleração $\vec{a}(t)$ é paralela à velocidade $\vec{V}(t)$. Como será o vetor \vec{V} em um instante posterior $t + \Delta t$? De acordo com a última equação, basta somar $\vec{V}(t)$ com o vetor $\vec{a}(t)\Delta t$. Note que o vetor $\vec{a}(t)\Delta t$ é paralelo ao vetor $\vec{a}(t)$ (pois $\Delta t > 0$) e de tamanho menor que $\vec{a}(t)$ já que $\Delta t \cong 0$. Portanto, usando a regra do paralelogramo, obtemos um vetor $\vec{V}(t + \Delta t)$ que é paralelo a $\vec{V}(t)$, mas maior que $\vec{V}(t)$. Concluindo: uma aceleração paralela faz com que o vetor velocidade aumente de magnitude, mantendo sua direção e sentido.

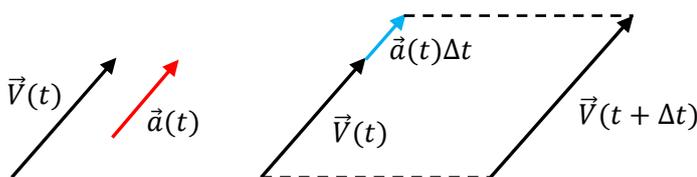


Figura 1.16: Ilustração do efeito da aceleração paralela: esticar (aumentar o módulo ou a magnitude) o vetor velocidade.

Note que sendo $\Delta t \cong 0$, deveríamos desenhar na Figura acima a seta azul ($\vec{a}(t)\Delta t$) bem menor que a seta vermelha ($\vec{a}(t)$). Preferimos não fazer isso para não tornar a Figura de difícil visualização.

Consideremos agora o caso ilustrado na Figura 1.17, em que a aceleração $\vec{a}(t)$ é antiparalela à velocidade $\vec{V}(t)$. Como será o vetor \vec{V} em um instante posterior $t + \Delta t$? De novo, basta somar $\vec{V}(t)$ com o vetor $\vec{a}(t)\Delta t$. Note que agora o vetor $\vec{a}(t)\Delta t$ é antiparalelo ao vetor $\vec{V}(t)$. Da regra do paralelogramo, obtemos um vetor $\vec{V}(t + \Delta t)$ que é paralelo a $\vec{V}(t)$, mas menor que $\vec{V}(t)$. Concluindo: uma aceleração

antiparalela faz com que o vetor velocidade diminua de magnitude, mantendo sua direção e sentido (a aceleração antiparalela pode levar, ao longo do tempo, a uma inversão no sentido da velocidade, dependendo das magnitudes de $\vec{V}(t)$ e $\vec{a}(t)$ e do intervalo de tempo considerado).

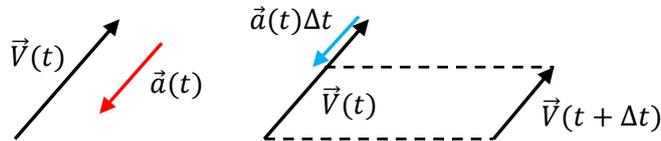


Figura 1.17: Ilustração do efeito da aceleração antiparalela: contrair o vetor velocidade.

Finalmente, consideremos o caso ilustrado na Figura 1.18, em que a aceleração $\vec{a}(t)$ é ortogonal à velocidade $\vec{V}(t)$. Como será o vetor \vec{V} em um instante posterior $t + \Delta t$? Da regra do paralelogramo, obtemos um vetor $\vec{V}(t + \Delta t)$ que é um pouco inclinado em relação a $\vec{V}(t)$, inclinado no mesmo sentido para onde aponta o vetor $\vec{a}(t)$.

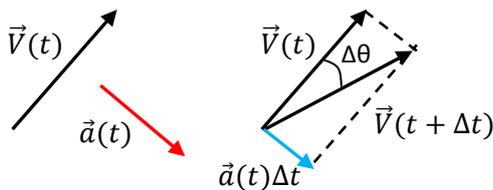


Figura 1.18: Ilustração do efeito da aceleração ortogonal: mudar a direção do vetor velocidade. Na ilustração o vetor velocidade foi inclinado de $\Delta\theta$ em relação à direção inicial.

Concluindo, uma aceleração ortogonal faz com que o vetor velocidade mude de direção. A partícula que possui essa aceleração faz uma curva.

Note que as ilustrações nas Figuras 1.16, 1.17 e 1.18 devem ser pensadas no limite em que Δt vai para zero. Portanto, após um incremento infinitesimal no tempo, a aceleração paralela $\vec{a}(t)$ leva a um aumento infinitesimal no módulo de $\vec{V}(t)$, a aceleração antiparalela $\vec{a}(t)$ (que pode ser pensada simplesmente como uma aceleração paralela negativa) leva a uma redução infinitesimal no módulo de $\vec{V}(t)$. Já a aceleração ortogonal $\vec{a}(t)$ leva a um desvio infinitesimal (no mesmo sentido de $\vec{a}(t)$) na direção do vetor $\vec{V}(t)$. Note que esse é o único efeito da aceleração ortogonal. No limite $\Delta t \rightarrow 0$ a aceleração ortogonal não modifica o tamanho do vetor $\vec{V}(t)$, apenas desvia sua direção. De fato, do triângulo retângulo formado pelos vetores $\vec{V}(t)$, $\vec{V}(t + \Delta t)$ e $\vec{a}(t)\Delta t$ mostrado na Figura 1.18 deduzimos que, no limite $\Delta t \rightarrow 0$ (e $\Delta\theta \rightarrow 0$):

$$\tan(\Delta\theta) = \Delta\theta = \frac{a(t)\Delta t}{V(t)} \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{a(t)}{V(t)} \Rightarrow \omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{a(t)}{V(t)}$$

sendo $\omega = d\theta/dt$ a velocidade angular da partícula (a taxa com que sua direção de movimento muda).

Por outro lado, quanto ao módulo de $\vec{V}(t)$ concluímos do teorema de Pitágoras (no limite $\Delta t \rightarrow 0$) que:

$$[V(t + \Delta t)]^2 = [V(t)]^2 + [a(t)\Delta t]^2 \Rightarrow \left[\frac{V(t + \Delta t)}{V(t)} \right]^2 = 1 + [\omega(t)\Delta t]^2 = 1$$

Concluindo: uma aceleração ortogonal $a(t)$ muda a direção do vetor velocidade com a taxa $\omega(t) = a(t)/V(t)$, sem modificar o módulo $V(t)$.

Resumindo: Se o módulo de $\vec{V}(t)$ muda, é porque existe uma aceleração paralela (positiva ou negativa) $\vec{a}_{\parallel}(t)$. Se a direção de $\vec{V}(t)$ muda (se a partícula faz uma curva), é porque existe uma aceleração ortogonal $\vec{a}_{\perp}(t)$. A Figura 1.19 ilustra essa idéia: uma aceleração qualquer (oblíqua em relação à velocidade) pode ser decomposta em duas componentes independentes entre si: uma componente paralela e uma componente ortogonal (à velocidade). Cada uma dessas componentes tem um efeito próprio sobre o vetor velocidade.

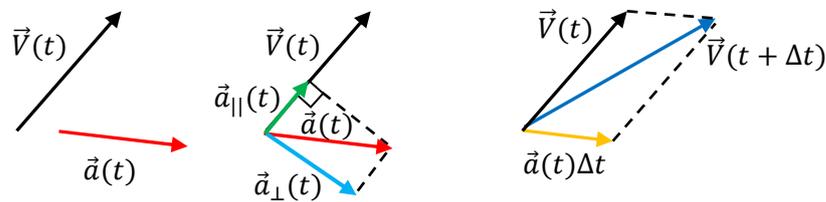


Figura 1.19: Ilustração da decomposição de uma aceleração qualquer em componentes paralela (positiva nesse caso) e ortogonal. A velocidade muda simultaneamente de tamanho e direção. Nesse caso a partícula estaria, no instante t , fazendo uma curva para a direita e se movendo cada vez mais rapidamente.

Matematicamente, podemos expressar os efeitos de $\vec{a}_{\parallel}(t)$ e $\vec{a}_{\perp}(t)$ da seguinte forma: nas Figuras 1.16 e 1.17 vemos que $\vec{a}_{\parallel}(t)$ muda apenas o módulo de $\vec{V}(t)$, ou seja:

$$a_{\parallel}(t) = \frac{d}{dt} (\text{módulo de } \vec{V}(t)) = \frac{d}{dt} V(t)$$

Na Figura 1.18, usando a relação $\tan(\Delta\theta) = \Delta\theta = a_{\perp}(t)\Delta t/V(t)$ obtemos:

$$a_{\perp}(t) = V(t) \left| \frac{d}{dt} (\text{direção de } \vec{V}(t)) \right| = V(t) \frac{d\theta}{dt} = V(t) \omega(t)$$

Note que especificamos apenas as magnitudes de $\vec{a}_{\parallel}(t)$ e $\vec{a}_{\perp}(t)$, pois suas direções já estão definidas pelos seus próprios nomes. A magnitude de $\vec{a}_{\parallel}(t)$ pode ser negativa no caso da aceleração $\vec{a}_{\parallel}(t)$ ser de fato antiparalela a $\vec{V}(t)$ (caso em que $V(t)$ está diminuindo e $dV(t)/dt$ é negativo).

Entender o papel da aceleração e de suas componentes paralela e ortogonal é um passo importante para o domínio da cinemática e, posteriormente, da dinâmica de uma partícula. Nesse

sentido, vale a pena enfatizar: o vetor $\vec{a}_{||}(t)$ está na mesma direção do vetor $\vec{V}(t)$ e possui magnitude $a_{||}(t) = dV(t)/dt$. Note que essa magnitude possui um sinal: se a velocidade estiver aumentando no instante t , então $dV(t)/dt > 0$ e $\vec{a}_{||}(t)$ possui o mesmo sentido de $\vec{V}(t)$ (é paralelo a $\vec{V}(t)$). Se, por outro lado, no instante t a velocidade estiver diminuindo, então $dV(t)/dt < 0$ e $\vec{a}_{||}(t)$ possui o sentido oposto ao de $\vec{V}(t)$ (é antiparalelo a $\vec{V}(t)$). No caso específico em que $V(t)$ não está nem aumentando nem diminuindo, ou seja, no caso em que $V(t)$ é constante no tempo ou está instantaneamente atingindo um valor máximo ou mínimo em um instante particular t , então $dV(t)/dt = 0$ e $\vec{a}_{||}(t) = \vec{0}$ nesse exato instante. Quanto ao vetor $\vec{a}_{\perp}(t)$, ele está na direção ortogonal ao vetor $\vec{V}(t)$, apontando para o sentido em que a partícula está fazendo a curva, e de magnitude $|\vec{a}_{\perp}| = V(t) \omega(t)$.

Para ilustrar, vamos retornar ao esboço da órbita de Mercúrio em torno do Sol, na Figura 1.15. Na Figura 1.20 abaixo mostramos novamente essa órbita com os vetores $\vec{a}_{||}(t)$ e $\vec{a}_{\perp}(t)$ já desenhados conforme nossa discussão anterior.

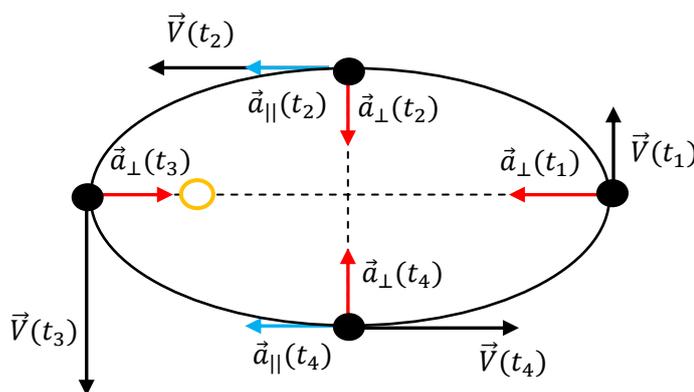


Figura 1.20: Ilustração da órbita elíptica de Mercúrio (bolinha preta) em torno do Sol (bolinha vazada laranja) e dos vetores velocidade orbital $\vec{V}(t)$ e acelerações $\vec{a}_{||}(t)$ e $\vec{a}_{\perp}(t)$ nos quatro instantes selecionados t_1, t_2, t_3 e t_4 .

Resumidamente: em t_1 (afélio) não há $\vec{a}_{||}(t)$ porque a velocidade é mínima nesse instante e $\vec{a}_{\perp}(t)$ aponta para o lado do Sol porque a curva se dá nesse sentido. Da mesma forma, em t_3 (periélio) não há $\vec{a}_{||}(t)$ porque a velocidade é máxima nesse instante e $\vec{a}_{\perp}(t)$ aponta para o lado do Sol porque a curva se dá nesse sentido. Em t_2 $\vec{a}_{||}(t)$ é positiva porque a velocidade está aumentando nesse instante e $\vec{a}_{\perp}(t)$ aponta para baixo porque a curva se dá nesse sentido. Finalmente, em t_4 $\vec{a}_{||}(t)$ é negativa (oposta a $\vec{V}(t)$) porque a velocidade está diminuindo nesse instante e $\vec{a}_{\perp}(t)$ aponta para cima porque a curva se dá nesse sentido.

Finalmente, considerando que $\vec{a}(t) = \vec{a}_{||}(t) + \vec{a}_{\perp}(t)$, obtemos a aceleração do planeta Mercúrio nesses quatro instantes de seu movimento, como está mostrado na Figura 1.21. Note que usamos a regra do paralelogramo para desenhar o vetor $\vec{a}(t)$ a partir dos vetores $\vec{a}_{||}(t)$ e $\vec{a}_{\perp}(t)$ mostrados na Figura 1.20. Os resultados na Figura 1.21 sugerem (apenas sugerem porque de fato não

calculamos nada com precisão, apenas esboçamos os vetores) que o vetor aceleração do planeta Mercúrio na sua órbita aponta sempre para o Sol. A demonstração de que isso é mesmo verdade e a explicação para esse fato fogem do contexto da cinemática. A cinemática apenas descreve o movimento, não se preocupa com suas causas. Quando estudarmos a dinâmica e a teoria da gravitação de Newton, poderemos entender essa propriedade da aceleração de um planeta.

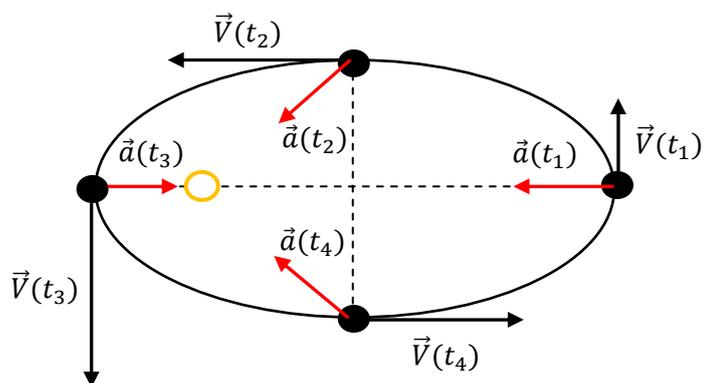


Figura 1.21: Ilustração da órbita elíptica de Mercúrio (bolinha preta) em torno do Sol (bolinha vazada laranja) e dos vetores velocidade orbital $\vec{V}(t)$ e aceleração $\vec{a}(t)$ nos quatro instantes selecionados t_1, t_2, t_3 e t_4 .

Resumindo o que já vimos até agora, a cinemática de uma partícula consiste basicamente no estudo das três funções horárias (não independentes entre si) listadas na Tabela 1.4 que segue: posição, velocidade instantânea (ou simplesmente velocidade) e aceleração instantânea (ou simplesmente aceleração). Através das operações de derivação e integração podemos obter uma função horária de outra já conhecida. As constantes de integração são determinadas pelas condições iniciais do movimento: posição e velocidade iniciais da partícula.

Esses três vetores que caracterizam o movimento de uma partícula estão ilustrados na Figura 1.22, que representa um segmento da órbita de uma partícula (no plano da página) que no instante t está passando pelo ponto P: $\vec{r}(t)$ é desenhado partindo da origem (arbitrária) e terminando no ponto P. $\vec{V}(t)$ é desenhado nascendo em P, tangente à trajetória, orientado no sentido do movimento. $\vec{a}(t)$ é desenhado nascendo em P, com componentes paralela e ortogonal (à $\vec{V}(t)$) conforme nossa discussão anterior. No caso da Figura 1.22 a partícula estaria aumentando a magnitude de sua velocidade.

Função horária	Símbolo padrão	Relação derivada/integral
Posição	$\vec{r}(t)$	$\vec{r}(t) = \int \vec{V}(t) dt$
Velocidade	$\vec{V}(t)$	$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \int \vec{a}(t) dt$
Aceleração	$\vec{a}(t)$	$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{V}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$

Tabela 1.4: As três funções horárias básicas para descrever o movimento de uma partícula.

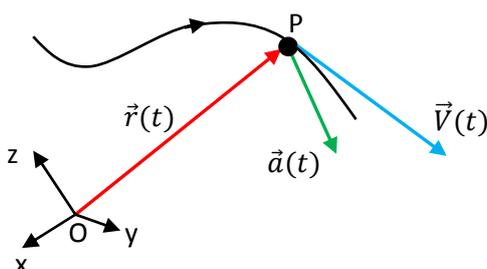


Figura 1.22: Ilustração dos vetores posição, velocidade e aceleração para uma partícula que se move em uma órbita no plano do papel e passa pelo ponto P no instante t . Ilustramos o caso em que a velocidade da partícula estaria aumentando no instante t em que ela passa por P.

Com essa discussão terminamos de estabelecer as bases da cinemática de uma partícula. Para podermos avançar nas aplicações dessa teoria, efetuando cálculos precisos e rápidos das grandezas posição, velocidade e aceleração, precisamos de uma representação mais prática dos vetores. Até agora temos representado os vetores através de setas, mas não é difícil notar que fazer desenhos com precisão não é uma tarefa fácil. Assim sendo, vamos partir para uma representação algébrica dos vetores, em que as setas serão representadas por números/letras e fórmulas. Como consequência, nossos cálculos se tornarão mais rápidos e precisos, sem a necessidade do uso de réguas, esquadros ou transferidores. A idéia é basicamente a mesma que nos faz migrar da geometria pura para a geometria analítica. Enquanto a geometria pura estuda os pontos, as curvas, os planos e os sólidos *per se*, sem o uso de fórmulas, a geometria analítica representa esses mesmos objetos através de fórmulas. Uma teoria não substitui a outra, mas amplia os seus domínios.

A tarefa de representar uma seta através de uma fórmula é de fato simples. Uma seta tem três propriedades: seu módulo pode ser representado por um número positivo; seu sentido pode ser

representado por um simples sinal, + ou -. Finalmente, para representar a direção da seta basta que arbitremos nomes para três direções ortogonais (independentes) entre si no espaço tridimensional. No dia-a-dia já adotamos alguns nomes para as direções no espaço, por exemplo, “vertical”, “horizontal”, “norte-sul”, etc. Esses nomes são muito longos e não muito precisos também. Você saberia definir precisamente o que chamamos de direção vertical? Podemos simplificar a ideia chamando uma direção de x, outra de y e outra de z. Dessa forma estamos adotando um referencial (cartesiano) no espaço, três eixos ortogonais entre si (x, y e z) e uma origem “O” comum a eles. Para indicar nas fórmulas as direções dos eixos adotamos a idéia de vetores unitários (vetores de módulo igual a um). O vetor \hat{x} (leio “x chapéu”) é um vetor de módulo 1 que aponta na direção e no sentido do eixo x. Analogamente para \hat{y} e \hat{z} (alguns autores utilizam os símbolos \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} para representar esses três vetores unitários). Nesse livro, para simplificar nossas figuras, geralmente omitimos um dos eixos, o eixo z, considerando que tudo ocorre no plano da página, o plano xy. Podemos sempre imaginar que um eixo z ortogonal ao plano da página pode ser adicionado, para o caso de um movimento mais geral, que sai do plano da página (por exemplo, uma mosca voando no espaço tridimensional). Mais na frente, quando estudarmos rotações, o eixo z terá um papel mais relevante.

Consideremos os vetores \vec{A} , \vec{B} e \vec{C} mostrados na Figura 1.23. Vamos supor que esses vetores estão no plano da página e que $|\vec{A}| = A = 3$, $B = 4$ e $C = 6$. Consideremos a tarefa de escrever expressões algébricas (fórmulas) para representar esses vetores.

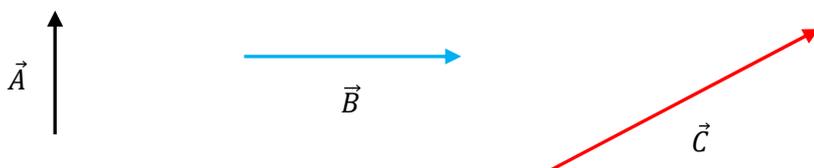


Figura 1.23: Ilustração de três vetores no plano do papel.

Primeiramente devemos escolher um referencial. Essa escolha é arbitrária, mas alguns referenciais levam a expressões mais simples para os vetores que queremos representar e outros referenciais nem tanto. Por isso sempre podemos fazer uma escolha de referencial através do critério de simplicidade ou menor esforço. Consideremos então a escolha mostrada na Figura 1.24 (note que omitimos o eixo z, que estaria ortogonal ao plano da página (apontando para fora), para simplificar a figura. O ponto de cruzamento dos eixos é a origem “O”).

Nesse referencial, o vetor \vec{A} é dado por $\vec{A} = 3\hat{y}$ e o vetor \vec{B} por $\vec{B} = 4\hat{x}$. Note, ao lermos a expressão $\vec{A} = 3\hat{y}$, sabemos que \vec{A} tem módulo igual a 3 (porque \hat{y} tem módulo 1) e que \vec{A} tem a direção e o sentido que coincidem com a direção e o sentido do eixo y (no referencial adotado).

Analogamente para \vec{B} . No caso do vetor \vec{C} precisaremos pensar um pouco mais para encontrar sua representação algébrica nesse referencial xy , pois esse vetor é oblíquo.

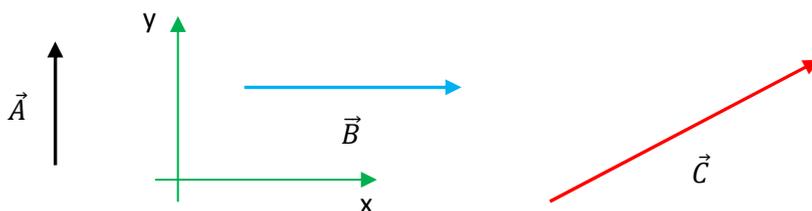


Figura 1.24: Ilustração de três vetores no plano do papel e de um referencial xy .

Começamos, por conveniência, deslocando o referencial de tal forma que \vec{C} nasça em O , como está ilustrado na Figura 1.25.

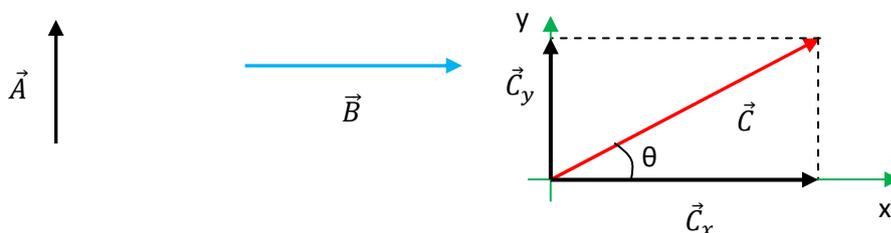
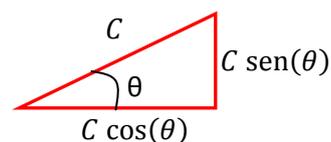


Figura 1.25: Ilustração do processo de decomposição do vetor \vec{C} em componentes x e y .

Podemos ver na Figura 1.25 que o vetor \vec{C} pode ser projetado nos eixos x e y (note que as linhas tracejadas que definem as projeções devem ser ortogonais aos eixos) definindo novos vetores projeções (ou componentes) \vec{C}_x (que parece com o vetor \vec{B}) e \vec{C}_y (que parece com o vetor \vec{A}). Suponha que θ é o ângulo que o vetor \vec{C} faz com o eixo x (ao escolhermos o referencial escolhemos o valor de θ). Então, das definições das funções trigonométricas básicas, é fácil concluir, conforme ilustra a figura ao lado, que os comprimentos das projeções valem $C_x = C \cos(\theta) = 6 \cos(\theta)$ e $C_y = C \sin(\theta) = 6 \sin(\theta)$. Da regra do paralelogramo, fica claro que $\vec{C} = \vec{C}_x + \vec{C}_y$. Juntando tudo isso, concluímos finalmente que a expressão de \vec{C} nesse referencial xy é:



$$\vec{C} = 6 \cos(\theta) \hat{x} + 6 \sin(\theta) \hat{y}$$

Por exemplo, se valer $\theta = 30^\circ$, então: $\vec{C} = 3\sqrt{3} \hat{x} + 3 \hat{y}$.

Concluindo: qualquer vetor \vec{A} pode ser escrito na forma: $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$, sendo \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} vetores unitários ao longo de três eixos arbitrários ortogonais entre si e A_x , A_y e A_z as componentes (projeções ou sombras) do vetor \vec{A} nesses eixos. Note que as projeções podem ser positivas ou negativas, dependendo do sentido que essas projeções têm em relação aos eixos. Esse sinal não surge

automaticamente, ele deve ser introduzido na expressão algébrica do vetor, conforme observamos o sentido da projeção em relação ao sentido do eixo dessa projeção. Os exemplos na Tabela 1.5 que segue ilustram essas idéias. Considere nessa tabela, apenas para ilustrar, que $|\vec{A}| = A = 3$, $|\vec{B}| = B = 4$, $|\vec{C}| = C = 2$, $\theta=45^\circ$, $\alpha=30^\circ$ e $\beta=20^\circ$.

Note que a representação algébrica de um vetor não é única. O mesmo vetor (a mesma seta) pode ter infinitas representações algébricas diferentes, dependendo da escolha que se faz do referencial. O que não muda são as propriedades do vetor: módulo, direção e sentido. Devemos sempre escolher um referencial em que acreditamos que as representações dos vetores se tornam mais simples.

Dadas as projeções de um vetor em três eixos ortogonais entre si: $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$, o teorema de Pitágoras garante que o módulo desse vetor é: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ (você pode conferir isso na tabela 1.5, notando que $A_z = 0$ para os vetores nessa tabela).

A álgebra de vetores fica bastante simplificada quando utilizamos as representações algébricas dos vetores, ao invés dos desenhos das setas. Como exemplo, considere a tarefa de somar os vetores \vec{A} e \vec{B} mostrados na Figura 1.26. Suponha que $A = 3$ e $B = 4$.



Figura 1.26: Dois vetores cuja soma queremos calcular.

A solução gráfica desse problema é dada pela regra do paralelogramo: o vetor $\vec{A} + \vec{B}$ é esboçado na Figura 1.27 que segue.

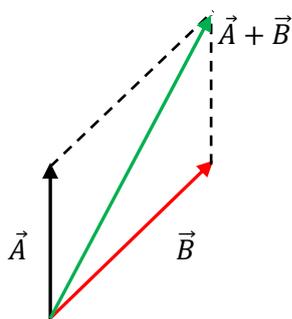


Figura 1.27: Cálculo do vetor $\vec{A} + \vec{B}$ através da regra do paralelogramo.

Note, se você quiser saber o módulo de $\vec{A} + \vec{B}$, deve desenhar a figura acima com bastante precisão e usar, por exemplo, uma régua para medir o comprimento do vetor $\vec{A} + \vec{B}$.

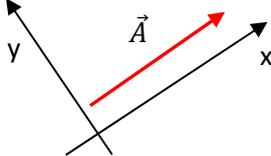
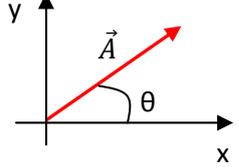
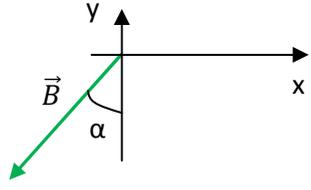
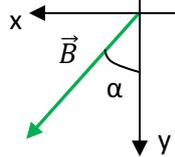
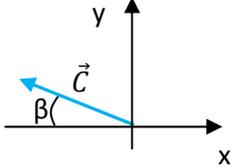
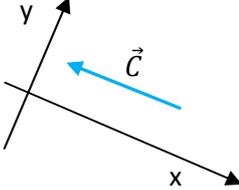
Representação Gráfica (seta) + Referencial	Representação Algébrica
	$\vec{A} = 3 \hat{x}$
	$\vec{A} = 3 \cos(\theta) \hat{x} + 3 \sin(\theta) \hat{y}$ $\vec{A} = 3 \cos(45^\circ) \hat{x} + 3 \sin(45^\circ) \hat{y}$ $\vec{A} = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} + 3 \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{x} + \hat{y})$
	$\vec{B} = -4 \sin(\alpha) \hat{x} - 4 \cos(\alpha) \hat{y}$ $\vec{B} = -4 \sin(30^\circ) \hat{x} - 4 \cos(30^\circ) \hat{y}$ $\vec{B} = -4 \frac{1}{2} \hat{x} - 4 \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y}$ $\vec{B} = -2 \hat{x} - 2\sqrt{3} \hat{y} = -2(\hat{x} + \sqrt{3} \hat{y})$
	$\vec{B} = 4 \sin(\alpha) \hat{x} + 4 \cos(\alpha) \hat{y}$ $\vec{B} = 2 \hat{x} + 2\sqrt{3} \hat{y} = 2(\hat{x} + \sqrt{3} \hat{y})$
	$\vec{C} = -2 \cos(\beta) \hat{x} + 2 \sin(\beta) \hat{y}$ $\vec{C} = -2 \cos(20^\circ) \hat{x} + 2 \sin(20^\circ) \hat{y}$ $\vec{C} = -2 (0.939...) \hat{x} + 2 (0.342...) \hat{y}$ $\vec{C} = -(1.87...) \hat{x} + (0.684...) \hat{y}$
	$\vec{C} = -2 \hat{x}$

Tabela 1.5: Ilustração das expressões algébricas de alguns vetores. Note que o mesmo vetor pode ter várias expressões algébricas diferentes, dependendo do referencial. Usamos os valores numéricos $|\vec{A}| = A = 3$, $|\vec{B}| = B = 4$, $|\vec{C}| = C = 2$, $\theta=45^\circ$, $\alpha=30^\circ$ e $\beta=20^\circ$. Note que os sinais das projeções foram introduzidos “na mão”.

Vamos realizar agora essa tarefa, de calcular $\vec{A} + \vec{B}$, através das expressões algébricas de \vec{A} e de \vec{B} . Para isso, considere o referencial na Figura 1.28.

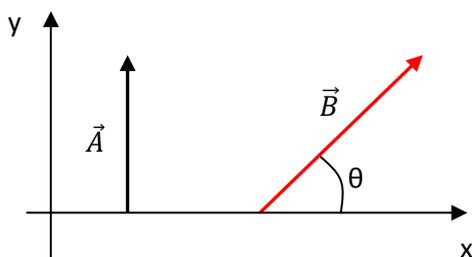


Figura 1.28: Os vetores \vec{A} e \vec{B} e um referencial xy escolhido. Considere que o ângulo θ é conhecido (ele pode ser medido com um transferidor, ou pré-definido pela própria escolha do referencial).

Nesse referencial:

$$\vec{A} = 3 \hat{y} \text{ e } \vec{B} = 4 \cos(\theta) \hat{x} + 4 \sin(\theta) \hat{y}$$

Portanto: $\vec{A} + \vec{B} = 3 \hat{y} + 4 \cos(\theta) \hat{x} + 4 \sin(\theta) \hat{y} = 4 \cos(\theta) \hat{x} + (3 + 4 \sin(\theta)) \hat{y}$.

Concluindo: o vetor $\vec{A} + \vec{B}$ mostrado na Figura 1.27 tem uma projeção igual a $4 \cos(\theta)$ no eixo x , uma projeção igual a $3 + 4 \sin(\theta)$ no eixo y e um módulo igual a $\sqrt{(4 \cos(\theta))^2 + (3 + 4 \sin(\theta))^2}$, de acordo com o teorema de Pitágoras. Essas propriedades podem ser facilmente visualizadas na Figura 1.29 abaixo.

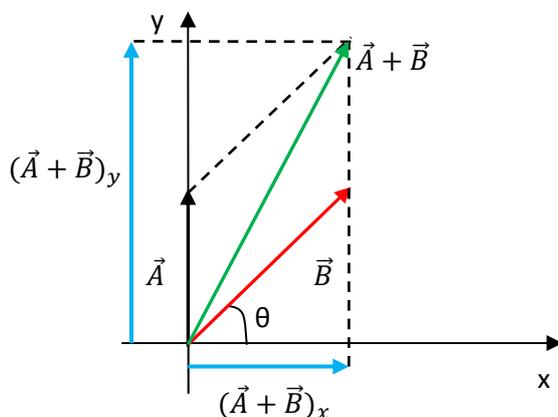


Figura 1.29: Componentes x e y de $\vec{A} + \vec{B}$ no referencial xy adotado.

Com esses exemplos pretendemos convencer o leitor das vantagens da representação algébrica dos vetores, em contraposição a sua representação gráfica, através de setas.

É interessante notar que a representação gráfica continuará tendo um papel relevante no nosso estudo da mecânica, para ilustrar as posições, velocidades, forças, torques, etc. Uma figura bem feita é um bom ponto de partida para a solução de um problema. Mas, os cálculos dessas grandezas físicas serão realizados através das representações algébricas dos vetores.

Concluindo: se $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ e $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$, então:

$$c\vec{A} = cA_x\hat{x} + cA_y\hat{y} + cA_z\hat{z} \quad (c \text{ sendo um escalar})$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{x} + (A_y - B_y)\hat{y} + (A_z - B_z)\hat{z}$$

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{e} \quad |\vec{B}| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

Lembre-se, não existe \vec{A}/\vec{B} , $\vec{A}\vec{B}$, ou $\sqrt{\vec{A}}$.

1.2 Aplicações da cinemática de uma partícula

1.2.1 Um exemplo qualitativo de cinemática unidimensional

Suponha uma formiga que se move ao longo de um varal esticado na horizontal. A formiga só pode ir para a frente ou para trás no varal, ela não pode subir ou descer na vertical, porque o varal é fino e ela não voa e nem pula do varal. Trata-se, portanto, de um movimento unidimensional ($d=1$, ou $1d$). Essa formiga vive em um mundo unidimensional. Vamos descrever um movimento possível dessa formiga nesse mundo. Começamos chamando de x o eixo paralelo e ao longo do varal. A posição da formiga no varal é, portanto, uma coordenada x . Vamos colocar a origem na posição inicial da formiga ($t = 0$), ou seja, $x_0 = 0$. A posição da formiga é um vetor no eixo x :

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x}$$

Note, o uso da notação vetorial e do unitário \hat{x} seria dispensável nesse caso, pois sabemos que a formiga estará sempre sobre o eixo x e é isso que o \hat{x} está representando na expressão de $\vec{r}(t)$. Poderíamos simplesmente dizer que a posição da formiga é dada pela função escalar $x(t)$ ao longo do varal. Se $x(t) = 5$ cm, significa que a formiga está 5 cm à direita da origem, sobre o varal. Se $x(t) = -10$ cm, significa que a formiga está 10 cm à esquerda da origem, sobre o varal. Esse “sobre o varal” é o que significa o \hat{x} em $\vec{r}(t)$. Nesse sentido a notação vetorial poderia ser dispensada, como se costuma fazer no estudo de movimentos unidimensionais. Mas, preferimos manter aqui a notação vetorial, para que o estudante se acostume desde já com ela. Afinal, não há nada de “complexo” em se trabalhar com vetores. Pelo contrário, a notação vetorial torna mais precisa e compreensível a linguagem.

A Figura 1.30 que segue ilustra a idéia da formiga andando em um varal horizontal e sua posição $\vec{r}(t)$.

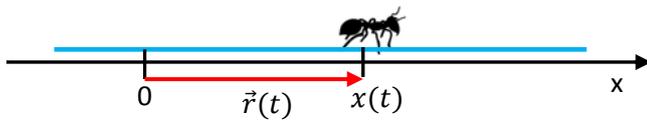


Figura 1.30: Uma formiga (uma partícula) se move em um varal horizontal (linha azul). O referencial para a posição da formiga é um eixo x ao longo do varal. Deslocamos um pouco o eixo x para baixo para melhor visualização.

Agora vamos fazer uma hipótese (apenas qualitativa) sobre o movimento dessa formiga. Suponha que a função horária $x(t)$ tenha o comportamento mostrado na Figura 1.31.

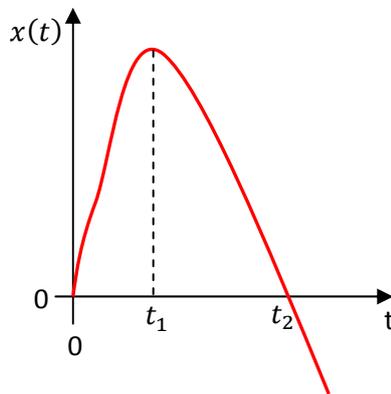


Figura 1.31: Uma formiga se move em um varal reto de acordo com o gráfico ao lado: ela vai e volta.

Note que esse não é o gráfico da trajetória da formiga. A trajetória da formiga é uma linha reta horizontal, ao longo do varal. Esse gráfico mostra a posição $x(t)$ da formiga em função do tempo. A formiga sai da posição $x = 0$ em $t = 0$ (graças à nossa escolha da origem do eixo x) e vai para a direita (na Figura 1.30), aumentando sua coordenada x positiva. Em um certo instante t_1 , por algum motivo, a formiga resolve voltar e sua coordenada x passa a diminuir. A formiga passa então novamente pela origem no instante t_2 e continua se afastando da origem, para a esquerda, porque x se torna negativo. Note então que o vetor posição da formiga, dado por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x}$$

vai apontar da origem para a direita (como na Figura 1.30) para $0 \leq t < t_2$. Depois, para $t > t_2$ o vetor vai apontar para a esquerda, porque $x(t)$ é negativo. O vetor $\vec{r}(t)$ sempre aponta para a formiga, no instante t . Em $t = t_2$ esse vetor vai ser nulo, como ele era em $t=0$.

Como será o gráfico da velocidade da formiga? A velocidade é dada por:

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}x(t)\hat{x} = \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\hat{x} = V(t)\hat{x}$$

Note que \hat{x} é uma constante e pode ser retirado da operação de derivação. Vemos que a velocidade da formiga está ao longo do varal, pois o vetor \hat{x} está lá, na expressão de $\vec{V}(t)$ (já sabemos que a formiga se move ao longo do varal, ou seja, na direção horizontal, nesse sentido a notação vetorial poderia ser dispensada). Se $dx(t)/dt > 0$, então a formiga está se movendo para a direita, porque o vetor $\vec{V}(t)$ estará apontando para a direita (pois \hat{x} aponta para a direita). Caso contrário, $dx(t)/dt < 0$, significa que a formiga estará se movendo para a esquerda (lembre-se que estamos considerando \hat{x} apontando para a direita). Olhando para o gráfico de $x(t)$ e sabendo que a derivada é a inclinação da reta tangente, podemos deduzir, sem nenhum cálculo, que o gráfico da função horária da velocidade:

$$V(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

em função do tempo é como esboçado na Figura 1.32.

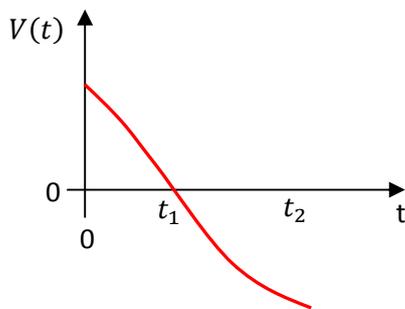


Figura 1.32: A velocidade $V(t)$ de uma formiga compatível com o gráfico da posição mostrado na Figura 1.31. A formiga vai para a direita, enquanto $V(t)$ é positivo, ela para quando $V(t) = 0$ (em $t = t_1$) e volta para a esquerda, quando $V(t)$ se torna negativo.

Note que em $t = t_1$ a reta tangente à curva de $x(t)$ é horizontal, significando que $V(t) = 0$ em $t = t_1$, ou seja, nesse instante a formiga para, dá meia volta e passa a andar para a esquerda (tudo isso acontece em um único instante $t = t_1$).

Como será o gráfico da aceleração da formiga? Sabemos que:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}V(t)\hat{x} = \left(\frac{d}{dt}V(t)\right)\hat{x} = a(t)\hat{x}$$

Novamente, o unitário \hat{x} está lá para nos lembrar (como se já não soubéssemos) que a formiga acelera apenas ao longo da direção do varal, ou seja, na direção horizontal. A magnitude da aceleração ao longo de x é dada pela função horária escalar:

$$a(t) = \frac{d}{dt}V(t)$$

Se $a(t) > 0$ significa que a formiga está com aceleração para a direita. Caso contrário, se $a(t) < 0$, significa que a formiga está com aceleração para a esquerda. Do gráfico de $V(t)$ e das propriedades da derivação (a derivada é a inclinação da reta tangente à curva da função) podemos esboçar um gráfico

para $a(t)$ como na Figura 1.33. Nessa figura repetimos o gráfico da velocidade, para ajudar na discussão.

Note, você não deve se preocupar com os detalhes dessas curvas, por que elas oscilam um pouco para lá ou para cá. São gráficos apenas qualitativos e colocamos de propósito algumas oscilações apenas para denotar essa incerteza na determinação das curvas. Fato é que a aceleração da formiga é sempre negativa, ou seja, aponta sempre para a esquerda.

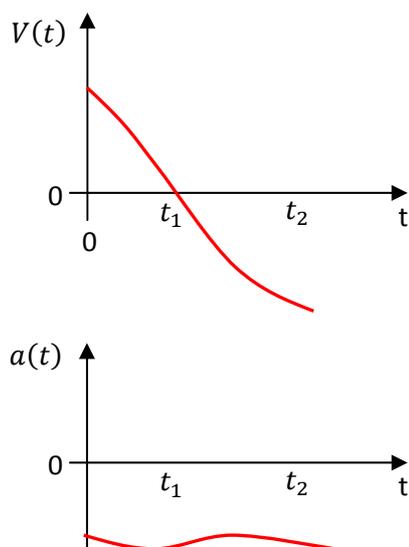


Figura 1.33: A aceleração $a(t)$ de uma formiga compatível com o gráfico da velocidade mostrado na Figura 1.32 e repetido aqui. A aceleração é sempre negativa, ou seja, sempre aponta para a esquerda (porque a reta tangente à curva de $V(t)$ é sempre uma reta decrescente).

Note então que, para $0 \leq t < t_1$ a formiga tem velocidade positiva e aceleração negativa (aceleração antiparalela). Isso significa que a formiga sai da origem correndo e vai freando nesse intervalo de tempo. Ela freia até parar em $t = t_1$. Mas, mesmo em $t = t_1$, a formiga tem aceleração para a esquerda. Então ela não fica parada (em repouso), ela apenas para momentaneamente e passa a ganhar velocidade para a esquerda. Para $t > t_1$ a velocidade se torna negativa e a aceleração continua negativa, ou seja, agora a aceleração é paralela à velocidade. A formiga tem, portanto, uma velocidade (negativa) crescente em módulo. A partir de t_1 a formiga vai se movendo cada vez mais rapidamente para a esquerda, até que ela passa novamente pela origem e continua para a esquerda. Poderíamos nos perguntar por que a formiga faz isso, mas a cinemática não se preocupa com a causa do movimento, ela apenas se propõe a descrever o movimento, que é o que estamos fazendo aqui. Mas, poderíamos especular que é como se tivesse açúcar em algum ponto com coordenada $x < 0$ no varal e a formiga já soubesse disso desde o início, havendo nela um ímpeto de voltar. Mas ela resolve voltar apenas no instante t_1 , quando ela passa a correr cada vez mais rapidamente em direção a esse açúcar. Outra situação que poderia modelar esse movimento seria aquela em que houvesse um elástico amarrado à formiga e a algum suporte em um ponto com coordenada $x < 0$. A formiga sairia para a direita, mas

sendo puxada e freada pelo elástico. Até que ela não suportasse mais puxar o elástico, no instante t_1 , e se rendesse, deixando que o elástico a puxasse cada vez mais rapidamente em direção ao suporte. De fato, existe um movimento muito parecido com esse, que podemos reproduzir apenas jogando uma pedrinha para cima, na direção vertical. A pedrinha sai da mão do lançador com uma velocidade vertical para cima e vai freando, até que ela para em uma altura máxima e passa a cair, cada vez mais rapidamente. Se x é a coordenada vertical dessa pedrinha, com origem na mão do lançador, os gráficos de $x(t)$, $V(t)$ e $a(t)$ são muito parecidos com os exibidos aqui. Nesse caso, a aceleração é a aceleração da gravidade, que “puxa” a pedrinha para baixo, esteja ela subindo, parada ou descendo.

Na Figura 1.34 que segue mostramos esboços de gráficos de $x(t)$, $V(t)$ e $a(t)$ para dois outros movimentos possíveis de uma formiga em um varal. No primeiro caso a formiga se afasta da origem, permanece por um tempo em repouso e depois resolve voltar em direção à origem. O período de repouso se traduz em platôs nos gráficos das funções horários do movimento. No segundo caso o gráfico de $x(t) \times t$ apresenta um ponto de inflexão, que é caracterizado por $V(t) \neq 0$ e $a(t) = 0$ nesse instante, ou seja, uma mudança na concavidade da curva de $x(t) \times t$. Trata-se da transição entre frear e acelerar, ou vice-versa.

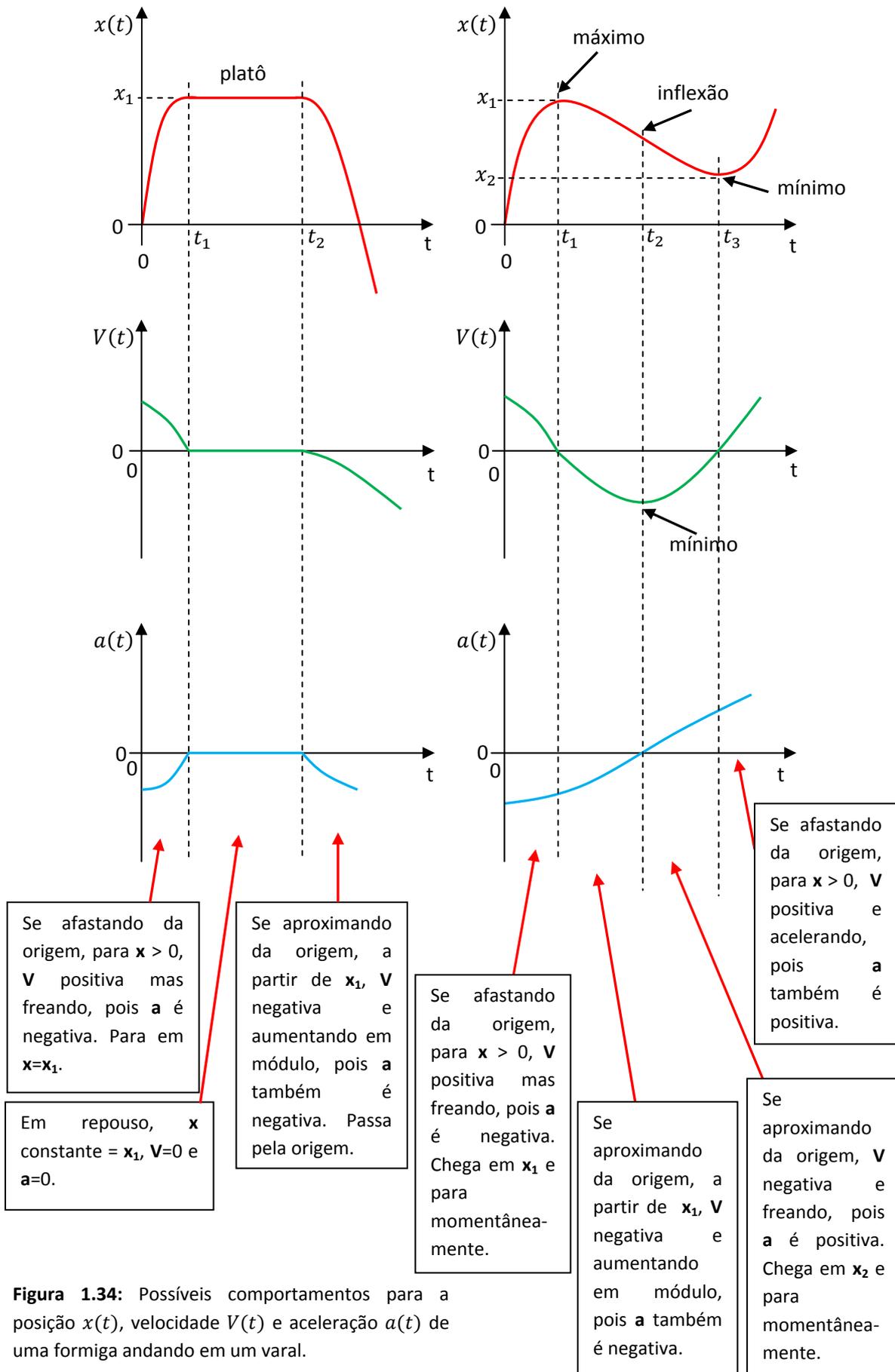


Figura 1.34: Possíveis comportamentos para a posição $x(t)$, velocidade $V(t)$ e aceleração $a(t)$ de uma formiga andando em um varal.

1.2.2 Cinemática do movimento com aceleração constante

Consideremos como nosso primeiro exemplo quantitativo de cinemática o caso em que uma partícula se move com aceleração constante, ou seja, com uma aceleração com módulo, direção e sentido constantes (que não mudam no tempo) durante todo seu movimento. Queremos saber como se comportam a velocidade e a posição dessa partícula. Para isso, basta usarmos as relações de integração mostradas na Tabela 1.4.

Resumidamente, se $\vec{a}(t) = \vec{a} = \text{constante}$, então $\vec{V}(t) = \int \vec{a} dt = \vec{a} t + \vec{C}$, sendo \vec{C} uma constante de integração arbitrária. Essa constante tem um significado físico simples. Supondo que o movimento dessa partícula se iniciou no instante $t = 0$, então $\vec{V}(0) = \vec{C}$, ou seja, \vec{C} é a velocidade inicial da partícula, a velocidade com que a partícula iniciou seu movimento. Representaremos essa velocidade inicial pelo símbolo \vec{V}_0 . Portanto, a velocidade dessa partícula varia de acordo com:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a} t$$

A posição dessa partícula ao longo do tempo será dada por:

$$\vec{r}(t) = \int (\vec{V}_0 + \vec{a} t) dt = \vec{V}_0 t + \vec{a} \frac{t^2}{2} + \vec{C}'$$

sendo \vec{C}' uma constante de integração arbitrária. Novamente, é fácil ver que $\vec{C}' = \vec{r}(0) = \vec{r}_0$ (a posição inicial da partícula). Portanto:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2$$

Concluindo, o movimento com aceleração \vec{a} constante é descrito pelas equações horárias na Tabela 1.6:

Posição	$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 (t - t_0) + \frac{\vec{a}}{2} (t - t_0)^2$
Velocidade	$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a} (t - t_0)$
Aceleração	$\vec{a}(t) = \vec{a}$

Tabela 1.6: As três funções horárias que descrevem o movimento de uma partícula com aceleração constante. t_0 é o instante inicial, instante em que começamos a monitorar o movimento da partícula. É o instante em que $\vec{r}(t)$ valia \vec{r}_0 e $\vec{V}(t)$ valia \vec{V}_0 . Por conveniência, costumamos arbitrar $t_0 = 0$, como feito no texto.

Caso particular $\vec{a} = \vec{0}$

Considere uma partícula que se move sem aceleração, ou seja, com $\vec{a} = \vec{0}$. Como ela se move? Da Tabela 1.6 vemos que nesse caso $\vec{V}(t) = \vec{V}_0$, ou seja, a partícula se move sempre com a mesma velocidade.

Há um caso particular aqui, o caso em que $\vec{V}_0 = \vec{0}$. Nesse caso, a partícula estava inicialmente parada em $t = 0$, e vai continuar indefinidamente parada ($\vec{V}(t) = \vec{0}$). Dizemos então que a partícula se encontra em repouso, ou em equilíbrio estático. Uma partícula com $\vec{a}(t) = \vec{V}(t) = \vec{0}$ (para todo $t \in [t_1, t_2]$) está em repouso. Nesse caso a trajetória da partícula se resume a um único ponto, o ponto $\vec{r}(t) = \vec{r}_0$. Note que esse caso do repouso é diferente daquele em que $\vec{V}(t) = \vec{0}$ apenas em um instante t específico (como o instante t_1 para a formiga no varal). Nesse caso dizemos que a partícula está instantaneamente, ou momentaneamente, parada no instante t . Ela não está em repouso no instante t , porque o repouso é um estado que se estende no tempo e não um estado instantâneo.

Uma partícula pode permanecer em repouso por um certo intervalo de tempo e pode estar parada momentaneamente. Se $\vec{a}(t) = \vec{V}(t) = \vec{0}$ para $t \in [t_1, t_2]$, então a partícula estará em repouso nesse intervalo de tempo. Se $\vec{V}(t) = \vec{0}$ em um certo instante $t = t_1$, então a partícula estará parada momentaneamente nesse instante.

No caso em que a velocidade inicial não é nula, a partícula continuará se movendo com a mesma velocidade inicial, ou seja, ela continuará se movendo sempre na mesma direção, no mesmo sentido, com a mesma magnitude de velocidade. Trata-se de um movimento retilíneo. De fato, para o caso $\vec{a} = \vec{0}$ vale $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t$, que é a equação paramétrica de uma reta. Pensando em termos das acelerações paralela e ortogonal (à \vec{V}), vemos que $\vec{a} = \vec{0}$ implica que $\vec{a}_{||} = \vec{0}$, ou seja, a velocidade não varia em módulo, e também $\vec{a}_{\perp} = \vec{0}$, ou seja, a velocidade também não muda de direção. Enfim, a velocidade não muda. A Figura 1.35 ilustra a evolução da posição de uma partícula sem aceleração, mas com $\vec{V}_0 \neq \vec{0}$. Nessa figura, usamos as equações $\vec{r}(1) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0$, $\vec{r}(2) = \vec{r}_0 + 2\vec{V}_0 = \vec{r}_1 + \vec{V}_0$ etc. e a regra do paralelogramo para construir a trajetória reta da partícula (linha tracejada). Note que a cada segundo o vetor $\vec{r}(t)$ recebe um mesmo incremento \vec{V}_0 ($\vec{V}_0 t = \vec{V}_0 1$ metros). Esse movimento é chamado de movimento retilíneo uniforme, abreviado por MRU (a palavra uniforme se refere à uniformidade, ou constância, da velocidade).

Um automóvel viajando com velocidade constante de 80 km/h em uma estrada reta está em MRU. Um foguete subindo verticalmente com velocidade constante de 500 km/h está em MRU.

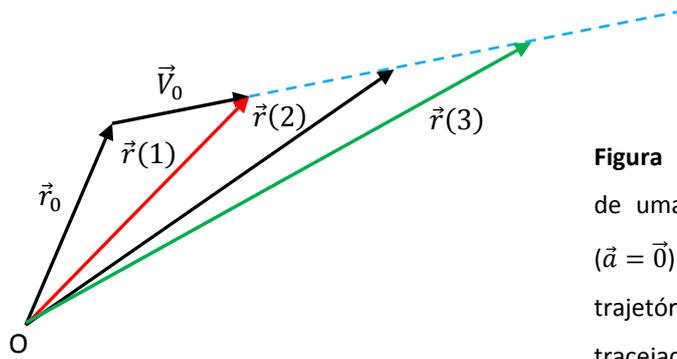


Figura 1.35: Movimento retilíneo de uma partícula sem aceleração ($\vec{a} = \vec{0}$) e com $\vec{V}_0 \neq \vec{0}$ (MRU). A trajetória da partícula é a linha tracejada azul: uma reta.

Caso geral $\vec{a} \neq \vec{0}$

Voltando ao caso $\vec{a} \neq \vec{0}$, queremos saber qual o movimento dessa partícula. Note que a simples especificação do valor da aceleração não é suficiente para determinar totalmente o movimento. No caso $\vec{a} = \vec{0}$, por exemplo, vimos que, dependendo da condição inicial sobre \vec{V}_0 , a trajetória pode ser um simples ponto no espaço (caso $\vec{V}_0 = \vec{0}$) ou uma reta (caso $\vec{V}_0 \neq \vec{0}$). Podemos pensar que o caso $\vec{V}_0 = \vec{0}$ é um caso limite do caso $\vec{V}_0 \neq \vec{0}$, em que a trajetória reta colapsa em um único ponto. No caso $\vec{a} \neq \vec{0}$ veremos que a trajetória pode ser retilínea (movimento retilíneo uniformemente variado, abreviado MRUV) ou uma curva mais complicada, dependendo da condição inicial. As funções horárias que devemos discutir são aquelas que estão dadas na Tabela 1.6 (adotaremos $t_0 = 0$).

Suponha, por exemplo, o caso mais simples em que \vec{V}_0 (uma constante) e \vec{a} (uma constante) são paralelos entre si. Então, se adotarmos um referencial com eixo x paralelo a \vec{a} (e a \vec{V}_0) ficamos com: $\vec{V}(t) = (V_0 + a t)\hat{x}$. Logo, o movimento será retilíneo, pois a velocidade estará sempre na mesma direção, a direção do eixo x . Esse é o movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). A velocidade vai variar (linearmente no tempo) apenas em módulo. De fato, pensando em termos das acelerações paralela e ortogonal (à \vec{V}), podemos ver que, como $\vec{a} = a \hat{x}$ e $\vec{V}(t) = V(t)\hat{x}$, segue que $a_{\parallel} = a_x = a$ e $a_{\perp} = 0$, o que implica que a velocidade não muda de direção, a trajetória é reta.

A posição da partícula ao longo do tempo será dada por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \left(V_0 t + \frac{a}{2} t^2 \right) \hat{x}$$

Note então que:

$$\vec{r}(1) = \vec{r}_0 + \left(V_0 + \frac{a}{2} \right) \hat{x}$$

$$\vec{r}(2) = \vec{r}_0 + (2 V_0 + 2a)\hat{x} = \vec{r}(1) + \left(V_0 + \frac{3}{2}a \right) \hat{x}$$

$$\vec{r}(3) = \vec{r}_0 + \left(3 V_0 + \frac{9}{2}a \right) \hat{x} = \vec{r}(2) + \left(V_0 + \frac{5}{2}a \right) \hat{x}$$

e assim por diante. À medida que o tempo passa, o vetor posição vai sendo incrementado de um vetor (cada vez maior) ao longo de x . A Figura 1.36 ilustra essa idéia com \vec{V}_0 e \vec{a} paralelos entre si. Note que com o passar do tempo, a partícula vai percorrendo comprimentos cada vez maiores (para um mesmo intervalo de tempo), porque a velocidade dela está cada vez maior.

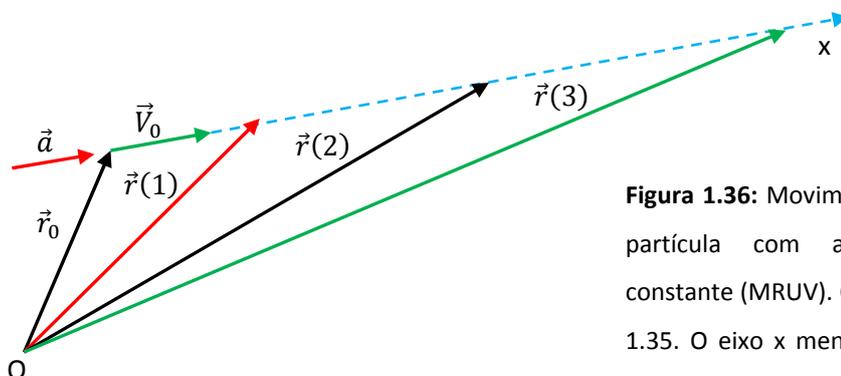


Figura 1.36: Movimento retilíneo de uma partícula com aceleração (paralela) constante (MRUV). Compare com a Figura 1.35. O eixo x mencionado no texto é o eixo paralelo aos vetores \vec{a} e \vec{V}_0 .

O caso em que \vec{V}_0 e \vec{a} são antiparalelos entre si corresponde a uma aceleração antiparalela e descreve um MRUV em que a partícula irá inicialmente diminuir sua velocidade até inverter o sentido de seu movimento e continuar acelerando nesse novo sentido (como no exemplo da formiga no varal).

Consideremos agora o caso mais geral, em que \vec{V}_0 não tem a mesma direção de \vec{a} . Nesse caso haverá necessariamente uma aceleração ortogonal e a partícula descreverá então uma trajetória curva. Note que os dois vetores \vec{V}_0 e \vec{a} determinam um plano. Vamos chamar esse plano de plano xy , ou seja, vamos adotar dois eixos x e y ortogonais entre si no plano determinado por \vec{V}_0 e \vec{a} . O eixo z é um eixo ortogonal a esse plano. Por conveniência, podemos escolher o eixo y ao longo da direção de \vec{a} , que é uma direção fixa no espaço, já que \vec{a} é constante (por hipótese). Nesse caso, podemos decompor os vetores da seguinte forma:

$$\vec{V}_0 = V_{0x}\hat{x} + V_{0y}\hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{a} = a\hat{y} \quad (\text{note que não há componente } z)$$

Portanto, a velocidade variará ao longo do tempo conforme a equação:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a}t \Rightarrow \vec{V}(t) = V_{0x}\hat{x} + (V_{0y} + at)\hat{y}$$

A primeira conclusão que tiramos da equação acima é que a partícula se moverá no plano xy , pois a velocidade nunca vai ganhar uma componente z . A trajetória é, portanto, uma curva plana, ou seja, uma curva traçada no plano xy , que é de fato o plano de \vec{V}_0 e \vec{a} . A componente y da velocidade (paralela à aceleração) variará linearmente no tempo ($V_y(t) = V_{0y} + at$), enquanto que a componente x se manterá constante ($V_x(t) = V_{0x}$). A Figura 1.37 abaixo ilustra os comportamentos das componentes $V_x(t)$ e $V_y(t)$ da velocidade em função do tempo. A velocidade $V_x(t)$ se mantém constante, pois não há

aceleração ao longo de x . Já a velocidade $V_y(t)$ varia linearmente no tempo. Para cada gráfico adotamos $a > 0$ (aceleração paralela ao eixo y) e mostramos três curvas correspondentes a condições iniciais diferentes: os casos $V_{0x} > 0$, $V_{0x} = 0$ e $V_{0x} < 0$ e analogamente para V_{0y} .

A trajetória da partícula será dada pela equação horária:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2 \Rightarrow \vec{r}(t) = (x_0 + V_{0x}t)\hat{x} + \left(y_0 + V_{0y}t + \frac{a}{2}t^2\right)\hat{y}$$

sendo $\vec{r}_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y}$ a posição inicial da partícula ($z_0 = 0$ por construção, pois o plano xy é o plano $z=0$). Portanto as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ da partícula variam no tempo de acordo com:

$$x(t) = x_0 + V_{0x}t$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y}t + \frac{a}{2}t^2$$

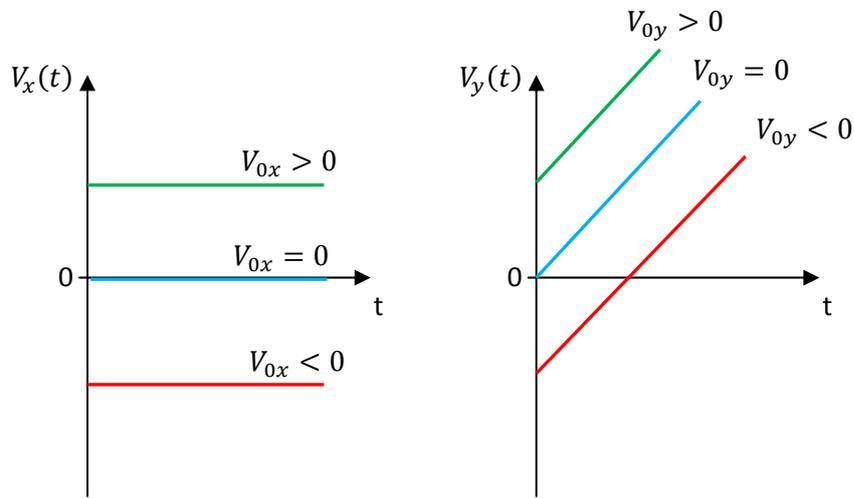


Figura 1.37: Comportamento de $V_x(t)$ e $V_y(t)$ em função do tempo para $\vec{a} = a\hat{y}$ com $a > 0$.

Vemos novamente que a partícula se move no plano $z = 0$, que é o plano xy , com suas coordenadas x e y variando linearmente e quadraticamente no tempo.

Para encontrar a trajetória $y(x)$ da partícula basta eliminar o tempo nas equações de $x(t)$ e $y(t)$ acima. Vemos que:

$$t = \frac{x - x_0}{V_{0x}}$$

Portanto, substituindo esse tempo na equação de $y(t)$ obtemos:

$$y(x) = y_0 + V_{0y} \left(\frac{x - x_0}{V_{0x}} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{x - x_0}{V_{0x}} \right)^2$$

que é a equação de uma parábola no plano xy . Note que essa equação não faz sentido para $V_{0x} = 0$, pois esse é o caso anterior, em que \vec{V}_0 e \vec{a} são paralelos entre si (ao longo de y) e a trajetória é uma reta.

Na Figura 1.38 mostramos os esboços de algumas trajetórias possíveis para essa partícula com aceleração constante ao longo de y . Adotamos os valores numéricos $a = 1 \text{ m/s}^2$, $V_{0x} = 2 \text{ m/s}$ e $x_0 = y_0 = 0$ (partícula partindo da origem). As três curvas ilustram os casos $V_{0y} < 0$ (curva preta), $V_{0y} = 0$ (curva do meio, vermelha) e $V_{0y} > 0$ (curva azul).

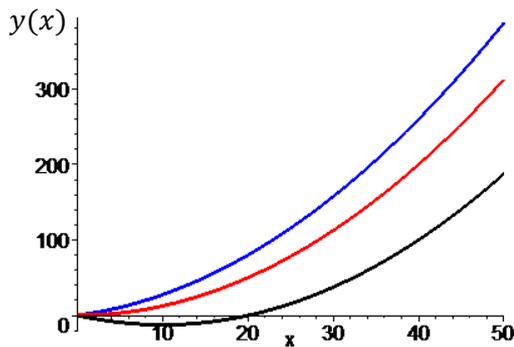


Figura 1.38: Esboços de trajetórias $y(x)$ para uma partícula com aceleração constante (ao longo do eixo y) e $V_{0x} = 2 \text{ m/s}$. Para todas as trajetórias adotamos $a = 1 \text{ m/s}^2$. As curvas correspondem a diferentes velocidades iniciais V_{0y} .

Em todos os casos valerá $V_x(t) = 2 \text{ m/s}$, ou seja, a velocidade ao longo de x se manterá constante. Já no eixo y , a velocidade variará de acordo com $V_y(t) = V_{0y} + at$. Para o caso $V_{0y} < 0$ a aceleração $a_y = a > 0$ atua nos primeiros instantes como uma aceleração antiparalela e a partícula vai no sentido de $y < 0$ freando, até que ela para e passa a se mover no sentido de $y > 0$. Em todos os casos a partícula descreve uma curva no sentido de $y > 0$, pois a aceleração tem sempre uma componente ortogonal à velocidade apontando nesse sentido. Com o passar do tempo a velocidade e a trajetória vão se tornando paralelas à aceleração, que está ao longo de y nesse exemplo. De fato, como

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a} t$$

à medida que o tempo passa ($t \rightarrow \infty$) fatalmente o vetor $\vec{V}(t)$ vai se tornar paralelo ao vetor \vec{a} , qualquer que seja o valor (finito) de \vec{V}_0 ($\vec{V}(t) \rightarrow \vec{a} t$ para $t \rightarrow \infty$). Com os valores numéricos que utilizamos, as curvas da Figura 1.38 são dadas pela equação:

$$y(x) = V_{0y} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{4}$$

Nos exercícios que iremos resolver no final desse capítulo abordaremos o caso da queda livre dos corpos, que consiste em um movimento com aceleração constante, a aceleração da gravidade. Uma partícula está em queda livre quando ela está se movendo somente sob ação da gravidade, a gravidade de um planeta, por exemplo. Aqui na Terra a presença da atmosfera não permite que observemos facilmente o movimento de queda livre. O ar sempre oferece um atrito, ou arraste, que influencia o

movimento dos corpos que estão mergulhados nele. A queda livre mesmo só pode ocorrer no vácuo, sem a influência do ar. Se você buscar na internet, vai encontrar um vídeo que mostra um astronauta na Lua, onde não existe atmosfera, deixando cair ao mesmo tempo um martelo e uma pena de falcão. Os dois chegam ao chão no mesmo instante (na Terra, devido ao arraste com o ar, que influencia mais o movimento da pena, o martelo chega ao chão primeiro). Isso mostra (ou apenas sugere, já que o experimento não é feito com muito cuidado) que todos os corpos em queda livre (um elefante ou uma pulga) caem com a mesma aceleração, a chamada aceleração da gravidade. Galileu Galilei, um cientista italiano, mostrou essa propriedade marcante da queda livre através de experimentos com a queda de corpos da torre de Pisa e ao longo de planos inclinados: todos os corpos caem em queda livre com a mesma aceleração \vec{g} , que é uma aceleração vertical (essa é de fato a definição da direção vertical), apontando para baixo, com magnitude (para o caso do planeta Terra) $g \cong 9,8 \text{ m/s}^2$. O movimento de queda livre de uma partícula é descrito pelas equações horárias na Tabela 1.7 que segue (que é a Tabela 1.6 com $\vec{a} = \vec{g}$ e, por conveniência, $t_0 = 0$).

Posição	$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2$
Velocidade	$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{g} t$
Aceleração	$\vec{a}(t) = \vec{g}$ vertical, para baixo com $g \cong 9,8 \text{ m/s}^2$.

Tabela 1.7: As três funções horárias que descrevem o movimento de uma partícula em queda livre na vizinhança da superfície da Terra. No caso de queda livre em outro planeta, basta mudar o valor de g . No planeta Mercúrio, por exemplo, $g \cong 3,7 \text{ m/s}^2$. Adotamos $t_0 = 0$.

No caso da queda (não livre) dos corpos na vizinhança da superfície da Terra, devemos levar em conta o atrito/arraste do ar, se queremos uma solução realista para a descrição do movimento de queda dos corpos. No entanto, podemos usar as equações de queda livre como uma aproximação para esse movimento, uma aproximação tanto melhor quanto menor for o atrito/arraste com o ar que o corpo sofre. Por exemplo, as equações de queda livre podem ser boas para descrever o movimento de queda no ar na vizinhança da Terra de uma pequena esfera de metal, mas péssimas para descrever o movimento de um bumerangue, de uma pena de galinha ou de um aviãozinho de papel.

Se você jogar uma pedrinha para o alto, em uma direção oblíqua, vai vê-la descrever uma curva parecida com a ilustrada na figura 1.39.

A queda livre da pedrinha (desprezando a influência do ar) inicia quando ela perde contato com a mão, e continua até que ela finalmente toque o solo. No instante t_1 ilustrado na Figura 1.39 a pedrinha está subindo, sua aceleração vale $\vec{a}(t_1) = \vec{g}$ e sua velocidade é $\vec{V}(t_1)$.

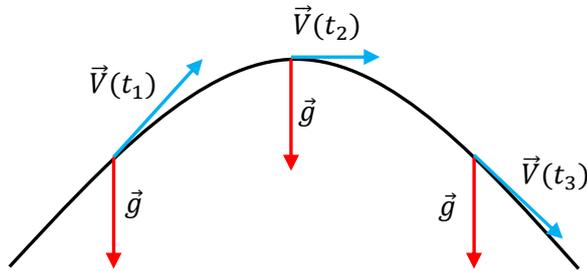


Figura 1.39: Ilustração da trajetória de queda livre de uma partícula lançada obliquamente no espaço. Vetores velocidade e aceleração.

Note que nesse instante a aceleração possui uma componente antiparalela à $\vec{V}(t_1)$, que resulta na diminuição da magnitude da velocidade na subida, e uma componente ortogonal à $\vec{V}(t_1)$, apontando para dentro da curva. No instante t_2 a pedrinha está na altura máxima, sua aceleração vale $\vec{a}(t_2) = \vec{g}$ e sua velocidade é $\vec{V}(t_2)$. Note que nesse instante a aceleração não possui componente paralela à $\vec{V}(t_2)$, porque a magnitude da velocidade está passando por um mínimo nesse instante, mas a aceleração possui uma componente ortogonal à $\vec{V}(t_2)$, apontando para dentro da curva. Finalmente, no instante t_3 a pedrinha está descendo, sua aceleração vale $\vec{a}(t_3) = \vec{g}$ e sua velocidade é $\vec{V}(t_3)$. Nesse instante a aceleração possui uma componente paralela à $\vec{V}(t_3)$, que resulta no aumento da magnitude da velocidade na descida, e uma componente ortogonal à $\vec{V}(t_3)$, apontando para dentro da curva. A aceleração da gravidade \vec{g} é responsável pela trajetória curva, e pela variação na magnitude da velocidade (diminuição na subida e aumento na descida) dos projéteis em queda livre. A adição de um pequeno arraste com o ar não muda muito esse movimento.

Através de seus estudos sobre a queda dos corpos Galileu ajudou a fundar uma nova ciência, a balística, que trata do movimento dos projéteis no espaço (mais especificamente a balística exterior). O desenvolvimento da balística se deveu muito à sua importância crucial nas aplicações militares, que devem ter iniciado quando o primeiro homem das cavernas teve a ideia de jogar uma pedra em um inimigo/adversário que estava distante. Da necessidade de aperfeiçoar essa ideia, originaram-se a funda, o estilingue, o arco e flecha, a balestra, a catapulta, o canhão, e todas as armas de fogo modernas.

1.2.3 Cinemática do movimento circular

Vamos discutir agora a cinemática de uma partícula que está descrevendo uma trajetória circular no espaço. O movimento circular é bastante comum na natureza (como uma aproximação boa

para as órbitas de alguns planetas, satélites e luas) e nas máquinas (polias, hélices e engrenagens). Vamos assumir uma partícula descrevendo uma órbita que é um círculo de raio R , ou seja, a equação horária da posição, $\vec{r}(t)$, descreve um círculo de raio R . Queremos saber quais as equações horárias da velocidade $\vec{V}(t)$ e da aceleração $\vec{a}(t)$.

Sobre a velocidade $\vec{V}(t)$ podemos dizer que ela é tangente ao círculo, apontando no sentido do giro (horário ou anti-horário) e de magnitude arbitrária $V(t)$. Note, não existe, portanto, um vínculo entre V e R , no sentido de que se especificamos o raio R , ainda temos liberdade total de definir a magnitude da velocidade. Podemos dizer que R e V são parâmetros independentes entre si. Para simplificar a discussão que segue, vamos considerar um movimento circular em que $V(t)$ é constante, ou seja, $V(t) = V$. Chamamos esse movimento de movimento circular uniforme (a palavra uniforme se refere à constância do módulo da velocidade). A Figura 1.40 ilustra os dois movimentos: movimento circular não-uniforme e movimento circular uniforme (MCU).

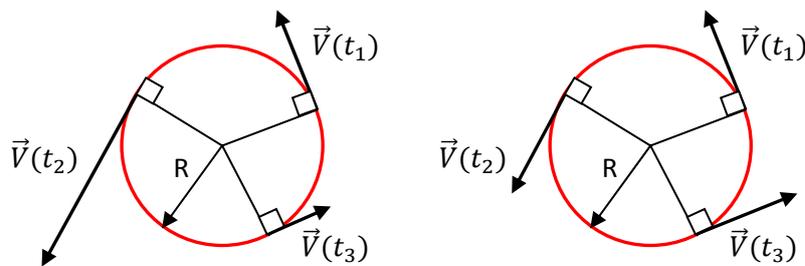


Figura 1.40: Trajetória circular de raio R sendo percorrida no sentido anti-horário. O vetor velocidade é mostrado em três instantes t_1 , t_2 e t_3 . Note que $\vec{V}(t)$ é sempre ortogonal ao raio. No movimento circular não-uniforme (figura da esquerda) a magnitude de $\vec{V}(t)$ varia no tempo. A figura da direita ilustra um caso mais simples, um movimento circular uniforme, para o qual o módulo de $\vec{V}(t)$ não muda com o tempo: $V(t) = V$ (mas note que o vetor $\vec{V}(t)$ muda com o tempo).

Movimento circular uniforme (MCU)

O que podemos dizer sobre a aceleração no MCU? Note que não pode haver $\vec{a}_{||}$ pois essa componente da aceleração é responsável justamente pela variação na magnitude do vetor $\vec{V}(t)$. Portanto, no MCU, $\vec{a}(t) = \vec{a}_{\perp}(t)$, o que significa dizer que a aceleração está na direção radial, que é a direção ortogonal à circunferência. Além disso, a aceleração deve apontar para dentro da curva e, portanto, para o centro do círculo, como ilustrado na Figura 1.41. Por ter essas propriedades, a aceleração no MCU é chamada de aceleração centrípeta.

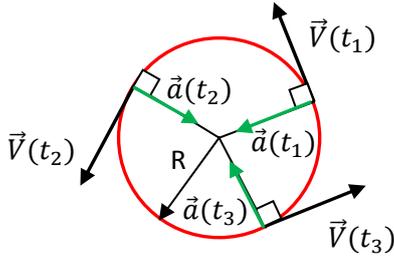


Figura 1.41: Trajetória circular de raio R sendo percorrida no sentido anti-horário em MCU. Os vetores velocidade e aceleração são mostrados em três instantes t_1 , t_2 e t_3 . Note que $\vec{V}(t)$ é sempre ortogonal ao raio e $\vec{a}(t)$ é centrípeta, ou seja, aponta para o centro ao longo do raio.

Resta agora calcular a magnitude da aceleração centrípeta para um MCU de raio R e velocidade de módulo V . Obviamente, a aceleração centrípeta no MCU é dada por:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{\text{cent}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{V}(t)$$

que é a relação cinemática geral entre aceleração e velocidade. O que há de específico aqui é que $\vec{V}(t)$ é tangente a um círculo de raio R e com módulo constante. Considere então os vetores $\vec{V}(t)$ e $\vec{V}(t + \Delta t)$ na Figura 1.42, para uma partícula girando no sentido horário. Eles são tangentes a um círculo e possuem o mesmo módulo.

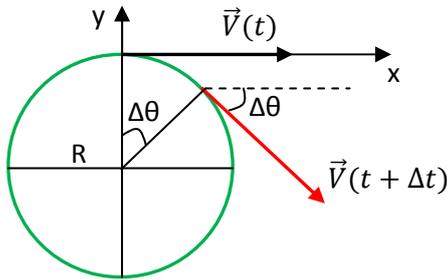


Figura 1.42: $\vec{V}(t)$ é a velocidade da partícula no instante t . $\vec{V}(t + \Delta t)$ é a velocidade em um instante posterior. $\Delta\theta$ é o ângulo que o raio do centro até a posição da partícula varre nesse intervalo de tempo Δt . Note que $\Delta\theta$ também é o ângulo que $\vec{V}(t + \Delta t)$ faz com o eixo x e com $\vec{V}(t)$. Partícula girando no sentido horário.

Utilizando o referencial xy adotado na Figura 1.42, podemos escrever:

$$\vec{V}(t) = V \hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{V}(t + \Delta t) = V \cos(\Delta\theta) \hat{x} - V \sin(\Delta\theta) \hat{y}$$

Note que $|\vec{V}(t + \Delta t)| = \sqrt{V^2 [\cos^2(\Delta\theta) + \sin^2(\Delta\theta)]} = V$ (MCU).

Portanto, pensando no limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a}_{\text{cent}}(t) = \frac{V \cos(\Delta\theta) \hat{x} - V \sin(\Delta\theta) \hat{y} - V \hat{x}}{\Delta t}$$

ou seja:

$$\vec{a}_{\text{cent}}(t) = \frac{V [(\cos(\Delta\theta) - 1) \hat{x} - \sin(\Delta\theta) \hat{y}]}{\Delta t}$$

No limite $\Delta t \rightarrow 0$ também vale $\Delta\theta \rightarrow 0$, o que nos sugere usar as expansões das funções trigonométricas na vizinhança da origem (para $x \rightarrow 0$), quais sejam:

$$\text{sen}(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

$$\text{cos}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Essas expansões levam a:

$$\frac{\text{cos}(\Delta\theta) - 1}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left(1 - \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2 - 1 \right) = -\frac{1}{2} \frac{(\Delta\theta)^2}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \Delta\theta$$

$$\frac{\text{sen}(\Delta\theta)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\Delta\theta - \frac{1}{6}(\Delta\theta)^3 \right) = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) (\Delta\theta)^2$$

Logo:

$$\vec{a}_{\text{cent}}(t) = V \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \Delta\theta \hat{x} - \left[\frac{\Delta\theta}{\Delta t} - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) (\Delta\theta)^2 \right] \hat{y} \right\}$$

Finalmente, quando $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta\theta \rightarrow 0$ obtemos:

$$\vec{a}_{\text{cent}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V \frac{\Delta\theta}{\Delta t} (-\hat{y})$$

Note que confirmamos aqui que a aceleração é centrípeta, o que corresponde à direção $-\hat{y}$ para o instante t mostrado na Figura 1.42. Quanto à magnitude, esta é dada por (já havíamos deduzido essa expressão quando discutimos a magnitude da aceleração ortogonal \vec{a}_{\perp} , note que $\Delta\theta$ é a variação na direção do vetor $\vec{V}(t)$, causada por $\vec{a}_{\perp} = \vec{a}_{\text{cent}}$ nesse caso):

$$a_{\text{cent}} = V \omega$$

sendo ω a velocidade angular da partícula, ou seja, ω é a velocidade com que o raio do círculo que passa pela partícula percorre ângulo (θ):

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Sendo $\Delta\theta$ também o ângulo de variação na direção da velocidade $\vec{V}(t)$ da partícula, fica claro que essa velocidade angular ω é a mesma que já havíamos definido quando discutimos o efeito de \vec{a}_{\perp} .

A unidade natural de ω é o radiano por segundo (rad/s). Por exemplo, considere uma partícula que dá uma volta completa em sua órbita circular a cada segundo. O raio do círculo que passa pela partícula varre um ângulo de 2π radianos por segundo. A velocidade angular da partícula é $\omega = 2\pi$ rad/s.

Existe uma relação simples entre comprimento de arco e ângulo e, portanto, entre V e ω . Em um círculo de raio R , um ângulo $\Delta\theta$ (em radianos) subtende um arco de círculo de comprimento $\Delta L = R \Delta\theta$. Portanto (no limite $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta\theta \rightarrow 0$):

$$\Delta L = R \Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow V = R \omega$$

Dessa forma, a magnitude da aceleração centrípeta no MCU pode ser escrita de três formas equivalentes:

$$a_{\text{cent}} = V \omega = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

Note que como V , ω e R são constantes, a aceleração centrípeta no MCU tem magnitude constante (mas direção e sentido variáveis).

Movimento circular não-uniforme

Para descrevermos o movimento circular não uniforme basta pensarmos que $\vec{V}(t)$ continua variando em direção e sentido como no MCU, mas agora varia também em módulo. Portanto, basta que acrescentemos à nossa análise do MCU uma aceleração tangencial (ou paralela) de magnitude arbitrária, ditada pela forma como $V(t)$ varia:

$$a_{\text{tan}}(t) = \frac{d}{dt} V(t)$$

Nesse caso, é interessante notar que se $V(t)$ não é mais constante a magnitude da aceleração centrípeta também deixa de ser constante. Se o módulo da velocidade aumentar com o tempo, por exemplo, o módulo da aceleração centrípeta também irá aumentar. Resumidamente:

$$a_{\text{cent}}(t) = V(t)\omega(t) = \frac{[V(t)]^2}{R} = [\omega(t)]^2 R$$

Como exemplo, considere que uma pessoa está em uma roda gigante de um parque de diversões. A roda possui raio $R=5$ m e está inicialmente girando com velocidade angular constante $\omega = 0,1$ rad/s. Então, essa pessoa que está sentada na cadeira da roda está se movendo com velocidade linear de módulo constante $V = \omega R = 0,5$ m/s, ou seja, ela percorre arco de círculo com a taxa de meio metro por segundo. A aceleração centrípeta da pessoa possui módulo constante igual a:

$$a_{\text{cent}} = V \omega = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = 0,05 \text{ m/s}^2$$

Suponha agora que alguém desligue a roda e ela passe a frear, diminuindo a velocidade linear da pessoa na taxa de $0,01 \text{ m/s}^2$. O movimento circular da pessoa deixa então de ser um MCU e passa a ser um movimento circular não-uniforme. Agora, além de aceleração centrípeta, a pessoa passa a ter uma aceleração tangencial de módulo constante $a_{\text{tan}} = 0,01 \text{ m/s}^2$. Após um segundo da roda ser desligada, a velocidade da pessoa será dada por:

$$V(t) = V_0 - a_{\text{tan}} t \Rightarrow V(1) = 0,5 - (0,01)1 = 0,49 \text{ m/s}$$

Note que colocamos o sinal negativo em a_{tan} porque sabemos que a velocidade está diminuindo com o tempo (aceleração antiparalela à velocidade, que costumamos chamar de movimento retardado).

A aceleração centrípeta da pessoa nesse instante será:

$$a_{\text{cent}}(t) = \frac{[V(t)]^2}{R} \Rightarrow a_{\text{cent}}(1) = \frac{[V(1)]^2}{R} = \frac{(0,49)^2}{5} \cong 0,048 \text{ m/s}^2$$

Portanto, enquanto a roda gigante vai freando, a velocidade angular ω da roda vai diminuindo, a velocidade V da pessoa vai diminuindo e sua aceleração centrípeta a_{cent} também.

1.2.4 Cinemática do movimento em uma curva plana arbitrária

Vale a pena mencionar aqui que para uma partícula se movendo em uma curva plana qualquer (não circular) ainda podemos definir uma aceleração centrípeta, ou ortogonal à curva, dada por:

$$a_{\text{cent}}(P) = \frac{V^2(P)}{R(P)}$$

em cada ponto P dessa curva. $a_{\text{cent}}(P)$ é a aceleração centrípeta (ou ortogonal à curva) no ponto P e $V(P)$ é a velocidade da partícula no ponto P . A pergunta que devemos responder é: que raio é $R(P)$? Resumidamente: $R(P)$ é o raio do círculo osculante à curva no ponto P . A idéia é que qualquer curva plana pode ser pensada como uma infinidade de círculos, os círculos osculantes (ou tangentes) em cada ponto da curva. $R(P)$, o raio do círculo osculante em P , é o chamado raio de curvatura da curva em P . Veja a Figura 1.43.

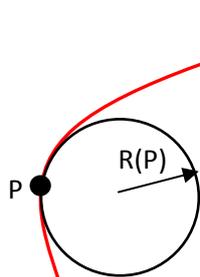


Figura 1.43: Ilustração de uma curva plana qualquer e do círculo osculante e raio de curvatura em um ponto P da curva.

O cálculo do raio de curvatura em um ponto de uma curva não é uma tarefa simples, por isso não vamos utilizar essa expressão da aceleração centrípeta com frequência. Mas, é verdade que podemos inverter a igualdade acima e dizer que o raio de curvatura em um ponto P de uma curva (trajetória) qualquer é dado por:

$$R(P) = \frac{V^2(P)}{a_{\text{cent}}(P)}$$

Por exemplo, se P é um ponto da trajetória de uma partícula em um movimento circular de raio R , segue que, como não poderia deixar de ser:

$$R(P) = \frac{V^2(P)}{a_{\text{cent}}(P)} = \frac{V^2}{V^2/R} = R$$

1.2.5 Observação sobre a relatividade da velocidade

Para finalizar nosso estudo da cinemática, vale a pena registrar e enfatizar que a velocidade, assim como a posição, é sempre relativa. Nada se move absolutamente. Um corpo se move em relação a outro. A velocidade de um corpo é, portanto, sempre a velocidade desse corpo em relação a outro corpo. Vimos que para definir o vetor posição $\vec{r}(t)$ devemos adotar um ponto de referência/origem “O” no espaço, que é o ponto onde a seta que representa $\vec{r}(t)$ nasce. Portanto, a velocidade de uma partícula de posição $\vec{r}(t)$:

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

é a velocidade dessa partícula em relação a “O”. Nesse sentido, uma notação mais precisa (e mais chata) para a velocidade de uma partícula P cuja posição nasce na origem “A” seria $\vec{V}_{P/A}(t)$. Note, $\vec{V}_{P/A}(t)$ é a velocidade da partícula P em relação a A (no instante t). Se a origem “A” está fixa no solo, podemos dizer que $\vec{V}_{P/A}(t) = \vec{V}_{P/\text{solo}}(t)$. Se a origem “A” está fixa na cabeça de uma ave que voa, podemos dizer que $\vec{V}_{P/A}(t) = \vec{V}_{P/\text{ave}}(t)$. Geralmente deixamos essa referência implícita e usamos a notação mais simples $\vec{V}(t)$ para a velocidade (como temos feito até aqui e continuaremos fazendo no que segue), mas sempre devemos ter em mente que essa velocidade é medida em relação a alguma referência. Por exemplo, na Figura 1.15 ilustramos a órbita elíptica do planeta Mercúrio em torno do Sol e o vetor velocidade desse planeta em alguns instantes. Essa velocidade é medida em relação a quê? A referência é de fato arbitrária, mas existem algumas referências que são mais convenientes que outras. No caso do movimento dos planetas, uma referência apropriada para definir as posições dos planetas e suas velocidades é o centro do Sol. Assim sendo, as velocidades mostradas na Figura 1.15 seriam velocidades do planeta Mercúrio em relação ao centro do Sol (a origem “O” está fixa no centro do Sol). Daí vem o fato de que nessa figura o Sol está parado (pois a velocidade do Sol em relação ao Sol é nula) e apenas o planeta Mercúrio se move. Se a velocidade de Mercúrio na Figura 1.15 não fosse medida em relação ao Sol, então o Sol teria que se mover também e possuir uma trajetória (diferente de um simples ponto fixo) nessa mesma figura. Nos instantes t_1 , t_2 , t_3 e t_4 o Sol estaria em posições diferentes.

Havendo então várias referências possíveis (e convenientes), podemos ter interesse em calcular a velocidade de um corpo A em relação a outro corpo C a partir do conhecimento da velocidade de A em relação a um terceiro corpo B. Por exemplo, qual a velocidade de um pássaro em relação a um automóvel, dada a velocidade do pássaro em relação ao solo? Para responder a essa pergunta precisamos saber a velocidade do automóvel em relação ao solo. É fácil mostrar que a relação geral entre velocidades em diferentes referenciais é:

$$\vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/B} + \vec{V}_{B/C}$$

Note a mnemônica nos subíndices das velocidades: $\mathbf{A/C} = \mathbf{A/B} + \mathbf{B/C}$.

Considere o seguinte exemplo simples: Um caminhão (C) viaja em uma estrada reta com velocidade de 100 km/h. Um automóvel (A) está ultrapassando esse caminhão com velocidade de 130 km/h. Qual a velocidade do automóvel em relação ao caminhão? Note, as velocidades fornecidas são definidas em relação ao solo (S) (isso está implícito, mas é evidente, porque é o que geralmente fazemos no dia-a-dia). Seja x um eixo paralelo às velocidades dadas, então: $\vec{V}_{C/S} = 100 \hat{x}$ e $\vec{V}_{A/S} = 130 \hat{x}$ (deixaremos as unidades implícitas). Logo:

$$\vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/S} + \vec{V}_{S/C}$$

Não foi fornecida a velocidade $\vec{V}_{S/C}$ (do solo em relação ao caminhão) mas é claro que:

$$\vec{V}_{A/A} = \vec{0} = \vec{V}_{A/B} + \vec{V}_{B/A}, \text{ e então que } \vec{V}_{S/C} = -\vec{V}_{C/S}.$$

Portanto:

$$\vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/S} - \vec{V}_{C/S} = 130 \hat{x} - 100 \hat{x} = 30 \hat{x}$$

Concluindo, o motorista do caminhão vê o automóvel passar por ele com uma velocidade de 30 km/h. Esses vetores velocidade estão ilustrados na Figura 1.44.

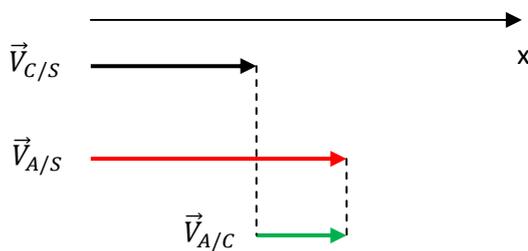


Figura 1.44: Velocidades em relação ao solo e velocidade relativa automóvel/caminhão. Note a regra do paralelogramo para a equação $\vec{V}_{A/S} = \vec{V}_{A/C} + \vec{V}_{C/S}$.

Um segundo exemplo: As turbinas de um avião (A) imprimem nele uma velocidade horizontal de 500 km/h na direção de norte para o sul, velocidade em relação ao ar (já que as turbinas empurram o ar para trás e o ar empurra o avião para a frente). Um vento (ou seja, o ar se movendo) horizontal de velocidade 100 km/h existe na região onde o avião está, vento na direção de leste para oeste (que é ortogonal à direção norte-sul). A velocidade do vento é medida em relação ao solo (S). Qual a velocidade do avião em relação ao solo? Seja x um eixo de leste para oeste e y um eixo de norte para sul. Então: $\vec{V}_{A/ar} = 500 \hat{y}$ e $\vec{V}_{ar/S} = 100 \hat{x}$ (deixaremos as unidades implícitas). Logo:

$$\vec{V}_{A/S} = \vec{V}_{A/ar} + \vec{V}_{ar/S} = 500 \hat{y} + 100 \hat{x}$$

Ou seja, um controlador de vôo no solo verá o avião se movendo em uma direção oblíqua, sendo levado pelo vento. Ele verá o avião se movendo em uma direção próxima da direção de nordeste para

sudoeste, mas mais voltada para a direção de norte para sul, porque $500 \gg 100$. Esses vetores velocidade estão ilustrados na Figura 1.45 que segue.

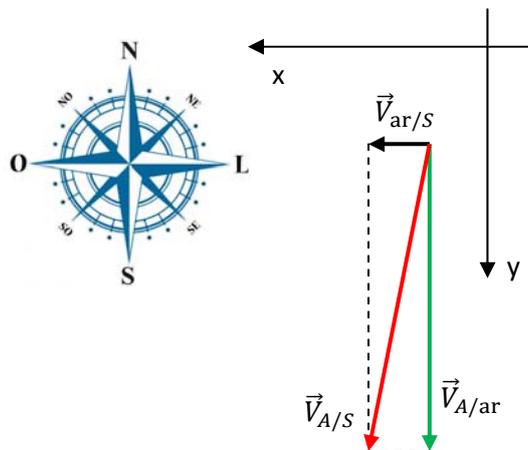


Figura 1.45: Velocidades do avião e velocidade do vento. Note a regra do paralelogramo para a equação $\vec{V}_{A/S} = \vec{V}_{A/ar} + \vec{V}_{ar/S}$. O referencial leva em conta a rosa dos ventos.

1.2.5 Observação sobre as dimensões/unidades das grandezas físicas

Quando expressas através de valores numéricos, as grandezas físicas devem vir acompanhadas de unidades de medida. Por exemplo, dizer que um automóvel está se movendo com uma velocidade de magnitude $V = 100$ não faz muito sentido. 100 o quê? 100 é uma quantidade, uma quantidade de quê? Daí a necessidade da unidade, nesse caso, da unidade de velocidade. No Brasil utilizamos o Sistema Internacional de Unidades (SI), adotado por grande parte dos países no mundo. Os comprimentos (L) são medidos em metros (símbolo m) e seus múltiplos mais comuns: milímetro ($m/1.000 = mm$), centímetro ($m/100 = cm$), quilômetro ($m \times 1.000 = km$), etc. O tempo (T) é medido em segundos (símbolo s) e seus múltiplos mais comuns: microsegundo ($s/1.000.000 = \mu s$), milissegundo ($s/1.000 = ms$), minuto ($s \times 60 = min$), hora ($s \times 3.600 = min \times 60 = h$), dia ($h \times 24 = d$), ano ($d \times 365 = a$), etc. As massas (M) são medidas em quilogramas, sendo 1 quilograma = 1.000 gramas. A unidade de velocidade (V) é derivada das unidades de comprimento e tempo através da relação $V=L/T$. Por exemplo, m/s (metro por segundo) e km/h (quilômetro por hora). Faz sentido então dizermos que um automóvel está se movendo com uma velocidade de magnitude $V = 100 \text{ km/h}$, que significa que a cada hora ele percorre uma distância de 100 km. Para converter essa velocidade para a unidade m/s basta fazermos a conta:

$$V = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 100 \frac{1.000 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 100 \frac{1.000}{3.600} \text{ m/s} \cong 27,8 \text{ m/s}$$

A unidade de aceleração (a) é derivada da relação $a=V/T=(L/T)/T=L/T^2$, portanto, m/s^2 .

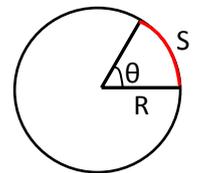
Muitas unidades são blocos de outras unidades e são batizadas, para simplificar, com nomes de personalidades da ciência, como, por exemplo: força (F), cuja unidade é o newton (N), que é derivada do produto $F=M a$, ou seja, $N=kg \text{ m/s}^2$; energia (E) e trabalho (W), cuja unidade é o joule (J), que é

derivado de $W=F L$, ou seja, $J=N m$; pressão (p), cuja unidade é o pascal (Pa) que é derivado de $p=F/L^2$, ou seja, $Pa=N/m^2 = (kg m/s^2)/m^2 = kg/m s^2$.

Muitas vezes usamos os nomes “unidade” e “dimensão” sem fazer distinção entre eles. Mas, de fato, existem muitas unidades e poucas dimensões e existem unidades sem dimensão. Uma unidade é basicamente uma divisão, uma espécie de pedaço de uma grandeza. Por exemplo, o metro e a polegada são unidades de comprimento, pois representam “pedaços” conhecidos de comprimento que podem ser usados para expressar outros comprimentos, através de seus múltiplos. Nesse sentido, uma distância de 10 metros é simplesmente a distância formada pela justaposição de 10 “pedaços” de 1 metro. Como uma polegada é igual a 2.54/100 metros (2,54 cm), a distância de 10 metros é também a distância formada pela justaposição de 393,7 “pedaços” de 1 polegada. A dimensão é uma propriedade de uma grandeza física, que obedece algumas regras. Por exemplo, não podemos somar grandezas de dimensões (e, portanto, de unidades) diferentes. O comprimento é uma dimensão, representada por L, assim como o tempo (T). Se X tem dimensão de tempo e Y tem dimensão de comprimento, então a grandeza X+Y não faz sentido. Por outro lado, a grandeza Y/X tem dimensão (derivada) de velocidade. Dessa forma, a grandeza Y/X pode ter várias unidades, como km/h, pol/s ou pé/dia (1 pé é aproximadamente 30 cm), mas sua dimensão é uma só: L/T.

Uma grandeza adimensional é uma grandeza que não possui dimensão. Uma razão entre dois comprimentos, por exemplo $x=L_1/L_2$, é uma grandeza adimensional, pois a dimensão de x seria L/L=1.

Ângulos podem ser medidos em duas unidades básicas: graus ($^\circ$) ou radianos (rad). Quando medimos um ângulo em graus, dizemos (arbitrariamente) que o ângulo total em um círculo possui 360 graus (360 pedaços). A medição de ângulo em radianos é mais natural. Imagine um círculo de raio R. A medida θ de um ângulo em radianos é dado pela razão:



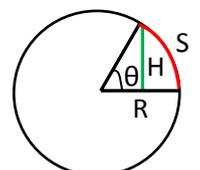
$$\theta \text{ (rad)} = \frac{S}{R}$$

sendo S o comprimento de arco subentendido pelo ângulo θ . A figura ao lado ilustra essa construção. Note que as unidades “grau” e “radiano” são adimensionais. Isso é mais evidente para o radiano, cuja dimensão seria L/L=1, mas vale também para o grau.

No entanto, expressões do tipo:

$$\text{sen}(\theta) \cong \theta \quad \text{para } \theta \cong 0$$

só fazem sentido se θ estiver expresso em radianos. De fato, olhando na Figura ao lado vemos que (esteja θ dado em radianos ou em graus):



$$\text{sen}(\theta) = \frac{H}{R}$$

e ainda que $S = R \theta$ (somente se θ estiver dado em radianos). Portanto:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{H}{R} = \frac{H}{S} \theta$$

somente se θ estiver dado em radianos. Podemos ver na Figura que no limite $\theta \rightarrow 0$ vale $H \rightarrow S$ (o comprimento da reta verde coincide com o comprimento ao arco vermelho) e, portanto, $\text{sen}(\theta) \rightarrow \theta$ (somente se θ estiver dado em radianos).

Ligada a essa propriedade, exclusiva para ângulos em radianos, existem outras, como a própria relação de derivação:

$$\frac{d}{d\theta} \text{sen}(\theta) = \cos(\theta)$$

que só é verdadeira se θ estiver dado em radianos. De fato, se α é um ângulo medido em graus (por exemplo, $\alpha=90^\circ$, $\alpha=40^\circ$, etc.) então:

$$\frac{d}{d\alpha} \text{sen}(\alpha) = \frac{180}{\pi} \cos(\alpha)$$

dada a relação geral entre ângulos em radianos e graus:

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \theta$$

(por exemplo, se $\theta = \pi/2$ rad, então $\alpha = 90^\circ$).

Tendo em vista essas propriedades das funções trigonométricas com argumentos dados em radianos, essa é a unidade preferencial de medida de ângulo no cálculo diferencial e integral e será nossa unidade preferencial de medida de ângulo aqui.

A análise dimensional pode constituir um critério importante para a verificação da correção ou não de respostas que obtemos para os problemas na física. Imagine um problema que pede para calcular o tempo Δt que demora para uma partícula em queda livre (gravidade g) cair do alto de um prédio de altura H . Alguém resolve esse problema e fornece a resposta:

$$\Delta t = \sqrt{2g/H}$$

Não importa aqui como essa pessoa chegou nessa resposta. Fato é que ela está errada pois o Δt fornecido não possui dimensão (ou unidade) de tempo. De fato, a dimensão de Δt é:

$$\sqrt{(L/T^2)/L} = \sqrt{1/T^2} = \frac{1}{T}$$

e a unidade de Δt no SI seria:

$$\sqrt{(m/s^2)/m} = 1/s$$

Provavelmente essa pessoa cometeu algum erro na manipulação algébrica. Ela teria a chance, se enxergasse o erro nas dimensões/unidades de Δt , de voltar e conferir as contas.

Uma regra básica da análise dimensional, que já mencionamos, é que não podemos somar duas grandezas que possuem dimensões/unidades diferentes. Imagine que a unidade de A é metro (A é um comprimento, tem dimensão L) e que a unidade de B é segundo (B é um tempo, tem dimensão T), o que seria então $A + B$? Não seria nada, ou se preferir, um absurdo completo. Esqueça esse $A + B$. Só faz sentido um $A + B$ se A e B tiverem a mesma dimensão/unidade, qualquer que seja ela.

Imagine então uma grandeza física que fosse dada por:

$$A = A_0 e^Y$$

Qual seria a dimensão de Y que está no expoente? Considere que a função exponencial pode ser expandida na série de Taylor:

$$e^Y = 1 + Y + \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{6} + \dots$$

Concluindo, com base na nossa discussão anterior, Y não pode ter dimensão (pois Y^n teria dimensão diferente de Y). Y é (tem que ser) adimensional. Nesse caso, a dimensão/unidade de A é a mesma dimensão/unidade da constante A_0 , pois e^Y e Y são adimensionais.

Como exemplo considere um projétil na presença de atrito cuja velocidade decai no tempo de acordo com a equação horária:

$$V(t) = V_0 e^{-k t}$$

V_0 é a velocidade inicial do projétil, pois $V(t = 0) = V_0$ e o expoente $k t$ deve ser adimensional, ou seja, a constante k deve ter dimensão $1/T$. Uma unidade aceitável para k seria $1/s$, que é a unidade de frequência, ou, se preferir, $1/k$ tem unidade de tempo e, portanto, $1/k$ é um tempo característico desse processo de decaimento.

1.3 Exercícios resolvidos

ER 1.1) Uma partícula está se movendo no espaço de acordo com a seguinte equação horária da posição:

$$\vec{r}(t) = (A + B t^2) \hat{x} + (C - D t^2) \hat{y}$$

sendo A , B , C e D constantes positivas e t o tempo ($t \geq 0$). Note que já há um referencial especificado: o eixo y é vertical para cima, o eixo x é horizontal, paralelo ao chão. A origem está no chão. O movimento termina quando a partícula toca o chão.

Dados: $\vec{r}(t)$ e o referencial especificado.

a) Calcule o instante t_1 em que partícula toca o chão.

Para simplificar, vamos definir $\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y}$ com: $x(t) = A + B t^2$ e $y(t) = C - D t^2$.

Tendo em vista o referencial, fica fácil concluir que a partícula tocará o chão no instante em que sua coordenada y se anular, ou seja:

$$y(t_1) = C - D t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{C/D}$$

b) Calcule o alcance da partícula, ou seja, o deslocamento horizontal da partícula desde $t=0$ até ela tocar o chão.

No instante em que a partícula tocar o chão ela estará, ao longo de x , na posição

$$x(t = t_1 = \sqrt{C/D}) = A + B [\sqrt{C/D}]^2 = A + \frac{B C}{D}$$

O deslocamento é a variação na posição. No instante $t = 0$ a partícula já estava, ao longo de x , na posição:

$$x(t = 0) = x_0 = A + B [0]^2 = A$$

Logo, o deslocamento horizontal da partícula no intervalo de tempo desde $t=0$ até ela tocar o solo foi:

$$D_x(0, t_1) = x(t_1) - x_0 = \frac{B C}{D}$$

c) Calcule a velocidade (vetor) com que a partícula vai tocar o chão.

A velocidade da partícula é dada por:

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} x(t) \hat{x} + \frac{d}{dt} y(t) \hat{y}$$

Portanto:

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt} (A + B t^2) \hat{x} + \frac{d}{dt} (C - D t^2) \hat{y} = 2 B t \hat{x} - 2 D t \hat{y} = 2 t (B \hat{x} - D \hat{y})$$

No instante $t = t_1 = \sqrt{C/D}$ a velocidade vai ser:

$$\vec{V}(t_1) = 2 t_1 (B \hat{x} - D \hat{y}) = 2 \sqrt{\frac{C}{D}} (B \hat{x} - D \hat{y})$$

d) Calcule a aceleração (vetor) da partícula.

A aceleração da partícula é dada por:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{V}(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \hat{x} + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \hat{y} = \frac{d}{dt} [2 t (B \hat{x} - D \hat{y})] = 2 (B \hat{x} - D \hat{y})$$

A aceleração é constante, independente do tempo.

e) Calcule a equação $y(x)$ da trajetória da partícula.

As equações paramétricas da trajetória são $x(t) = A + B t^2$ e $y(t) = C - D t^2$ (t é o parâmetro). Para encontrar a equação $y(x)$ basta eliminar o tempo t na equação de $y(t)$. De fato, como

$$x(t) = A + B t^2$$

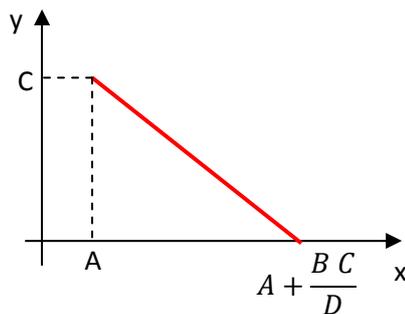
Concluimos que:

$$t^2 = \frac{x - A}{B}$$

Substituindo essa equação em $y(t)$ obtemos:

$$y(t) = C - D t^2 \Rightarrow y(x) = C - D \frac{x - A}{B} = -\frac{D}{B}x + C + \frac{DA}{B}$$

Trata-se da equação de uma reta, de inclinação negativa $-D/B$. Essa trajetória está esboçada na figura abaixo.



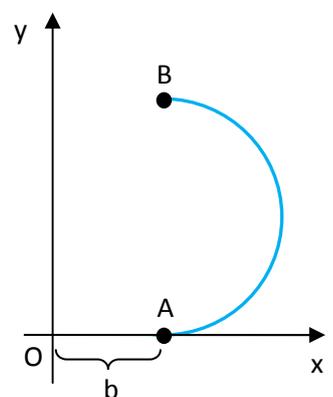
A partícula segue a trajetória representada pela reta vermelha, que inicia no ponto $x = A$ e $y = C$ (em $t = 0$) e termina no ponto $x = A + B C/D$ e $y = 0$ no instante t_1 em que a partícula toca o chão.

Resumindo: a partícula parte do repouso, pois $\vec{V}(t = 0) = 2 \cdot 0 (B \hat{x} - D \hat{y}) = \vec{0}$, da posição $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0) = (A + B [0]^2) \hat{x} + (C - D [0]^2) \hat{y} = A \hat{x} + C \hat{y}$, com aceleração constante $\vec{a}(t) = 2(B \hat{x} - D \hat{y})$ e passa a cair no eixo y e ao mesmo tempo a se deslocar ao longo de x , seguindo uma trajetória retilínea, até tocar o chão em $t = t_1 = \sqrt{C/D}$.

ER 1.2) Considere uma partícula que sai do ponto A e chega no ponto B mostrados na figura ao lado. Para ir de A até B, a partícula percorre uma trajetória que é um semicírculo de raio R (curva azul). Ela parte de A em $t = 0$ e gasta um tempo T para chegar em B. Note que já há um referencial xy definido na figura. b é a distância entre O e A.

Dados: os pontos A e B, R , T , b e o referencial xy .

a) Escreva as expressões algébricas dos vetores posição \vec{r}_A e \vec{r}_B no



referencial fornecido.

Esses vetores estão mostrados na figura ao lado.

Dessa figura vemos imediatamente que:

$$\vec{r}_A = b \hat{x}$$

$$\vec{r}_B = b \hat{x} + 2R \hat{y}$$

b) Calcule o deslocamento da partícula no intervalo de tempo T .

No intervalo de tempo de $t = 0$ a $t = T$, o deslocamento da partícula foi:

$$\vec{D}(0, T) = \vec{r}_B - \vec{r}_A = b \hat{x} + 2R \hat{y} - b \hat{x} = 2R \hat{y}$$

Esse vetor está mostrado na figura ao lado (seta vermelha). Ele nasce em A e morre em B.

c) Calcule o módulo do deslocamento e a distância percorrida pela partícula desde A até B.

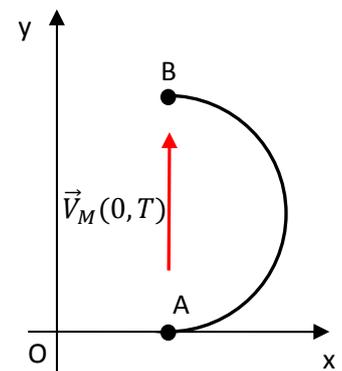
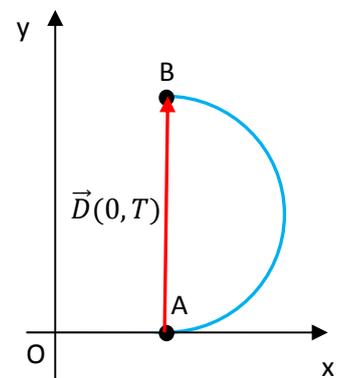
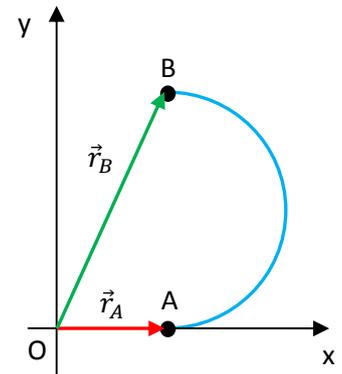
O módulo do deslocamento é $|\vec{D}(0, T)| = |2R \hat{y}| = 2R$, que é a distância entre os pontos A e B (o diâmetro do semicírculo). A distância percorrida pela partícula é o comprimento da trajetória curva que conecta os pontos A e B. Como se trata de um semicírculo de raio R , esse comprimento é $2\pi R/2 = \pi R$. Note então que, como $\pi \cong 3,14$, a distância percorrida ($\cong 3,14 R$) é maior que o módulo do deslocamento ($2R$), como é comum acontecer em órbitas curvas.

d) Calcule a velocidade média da partícula no intervalo de tempo de 0 a T .

A velocidade média da partícula nesse intervalo de tempo foi:

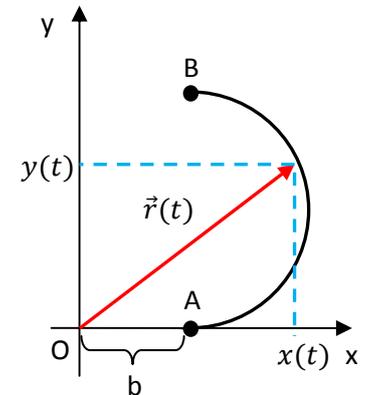
$$\vec{V}_M(0, T) = \frac{\vec{D}(0, T)}{T} = \frac{2R}{T} \hat{y}$$

Esse vetor está mostrado na figura ao lado. Note que, apesar de ter feito uma curva, em média, a partícula andou ao longo do eixo y , com uma taxa de $2R/T$ unidades de comprimento por unidade de tempo (por exemplo, $2R/T$ metros por segundo, ou, abreviadamente, $2R/T$ m/s, se R for dado em metros e T em segundos). Como não sabemos as unidades de R e T , pois a questão é algébrica sem unidades especificadas, o correto é deixar a resposta sem unidades. Somente em questões com dados numéricos (ou



mesmo algébricos), em que as unidades estão especificadas nos dados, faz sentido calcular, e fornecer, as unidades das grandezas físicas.

ER 1.3) Vamos continuar discutindo uma partícula que sai do ponto A e chega no ponto B no semicírculo considerado no exercício anterior. No exercício 1.2 discutimos apenas grandezas relacionadas com os pontos A e B, mas agora vamos assumir um movimento específico entre esses pontos, que nos permitirá calcular as grandezas instantâneas ao longo da trajetória. Vamos assumir então que a partícula percorra esse semicírculo de acordo com a seguinte equação horária para o vetor posição $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$:



$$\begin{cases} x(t) = b + R \sin(\omega t) \\ y(t) = R - R \cos(\omega t) \end{cases}$$

Note que $x(t)$ e $y(t)$ são as projeções do vetor $\vec{r}(t)$ nos eixos x e y (ver a figura acima) e que

$$(x(t) - b)^2 + (y(t) - R)^2 = R^2$$

Isso significa dizer que os pontos $(x(t), y(t))$, que são as posições da partícula ao longo do tempo, estão sobre uma circunferência de raio R centrada no ponto $(x = b, y = R)$, cuja metade da direita é o semicírculo que assumimos como sendo a órbita da partícula. O parâmetro ω será determinado em breve.

Dados: os pontos A e B, R , T , b , $x(t)$, $y(t)$ e o referencial xy .

a) Mostre como podemos deduzir que:

$$x(t) = b + R \sin(\omega t)$$

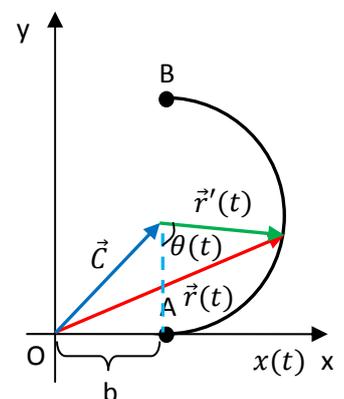
$$y(t) = R - R \cos(\omega t)$$

para a órbita em questão.

Considere a construção na figura ao lado. O vetor $\vec{r}'(t)$ é a posição da partícula em relação ao centro do semi-círculo. Chamamos de $\theta(t)$ o ângulo que esse vetor faz com o eixo y . Quando a partícula está em A vale $\theta = 0$ e quando ela estiver em B valerá $\theta = \pi$. Projetando o vetor $\vec{r}'(t)$ nos eixos obtemos:

$$\vec{r}'(t) = R \sin(\theta(t))\hat{x} - R \cos(\theta(t))\hat{y}$$

Note que essa equação já satisfaz $\vec{r}'(0) = -R\hat{y}$ (ponto A).



O vetor \vec{C} na Figura é um vetor constante, e representa a posição fixa do centro do semi-círculo em relação à origem do referencial xy . É fácil ver que:

$$\vec{C} = b \hat{x} + R \hat{y}$$

Da regra do paralelogramo vemos que:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{C}$$

Portanto:

$$\vec{r}(t) = R \sin(\theta(t)) \hat{x} - R \cos(\theta(t)) \hat{y} + b \hat{x} + R \hat{y} = [b + R \sin(\theta(t))] \hat{x} + [R - R \cos(\theta(t))] \hat{y}$$

Para finalizar, falta ainda uma hipótese sobre a função horária $\theta(t)$, que pode ser uma função arbitrária, dependendo do movimento que a partícula descreve. Aqui foi feita a hipótese mais simples de uma função linear:

$$\theta(t) = \omega t$$

que significa, como veremos em seguida, que a partícula está em movimento circular uniforme.

b) Determine o parâmetro ω , de tal forma que a partícula demore um tempo T para ir de A até B.

Note que as coordenadas do ponto A são $(x = b, y = 0)$, que concordam com os valores de $x(t)$ e $y(t)$ em $t = 0$. Já o ponto B possui coordenadas $(x = b, y = 2R)$. Esse ponto deve ser atingido no instante $t = T$. Avaliando $x(t)$ e $y(t)$ em $t = T$ e impondo que $x = b$ e $y = 2R$ obtemos as equações:

$$x(T) = b + R \sin(\omega T) = b \quad \text{e} \quad y(T) = R - R \cos(\omega T) = 2R$$

Portanto, concluímos que $\sin(\omega T) = 0$ e $\cos(\omega T) = -1$, logo, $\omega T = \pi$ e $\omega = \pi / T$.

c) Calcule a equação horária da velocidade da partícula.

Note que os vetores unitários não dependem do tempo, são constantes. Portanto:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} \Rightarrow \vec{V}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{x} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{y}$$

Sabendo que:

$$\frac{d}{dt}x(t) = R \omega \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}y(t) = R\omega \sin(\omega t)$$

Concluímos que:

$$\vec{V}(t) = \frac{\pi R}{T} \left(\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \hat{x} + \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \hat{y} \right)$$

Note que o módulo da velocidade é constante, $|\vec{V}(t)| = \pi R/T$, e que, portanto, o movimento de A até B é um MCU (graças à nossa escolha da função $\theta(t)$, conforme discutido no item (a)). De fato:

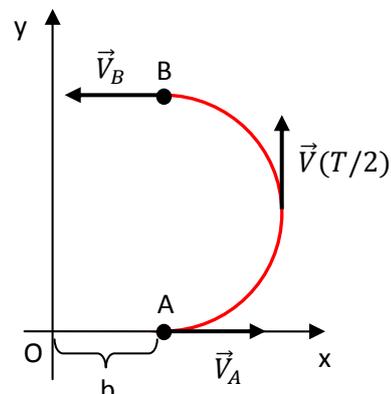
$$[V(t)]^2 = \left(\frac{\pi R}{T}\right)^2 \left[\cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right] = \left(\frac{\pi R}{T}\right)^2$$

Para ilustrar, vamos calcular as velocidades em A ($t = 0$), em B ($t = T$) e em $t = T/2$ (metade do caminho):

$$\vec{V}_A = \vec{V}(t = 0) = \frac{\pi R}{T} \hat{x} \quad \vec{V}_B = \vec{V}(t = T) = -\frac{\pi R}{T} \hat{x}$$

$$\vec{V}(t = T/2) = \frac{\pi R}{T} \hat{y}$$

Essas velocidades estão mostradas na figura ao lado. Note que a velocidade é sempre tangente à trajetória.



d) Calcule a equação horária da aceleração da partícula.

Sabendo que:

$$\vec{V}(t) = \frac{\pi R}{T} \left(\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \hat{x} + \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \hat{y} \right) \quad \text{e} \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

concluimos que:

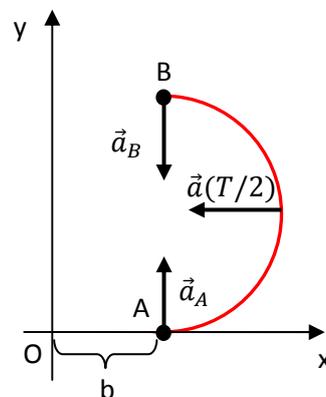
$$\vec{a}(t) = \frac{\pi^2 R}{T^2} \left(-\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \hat{x} + \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \hat{y} \right)$$

Para ilustrar, vamos calcular as acelerações em A ($t = 0$), em B ($t = T$) e em $t = T/2$ (metade do caminho):

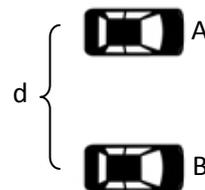
$$\vec{a}_A = \vec{a}(t = 0) = \frac{\pi^2 R}{T^2} \hat{y} \quad \vec{a}_B = \vec{a}(t = T) = -\frac{\pi^2 R}{T^2} \hat{y}$$

$$\vec{a}(t = T/2) = -\frac{\pi^2 R}{T^2} \hat{x}$$

Essas acelerações estão mostradas na figura ao lado. Note que como se trata de um MCU, a aceleração é puramente centrípeta, de módulo constante $|\vec{a}(t)| = \pi^2 R/T^2$.



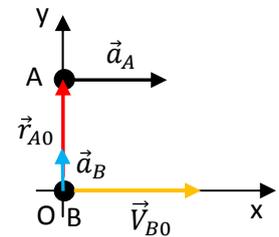
ER 1.4) A Figura ao lado ilustra a visão de cima de uma pista de corrida plana horizontal. O carro A parte do repouso com aceleração constante para a direita de módulo a_A no instante em que o carro B passa por ele. O carro B estava viajando com velocidade constante para a direita de módulo V_{B0} . Mas, um desalinhamento na direção faz com que o carro B adquira também uma aceleração constante na direção do carro A de módulo a_B . A distância inicial entre os carros é d .



Dados: a_A , a_B , V_{B0} e d .

Calcule a condição única que deve haver entre os parâmetros a_A , V_{B0} , a_B e d para que haja uma colisão entre os carros.

Os carros são partículas se movendo com acelerações constantes. Precisamos de um referencial para especificar os vetores com simplicidade. Considere então o referencial xy ao lado. Nessa figura está claro que a posição inicial do carro B é $\vec{r}_{B0} = \vec{0}$ e estão representados os vetores cujas expressões algébricas são:



$$\vec{r}_{A0} = d \hat{y} \quad (\text{posição inicial, } t = 0, \text{ do carro A) – seta vermelha}$$

$$\vec{a}_A = a_A \hat{x} \quad \text{- seta preta}$$

$$\vec{a}_B = a_B \hat{y} \quad \text{- seta azul}$$

$$\vec{V}_{B0} = V_{B0} \hat{x} \quad (\text{velocidade inicial, } t = 0, \text{ do carro B) – seta amarela}$$

Note que o instante $t = 0$ mostrado na figura acima é o exato instante em que B passa por A e que A passa então a se mover. Levando também em conta que o carro A parte do repouso vale $\vec{V}_{A0} = \vec{0}$. Portanto, das equações da cinemática com aceleração constante (Tabela 1.6) obtemos as seguintes órbitas para os dois carros:

$$\vec{r}_A(t) = d \hat{y} + \frac{a_A}{2} t^2 \hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{r}_B(t) = V_{B0} t \hat{x} + \frac{a_B}{2} t^2 \hat{y}$$

Os dois carros só colidirão entre si se existir um instante t_1 tal que $\vec{r}_A(t_1) = \vec{r}_B(t_1)$, ou seja:

$$d \hat{y} + \frac{a_A}{2} t_1^2 \hat{x} = V_{B0} t_1 \hat{x} + \frac{a_B}{2} t_1^2 \hat{y}$$

Dois vetores só podem ser iguais se suas componentes forem todas iguais duas a duas. Portanto, a componente x de $\vec{r}_A(t_1)$ deve ser igual à componente x de $\vec{r}_B(t_1)$ e assim por diante. Equivalentemente, a equação vetorial acima leva a:

$$\left(d - \frac{a_B}{2} t_1^2 \right) \hat{y} + \left(\frac{a_A}{2} t_1^2 - V_{B0} t_1 \right) \hat{x} = \vec{0}$$

Portanto, concluímos que a colisão só ocorrerá se:

$$d - \frac{a_B}{2} t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_B}}$$

e

$$\frac{a_A}{2} t_1^2 - V_{B0} t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{2V_{B0}}{a_A}$$

(a solução trivial $t_1 = 0$ não corresponde ao instante que estamos procurando).

Igualando essas duas expressões para t_1 obtemos, após algumas manipulações, a relação:

$$\frac{a_A^2}{a_B} = \frac{2V_{B0}^2}{d}$$

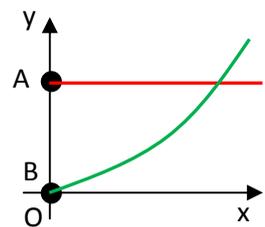
A trajetória do carro A é retilínea (MRUV) paralela ao eixo x (eixo $y = d$). A trajetória do carro B é parabólica, pois:

$$x_B(t) = V_{B0}t \quad \text{e} \quad y_B(t) = (a_B/2) t^2$$

Logo, eliminando o tempo, obtemos:

$$y_B(x_B) = (a_B/2V_{B0}^2) x_B^2$$

que é a equação de uma parábola. Essas duas trajetórias estão ilustradas na Figura ao lado. O simples fato das trajetórias se cruzarem não significa que há uma colisão entre os carros. Só haverá colisão se os carros estiverem no ponto de cruzamento das trajetórias no mesmo instante (como acontece quando ocorre uma colisão de dois carros em um cruzamento de duas ruas). A relação deduzida acima entre os parâmetros a_A , V_{B0} , a_B e d determina a única chance disso ocorrer. Parece impossível, mas acontece ao acaso.



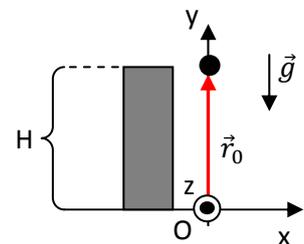
ER 1.5) Uma bolinha é solta do repouso do alto de um prédio de altura H e cai em queda livre.

Dados: H e \vec{g} .

a) Calcule o tempo que demora para a bolinha atingir o chão.

Aqui devemos usar as equações que governam o movimento de queda livre dadas na Tabela 1.7. Note que como a bolinha é solta do repouso, então $\vec{V}_0 = \vec{0}$. Logo, a equação da trajetória da bolinha fica: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (\vec{g}/2) t^2$ (supondo que ela foi solta em $t=0$).

Um estudante mais apressado pode olhar para a figura ao lado, em que adotamos uma origem no chão, logo abaixo da bolinha e ver logo que supor que a bolinha toca o chão é o mesmo que supor que $\vec{r}(t_1) = \vec{0}$, sendo t_1 o instante particular em que a partícula toca o chão. Daí ele conclui da equação acima que:



$$\vec{0} = \vec{r}_0 + \left(\frac{\vec{g}}{2}\right) t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{-2 \vec{r}_0}{\vec{g}}}$$

Em seguida ele substituiu $\vec{r}_0 = H \hat{y}$ e $\vec{g} = -g \hat{y}$ (pois o eixo y é vertical) para concluir que:

$$t_1 = \sqrt{\frac{-2 H \hat{y}}{-g \hat{y}}} = \sqrt{\frac{2 H}{g}}$$

Que é a resposta correta para o instante t_1 . O problema está no caminho que levou a essa resposta. A divisão de vetores não existe, porque não é uma operação bem definida.

De fato, imagine a seguinte divisão:

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = ?$$

Qual, ou o que, seria o resultado da divisão acima? Um vetor? Um escalar?

Imagine que a razão fosse um escalar, ou seja:

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = C$$

Então, concluímos que:

$$\vec{A} = C \vec{B}$$

ou seja, \vec{A} e \vec{B} são, necessariamente, vetores paralelos (ou antiparalelos) entre si. Note que esse é exatamente o caso de $\vec{r}_0 = H \hat{y}$ e $\vec{g} = -g \hat{y}$, para esse problema específico. Por isso obtivemos o resultado correto para t_1 . Em geral, se insistirmos nessa ideia, de divisão de vetores, vamos obter resultados absurdos porque nem sempre vai valer o paralelismo dos vetores com que estamos trabalhando. Não é verdade, em geral, que existe um C tal que:

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = C$$

Por exemplo, imagine que $\vec{A} = A \hat{x}$ e $\vec{B} = B \hat{y}$ (com A e B não nulos), então, se:

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = C \Rightarrow A \hat{x} = CB \hat{y}$$

que é uma equação totalmente absurda (um vetor na direção x nunca vai poder ser igual a um vetor na direção y , que é ortogonal à direção x).

Imaginemos agora que a divisão resultasse em um vetor, ou seja:

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = \vec{C}$$

Note que esse não seria o caso desse problema específico da queda da bolinha, pois escrevemos que:

$$\frac{-2 H \hat{y}}{-g \hat{y}} = \frac{2 H}{g}$$

Mas enfim, se insistirmos nessa ideia, concluímos que:

$$\vec{A} = \vec{C} ? \vec{B}$$

sendo ? uma operação de produto entre vetores, pois o produto é a operação inversa da divisão. Há dois produtos entre vetores, o produto escalar e o produto vetorial.

O produto escalar é tal que (como o próprio nome já diz) resulta em um escalar, ou seja:

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = D$$

sendo D um escalar. Então a operação misteriosa que denotamos por ? não é o produto escalar, pois ela resulta no vetor \vec{A} .

O produto vetorial, por sua vez, é tal que:

$$\vec{C} \times \vec{B} = \vec{D}$$

Então, suponha que:

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = \vec{C} \Rightarrow \vec{A} = \vec{C} \times \vec{B}$$

A inconsistência aqui vem do fato de que existem infinitos \vec{C} s que satisfazem a equação acima. De fato, seja \vec{C}_1 um vetor qualquer paralelo ao vetor \vec{C} . Então, podemos mostrar que:

$$\vec{C} \times (\vec{B} + \vec{C}_1) = \vec{C} \times \vec{B} + \vec{C} \times \vec{C}_1 = \vec{C} \times \vec{B} = \vec{A}$$

Conclusão: nesse contexto a divisão \vec{A}/\vec{B} é arbitrária, pode dar qualquer coisa. Por exemplo, se você disser que:

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = 3 \hat{x}$$

Então eu posso dizer que:

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = 3 \hat{x} + \vec{B}$$

Pois:

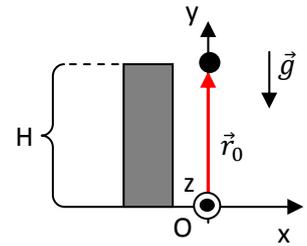
$$\vec{B} \times (3 \hat{x} + \vec{B}) = \vec{B} \times 3 \hat{x}$$

Nesse sentido, a operação de divisão de vetores imaginada acima não está bem definida, pois ela não é a função inversa de nenhuma multiplicação entre vetores.

Concluindo, não devemos admitir em nossas soluções de problemas a operação de divisão de vetores, mesmo que cheguemos, por sorte, ao resultado correto. Essa não é uma operação válida.

A solução para essa questão está em trabalharmos com equações escalares. Para isso devemos projetar os vetores em um sistema de eixos (referencial) conveniente.

Considere então o referencial mostrado na Figura ao lado (o eixo z está para fora do plano da página, no que seria uma direção horizontal paralela ao chão, a direção x é a outra direção horizontal paralela ao chão). Colocamos a origem logo abaixo da posição inicial da bolinha. Note então que:



$$\vec{r}_0 = H \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{g} = -g \hat{y}$$

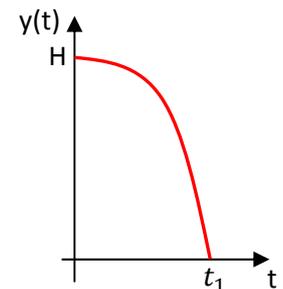
A equação da trajetória fica então:

$$\vec{r}(t) = \left(H - \frac{g}{2} t^2 \right) \hat{y}$$

Note que a trajetória da bolinha é retilínea (MRUV), ao longo do eixo vertical y e que sua altura $y(t)$ em relação ao solo vai diminuindo com o passar do tempo. De fato, podemos escrever:

$$\vec{r}(t) = y(t) \hat{y} \quad \text{com} \quad y(t) = H - (g/2) t^2 .$$

O gráfico ao lado ilustra o comportamento da altura $y(t)$ da bolinha em relação ao solo em função do tempo t . A curva é uma parábola com a boca para baixo, que cruza o eixo t no instante $t = t_1$, ou seja, $y(t_1) = 0$. Note que esse é o gráfico da equação horária $y(t) \times t$ e não o gráfico da trajetória da bolinha. A trajetória da bolinha é uma reta vertical, de comprimento H .



O instante t_1 é exatamente o instante em que a bolinha vai tocar o solo (t_1 é o instante em que a bolinha está tão próxima do solo quanto você queira ($y(t) \rightarrow 0$) mas não tocou ainda o solo, o que dá basicamente no mesmo quando dizemos que em t_1 a bolinha tocou ($y(t) = 0$), ou vai tocar ($y(t) \rightarrow 0$), o solo). t_1 é dado por:

$$y(t_1) = 0 \Rightarrow H - \frac{g}{2} t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Note os casos particulares: se $g = 0$, então $t_1 \rightarrow \infty$. Se não houvesse gravidade, a bolinha não cairia, o que implica que seu tempo para chegar ao chão seria infinito, ela nunca chegaria ao chão. Se $H = 0$, então $t_1 = 0$. A bolinha já seria solta do chão.

b) Calcule a velocidade com que a bolinha chega ao chão.

A equação horária da velocidade é $\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{g}t$, que nesse caso se torna $\vec{V}(t) = -g t \hat{y}$. Essa equação diz que a velocidade da bolinha é sempre vertical (y), apontando para baixo (sinal $-$) e de magnitude crescente $|\vec{V}(t)| = g t$. A bolinha vai chegar no chão com velocidade:

$$\vec{V}(t_1) = -g t_1 \hat{y} = -\sqrt{2gH} \hat{y}$$

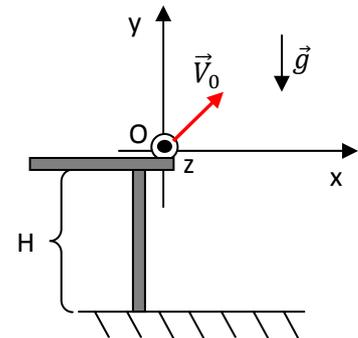
A velocidade é vertical (\hat{y}) apontando para baixo (sinal -) e de módulo igual a $\sqrt{2gH}$.

ER 1.6) Uma bolinha é lançada a partir do alto de uma mesa de altura H com velocidade de componentes vertical igual a A e horizontal igual a B (A e B positivos). Ela cai em queda livre.

Dados: H , A , B e \vec{g} .

a) Calcule o tempo que a bolinha demora para cair no chão.

Novamente, devemos usar as equações que governam o movimento de queda livre. Para escrever as expressões dos vetores devemos adotar um referencial xyz . Considere então o referencial mostrado na figura ao lado. O plano xy é o plano que contém \vec{V}_0 , que seria o plano da página na figura (o eixo z está para fora do plano da página, no que seria uma direção horizontal paralela ao chão, a direção x é a outra direção horizontal paralela ao chão). Colocamos a origem na posição de partida da bolinha.



Note então que nesse referencial:

$$\vec{r}_0 = \vec{0} \quad , \quad \vec{g} = -g \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{V}_0 = B \hat{x} + A \hat{y} .$$

A equação horária da trajetória fica:

$$\vec{r}(t) = B t \hat{x} + \left(A t - \frac{g}{2} t^2 \right) \hat{y}$$

Ou seja, $\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y}$ com $x(t) = B t$ e $y(t) = A t - (g/2) t^2$.

A trajetória é uma curva plana que pode ser desenhada no plano do papel, o plano xy . Note que a bolinha vai atingir o chão no instante t_1 tal que $y(t_1) = -H$, portanto:

$$y(t_1) = -H \Rightarrow A t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = -H \Rightarrow g t_1^2 - 2A t_1 - 2H = 0$$

Essa equação quadrática tem duas soluções dadas pela fórmula de Bhaskara:

$$t_1 = \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 + 8gH}}{2g}$$

Note que a solução com sinal - corresponde a um tempo t_1 negativo (pois $\sqrt{4A^2 + 8gH} > 2A$), ou seja, corresponde a algo que aconteceu antes da bolinha ser lançada da mesa (ela foi lançada em $t = 0$). Trata-se, portanto, de uma solução apenas matematicamente correta (é o instante em que a extensão

da trajetória da bolinha no passado ($t < 0$) cruza o eixo $y = -H$, mas fisicamente absurda. Ficamos então com:

$$t_1 = \frac{2A + \sqrt{4A^2 + 8gH}}{2g} = \frac{A + \sqrt{A^2 + 2gH}}{g}$$

Note que se $A = 0$, recuperamos o valor $t_1 = \sqrt{2H/g}$ do problema 1.5, em que a bolinha foi solta sem velocidade inicial vertical (sem velocidade inicial horizontal também).

b) Calcule a altura máxima que a bolinha atinge, em relação ao chão.

A pergunta se refere a uma distância vertical (altura) e, portanto, à função $y(t)$. Precisamos encontrar o instante t_2 em que essa altura máxima ocorre e calcular $y(t_2)$. Sabemos que a bolinha inicialmente sobe e depois começa a cair, o instante t_2 marca exatamente a transição entre subir e descer. Durante a subida, a velocidade vertical da bolinha ($V_y(t)$) é positiva e durante a descida ela é negativa. Portanto, em t_2 , a velocidade $V_y(t)$ muda de sinal, ou seja, atinge o valor zero. O instante t_2 é dado então pela equação $V_y(t_2) = 0$. A velocidade da bolinha é dada por:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{g} t = B \hat{x} + (A - g t) \hat{y}$$

Portanto, $V_y(t) = A - g t$. Logo, $V_y(t_2) = 0 \Rightarrow t_2 = A/g$. Alternativamente, como nesse instante a coordenada y é máxima, podemos obter o valor de t_2 através da condição de derivada nula da função horária $y(t)$:

$$\frac{d}{dt} y(t)|_{t_2} = 0$$

ou seja:

$$\frac{d}{dt} \left[A t - \frac{g}{2} t^2 \right]_{t_2} = A - g t_2 = 0$$

Enfim, obtemos para a altura máxima (em relação à origem $y = 0$, ou seja, em relação à mesa):

$$y(t_2) = A t_2 - \frac{g}{2} t_2^2 = \frac{A^2}{2g}$$

A altura máxima em relação ao chão é, portanto, $h_M = H + y(t_2) = H + A^2/2g$. Note que se $A = 0$, $h_M = H$. Isso porque nesse caso a bolinha seria lançada na horizontal e ela não subiria nada em relação à mesa, ela apenas cairia, a partir da altura H em relação ao chão.

c) Calcule o alcance da bolinha, ou seja, a distância que ela percorre na horizontal.

Na horizontal a bolinha se move de acordo com a equação horária $x(t) = B t$. Por outro lado, a bolinha chega ao chão no instante t_1 . Portanto, o alcance Alc da bolinha é dado por:

$$\text{Alc} = x(t_1) = \frac{B}{g} \left(A + \sqrt{A^2 + 2gH} \right)$$

d) Calcule a velocidade com que a bolinha bate no chão.

Essa velocidade é $\vec{V}(t_1)$, ou seja:

$$\vec{V}_{\text{chão}} = \vec{V}(t_1) = B \hat{x} + (A - g t_1) \hat{y} = B \hat{x} - \sqrt{A^2 + 2gH} \hat{y}$$

A figura ao lado ilustra a trajetória da bolinha e as grandezas que calculamos nos itens (a) a (d). A trajetória é parabólica (basta você calcular $y(x)$ para mostrar isso), contida no plano de \vec{V}_0 .

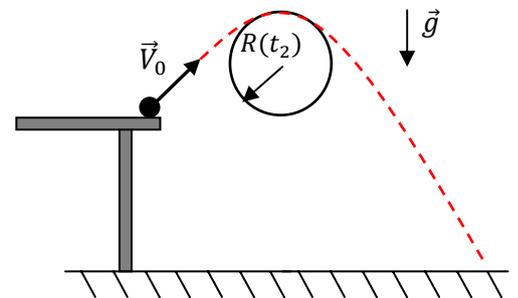
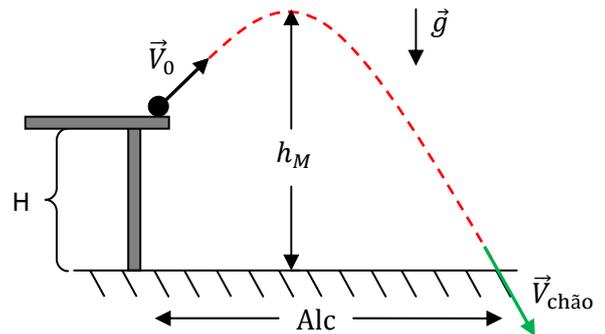
Apenas para ilustrar, note que no instante t_2 , o instante em que a partícula está na altura máxima, o vetor aceleração tem as seguintes componentes, tomando-se a direção da velocidade como referência:

$a_{\parallel} = 0$ (pois o módulo da velocidade está passando por um mínimo nesse instante, ou seja, $dV(t)/dt = 0$ em t_2) e $a_{\perp} = g$.

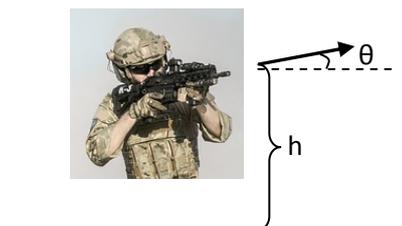
Portanto, podemos dizer que em t_2 a aceleração centrípeta da partícula é $a_{\text{cen}}(t_2) = g$. Logo, de acordo com o que já discutimos anteriormente, o raio do círculo osculante (ou raio de curvatura) à parábola no ponto de ápice da trajetória parabólica é dado por:

$$R(t_2) = \frac{V^2(t_2)}{a_{\text{cen}}(t_2)} = \frac{B^2}{g}$$

A Figura ao lado ilustra esse círculo osculante e seu raio. Note que se $B \rightarrow \infty$ ou $g \rightarrow 0$, então $R(t_2) \rightarrow \infty$, ou seja, a trajetória se torna uma reta (uma reta pode ser pensada como sendo um círculo de raio infinito). Se $B \rightarrow \infty$ a trajetória é uma reta horizontal e se $g \rightarrow 0$ a trajetória é uma reta inclinada, paralela a \vec{V}_0 .



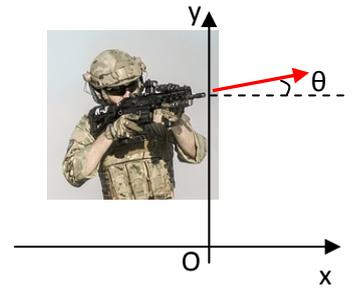
ER 1.7) Um atirador dispara um tiro de rifle inclinando o cano do rifle de um ângulo θ em relação à horizontal. A boca do cano está a uma altura h do piso horizontal. A bala sai da boca do cano com velocidade de módulo B . A figura ilustra essa situação. Desprezando o arraste da bala com o ar e qualquer obstáculo, podemos considerar que ela vai se mover em queda livre, até atingir o piso.



Dados: θ , B , h e g .

Calcule o alcance A da bala, ou seja, a distância máxima que a bala percorre na horizontal.

Para escrever as equações de queda livre devemos adotar um referencial. Considere então o referencial mostrado na figura ao lado. O plano xy contém o cano do rifle, ou seja, contém a velocidade \vec{V}_0 da bala (seta vermelha). O eixo x é horizontal, o eixo y é vertical e a origem está no piso, logo abaixo da boca do cano. Nesse referencial, a queda livre da bala se inicia ($t = 0$) logo após ela sair da boca do cano, com as condições iniciais:



$$\vec{r}_0 = h \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{V}_0 = B \cos(\theta) \hat{x} + B \sin(\theta) \hat{y}. \quad \text{Note também que } \vec{g} = -g \hat{y}.$$

Portanto, a equação horária para a posição da bala é dada por $\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y}$ com:

$$x(t) = B \cos(\theta) t \quad \text{e} \quad y(t) = h + B \sin(\theta) t - \frac{g}{2} t^2$$

A bala toca o piso no instante t_1 tal que $y(t_1) = 0$. Portanto, t_1 é dado pela equação:

$$h + B \sin(\theta) t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 0$$

Da fórmula de Bhaskara (já eliminando a raiz negativa):

$$t_1 = \frac{B \sin(\theta) + \sqrt{B^2 \sin^2(\theta) + 2gH}}{g}$$

O alcance, $A(h, \theta)$, é dado por $A(h, \theta) = x(t_1)$. Portanto, após uma boa simplificação:

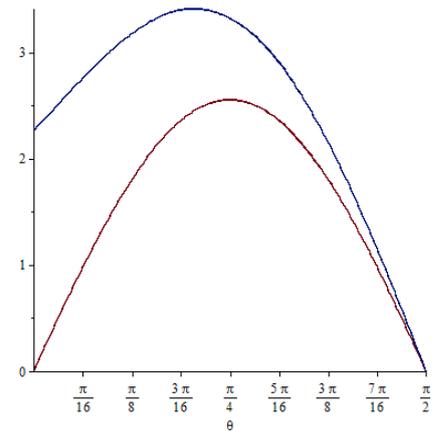
$$A(h, \theta) = \frac{B^2}{g} \sin(\theta) \cos(\theta) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2g h}{B^2 \sin^2(\theta)}} \right]$$

Note, o alcance é função dos parâmetros h e θ , que são os únicos parâmetros que o atirador pode ajustar à sua vontade. A velocidade inicial B está definida pelo tipo de rifle e cartucho utilizados e a gravidade g está definida pelo planeta Terra. Para o caso particular $h = 0$ (um tiro dado com a boca do rifle encostada no chão) recuperamos o resultado comumente exibido nos livros textos:

$$A(h = 0, \theta) = \frac{B^2}{g} 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{B^2}{g} \sin(2\theta)$$

Esse resultado mostra que para $h = 0$ o alcance máximo é obtido quando o atirador inclina o rifle de $\theta = 45^\circ$ (pois $\sin(2 \times 45^\circ) = 1$). Para $\theta = 0$ o alcance seria nulo pois a bala nem sequer descreveria uma queda livre, ela já partiria do piso. Para $\theta = 90^\circ$ novamente o alcance seria nulo porque a bala apenas subiria e desceria ao longo da mesma linha vertical (a bala cairia na cabeça do atirador).

A figura ao lado mostra os gráficos de $A(h = 0, \theta)$ (curva vermelha) e de $A(h, \theta)$ (curva azul) em função do ângulo de inclinação θ em radianos (h está fixo). Note, não são gráficos da trajetória da bala, são gráficos do alcance A versus θ . A trajetória da bala é uma curva no plano xy (você já sabe que a trajetória é parabólica). As curvas na figura foram obtidas tomando $B = 5 \text{ m/s}$, $h = 1 \text{ m}$ e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Note que o máximo de $A(h = 0, \theta)$ ocorre em $\theta = 45^\circ$ ($\pi/4 \text{ rad}$) e o alcance máximo é cerca de 2,5 m (para os dados numéricos que assumimos). Para $h \neq 0$ obtemos alcances maiores (para um mesmo θ) e o alcance máximo acontece em um ângulo menor que $\theta = 45^\circ$.



Derivando $A(h = 1, \theta)$ e igualando essa derivada a zero, obtemos que o máximo dessa função está em $\theta \cong 36,8^\circ$ e que o alcance máximo é cerca de 3,4 m. Note que $B = 5 \text{ m/s}$ é um valor muito baixo para a velocidade de um projétil de arma de fogo, que é a situação que estamos discutindo nessa questão. Um valor $B = 500 \text{ m/s}$ estaria mais próximo da realidade, para uma bala de rifle. Com $B = 500 \text{ m/s}$, o alcance máximo é tão grande (da ordem de 25 km) que as duas curvas de $A(h, \theta)$ e $A(h = 0, \theta)$ se tornam praticamente indistinguíveis para $h = 1 \text{ m}$, ou seja, a altura do rifle em relação ao solo não importa muito para o alcance (desde que essa altura seja da ordem de 1 m). As curvas e valores numéricos mencionados acima foram obtidos utilizando o programa Maple, uma ferramenta computacional poderosa para nos auxiliar com a matemática no dia-a-dia.

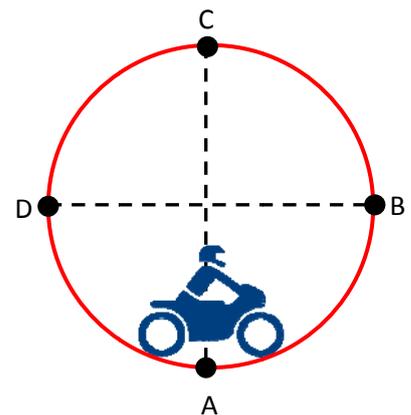
ER 1.8) Um motociclista está percorrendo uma espécie de “cilindro da morte” que consiste em uma pista cilíndrica de raio b , o cilindro apoiado no piso horizontal. O motociclista percorre ciclicamente uma órbita circular ABCDA..., contida em um plano vertical, partindo do repouso no ponto A (em $t=0$), conforme a figura ao lado. Ele pressiona o acelerador da moto de tal forma que sua velocidade cresce no tempo de acordo com:

$$V(t) = k t$$

sendo k uma constante positiva.

Dados: $V(t)$, k , b e g .

a) Calcule os instantes t_B , t_C , t_D e t_A em que o motociclista passa pela primeira vez pelos pontos B, C, D e A, respectivamente.



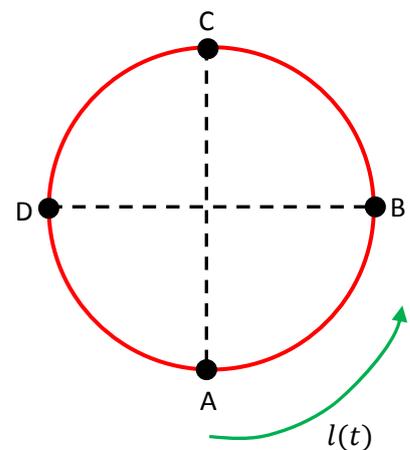
$V(t)$ é a velocidade com que o motociclista percorre comprimento de arco de circunferência. Assim sendo, se chamarmos de $l(t)$ o comprimento de arco percorrido no instante t , vale:

$$V(t) = k t = \frac{d}{dt} l(t)$$

Integrando essa equação obtemos a equação horária do comprimento de arco percorrido:

$$l(t) = \frac{k}{2} t^2$$

Note que escolhemos a constante de integração como sendo nula, o que significa que em $t=0$ o arco percorrido é nulo. Em $t=0$ o motociclista deverá estar no seu ponto de partida (ponto A). Sendo assim, a Figura ao lado ilustra o comprimento de arco $l(t)$ (em verde) que definimos na equação acima ($l(t)$ é medido a partir do ponto A). $l(t)$ é o que chamamos de uma coordenada curvilínea. Concluindo: sendo $2\pi b$ o comprimento total da circunferência, podemos dizer que:



$$l(t_B) = \frac{k}{2} t_B^2 = \frac{1}{4} 2\pi b \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{\pi b}{k}}$$

$$l(t_C) = \frac{k}{2} t_C^2 = \frac{2}{4} 2\pi b \Rightarrow t_C = \sqrt{\frac{2\pi b}{k}}$$

$$l(t_D) = \frac{k}{2} t_D^2 = \frac{3}{4} 2\pi b \Rightarrow t_D = \sqrt{\frac{3\pi b}{k}}$$

$$l(t_A) = \frac{k}{2} t_A^2 = \frac{4}{4} 2\pi b \Rightarrow t_A = \sqrt{\frac{4\pi b}{k}} = 2 t_B$$

b) Calcule o módulo da velocidade do motociclista em B, C, D e A.

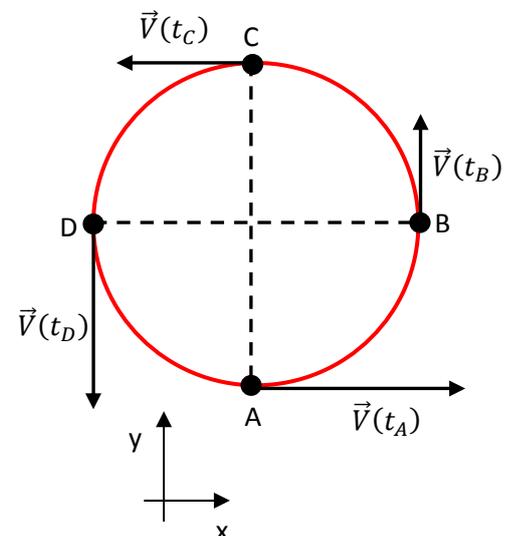
Sendo $V(t) = k t$, concluímos diretamente que:

$$V(t_B) = k t_B = \sqrt{\pi k b}$$

$$V(t_C) = k t_C = \sqrt{2\pi k b}$$

$$V(t_D) = k t_D = \sqrt{3\pi k b}$$

$$V(t_A) = k t_A = \sqrt{4\pi k b} = 2 V(t_B)$$



Na Figura ao lado ilustramos os vetores velocidade nesses pontos da trajetória do motociclista. A magnitude da velocidade é crescente.

Usando o referencial xy especificado na Figura, concluímos que o vetor velocidade nesses instantes é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{V}(t_B) &= \sqrt{\pi k b} \hat{y} & \vec{V}(t_C) &= -\sqrt{2 \pi k b} \hat{x} \\ \vec{V}(t_D) &= -\sqrt{3 \pi k b} \hat{y} & \vec{V}(t_A) &= \sqrt{4 \pi k b} \hat{x}\end{aligned}$$

c) Calcule o módulo da aceleração centrípeta (aceleração ortogonal) do motociclista em B, C, D e A.

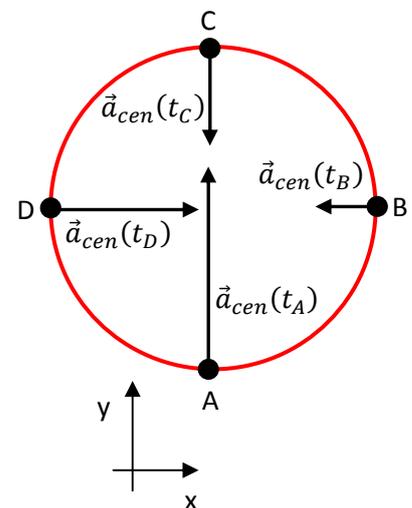
A aceleração centrípeta no movimento circular de raio R tem módulo dado por:

$$a_{cen}(t) = V^2(t)/R$$

Portanto:

$$\begin{aligned}a_{cen}(t_B) &= \frac{V^2(t_B)}{b} = \pi k \\ a_{cen}(t_C) &= \frac{V^2(t_C)}{b} = 2 \pi k \\ a_{cen}(t_D) &= \frac{V^2(t_D)}{b} = 3 \pi k \\ a_{cen}(t_A) &= \frac{V^2(t_A)}{b} = 4 \pi k = 4 a_{cen}(t_B)\end{aligned}$$

Na Figura acima ilustramos o vetor aceleração centrípeta nesses pontos da trajetória do motociclista. A magnitude da aceleração centrípeta cresce com o tempo, acompanhando o crescimento da velocidade.



Usando o referencial xy especificado na Figura, concluímos que o vetor aceleração centrípeta nesses instantes é dado por:

$$\vec{a}_{cen}(t_B) = -\pi k \hat{x} \quad | \quad \vec{a}_{cen}(t_C) = -2 \pi k \hat{y} \quad | \quad \vec{a}_{cen}(t_D) = 3 \pi k \hat{x} \quad | \quad \vec{a}_{cen}(t_A) = 4 \pi k \hat{y}$$

d) Calcule o módulo da aceleração tangencial (aceleração paralela) do motociclista em B, C, D e A.

A aceleração tangencial tem magnitude dada por: $a_{tan}(t) = dV(t)/dt$. Portanto, como:

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}k t = k$$

(esse foi um dado do problema) segue que:

$$a_{tan}(t_B) = a_{tan}(t_C) = a_{tan}(t_D) = a_{tan}(t_A) = k$$

Na Figura ao lado ilustramos o vetor aceleração tangencial nesses pontos da trajetória do motociclista. A magnitude da aceleração tangencial é constante, determinada pela forma como o motociclista pressiona o acelerador da moto.

Usando o referencial xy especificado na Figura, concluímos que o vetor aceleração tangencial nesses instantes é dado por:

$$\vec{a}_{tan}(t_B) = k \hat{y} \quad \vec{a}_{tan}(t_C) = -k \hat{x}$$

$$\vec{a}_{tan}(t_D) = -k \hat{y} \quad \vec{a}_{tan}(t_A) = k \hat{x}$$

e) Com base nas respostas dos itens (c) e (d), esboce o vetor aceleração do motociclista em B, C, D e A.

Usando a regra do paralelogramo para esboçar o vetor $\vec{a}(t) = \vec{a}_{cen}(t) + \vec{a}_{tan}(t)$ obtemos a Figura ao lado. A aceleração do motociclista possui sempre uma componente paralela (à velocidade) \vec{a}_{tan} , responsável pelo aumento na magnitude da velocidade do motociclista e uma componente ortogonal (à velocidade) \vec{a}_{cen} (centrípeta), responsável pela mudança na direção (e sentido) do vetor velocidade do motociclista, que é obrigado a seguir a trajetória circular. Quanto mais rápido o motociclista, maior deve ser o módulo de \vec{a}_{cen} , porque o vetor velocidade muda de direção mais rapidamente.

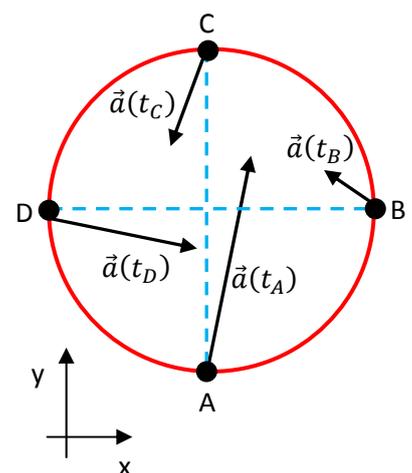
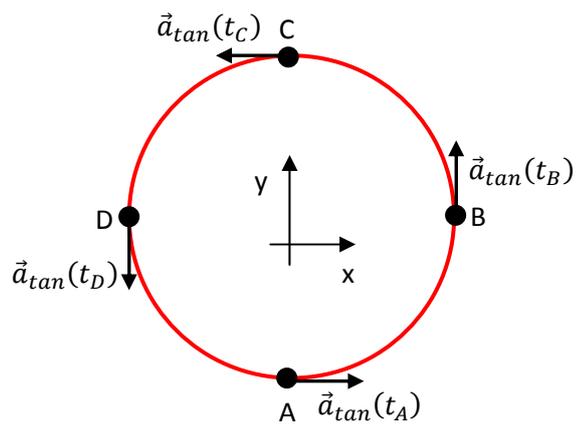
Usando o referencial xy especificado na Figura, concluímos que o vetor aceleração nesses instantes é dado por:

$$\vec{a}(t_B) = -\pi k \hat{x} + k \hat{y}$$

$$\vec{a}(t_C) = -k \hat{x} - 2\pi k \hat{y}$$

$$\vec{a}(t_D) = 3\pi k \hat{x} - k \hat{y}$$

$$\vec{a}(t_A) = k \hat{x} + 4\pi k \hat{y}$$



ER 1.9) Para incluir um exemplo de cinemática que requer a solução de equações diferenciais, considere uma partícula (um projétil) lançada para cima na vertical (eixo y). Vamos considerar a presença do arraste com o ar. O ar tem o efeito de frear o projétil, imprimindo nele uma aceleração oposta a sua velocidade. Essa aceleração é dependente da magnitude da velocidade: para velocidade nula, não há

arraste com o ar e nem aceleração devido a ele. Quanto maior a velocidade, maior o arraste e maior a aceleração devido a esse arraste. Vamos considerar que o arraste imprime na partícula uma aceleração dependente da velocidade:

$$a_A(t) = -B V(t)$$

sendo $B > 0$ um coeficiente de arraste, que depende das propriedades do ar (viscosidade) e do corpo (tamanho e massa) que está sendo modelado por essa partícula. Essa é a lei de Stokes do arraste e é válida para um projétil pequeno em baixas velocidades (fluxo laminar). A presença de turbulência no fluido, causada pelo movimento do projétil, requereria leis mais complicadas para o arraste, que não vamos considerar aqui. Note que, como esperado, a aceleração a_A é oposta à velocidade da partícula e tanto maior quanto maior é a velocidade da partícula. Para simplificar as contas, vamos considerar apenas o lançamento vertical da partícula, a partir do solo com velocidade para cima de módulo V_0 . Nesse caso o problema se torna unidimensional, tudo acontece no eixo y (vertical para cima com origem no piso).

Dados: $a_A(t) = -B V(t)$, V_0 e g .

a) Calcule a equação horária da velocidade da partícula.

Considerando a gravidade e o arraste atuando simultaneamente na partícula obtemos a aceleração:

$$a(t) = -g - a_A(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}V(t) = -g - B V(t)$$

Note que a gravidade é negativa pois está sempre para baixo (e o eixo y está para cima). Já a aceleração causada pelo arraste, será negativa na subida, pois $V(t)$ é positiva nesse caso, e positiva na descida, pois $V(t)$ é negativa nesse caso.

Note que para $B = 0$ a solução é aquela que já conhecemos:

$$V^{(0)}(t) = V_0 - g t$$

Para simplificar a equação diferencial de $V(t)$ vamos definir a função $V'(t) = -g/B - V(t)$.

Derivando essa equação obtemos:

$$\frac{d}{dt}V'(t) = -\frac{d}{dt}V(t)$$

Substituindo essa igualdade na equação diferencial de $V(t)$ obtemos:

$$-\frac{d}{dt}V'(t) = B V'(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}V'(t) = -B V'(t)$$

Vemos que a função $V'(t)$ é uma função real tal que a derivada dela é ela mesma, a menos de uma constante negativa igual a $-B$. Portanto, $V'(t)$ é uma função exponencial decrescente:

$$V'(t) = A e^{-B t}$$

sendo A uma constante a ser determinada. A velocidade da partícula é, portanto:

$$V(t) = -\frac{g}{B} - V'(t) \Rightarrow V(t) = -\frac{g}{B} - A e^{-B t}$$

Como $V(t = 0) = V_0$, segue que: $V_0 = -g/B - A \Rightarrow A = -g/B - V_0$. Logo, a velocidade da partícula é:

$$V(t) = -\frac{g}{B} + \left(\frac{g}{B} + V_0\right) e^{-B t}$$

Verificar o caso $B = 0$ não é tão simples, pois aparecem algumas divergências na expressão de $V(t)$. Precisamos tomar o limite $B \rightarrow 0$ com mais cuidado.

Primeiro reconhecemos que para $B \cong 0$ vale:

$$e^{-B t} = 1 - B t$$

Portanto, adotando esse comportamento assintótico e em seguida fazendo $B = 0$ obtemos:

$$V(t) = -\frac{g}{B} + \left(\frac{g}{B} + V_0\right) (1 - B t) = V_0 - g t = V^{(0)}(t)$$

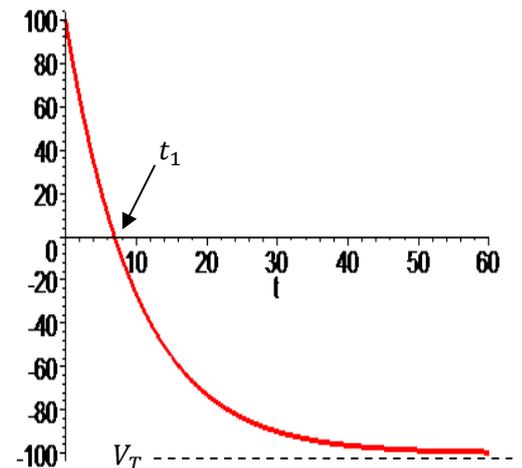
O gráfico ao lado mostra o comportamento da velocidade $V(t)$ em função do tempo adotando os valores numéricos $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $V_0 = 100 \text{ m/s}$ e $B = 0,1 \text{ s}^{-1}$. Note que a velocidade parte do valor $V_0 = 100$ e decai

exponencialmente, passando pelo zero (na altura máxima) em $t = t_1$ e se tornando negativa quando a partícula passa a cair. Note também que na queda a velocidade tende assintoticamente para um valor limite V_T , chamado de velocidade terminal. Todo corpo em queda na presença de arraste com o ar vai atingir, se der tempo, uma velocidade constante de queda. É o que acontece, por exemplo, com um paraquedista que salta de uma grande altura.

O valor de t_1 , correspondente à altura máxima, pode ser determinado de:

$$V(t_1) = -\frac{g}{B} + \left(\frac{g}{B} + V_0\right) e^{-B t_1} = 0 \qquad t_1 = \frac{1}{B} \ln \left(1 + \frac{B V_0}{g}\right)$$

sendo \ln a função logaritmo natural, ou neperiano. Note que (para $B = 0$): $t_1^{(0)} = V_0/g$.



A velocidade terminal V_T pode ser determinada simplesmente igualando a derivada da velocidade a zero, conforme pode-se ver no gráfico de $V(t)$:

$$\frac{d}{dt}V(t) = -g - B V(t) = 0 \Rightarrow V(t \rightarrow \infty) = V_T = -\frac{g}{B}$$

O sinal negativo indica apenas que a velocidade terminal está apontando para baixo (enquanto o nosso eixo y está para cima). Quanto maior o coeficiente de arraste, menor vai ser a velocidade terminal. O objetivo do paraquedas é exatamente aumentar o B do paraquedista (aumentando o tamanho) e diminuir seu valor de V_T . Para uma formiga, um floco de neve, uma gota de chuva, uma pluma ou um grão de poeira, B pode ser bem grande (porque eles são pequenos e muito leves), o que faz com que esses corpos caiam muito lentamente no ar (se o vento deixar).

b) Calcule a equação horária da posição $y(t)$ da partícula.

Sabemos que:

$$V(t) = \frac{d}{dt}y(t) = -\frac{g}{B} + \left(\frac{g}{B} + V_0\right) e^{-B t}$$

Portanto, integrando os dois lados dessa equação (de $t = 0$ até $t = t$) obtemos:

$$y(t) - y_0 = -\frac{g}{B}t - \frac{1}{B}\left(\frac{g}{B} + V_0\right) e^{-B t} + \frac{1}{B}\left(\frac{g}{B} + V_0\right)$$

No nosso referencial vale $y_0 = 0$. Logo:

$$y(t) = -\frac{g}{B}t + \frac{1}{B}\left(\frac{g}{B} + V_0\right) (1 - e^{-B t})$$

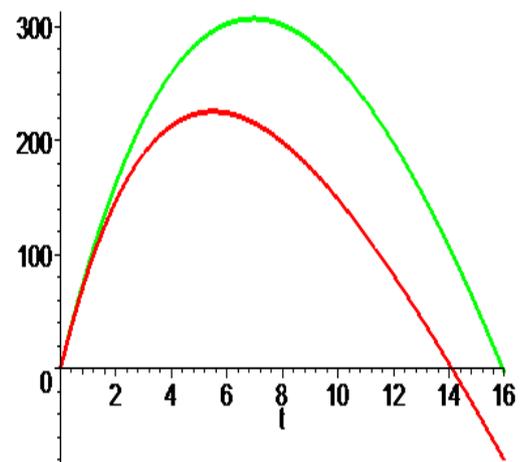
Verificamos novamente o caso $B = 0$ fazendo primeiramente (para $B \cong 0$):

$$e^{-B t} = 1 - Bt + \frac{B^2 t^2}{2}$$

e depois tomando $B = 0$. Obtemos o resultado já conhecido da queda livre:

$$y(t) = y^{(0)}(t) = V_0 t - g \frac{t^2}{2}$$

O gráfico ao lado mostra o comportamento da posição $y(t)$ em função do tempo adotando os valores numéricos ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $V_0 = 100 \text{ m/s}$, $B = 0,1 \text{ s}^{-1}$ (curva verde) e $B = 0,2 \text{ s}^{-1}$ (curva vermelha, desprezando a porção negativa da curva)). As curvas parecem parabólicas, mas não são. Note que esse não é um gráfico da trajetória da partícula. A trajetória é uma simples reta vertical, na



subida e na descida. A partícula parte da origem, sobe, atinge uma altura máxima e cai até bater no piso. A altura máxima é simplesmente $y(t_1)$:

$$y_{MAX} = \frac{V_0}{B} - \frac{g}{B^2} \ln\left(1 + \frac{V_0 B}{g}\right)$$

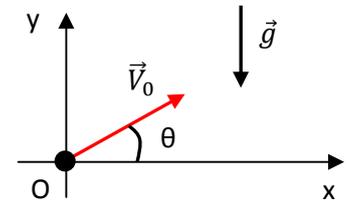
Note que, como $\ln(1+x) = x - x^2/2$ para $x \cong 0$, obtemos (para $B = 0$): $y_{MAX}^{(0)} = V_0^2/2g$.

O tempo total de queda (cerca de 14 e 16 segundos no gráfico) é dado pela solução não nula da equação:

$$y(t) = 0$$

Vemos no gráfico que o aumento do arraste reduz o tempo total de queda e a altura máxima do projétil.

ER 1.10) Vamos considerar agora o movimento de um projétil na presença do arraste com o ar em um lançamento oblíquo. Um projétil é lançado do solo com velocidade inicial de módulo V_0 inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. O referencial que utilizaremos é o mostrado na figura ao lado. O plano xy é o plano do vetor \vec{V}_0 . A origem O está na posição inicial ($t=0$) do projétil. O arraste com o ar vai produzir no projétil uma aceleração antiparalela, que freia o seu movimento. Vamos continuar aqui com a mesma lei do arraste que utilizamos no exercício 1.9, qual seja, a lei do arraste proporcional à velocidade (lei de Stokes), que vai se traduzir em uma aceleração no projétil dada por:



$$\vec{a}_A(t) = -B \vec{V}(t)$$

sendo B um coeficiente de arraste, dependente das características do projétil e do fluido em que o projétil se move (que no presente caso é o ar).

a) Calcule a equação horária da velocidade $\vec{V}(t)$ do projétil.

Note, se não houvesse arraste, o movimento do projétil seria uma queda livre, e a velocidade horizontal (x) do projétil seria constante e dada por: $V_x^{(0)}(t) = V_0 \cos(\theta)$. No presente modelo vamos simplesmente incluir a aceleração causada pelo arraste com o ar $a_{Ax}(t) = -BV_x(t)$ e, portanto:

$$\frac{d}{dt} V_x(t) = -BV_x(t)$$

Segue que:

$$\frac{dV_x(t)}{V_x(t)} = -B dt$$

Integrando os dois lados e fazendo $V_x(0) = V_0 \cos(\theta)$ obtemos:

$$V_x(t) = V_0 \cos(\theta) e^{-B t}$$

Com relação à coordenada vertical (y), se a partícula estivesse em queda livre valeria:

$$V_y^{(0)}(t) = V_0 \sin(\theta) - g t$$

A inclusão do arraste vai levar à equação:

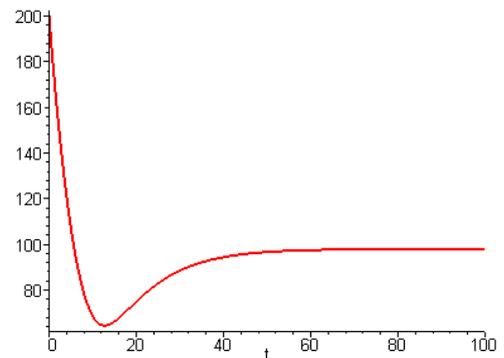
$$\frac{d}{dt} V_y(t) = -g - B V_y(t)$$

Já resolvemos essa equação no exercício anterior. Segue que (fazendo $V_y(0) = V_0 \sin(\theta)$):

$$V_y(t) = -\frac{g}{B} + \left(\frac{g}{B} + V_0 \sin(\theta) \right) e^{-B t}$$

A figura ao lado ilustra o comportamento no tempo do módulo da velocidade do projétil $V(t) =$

$\sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)}$. Adotamos os seguintes valores numéricos para os parâmetros: $B=0,1 \text{ s}^{-1}$, $g=9,8 \text{ m/s}^2$, $V_0 = 200 \text{ m/s}$ e $\theta = 30^\circ$. Notamos que a velocidade do projétil cai na subida, atinge um valor mínimo, passa a crescer na descida e atinge um valor assintótico constante, chamado de velocidade terminal. Essa velocidade terminal só vai ser atingida se der tempo, ou seja, se o projétil não bater no chão antes dela ocorrer.



O instante t_1 em que o projétil atinge a altura máxima é dado por:

$$V_y(t_1) = 0$$

resultando em:

$$t_1 = \frac{1}{B} \ln \left(1 + \frac{B V_0 \sin(\theta)}{g} \right)$$

Note que recuperamos o resultado do exercício anterior no caso $\theta = 90^\circ$. Com os dados numéricos do gráfico obtemos $t_1 \cong 7 \text{ s}$. Notamos claramente que a velocidade mínima não ocorre na altura máxima. De fato, o instante t_2 em que a derivada

$$dV(t)/dt$$

se anula é, com os dados numéricos do gráfico: $t_2 \cong 12,7 \text{ s}$. Esse é um resultado aparentemente estranho, pois estamos acostumados a associar a altura máxima à velocidade mínima. A figura que segue ilustra as três velocidades $V_x(t)$ (curva verde), $V_y(t)$ (curva vermelha) e $V(t)$ (curva azul), com os

mesmos valores numéricos anteriores. A velocidade horizontal cai exponencialmente, tendendo a zero. A velocidade vertical também cai exponencialmente, muda de sinal no instante t_1 e vai assintoticamente para o valor terminal não nulo. O módulo da velocidade ($V(t)$) cai com o tempo, mas atinge um valor mínimo em um tempo t_2 posterior ao instante da altura máxima. De fato, na altura máxima a trajetória se torna horizontal e nesse instante existe uma aceleração paralela (horizontal) dada pelo arraste do ar. Portanto, o módulo da velocidade não pode estar passando por um mínimo nesse instante (t_1), já que, em t_1 :

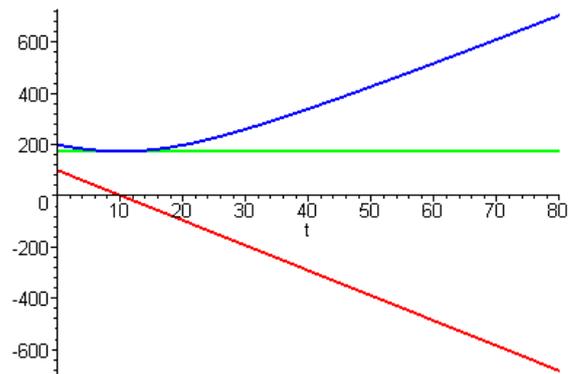
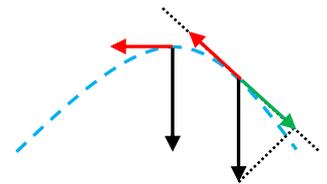
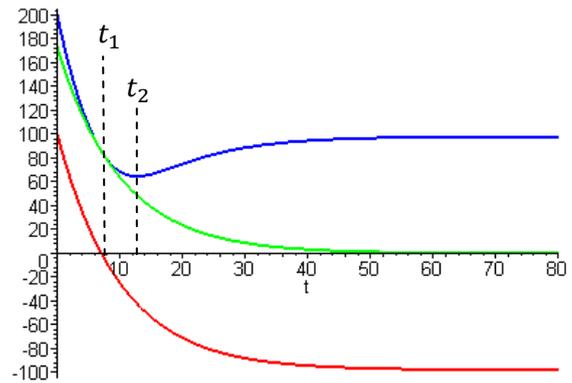
$$a_{||} = \frac{d}{dt} V(t) = -BV_x(t_1) \Rightarrow a_{||}(t_1) \neq 0$$

Conforme ilustrado ao lado, o mínimo de $V(t)$ vai acontecer em um instante posterior a t_1 , um instante em que a aceleração do arraste (seta vermelha), apontando para cima, vai cancelar com a componente da aceleração da gravidade (seta preta) tangente à velocidade (seta verde), apontando para baixo. Nesse instante, t_2 , vai valer $a_{||}(t_2) = 0$, ou seja:

$$\frac{d}{dt} V(t) = 0$$

Apenas para comparação, note no gráfico ao lado, válido para o caso $B = 0$ (e os mesmos dados numéricos das figuras anteriores), que na queda livre $t_1 = t_2 \cong 10,2$ s (porque $V_x(t)$ é uma constante nesse caso).

A presença do arraste faz com que a altura máxima seja atingida antes que no caso da queda livre. A trajetória se torna mais íngreme.



b) Calcule a equação horária $y(x)$ da trajetória do projétil.

Sabemos que:

$$V_x(t) = V_0 \cos(\theta) e^{-Bt} = \frac{d}{dt} x(t)$$

Portanto, integrando os dois lados da equação e fazendo $x(0) = 0$, obtemos:

$$x(t) = \frac{V_0 \cos(\theta)}{B} (1 - e^{-Bt})$$

Analogamente, para a direção vertical:

$$V_y(t) = -\frac{g}{B} + \left(\frac{g}{B} + V_0 \sin(\theta)\right) e^{-Bt} = \frac{d}{dt}y(t)$$

De onde obtemos (com $y(0) = 0$):

$$y(t) = -\frac{g}{B}t + \frac{1}{B} \left(\frac{g}{B} + V_0 \sin(\theta)\right) (1 - e^{-Bt})$$

Eliminando o tempo t obtemos a equação para a trajetória:

$$y(x) = \frac{x}{V_0 \cos(\theta)} \left(\frac{g}{B} + V_0 \sin(\theta)\right) + \frac{g}{B^2} \ln \left(1 - \frac{Bx}{V_0 \cos(\theta)}\right)$$

Note que para $B \rightarrow 0$ podemos fazer:

$$\ln(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2}$$

e então obtemos:

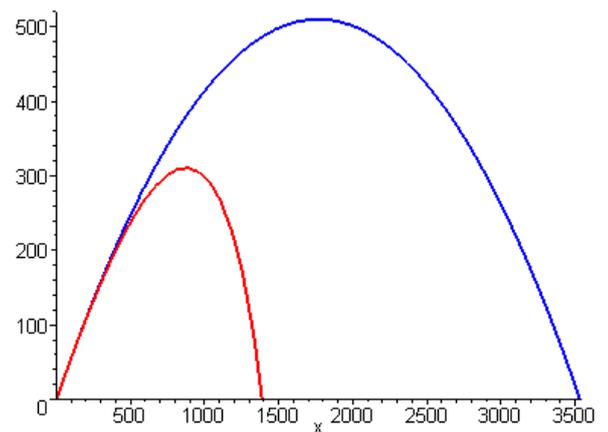
$$y(x) = \frac{x}{V_0 \cos(\theta)} \left(\frac{g}{B} + V_0 \sin(\theta)\right) - \frac{g}{B^2} \left[\frac{Bx}{V_0 \cos(\theta)} + \frac{1}{2} \left(\frac{Bx}{V_0 \cos(\theta)}\right)^2 \right]$$

Simplificando:

$$y(x) = y^{(0)}(x) = x \tan(\theta) - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2(\theta)} x^2$$

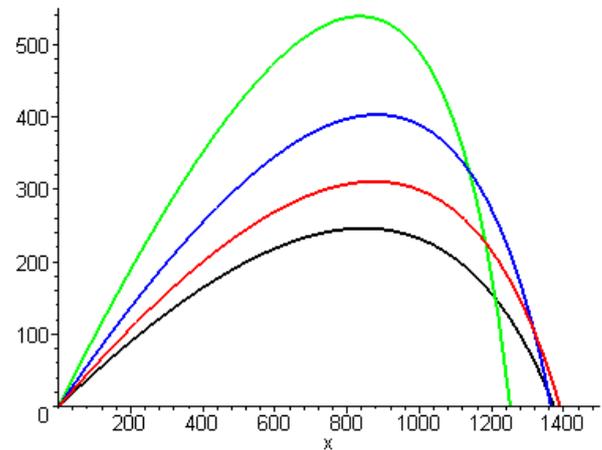
Que é a equação da trajetória de queda livre.

O gráfico ao lado mostra as curvas das trajetórias, $y(x)$ versus x , para os casos $B=0$ (queda livre, curva azul) e $B=0,1$ (curva vermelha) e os mesmos parâmetros das figuras anteriores. A presença do arraste torna a trajetória de vôo menos duradoura, mais baixa, mais curta e mais íngreme na descida. O alcance cai de cerca de 3500 m, na queda livre, para cerca de 1500 m, na presença do arraste.



c) Faça gráficos de $y(x)$ versus x para diferentes ângulos de lançamento θ para mostrar que o ângulo de alcance máximo é menor do que 45° ($\pi/4$ rad).

A figura ao lado mostra as trajetórias para os ângulos $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{7}$ rad. Notamos que a diminuição de θ , partindo de $\theta = \frac{\pi}{4}$ (curva verde), faz com que o alcance inicialmente se torne maior (curvas azul e vermelha). O maior alcance acontece para o ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ (curva vermelha). Para $\theta = \frac{\pi}{7}$ (curva preta) o alcance volta a diminuir, mostrando que o ângulo de alcance máximo, θ_{MAX} está próximo de $\theta = \frac{\pi}{6}$, para os valores dos parâmetros que adotamos.



A presença do arraste faz com o ângulo ótimo θ_{MAX} (para o qual o alcance é máximo) seja menor que 45° e dependente da constante de arraste B . De fato, encontramos na literatura, na referência “*Analysis of asymptotic projectile motion with air resistance using the Lambert W function*”, de R. D. H. Warburton e J. Wang, *American Journal of Physics* **72** (2004) 1404-1407”, o seguinte comportamento para θ_{MAX} no regime de pequenos valores de B :

$$\theta_{MAX} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{V_0}{g} B$$

Esse resultado mostra que quanto maior o valor da velocidade inicial V_0 e da constante de arraste B , mais horizontal deve ser o lançamento (menor o θ_{MAX}), se desejamos obter um alcance máximo.

Tendo em vista todos esses resultados, podemos entender a dificuldade que um atirador tem de acertar um alvo que está a uma longa distância. O atirador deve conhecer a arma, o cartucho, o projétil, a distância do alvo, os desníveis de altura, a velocidade do vento etc. Todos esses dados devem ser inseridos em um modelo para o movimento do projétil no ar, um modelo que vai fornecer ao atirador a inclinação/posição que ele deve colocar na arma no instante do tiro, para que o projétil atinja o alvo ao final de sua longa trajetória através do ar. Basicamente tudo que você quiser saber sobre o movimento de projéteis (balística exterior) você vai encontrar no livro *Handbook of ballistics, vol. 1 exterior ballistics*, C. Cranz and K. Becker (1921), que pode ser obtido gratuitamente em <https://archive.org/>. Nesse site você pode obter gratuitamente uma infinidade de livros, no formato PDF.

1.3 Exercícios propostos

EP 1.1) Dados os vetores $\vec{A} = 5\hat{x} + 3\hat{y}$ e $\vec{B} = -6\hat{x} + 2\hat{y}$ calcule:

- a) $\vec{A} + \vec{B}$ b) $\vec{A} - \vec{B}$ c) $\vec{B} - \vec{A}$ d) $|\vec{A} + \vec{B}|$ e) $|\vec{A} - \vec{B}|$ f) Represente os vetores \vec{A} , \vec{B} , $\vec{A} + \vec{B}$ e $\vec{B} - \vec{A}$ graficamente.

EP 1.2) Dados os vetores $\vec{A} = 3\hat{x} - 4\hat{y}$ e $\vec{B} = 6\hat{x} + k\hat{y}$, calcule o valor de k para que esses dois vetores sejam paralelos entre si.

EP 1.3) Considere um vetor \vec{A} que tem módulo $A = 8$ e faz um ângulo de 30° com o eixo x positivo e um vetor \vec{B} que tem módulo $B = 10$ e faz um ângulo de 120° com o eixo x positivo. Os vetores estão no plano xy onde está definido um referencial xy padrão.

- a) Represente os vetores \vec{A} , \vec{B} e $\vec{A} + \vec{B}$ graficamente.
 b) Escreva as expressões de \vec{A} e \vec{B} em termos de vetores unitários \hat{x} e \hat{y} .
 c) Calcule $\vec{A} + \vec{B}$ d) Calcule $|\vec{A} + \vec{B}|$

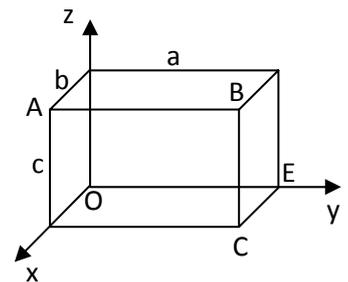
EP 1.4) Em um dado instante uma partícula possui velocidade e aceleração dadas por:

$$\vec{V} = \sqrt{3}\hat{x} + \hat{y} \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \vec{a} = 2\hat{x} + 2\sqrt{3}\hat{y} \text{ m/s}^2$$

Calcule:

- a) O ângulo entre a velocidade e a aceleração (desenhe os vetores e calcule esse ângulo).
 b) As magnitudes da aceleração paralela e da aceleração ortogonal

EP 1.5) Considere uma sala que tem a forma de um paralelepípedo reto, de lados a , b e c , como mostrado na figura ao lado. Um referencial já foi escolhido, com origem em um dos vértices e eixos ao longo de arestas da sala.



- a) Escreva o vetor posição de uma partícula no vértice A.
 b) Escreva o vetor posição de uma partícula no vértice B.
 c) Uma formiga caminha pelas arestas, fazendo o caminho ABCE.

Calcule o vetor deslocamento dessa formiga, o módulo desse vetor deslocamento e a distância percorrida pela formiga.

EP 1.6) Um passageiro de um ônibus vê uma mosca se movendo com velocidade dada por:

$$\vec{V} = A\hat{x} - B\hat{y}$$

O ônibus, por sua vez, se move em relação ao solo com velocidade dada por:

$$\vec{V}_o = C \hat{x} + D \hat{y}$$

Com A, B, C e D constantes. Calcule o módulo da velocidade da mosca em relação ao solo.

EP 1.7) Um pernilongo gira em um círculo contido em um plano horizontal de raio R . Ele executa um movimento circular uniforme, zumbindo no ar. Seja T o tempo que o pernilongo demora para dar uma volta completa no círculo (T é o período do movimento circular).

- Calcule o módulo da velocidade do mosquito.
- Determine o ângulo entre o vetor velocidade do mosquito no instante t (qualquer) e o vetor velocidade do mosquito no instante $t+T/2$.

EP 1.8) Uma partícula se move de acordo com a equação horária da posição:

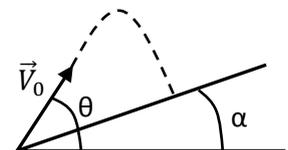
$$\vec{r}(t) = 2 \hat{x} + 3 t \hat{x} + 5 t^2 \hat{y} \quad \text{para } t \geq 0$$

Calcule: a) $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0)$ b) $\vec{V}(t)$ c) $\vec{V}_0 = \vec{V}(t = 0)$ d) $\vec{a}(t)$ e) $\vec{a}_0 = \vec{a}(t = 0)$ f) A trajetória $y(x)$ g) Esboce um gráfico de $y(x)$ versus x .

EP 1.9) Uma partícula sai da origem em $t = 0$ com velocidade inicial $\vec{V}_0 = 3 \hat{y}$ submetido à aceleração $\vec{a}(t) = 5 t \hat{x}$. Calcule:

- $\vec{V}(t)$
- $\vec{r}(t)$
- A trajetória $y(x)$
- Esboce um gráfico de $y(x)$ versus x .

EP 1.10) Uma partícula é lançada (em $t=0$) com velocidade inicial de módulo V_0 inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. Diante da partícula há um plano inclinado de um ângulo α em relação à horizontal, conforme a figura ao lado. A partícula cai em queda livre.



- Calcule o instante em que a partícula toca a superfície do plano inclinado.
- Calcule o alcance da partícula ao longo da superfície do plano inclinado.
- Calcule o vetor velocidade da partícula no instante em que ela vai tocar a superfície do plano inclinado.

EP 1.11) Uma partícula percorre um círculo de raio R . Sua posição em relação ao centro do círculo é dada por:

$$\vec{r}(t) = R \cos(\alpha t^2) \hat{x} + R \sin(\alpha t^2) \hat{y}$$

sendo α um constante positiva.

- Calcule o vetor velocidade da partícula.
- Calcule o módulo da aceleração centrípeta da partícula.
- Calcule o módulo da aceleração tangencial da partícula.

- d) Calcule o tempo que demora para a partícula dar a primeira volta no círculo.
 e) Calcule o tempo que demora para a partícula dar a segunda volta no círculo.

EP 1.12) Um automóvel A está viajando com velocidade constante de módulo V_A em uma estrada reta. Um automóvel B, que está atrás de A uma distância L , resolve ultrapassar A. A decisão de B se dá quando ele estava com velocidade de módulo V_B . Calcule o módulo da aceleração constante que B deve ter para alcançar A em um tempo T (desde o instante da decisão de ultrapassar A).

EP 1.13) Uma partícula se move com velocidade dada por:

$$\vec{V}(t) = (C + B t) \hat{x} + A t \hat{y}$$

com A , B e C constantes positivas ($A > B$).

- a) Calcule o instante em que a velocidade da partícula faz um ângulo de 45° com o eixo x .
 b) Supondo que a partícula partiu da origem em $t=0$, calcule a distância da partícula até a origem no instante $t=1$.

EP 1.14) Uma partícula cai na presença de um vento horizontal, sendo sua aceleração dada por:

$$\vec{a} = -2 \alpha g \hat{x} - g \hat{y}$$

sendo x horizontal e y vertical para cima. $\alpha < 1$ é uma constante. A partícula é lançada do solo, em $t=0$, com velocidade inicial dada por:

$$\vec{V}_0 = A \hat{x} + B \hat{y}$$

sendo A e B constantes positivas.

- a) Calcule a altura máxima que a partícula atinge.
 b) Calcule o alcance horizontal da partícula.
 c) Calcule o vetor velocidade da partícula no instante em que ela está na altura máxima.
 d) Calcule o ângulo θ ($\leq 90^\circ$) que o vetor velocidade da partícula faz com a horizontal no instante em que ela toca o solo.

EP 1.15) Uma partícula percorre um círculo de raio R em movimento circular uniforme com aceleração centrípeta de módulo A . Calcule a quantidade de voltas completas no círculo que a partícula executa em um tempo ΔT .

EP 1.16) Na presença de um pequeno arraste com o ar, um projétil sobe com aceleração de módulo $g + \alpha$ e desce com aceleração de módulo $g - \alpha$, sendo $\alpha > 0$ e $\alpha < g$, a aceleração resultante do arraste. O projétil é lançado do solo com velocidade vertical igual a V .

- a) Calcule o tempo de subida do projétil.
 b) Calcule o tempo de descida do projétil.

c) Na aproximação $\alpha \ll g$, utilize a aproximação $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + n(n-1)\varepsilon^2/2$ (para $\varepsilon \cong 0$) e calcule uma expressão aproximada para o tempo total de queda (até a ordem $(\alpha/g)^2$).

EP 1.17) Durante um tempo T a queima de combustível consegue fazer um foguete subir verticalmente com aceleração constante de magnitude A , partindo do repouso no solo. Após o tempo T o combustível termina e o foguete passa a cair em queda livre. a) Calcule a altura máxima que o foguete sobe em relação ao solo. b) Calcule o tempo que o foguete demora em sua trajetória de descida.

EP 1.18) Duas partículas (A e B) saem simultaneamente da origem em $t=0$ com velocidades dadas por:

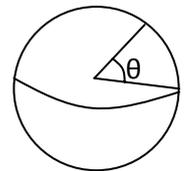
$$\vec{V}_A(t) = A(1-t)\hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{V}_B(t) = B(1-t)\hat{y}$$

sendo A e B constantes positivas.

- Calcule a distância $D(t)$ entre essas partículas em função do tempo.
- Calcule o instante (>0) em que essas partículas se cruzam, ou seja, passam pela mesma posição no mesmo tempo.
- Esboce um gráfico de $D(t)$ versus t .

EP 1.19) Um projétil é lançado do solo com velocidade inicial de módulo V_0 fazendo um ângulo de 45° com a horizontal. O objetivo é atingir um muro de altura H que está a uma distância horizontal L do ponto de lançamento. a) Calcule a menor velocidade V_0 que permite que o projétil atinja o muro. b) Calcule a maior velocidade V_0 que permite que o projétil atinja o muro.

EP 1.20) a) Calcule a aceleração centrípeta $a(\theta)$ de um ponto na superfície da Terra localizado na latitude θ (a latitude de um ponto na superfície da Terra é o ângulo entre o raio que passa pelo ponto e um outro raio no mesmo plano que passa pelo equador. A latitude de pontos no equador é $\theta = 0^\circ$, do pólo norte é $\theta = 90^\circ$ e do pólo sul é $\theta = -90^\circ$). b) Calcule uma estimativa numérica (em m/s^2) para a aceleração centrípeta de uma pessoa que está na cidade de Natal (Rio Grande do Norte), que possui latitude $\theta = -5,81^\circ$. c) Calcule uma estimativa numérica (em m/s^2) para a aceleração centrípeta de uma pessoa que está na cidade de São Petersburgo (Rússia), que possui latitude $\theta = 59,89^\circ$. Suponha que a Terra seja uma esfera de raio $R=6.400$ km que gira em torno de si mesma com velocidade angular ω e período de rotação igual a 24 h.



EP 1.21) Um avião está viajando com velocidade $\vec{V}_A = a\hat{x} + c\hat{y}$ (sendo x horizontal e y vertical para cima) a uma altura H do solo (a e c positivos). Nesse instante ($t=0$) ele libera uma bomba, que cai em queda livre. Calcule a distância horizontal que a bomba percorre (desde $t=0$) antes de bater no solo.

EP 1.22) Uma partícula parte do repouso da posição $x_0 > 0$ e acelera de tal forma que sua aceleração cresce a medida que sua coordenada x cresce. Suponha que:

$$a_x(t) = k x(t)$$

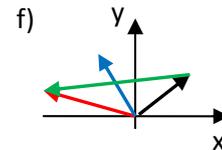
sendo k uma constante positiva. a) Calcule as equações horárias da velocidade e da posição dessa partícula. b) Calcule as expressões aproximadas dessas equações horárias para $k \cong 0$ (use a série de Taylor da função exponencial).

EP 1.23) Uma roda de raio $R = 2$ m está girando com velocidade angular constante $\omega = 2,5$ rad/s dentro de uma sala em que foi feito vácuo. Um pequeno parafuso de massa $m = 2$ g está inicialmente fixo na periferia dessa roda (ou seja, o parafuso está inicialmente girando com a roda, em uma órbita circular de raio $R = 2$ m). Em um dado instante ($t=0$) o parafuso se solta da roda. a) Calcule o módulo da velocidade do parafuso no instante $t=0$. b) Suponha que a velocidade calculada em (a) seja vertical. Qual a direção do raio que vai do parafuso ao centro da roda em $t=0$? c) Calcule o módulo da aceleração do parafuso um infinitésimo de tempo antes de $t=0$ ($t=0^-$). Qual a direção dessa aceleração? d) Qual o módulo da aceleração do parafuso um infinitésimo de tempo depois de $t=0$ ($t=0^+$)? Qual a direção dessa aceleração?

1.4 Respostas dos exercícios propostos

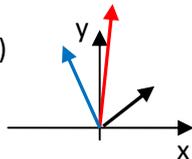
EP 1.1) a) $-\hat{x} + 5\hat{y}$ b) $11\hat{x} + \hat{y}$ c) $-11\hat{x} - \hat{y}$ d) $\sqrt{26} \cong 5,1$

e) $\sqrt{122} \cong 11,05$



EP 1.2) -8

EP 1.3) a)



b) $\vec{A} = 4(\sqrt{3}\hat{x} + \hat{y})$ e $\vec{B} = 5(-\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y})$

c) $(4\sqrt{3} - 5)\hat{x} + (4 + 5\sqrt{3})\hat{y}$

d) $\sqrt{(4\sqrt{3} - 5)^2 + (4 + 5\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{41} \cong 12,8$

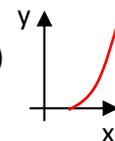
EP 1.4) a) 30° b) $2\sqrt{3}$ e 2 m/s²

EP 1.5) a) $b\hat{x} + c\hat{z}$ b) $b\hat{x} + a\hat{y} + c\hat{z}$ c) $-b\hat{x} + a\hat{y} - c\hat{z}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $a + b + c$

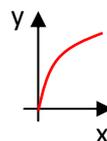
EP 1.6) $\sqrt{(A + C)^2 + (D - B)^2}$

EP 1.7) a) $2\pi R/T$ b) 180°

EP 1.8) a) $2\hat{x}$ b) $3\hat{x} + 10t\hat{y}$ c) $3\hat{x}$ d) $10\hat{y}$ e) $10\hat{y}$ f) $5(x - 2)^2/9$ g)



EP 1.9) a) $\frac{5}{2}t^2\hat{x} + 3\hat{y}$ b) $\frac{5}{6}t^3\hat{x} + 3t\hat{y}$ c) $3\sqrt[3]{\frac{6}{5}x}$ d)



EP 1.10) a) $\frac{2V_0}{g} (\sin(\theta) - \cos(\theta) \tan(\alpha)) = \frac{2V_0}{g} \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos(\alpha)}$ b) $\frac{2V_0^2 \cos(\theta)}{g \cos(\alpha)} (\sin(\theta) - \cos(\theta) \tan(\alpha))$

c) $V_0 \cos(\theta) \hat{x} - V_0 (\sin(\theta) - 2 \cos(\theta) \tan(\alpha)) \hat{y}$ (x horizontal para a direita e y vertical para cima).

EP 1.11) a) $2 R \alpha t [-\sin(\alpha t^2) \hat{x} + \cos(\alpha t^2) \hat{y}]$ b) $4 R \alpha^2 t^2$ c) $2 R \alpha$

d) $\sqrt{2 \pi / \alpha}$ e) $\sqrt{4 \pi / \alpha} - \sqrt{2 \pi / \alpha}$

EP 1.12) $2 \frac{(V_A - V_B)T + L}{T^2}$

EP 1.13) a) $\frac{C}{A-B}$ b) $\sqrt{\left(C + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2}$

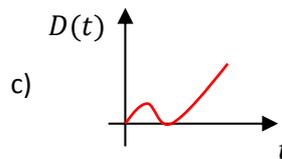
EP 1.14) a) $B^2/2g$ b) $2B(A - 2\alpha B)/g$ c) $(A - 2\alpha B)\hat{x}$ d) $\tan(\theta) = \frac{B}{|A - 4\alpha B|}$

EP 1.15) $\frac{\Delta T}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{R}}$

EP 1.16) a) $\frac{v}{g + \alpha}$ b) $\frac{v}{\sqrt{g^2 - \alpha^2}}$ c) $\frac{2v}{g} \left(1 - \frac{\alpha}{2g} + \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{g}\right)^2\right)$

EP 1.17) a) $\frac{1}{2} AT^2 \left(1 + \frac{A}{g}\right)$ b) $T \sqrt{\frac{A}{g} \left(1 + \frac{A}{g}\right)}$

EP 1.18) a) $\sqrt{A^2 + B^2} \left|1 - \frac{t}{2}\right| t$ b) 2



EP 1.19) a) \sqrt{gL} b) $\sqrt{gL^2/(L-H)}$

EP 1.20) a) $a(\theta) = \omega^2 R \cos(\theta) \cong 0,0338 \cos(\theta) \text{ m/s}^2$ b) $0,0337 \text{ m/s}^2$ c) $0,0170 \text{ m/s}^2$

EP 1.21) $(a/g) [c + \sqrt{c^2 + 2gH}]$

EP 1.22) a) $V_x(t) = \frac{x_0}{2} \sqrt{k} (e^{\sqrt{k}t} - e^{-\sqrt{k}t})$ e $x(t) = \frac{x_0}{2} (e^{\sqrt{k}t} + e^{-\sqrt{k}t})$

b) $V_x(t) = x_0 k t$ e $x(t) = \frac{x_0}{2} (2 + k t^2)$

EP 1.23) a) 5 m/s b) horizontal c) $12,5 \text{ m/s}^2$, horizontal d) $a=g \cong 9,8 \text{ m/s}^2$, vertical

2

Leis de Newton: Dinâmica de uma partícula



2.1 Introdução

A cinemática, que estudamos no capítulo anterior, nos permite descrever matematicamente o movimento de uma partícula no espaço. Um dado movimento é especificado pelo conjunto de três equações horárias (não independentes entre si) para a posição, velocidade e aceleração. Esquemáticamente:

$$\text{Movimento} = \begin{cases} \vec{r}(t) \\ \vec{V}(t) \\ \vec{a}(t) \end{cases}$$

Muitas vezes, para sintetizar as ideias, usaremos o símbolo **M** para representar um movimento qualquer de um corpo: a dinâmica se propõe a estabelecer a causa de **M**.

A questão que queremos responder agora, que é a questão central da dinâmica, é: o que determina o movimento de uma partícula? Equivalentemente: o que faz com que uma partícula siga uma linha reta, ou uma circunferência, ou uma elipse? O que faz com que uma partícula mantenha constante, aumente ou diminua sua velocidade? Enfim: qual a causa do movimento? Esquemáticamente, queremos descobrir o que ocupa o lugar do sinal de interrogação na relação de implicação abaixo:

$$? \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{cases} \vec{r}(t) \\ \vec{V}(t) \\ \vec{a}(t) \end{cases}$$

As questões ligadas ao entendimento do movimento e suas causas estão no foco de filósofos/cientistas desde a antiguidade. Nesses primórdios, se destaca o papel central de Aristóteles, aluno de Platão e professor de Alexandre, o Grande. Não teremos tempo de discutir essa história aqui e por isso vamos dar um salto gigantesco no tempo indo direto à resposta da questão que nos interessa: o que determina o

movimento de um corpo são as interações que esse corpo estabelece com todos os outros corpos do universo. De forma mais econômica, podemos dizer que o que determina o movimento de um corpo são as interações dele com sua vizinhança. Esquemáticamente:

$$\text{Interações} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} \vec{r}(t) \\ \vec{V}(t) \\ \vec{a}(t) \end{Bmatrix}$$

Devemos então começar definindo “interação”. Se pedirmos para uma pessoa interagir com uma mesa, muito provavelmente essa pessoa vai se aproximar da mesa e tocá-la, empurrando-a ou puxando-a. Essa é a forma mais comum de interação que usamos no nosso dia-a-dia, a chamada interação de contato. Dois corpos interagem entre si quando se tocam. Note o caráter mútuo da interação: se A interage com (toca) B, então B interage com (toca) A. Segundo o dicionário Aurélio, interação é a influência, estímulo, ou ação entre dois ou mais elementos. A natureza é econômica em termos de variedade de interações. Com base no Aurélio podemos dizer que na natureza um elemento só exerce influência, estímulo, ou ação em outro elemento através das seguintes interações:

1. Gravidade = interação de longo alcance entre os corpos (massas), que faz com que quaisquer dois corpos, a uma distância qualquer finita um do outro, se atraiam mutuamente. Explica por que a Terra orbita em torno do Sol.
2. Eletricidade = interação de longo alcance entre os corpos (cargas elétricas), que faz com que quaisquer dois corpos carregados eletricamente, a uma distância qualquer finita um do outro, se atraiam ou se repilam mutuamente. Explica por que um elétron orbita um núcleo atômico.
3. Magnetismo = interação de longo alcance entre os corpos (correntes elétricas), que faz com que quaisquer dois corpos magnetizados, a uma distância qualquer finita um do outro, se atraiam ou se repilam mutuamente. Explica por que a agulha de uma bússola aqui na Terra se orienta sempre na mesma direção.
4. Interação forte = interação de curto alcance entre partículas elementares (quarks e gluons) e entre prótons e nêutrons (nucleons), que faz com que duas dessas partículas a uma distância bem pequena uma da outra, se atraiam mutuamente. Explica por que dois prótons podem conviver lado a lado dentro de um núcleo atômico minúsculo, mesmo com a imensa repulsão elétrica entre eles. É a força determinante na fissão e na fusão nucleares.
5. Interação fraca = interação de curto alcance entre partículas elementares (quarks e leptons), responsável por vários decaimentos radioativos, como o decaimento beta do nêutron, que resulta em um nêutron se transformando em um próton, mais um elétron, mais um neutrino. Explica porque o ${}^{14}_6\text{C}$ (carbono (Z=6) com 8 neutrons no núcleo) se transmuta em ${}^{14}_7\text{N}$ (nitrogênio (Z=7) com 7 neutrons

no núcleo), que é a reação em que se baseia um processo de datação (determinação da idade) de materiais orgânicos (fósseis).

Portanto, a idéia é que se dois corpos estão interagindo entre si, então eles estão interagindo entre si através de, pelo menos, uma dessas cinco interações existentes na natureza. Não há outra opção. As interações forte e fraca (chamadas de interações nucleares) se dão tipicamente dentro dos núcleos atômicos e dentro dos próprios nucleons (prótons e nêutrons) que compõem esses núcleos. Por serem de curto alcance, acontecem dentro desse espaço limitado do interior de núcleos e partículas, que é o domínio da mecânica quântica, e por isso não serão consideradas aqui. A mecânica clássica trata tipicamente dos movimentos de corpos que interagem entre si através da gravidade e de forças de contato, que são as interações que você vai observar se olhar em volta de você agora. Mas, a mecânica clássica pode ser usada também para estudar os efeitos da interação magnética entre o rotor (parte girante) e o estator (parte fixa) de um motor elétrico, ou os efeitos da interação elétrica entre uma gotícula de água em uma nuvem e a atmosfera terrestre. Então, no domínio da mecânica clássica atuam apenas três interações: gravitacional, elétrica e magnética. As interações elétrica e magnética, por serem ambas interações entre cargas elétricas, podem ser unificadas na idéia de uma interação única, a interação eletromagnética. A denominada interação eletrofraca unifica a descrição das interações eletromagnética e fraca. Restam então, neste contexto, apenas três interações na natureza: eletrofraca, forte e gravitacional.

Aqui não pressupomos um conhecimento prévio das leis do eletromagnetismo e, por isso, nos concentraremos em situações em que as interações importantes são a de contato e a gravitacional. Mas, é importante mencionar que a interação de contato, que mencionamos anteriormente, é uma interação elétrica, de repulsão entre cargas elétricas que compõem os átomos. Sabemos que a matéria, mesmo sendo eletricamente neutra, está repleta de partículas que possuem carga elétrica: elétrons e prótons. Basicamente, os átomos são compostos de um núcleo minúsculo carregado positivamente rodeado por uma nuvem de elétrons, carregada negativamente. Essa nuvem blinda o núcleo, escondendo ele no centro do átomo: a carga elétrica total é nula (a não ser que o átomo seja ionizado). Portanto, podemos ver a superfície de um corpo qualquer como uma camada contínua de elétrons. Esses elétrons não estão soltos na superfície, eles estão conectados aos átomos ou moléculas que compõem o corpo, através de forças elétricas de atração, formando uma estrutura mais ou menos rígida. Quando as superfícies de dois corpos eletricamente neutros se aproximam muito, ao ponto de se tocarem, elétrons na superfície de um corpo repelem os elétrons na superfície do outro corpo, fazendo com que as superfícies se aproximem sem que se misturem, ou se fundam. As duas superfícies se repelem e um corpo empurra o outro, enquanto eles se tocam. Após eles se afastarem uma distância mínima, a interação cessa, pois os corpos são eletricamente neutros de fato. A interação de contato é, portanto, uma interação elétrica (repulsão) de curto alcance entre corpos macroscópicos eletricamente neutros.

A Figura 2.1 ilustra a idéia de que as interações gravitacionais e de contato determinam o movimento de um corpo **A**. Sendo a gravidade uma interação de longo alcance, concluímos que um corpo **A** qualquer interage através da gravidade com todos os outros corpos do universo. Portanto, para determinar o movimento de **A**, deveríamos levar em conta o universo todo, o que seria uma tarefa impossível. Na prática, temos que levar em conta que a interação entre dois corpos pode ser muito fraca em uma situação específica e que essa interação pode ser desprezada (a interação gravitacional entre dois corpos de massas pequenas é muito fraca de fato e, se quisermos, para efeito de simplificação, podemos desprezá-la).

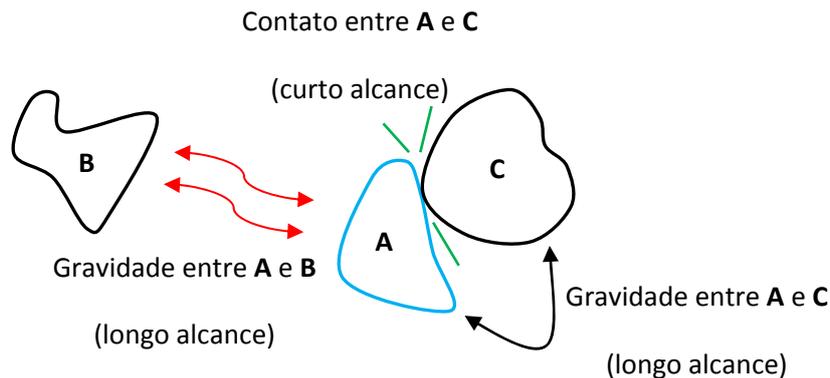


Figura 2.1: Esquema típico das interações de um corpo **A** com um conjunto pequeno de outros corpos (**B** e **C**) que compõem sua vizinhança. A gravidade se dá mesmo entre corpos distantes entre si, diferentemente da interação de contato. O corpo **A** pode estar interagindo com vários outros corpos, mas, para efeito de simplificação, essas interações foram desprezadas por algum motivo justificável.

Portanto, ao estudar o movimento de um corpo levamos em conta um conjunto pequeno de outros corpos que interagem de forma mais intensa com esse corpo. Esse conjunto inclui tipicamente a interação gravitacional desse corpo com o planeta Terra, que dificilmente pode ser desprezada na mecânica clássica. O efeito dessa interação corpo/Terra sobre o corpo é o que chamamos de peso do corpo. Então, a mecânica clássica trata tipicamente do movimento de corpos submetidos ao seu próprio peso e a eventuais forças de contato exercidas nele por outros corpos na sua vizinhança. Na Figura 2.1 a vizinhança do corpo **A** seria formada apenas pelos corpos **B** e **C**. As interações de **A** com outros corpos estão sendo desprezadas.

Já aprendemos como expressar o movimento através de funções matemáticas. Para completar nossa relação interação/movimento, precisamos expressar também as interações que um corpo sofre através de funções matemáticas. Não é muito difícil concluir que se pretendemos expressar uma interação através de uma grandeza matemática, então essa grandeza será um vetor. Tomemos a interação de contato como exemplo. Podemos empurrar uma mesa com uma dada magnitude, suavemente ou intensamente; podemos empurrar essa mesa em uma dada direção, na vertical, na horizontal etc.; finalmente, podemos empurrar a mesa em um dado sentido, vertical para cima, por exemplo. Portanto, esse “empurrão” pode ser visto como uma seta, uma grandeza vetorial atuando na mesa. Uma dada interação pode ser representada por um vetor.

A esse vetor damos o nome de força. Assim, daqui para diante falaremos preferencialmente de força da gravidade, ao invés de interação gravitacional; de força de contato, ao invés de interação de contato etc. Uma força \vec{F} é simplesmente a quantificação de uma interação. Dessa forma, ficamos com a seguinte idéia: o que determina o movimento de um corpo são as forças (ou o conjunto de forças $\{\vec{F}\}$) que atuam nele. Esquemáticamente:

$$\text{Forças} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{cases} \vec{r}(t) \\ \vec{v}(t) \\ \vec{a}(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \{\vec{F}\} \Rightarrow \mathbf{M}$$

Portanto, para colocarmos em prática essa ideia, uma ferramenta central da dinâmica é o digrama de forças (ou diagrama de corpo livre) que é simplesmente um desenho, ou diagrama, representando isoladamente o corpo (ou os corpos) cujo movimento pretendemos estudar e as forças que atuam nele (ou neles). Para cada interação que identificamos, representamos uma força/seta no diagrama de forças. Esse conjunto de forças/setas determinará o movimento que o corpo em questão vai descrever no espaço. No caso do corpo **A** da Figura 2.1, seu diagrama de forças seria algo como ilustrado na Figura 2.2 que segue.

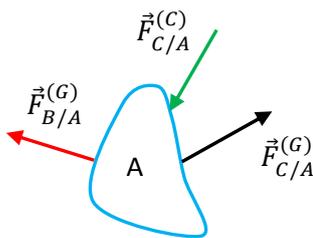


Figura 2.2: Esboço de diagrama de forças para o corpo **A** mostrado na Figura 2.1. Para cada interação mostrada lá há uma força/seta aqui, nem mais nem menos.

Note que nessa figura esboçamos os vetores de forma um tanto livre, pois não temos ainda muitas informações sobre as interações e, portanto, sobre as forças, que foram desenhadas em posições arbitrárias do corpo **A**. Apenas fomos coerentes como o fato de que a gravidade é atrativa e que o simples contato entre as superfícies de **A** e **C** produz uma repulsão (**C** empurra **A**). A notação para as forças também é arbitrária: $\vec{F}_{B/A}^{(G)}$ representa a força da gravidade que **B** faz em **A**, $\vec{F}_{C/A}^{(G)}$ é a força da gravidade que **C** faz em **A** e $\vec{F}_{C/A}^{(C)}$ é a força de contato que **C** faz em **A**. É importante frisar que no diagrama de forças do corpo **A** só aparecem forças que atuam no corpo **A**. O corpo **A** obviamente faz força também, mas ele faz força nos outros corpos e essas forças apareceriam nos diagramas de forças desses outros corpos. No diagrama de forças do corpo **A** desenhamos apenas o corpo **A**, a existência/influência dos outros corpos está representada nas forças que eles fazem em **A**.

Imaginemos, portanto, um corpo **A** submetido a N forças $\{\vec{F}\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$. No diagrama de forças do corpo **A** serão representadas N setas/forças e essas N forças definirão, conjuntamente, o movimento do corpo **A**. Para nossa sorte, a natureza obedece ao princípio da superposição que afirma que:

O efeito de N forças $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}$ é o mesmo efeito de uma força \vec{R} apenas. Essa força \vec{R} é chamada de força resultante e é dada por:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Para o caso do corpo **A** da Figura 2.2 obtemos a força resultante \vec{R} mostrada na Figura 2.3, de acordo com a regra do paralelogramo.

Em termos das componentes das forças, ao longo de um sistema de eixos xyz , as componentes da força resultante são dadas por:

$$R_x = \sum_{i=1}^N F_{ix}$$

analogamente para as componentes y e z .

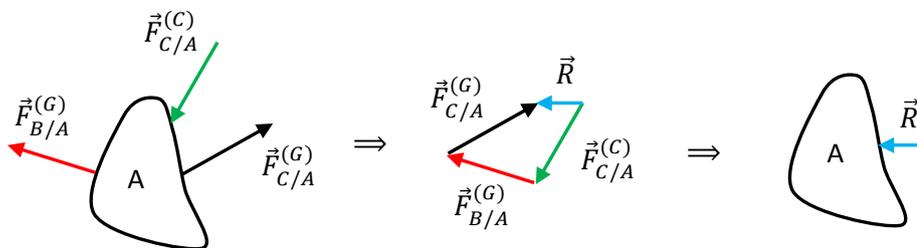


Figura 2.3: Ilustração do poder de simplificação do princípio da superposição. Dadas as N forças ($N=3$ nesse caso), calculamos a resultante \vec{R} delas (usando a regra do paralelogramo) e a partir daí entendemos que o movimento do corpo **A** estará determinado apenas por \vec{R} .

Com mais esse avanço chegamos finalmente à seguinte relação de implicação entre causa (interações/forças/ \vec{R}) e efeito $\mathbf{M}=(\vec{r}(t), \vec{V}(t), \vec{a}(t))$:

$$\vec{R}(t) \Rightarrow \mathbf{M}$$

A idéia nessa relação de implicação é que se conhecermos a resultante \vec{R} em um corpo, poderemos calcular o movimento \mathbf{M} desse corpo. A questão que fica é: como calcular o movimento a partir de \vec{R} ? Para isso devemos transformar essa relação de implicação em uma equação que envolva as grandezas $\vec{R}(t)$ e $\vec{r}(t)$, $\vec{V}(t)$ e $\vec{a}(t)$ (ou pelo menos uma dessas três funções da cinemática, já que elas não são independentes entre si). Para isso vamos recorrer a Isaac Newton e suas três leis da mecânica clássica. Começaremos pela primeira lei de Newton, também chamada de lei da inércia.

2.2 Leis de Newton

2.2.1 Primeira lei de Newton (lei da inércia)

A primeira lei de Newton trata do caso específico $\vec{R} = \vec{0}$, que pode ser interpretado como a situação em que um corpo está livre de forças, isolado do resto do universo ($N=0$ na equação que define \vec{R}), ou como a situação mais realista de um corpo submetido a duas ou mais forças ($N \geq 2$) que se cancelam mutuamente, resultando em $\vec{R} = \vec{0}$. Para ilustrar, vamos pensar na primeira situação. Como se move um corpo que está sozinho no espaço vazio, longe de tudo. Ele descreve um círculo? Uma parábola? Ele se move cada vez mais rápido? Enfim, o que ele faz? Trata-se de uma pergunta interessante porque vimos que o que define o movimento de um corpo são as interações dele com sua vizinhança. Não havendo nenhuma interação, ele terá que decidir por si próprio. A primeira lei de Newton afirma que:

$$\vec{R}(t) = \vec{0} \Rightarrow M = \begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V} t \\ \vec{V}(t) = \vec{V} \\ \vec{a}(t) = \vec{0} \end{cases}$$

Ou seja, um corpo livre de forças se move eternamente em linha reta, com velocidade constante (movimento retilíneo uniforme ou MRU). Note que, sendo o movimento relativo, o valor de V é arbitrário, depende do observador (ou do referencial do observador) e inclui, portanto, o caso $V = 0$, que corresponde ao corpo em repouso. A primeira lei afirma então que se um corpo está submetido a $\vec{R} = \vec{0}$, ele se moverá em MRU ou estará em repouso eterno (pelo menos enquanto durar a condição $\vec{R} = \vec{0}$). Dizemos que o MRU (incluindo o repouso) é um movimento inercial (daí o nome lei da inércia) porque ele perdura para sempre, a não ser que alguém, ou algo, atue sobre o corpo em questão, quebrando a condição $\vec{R} = \vec{0}$ e mudando então o estado de movimento desse corpo. Um corpo com $\vec{R} = \vec{0}$ assume o MRU (incluindo o repouso) e continua nele para sempre, a não ser que alguém quebre essa inércia (o dicionário Aurélio define inércia como sinônimo de letargia, torpor), ou este estado inercial, mudando a condição $\vec{R} = \vec{0}$, através de uma nova (ou diferente) interação/força.

Vale a pena enfatizar que a relação de implicação que enunciamos acima vale nos dois sentidos:

$$\vec{R}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow M = MRU$$

Com isso queremos dizer o que já dissemos, que $\vec{R} = \vec{0}$ implica no MRU, e também que se uma partícula está em MRU, isso implica que ela está sob a condição $\vec{R} = \vec{0}$. Sempre que observamos uma partícula em MRU (incluindo o repouso) podemos afirmar, sem sombra de dúvida (desde que as leis de Newton valham), que esta partícula está sob a condição $\vec{R} = \vec{0}$. Na prática não existe um corpo livre de forças e por

isso sempre interpretamos a condição $\vec{R} = \vec{0}$ como uma condição em que várias forças atuam ao mesmo tempo, se cancelando mutuamente.

Considere o exemplo de um livro apoiado sobre uma mesa horizontal, o livro em repouso sobre a mesa. Então, a resultante das forças sobre o livro é $\vec{R} = \vec{0}$. Como seria o diagrama de forças para esse livro? Considere a Figura 2.4. Uma força que atua no livro, e que atua de fato em tudo que está na vizinhança do planeta Terra, é o peso, o peso do livro nesse caso. Essa força é vertical para baixo e será chamada de \vec{P} . A Terra está puxando o livro para baixo o tempo todo e se não fosse a presença da mesa, o livro estaria em queda livre, com aceleração \vec{g} .

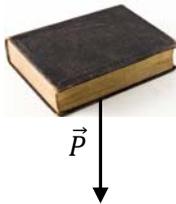


Figura 2.4: Ilustração (tentativa) do diagrama de forças de um livro apoiado em repouso sobre uma mesa horizontal. A mesa não está representada porque não estamos interessados nela.

Se fosse apenas essa força atuando no livro (em repouso, por hipótese) teríamos, da primeira lei de Newton: $\vec{R} = \vec{P} = \vec{0}$. Obviamente essa é uma equação absurda, pois o peso do livro não é nulo. Podemos pegar um livro com as mãos e sentir que ele possui um peso. Concluímos que está faltando pelo menos uma força atuando no livro, que deve ser representada no diagrama. Essa força é a força de contato, produzida pelo contato do livro com a mesa. Quando a Terra puxa o livro para baixo ele pressiona a superfície da mesa, onde está apoiado, como se o livro fosse afundar na mesa. A mesa é rígida e repele o livro, empurrando-o para cima, para fora da mesa. Chamamos essa força de contato de força normal, que representaremos por $\vec{\eta}$. O nome “normal” vem de “ortogonal”: a força normal atua na superfície de um corpo que toca a superfície de outro corpo na direção ortogonal a essas duas superfícies que se tocam. No caso do livro em questão, a superfície da mesa e a superfície do livro que toca a mesa são ambas horizontais (por hipótese) e a força normal é então vertical, apontando para cima (repulsão), como na Figura 2.5.

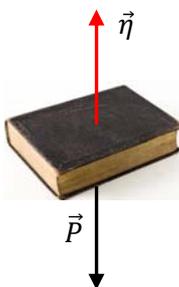


Figura 2.5: Ilustração do diagrama de forças de um livro apoiado em repouso sobre uma mesa horizontal. A Terra puxa o livro para baixo e a mesa empurra o livro para cima (repele o livro). As forças peso e normal se cancelam mutuamente.

O diagrama na Figura 2.5 e a primeira lei de Newton resultam em $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\eta} = \vec{0}$, portanto, $\vec{\eta} = -\vec{P}$. Essa última equação pode ser interpretada da seguinte forma: para que um livro fique em repouso sobre uma

mesa, a mesa deve ser capaz de produzir no livro uma força de contato oposta ao seu peso, com a mesma magnitude do peso do livro. Caso a mesa não consiga fazer isso, por exemplo, por ser uma mesa muito fraca, então a mesa quebra, a força $\vec{\eta}$ desaparece e o livro cai.

Esse exemplo simples mostra como usamos a primeira lei de Newton para entender o repouso ou MRU de um corpo qualquer. Deve haver no diagrama de forças desse corpo forças suficientes e coerentes com a condição $\vec{R} = \vec{0}$. No caso do livro sobre a mesa, o peso e a força de contato com a mesa são suficientes para satisfazer a condição $\vec{R} = \vec{0}$. Não precisamos complicar as coisas e procurar acrescentar outras forças, como, por exemplo, o empuxo do ar, a força de atração gravitacional da Lua sobre o livro, a força gravitacional da mesa sobre o livro etc. Essas forças existem, mas são desprezíveis nesse caso e desnecessárias para explicar o repouso do livro. Simplesmente podemos omiti-las nessa situação. O empuxo do ar, por exemplo, é uma força cuja magnitude é igual ao peso da quantidade de ar que o corpo desloca, ou seja, é basicamente o produto da densidade do ar (aproximadamente $1,3 \text{ kg/m}^3$) pelo volume do corpo e pela aceleração da gravidade. No caso de um livro, cujo volume é da ordem de 10^{-4} m^3 , o empuxo é da ordem de 10^{-3} N (definiremos essa unidade N de força em breve) enquanto que o peso de um livro é da ordem de 10 N . Por isso o empuxo pode ser desprezado. Já no caso de um balão de gás leve (Hélio, por exemplo), que flutua na atmosfera, o empuxo do ar tem basicamente a mesma magnitude do peso do balão e, nesse caso, não faz sentido desprezá-lo. Por outro lado, desprezar as forças \vec{P} ou $\vec{\eta}$ no livro seria ridículo, pois seria o mesmo que desprezar a existência do planeta Terra ou da mesa embaixo do livro.

2.2.2 A validade das leis de Newton: observadores inerciais

A primeira lei de Newton trata apenas de um caso particular da dinâmica, o caso mais simples $\vec{R} = \vec{0}$. Podemos aproveitar essa simplicidade para discutir a validade das leis de Newton. As leis de Newton, em particular a primeira lei, não valem sempre, elas possuem, como é comum acontecer, um domínio de validade. Antes de sairmos aplicando as leis de Newton, precisamos nos certificar de que elas são válidas para nós. Vamos discutir essa questão através de exemplos.

Considere um ônibus que está viajando inicialmente em uma estrada reta com velocidade constante (MRU). Um passageiro **A** está sentado em seu banco, se segurando firmemente ao banco do ônibus. Tudo que o ônibus faz, o passageiro **A** faz. Se o ônibus para, **A** para, se o ônibus acelera para frente, **A** acelera para frente etc. Dizemos que **A** é um observador no referencial do ônibus. **A** vai interpretar os movimentos dos outros corpos que ele observa de acordo com as leis do movimento que valem no referencial do ônibus.

Considere um segundo passageiro **B**, que está em pé dentro do ônibus, sem se segurar em nada. Para torná-lo mais solto ainda, e facilitar o raciocínio, imagine que **B** está usando patins. **A** e **B** estão em repouso

dentro do ônibus (mas inicialmente se movendo juntamente com o ônibus), cada um em seu lugar, como ilustrado na Figura 2.6.

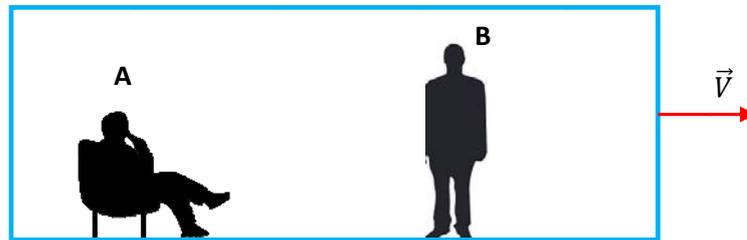


Figura 2.6: **A** e **B** são passageiros em um ônibus que viaja inicialmente em MRU com velocidade \vec{V} . **A** está fixo no ônibus (é um observador no referencial do ônibus) e **B** está solto, apoiado em patins.

Considere a visão de **A**. **A** vê **B** em repouso e julga então que, de acordo com a primeira lei de Newton, $\vec{R} = \vec{0}$ em **B**. Ele imagina um diagrama de forças para o corpo **B**, como o diagrama do livro sobre a mesa na Figura 2.5. A Terra puxa **B** para baixo (o peso do passageiro **B**), mas **B** está apoiado no piso rígido do ônibus, que o empurra para cima com uma força normal (vertical) $\vec{\eta}$. Tudo está de acordo. Suponha que em um dado instante o ônibus passe a frear. **A** também freia, e vê **B** sair do repouso, deslizando para a frente do ônibus. **A** então pensa: se **B** saiu do repouso (quebrou-se a inércia de **B**), de acordo com a primeira lei de Newton, deixou de valer a condição $\vec{R} = \vec{0}$ sobre **B**, pois se essa condição estivesse ainda valendo, **B** teria que ter permanecido em repouso (inércia). Se a força \vec{R} em **B** deixou de ser nula, deve ser porque surgiu uma nova força em **B**, além do peso e da normal, uma nova força que o empurrou para a frente. Resumindo: ao julgar o movimento de **B** através da primeira lei de Newton, o observador **A** concluiu que, assim que o ônibus freou, uma força (misteriosa) empurrou o passageiro **B** para a frente.

Mas, a verdade é que não existe essa nova força. Qual seria a natureza dessa força? Gravidade? Magnética? Contato? **A** chegou a uma conclusão errada porque ele raciocinou em termos da primeira lei de Newton, mas essa lei deixou de valer para ele, a partir do momento em que o ônibus (e ele) freou. A verdade é que mesmo com o ônibus freando, continuou valendo $\vec{R} = \vec{0}$ sobre **B**, mas **A** não vê mais **B** em repouso. **A** vê **B** acelerando para a frente. Então, **A** vê um corpo em que de fato vale $\vec{R} = \vec{0}$ acelerando e por isso imagina uma força nova atuando em **B**. Conclusão: a primeira lei de Newton não vale para o observador **A** no ônibus freando. Se ele tenta raciocinar em termos dessa lei, chega a conclusões erradas, como por exemplo, a existência de forças que de fato não existem. Essas forças, imaginadas erroneamente por observadores para os quais as leis de Newton não valem, são chamadas de forças fictícias. O conceito de “força fictícia” tem seu lugar na mecânica clássica, desde que entendamos que não se trata exatamente de uma força, no sentido da representação de uma interação entre dois corpos.

Vamos considerar essa situação do ponto de vista de outro observador **C**, para o qual a primeira lei de Newton vale sempre, o ônibus freando ou não. Considere um observador **C** que está parado na estrada, vendo o ônibus passar por ele. **C** vê inicialmente o ônibus e vê **A** e **B** passando juntos, todos com velocidade de módulo V (em MRU). De repente o ônibus passa a frear. **C** vê o ônibus e **A** frearem, mas vê **B** continuar com velocidade V . **B** continua com velocidade V porque o fato do ônibus frear não tem efeito sobre **B**, afinal ele está solto sobre patins. O ônibus freia e a condição $\vec{R} = \vec{0}$ continua valendo sobre **B**, então **B** continua em MRU com velocidade V (movimento inercial). Como o ônibus está com velocidade menor que V , pois ele freou, **C** vê **B** ir de encontro à frente do ônibus, não porque **B** foi projetado para a frente, mas sim porque o ônibus passou a estar mais lento que **B**. **C** tem a mesma visão que **A** teve, **B** sendo projetado para a frente do ônibus, mas sua interpretação é diferente. Para o observador **C** não há nova força atuando em **B**, devido à freada do ônibus (não há força fictícia). Pelo contrário, **B** estava em MRU e continua em MRU com a mesma velocidade V , e por isso se projeta para a frente do ônibus que freia. **A** “enxerga” forças fictícias, **C** não. **C** está certo porque não há nenhuma interação (atração/repulsão) sobre **B** que possa estar associada a essa força fictícia. A primeira lei de Newton vale para **C**, mas não vale para **A**. Qual a diferença essencial entre os observadores **A** e **C**? **A** (que está dentro/fixo do ônibus) é um observador acelerado (enquanto o ônibus freia), enquanto que **C** (que está no ponto de ônibus) não.

Conclusão: a primeira lei de Newton (assim como as outras leis de Newton) valem apenas para observadores não acelerados, ou seja, observadores em MRU (incluindo o repouso). Um observador acelerado, quando tenta interpretar os movimentos que ele observa em termos das leis de Newton chega a conclusões absurdas, como a ação de forças fictícias (“forças” que não estão associadas a nenhuma interação entre corpos). Um observador acelerado projeta/transfere a aceleração dele para os corpos que ele observa e mistura tudo, confundindo-se acerca da dinâmica desses corpos. No exemplo do ônibus, **A** estava acelerado para trás (enquanto o ônibus freava, aceleração antiparalela) e ele acreditou que era **B** que estava acelerado para a frente, levando-o a imaginar a ação de uma força fictícia sobre **B**. Um observador não acelerado é capaz de julgar corretamente as acelerações dos corpos que ele observa e julga corretamente esse movimento em termos de forças reais, associadas a interações reais. Para ele valem as leis de Newton. Esses observadores em MRU (incluindo o repouso), para os quais valem as leis de Newton, são chamados de observadores inerciais. Os referenciais desses observadores são referenciais inerciais. Um observador inercial é um observador fixo em um referencial inercial (um referencial não acelerado, ou seja, em repouso ou em MRU). No exemplo acima, enquanto o ônibus não estava freando, **A** era um observador inercial, assim como **C**. Enquanto o ônibus freia, **A** deixa de ser um observador inercial (porque **A** está fixo no ônibus), mas **C** continua sendo (porque **C** está fixo no ponto de ônibus).

Outro exemplo clássico de força fictícia é a força centrífuga, que “percebemos” quando estamos dentro de um veículo que faz uma curva. Imagine um observador **A** fixo dentro de um carro que se move em MRU (**A** está se segurando no carro e usando cinto de segurança). Ao lado de **A** está outra pessoa, **B**, que se mantém solta, sem se segurar e sem cinto de segurança, apenas sentada no banco do carro. **A** vê **B** em repouso ao seu lado e julga duas forças se cancelando: $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\eta} = \vec{0}$. A força $\vec{\eta}$ é produzida pelo banco do carro sobre **B**. Tudo está de acordo. Em um dado instante o carro começa a fazer uma curva, digamos para a esquerda. **A** faz a curva também, afinal ele está fixo no carro. **A** vê **B** sendo projetado para fora da curva, na direção radial para fora (para a direita). Se **A** tenta raciocinar em termos da primeira lei de Newton, imagina que **B** foi projetado para fora porque a condição $\vec{R} = \vec{0}$ em **B** deixou de valer (se continuasse valendo $\vec{R} = \vec{0}$, então **B** deveria ter continuado em repouso ao lado de **A**). Daí ele conclui que surgiu uma nova força, uma força que empurra **B** para fora da curva, uma força centrífuga (força que provoca fuga do centro da curva) em **B**. Mas, a verdade é que não existe essa força, trata-se novamente de uma força fictícia. O que houve então?

Quando o carro faz a curva, pelo fato de **B** estar solto, continua a valer a condição $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\eta} = \vec{0}$ sobre ele, não há outra força, não há força centrífuga. Portanto, **B** não vai fazer a curva, ele vai seguir em MRU (movimento inercial), como previsto pela primeira lei de Newton. Note, ele vai seguir em MRU para um observador **C** fora do carro, fixo na estrada por exemplo. **C** é um observador inercial, ele vê **B** continuar em MRU e entende que isso é consequência da primeira lei de Newton, que vale para **C**, e que prevê que enquanto durar $\vec{R} = \vec{0}$ em **B**, o movimento retilíneo (inercial) de **B** continua indefinidamente.

A Figura 2.7 que segue ilustra essa situação vista de cima, por um observador **C** que está parado no alto de uma montanha, olhando a estrada e o carro fazendo a curva. Note que a distância r entre **A** e **B** aumenta com o tempo. É por isso que **A** vê **B** se afastando dele na direção radial e julga que **B** está sendo empurrado para fora, sob ação de uma força centrífuga. **A** não entende que é ele que está sendo puxado para dentro da curva (aceleração centrípeta), e chega a conclusões absurdas sobre a dinâmica de **B**. Nessa figura, para realçar a idéia, imaginamos que o carro é aberto, como um carro conversível, e que **B** é projetado para fora do carro, como é comum acontecer em acidentes de trânsito com quem que não usa cinto de segurança.

Nós, que vivemos em contato com o planeta Terra, somos observadores não-inerciais, afinal de contas, a Terra muda sua velocidade (freia e acelera) o tempo todo, enquanto viaja em torno do Sol, como o ônibus da Figura 2.6. Além disso, a Terra tem uma trajetória curva em torno do Sol (elipse) e gira em torno de si mesma, fazendo com que nós estejamos em uma trajetória curva o tempo todo, como o carro da Figura 2.7. Por isso a Terra não é um referencial inercial e nós não deveríamos, a todo rigor, interpretar os movimentos dos corpos em termos das leis de Newton. Assim sendo, parece que estamos nos dedicando ao estudo de uma teoria inútil. Para nossa sorte, as acelerações associadas a esses movimentos da Terra são muito pequenas e podem ser desprezadas, sem muito prejuízo, na maioria das vezes. Isso porque as curvaturas/velocidades envolvidas

nos movimentos da Terra são muito pequenas e podemos dizer que, em uma certa aproximação, estamos nos movendo em MRU no espaço.

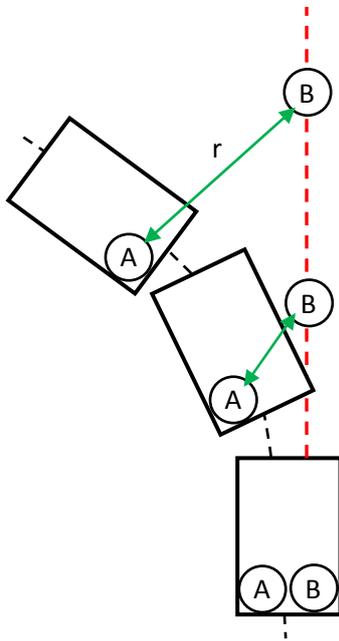


Figura 2.7: **A** e **B** são passageiros em um carro que viajava em MRU, mas que passa a fazer uma curva para a esquerda. A figura mostra a visão de cima, vista por um observador inercial **C** no alto de uma montanha. **C** vê que **A** faz a curva junto com o carro, por estar fixo no carro, mas **B** continua em MRU, por estar solto. **C** entende que a condição $\vec{R} = \vec{0}$ continuou valendo para **B** e que por isso ele continuou em MRU, como se a curva não existisse, conforme previsto pela primeira lei de Newton, que vale para **C**. **A**, por sua vez, vê **B** se afastando dele (o raio r cresce com o tempo), na direção radial para fora da curva. **A** tenta raciocinar em termos da primeira lei, e é levado à conclusão errada de que existe uma força centrífuga sobre **B**, fazendo com que a condição $\vec{R} = \vec{0}$ não valha mais. **A** chegou a essa conclusão errada, afinal não existe nenhuma interação em **B** que poderia ser associada a essa força centrífuga, porque **A** é um observador não inercial, para o qual as leis de Newton não valem. Lembre-se que o movimento curvo de **A** é um movimento acelerado. Ele é um observador não-inercial, pois ele mesmo possui uma aceleração centrípeta.

Mesmo que a Terra seja algo bem próximo de um referencial inercial, vale a pena registrar que é possível detectar diferenças entre as previsões das leis de Newton para os movimentos de corpos aqui na Terra e os movimentos reais que esses corpos apresentam, devido ao fato da Terra ser de fato um referencial não inercial. Mas, essas diferenças só serão observadas se o movimento tiver uma duração muito grande, para que o efeito das (pequenas) acelerações causadas pelos movimentos da Terra se acumule com o passar do tempo e se torne perceptível. Um exemplo clássico em que isso ocorre é o pêndulo de Foucault, que é basicamente um pêndulo que é capaz de oscilar sozinho por um tempo muito longo. Percebe-se no movimento do pêndulo o efeito da rotação da Terra (força (fictícia) de Coriolis), pois seu plano de oscilação gira lentamente com o passar do tempo, o que não ocorreria se a Terra fosse um referencial inercial.

Um outro exemplo é o estudo dos fenômenos meteorológicos, como o deslocamento de massas de ar na atmosfera terrestre. Esses movimentos podem durar vários dias e abarcar distâncias quilométricas, sendo corretamente descritos apenas por uma teoria baseada nas leis de Newton que leve em conta forças fictícias atuando nas massas de ar. Isso porque nós, que observamos o deslocamento das massas de ar, somos observadores não inerciais. Na prática, uma parte dos efeitos da rotação da Terra em torno de seu eixo, correspondente à aceleração centrípeta, pode ser “embutida” em uma aceleração da gravidade aparente \vec{g}_A

que é dependente da latitude. Assim, se assumirmos que um corpo em queda livre cai com aceleração da gravidade aparente \vec{g}_A , ao invés de \vec{g} , significa que já estamos incluindo em nossa descrição do problema uma parte dos efeitos advindos do fato da Terra não ser exatamente um referencial inercial. Esses efeitos são muito pequenos ($\vec{g}_A \cong \vec{g}$) e não serão abordados aqui. Daqui para diante vamos assumir que somos observadores inerciais (com uma boa aproximação) e que podemos, sem medo, descrever os movimentos dos corpos (movimentos que não duram vários dias) através das leis de Newton (e que, portanto, $\vec{g}_A = \vec{g}$).

2.2.3 Segunda lei de Newton ($\vec{R} = m \vec{a}$)

Consideremos agora o caso geral, em que um corpo está submetido a uma resultante de forças \vec{R} qualquer. Qual o movimento desse corpo? Mais especificamente: qual o movimento desse corpo em um referencial inercial? A segunda lei de Newton diz que o corpo se move (nesse referencial inercial) com aceleração \vec{a} , paralela à resultante \vec{R} . Mas, diferentes corpos submetidos à mesma resultante \vec{R} adquirem diferentes acelerações, porque a aceleração depende não somente de \vec{R} mas também de uma propriedade do corpo, que chamamos de massa e representamos pela letra m . A segunda lei de Newton diz que um corpo de massa m submetido a uma resultante de forças \vec{R} se moverá com uma aceleração tal que:

$$\vec{R} = m \vec{a}$$

Em termos das componentes dos vetores em um referencial xyz a equação vetorial acima se transforma em um sistema de três equações escalares:

$$R_x = m a_x$$

analogamente para as componentes y e z.

Podemos escrever a segunda lei de Newton na forma:

$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m}$$

Essa última equação mostra que a massa de um corpo quantifica a inércia do corpo, definida lá no contexto da primeira lei de Newton. Apenas para lembrar, a inércia de um corpo é a tendência que esse corpo tem de permanecer em MRU (incluindo o repouso) desde que a condição $\vec{R} = \vec{0}$ perdure. Vemos na equação acima que, quanto maior a massa m de um corpo, menor vai ser a aceleração que ele vai adquirir, ou seja, mais difícil vai ser tirar ele do MRU, ou do repouso. Portanto, quanto maior m , maior a inércia do corpo. Quanto maior a massa de um corpo, mais difícil é mudar seu estado de movimento (qualquer que seja ele).

No sistema internacional de unidades (SI), que é o que utilizamos, a massa de um corpo é medida em quilogramas, abreviado pelo símbolo kg (um quilograma é o mesmo que mil gramas). Como a aceleração é medida em metros/segundo² (abreviado pelos símbolos m/s²), vemos que a unidade de \vec{R} (portanto a unidade

de força) no SI é dada por kg m/s^2 . Esse bloco de unidades é abreviado definindo-se a unidade newton para as forças, abreviada pelo símbolo N. Portanto, uma força de 100 N (cem newtons) é uma força de 100 kg m/s^2 , ou seja, 100 N é uma força que se aplicada em um corpo de 100 kg vai fazer com que ele adquira uma aceleração de 1 m/s^2 , ou que se aplicada em um corpo de 1 kg, vai produzir nele uma aceleração de 100 m/s^2 etc.

Percebemos essa dependência da aceleração na massa no nosso dia-a-dia. Imagine, por exemplo, que você vai utilizar todas as suas forças para empurrar um carro. Se você empurrar um carro de massa grande (um carro pesado) vai ter muita dificuldade de tirar ele do repouso, talvez você nem consiga. Por outro lado, se você aplicar a mesma força em um carro de massa pequena (um carro leve), vai sentir mais facilidade de tirar ele do repouso. Isso porque a massa do carro está no denominador da aceleração que ele adquire, conforme a segunda lei de Newton.

Nesse exemplo do carro, fizemos a associação natural entre carro de massa grande e carro pesado e também entre carro de massa pequena e carro leve. Fazemos essa associação o tempo todo porque sabemos que há uma relação muito simples entre massa e peso. Essas duas grandezas estão tão intimamente ligadas que confundimos uma com a outra em nossa linguagem do cotidiano. Uma pessoa sobe em uma balança e diz: meu peso é 70 kg. Mas peso é força e a unidade de força não é o kg, mas sim o newton. A frase correta é: minha massa é 70 kg. A balança mede o peso e fornece o valor da massa de uma pessoa, em kg. O que a pessoa lê na escala da balança é o valor de sua massa e não de seu peso. Qual a origem dessa confusão de linguagem? É a relação simples entre massa e peso. Massa e peso são grandezas proporcionais entre si e um corpo de muita massa é um corpo de muito peso e vice-versa. Qual afinal é a relação entre massa e peso?

Considere um corpo em queda livre. Um corpo em queda livre é um corpo que se move sob ação apenas do seu peso \vec{P} . Então, para esse corpo:

$$\vec{R} = \vec{P}$$

Da segunda lei de Newton, vemos que um corpo em queda livre adquire uma aceleração tal que:

$$\vec{R} = \vec{P} = m \vec{a}$$

Mas, a aceleração dos corpos em queda livre é a aceleração da gravidade, que independe do corpo e é definida pelo símbolo \vec{g} . Portanto:

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

Em módulo: $P = m g$.

Conclusão: se conhecemos a massa m de um corpo (em kg), seu peso (em N) é aproximadamente $P = 9,8 m$, já que a aceleração da gravidade na vizinhança da superfície da Terra é $g \cong 9,8 \text{ m/s}^2$. Portanto, se uma pessoa sobe na balança e ela indica 70 kg, o correto é ela dizer: minha massa é 70 kg e meu peso é aproximadamente 686 N (ou 700 N para facilitar as contas, se $g \cong 10 \text{ m/s}^2$). A massa é uma propriedade do

corpo, se a pessoa for morar em outro planeta, vai ter a mesma massa lá. O peso é a intensidade da interação gravitacional entre o corpo e o planeta onde esse corpo está. Se uma pessoa for morar em outro planeta, onde a aceleração da gravidade tem outro valor, ela vai ter um peso diferente do seu peso aqui na Terra.

Os astronautas que caminharam na superfície da Lua se sentiam muito leves, porque lá a gravidade é cerca de 16% da gravidade aqui na Terra. Um astronauta de massa 100 kg, por exemplo, que pesa cerca de 1000 N aqui na Terra, vai pesar apenas 160 N lá na Lua. Isso significa que na Lua o astronauta pesa o mesmo que uma massa de 16 kg pesa aqui na Terra. O astronauta vai se sentir como se tivesse apenas 16 kg. Mas, de fato, sua massa não mudou, continua sendo 100 kg. Seu peso mudou, porque o valor de g mudou, de $9,8 \text{ m/s}^2$ para $1,6 \text{ m/s}^2$. Imagine um astronauta que consegue dar um salto do chão com velocidade vertical de módulo V_0 . Conforme já vimos no capítulo de cinemática, ele vai atingir uma altura máxima $h_{MAX} = V_0^2 / (2g)$. Portanto, se ele consegue saltar uma altura de 50 cm aqui na Terra, lá na Lua, com esse mesmo impulso, ele vai conseguir dar um salto incrível de 3 m de altura. Se você procurar na internet vai encontrar vídeos mostrando astronautas saltando na Lua como cangurus. Lá, com aquelas roupas de astronautas, é mais fácil saltar do que caminhar.

É interessante frisar que o senso comum associa movimento a força, como se o movimento só pudesse existir na presença de força. Mas, desafiando essa ideia, as leis de Newton estabelecem que: para um corpo se mover não tem que haver necessariamente uma força resultante \vec{R} não nula atuando nele. Um corpo pode se mover na ausência total de forças (ou com várias forças que resultam em $\vec{R} = \vec{0}$). Obviamente, nesse caso o movimento será o MRU, de acordo com a primeira lei de Newton. Uma resultante não nula é necessária apenas no caso de movimentos curvos e/ou em que o módulo da velocidade muda, de acordo com a segunda lei de Newton. Resumindo: a lei do senso comum seria algo com $\vec{R} = k \vec{V}$, sendo k uma constante. Dessa forma, $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} = \vec{0}$: se não há força não há movimento, só há o repouso. Mas, a natureza não está obrigada a seguir nosso senso comum e o que vale de fato é $\vec{R} = m \vec{a}$, e que $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$: se não há força pode haver movimento, o MRU. De fato, não há nada de lógico, de evidente, ou de acordo com o senso comum nas leis da natureza. Esses não são requisitos que a natureza deve seguir. As leis da natureza são regularidades comprovadas experimentalmente. Elas poderiam ser diferentes, se o universo fosse diferente. Poderia haver um universo onde valesse $\vec{R} = k \vec{V}$. No nosso universo vale $\vec{R} = m \vec{a}$.

2.2.4 Terceira lei de Newton (ação e reação)

A terceira lei de Newton está ligada ao fato de que toda interação é mútua: se A interage com B, então B interage com A. Não tem como A interagir com B e não sofrer nenhuma consequência disso. Se A empurra B, então B empurra A. Se A puxa B, então B puxa A. Essa é a ideia de “ação e reação”. Se A faz força em B e chamamos isso de “ação”, então B faz força em A e chamamos isso de “reação”. Não há ação sem reação e

vice-versa. Se uma pessoa dá um soco na parede, a mão dela dói. A mão não dói por causa da força que a mão faz na parede (ação), ela dói por causa da força que a parede faz na mão (reação). Se uma pessoa chuta uma bola (ação), ela sente que a bola chuta seu pé (reação).

A terceira lei vai além dessa simples constatação do fato de que toda interação é mútua. A terceira lei de Newton afirma que o par ação-reação é composto de duas forças de mesma magnitude, mesma direção, mas sentidos opostos. Matematicamente, se A faz força em B ($\vec{F}_{A/B}$), então B faz força em A ($\vec{F}_{B/A}$) tal que:

$$\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$$

Um par de forças ação-reação é formado sempre por duas forças do tipo $\vec{F}_{x/y}$ e $\vec{F}_{y/x} = -\vec{F}_{x/y}$, uma força atuando no corpo y ($\vec{F}_{x/y}$) e a outra no corpo x ($\vec{F}_{y/x}$).

Um bom teste para a compreensão da terceira lei de Newton consiste em questionar se as forças peso e normal representadas na Figura 2.5 (atuando em um livro) constituem ou não um par ação-reação, pois vimos que nesse caso $\vec{\eta} = -\vec{P}$. A resposta correta é não. De fato, peso e normal são forças de naturezas diferentes, associadas a interações diferentes, o peso é o efeito da gravidade entre os corpos e a normal é o efeito da repulsão elétrica entre duas superfícies. Um par ação-reação é formado por forças de mesma natureza. Além disso, o peso e a normal na Figura 2.5 estão atuando no mesmo corpo, o livro, e um par ação-reação é formado sempre por forças que atuam em corpos diferentes. Se você quiser ver as forças que fazem par ação-reação com o peso e a normal que atuam no livro, vai ter que olhar os diagramas de forças dos outros corpos que fazem força no livro. É nesses corpos que atuam as reações ao peso do livro e à normal no livro. A Figura 2.8 ilustra essa idéia. São mostrados três corpos, o livro, a mesa e a Terra, e as interações mútuas entre eles. As forças $\vec{\eta}$ no livro e $-\vec{\eta}$ na mesa, assim como \vec{P} no livro e $-\vec{P}$ na Terra formam dois pares de forças do tipo ação-reação de acordo com a terceira lei de Newton.



Figura 2.8: Diagramas de forças mostrando os pares de forças ação-reação $\vec{\eta}$ que a mesa faz no livro e $-\vec{\eta}$ que o livro faz na mesa e \vec{P} que a Terra faz no livro e $-\vec{P}$ que o livro faz na Terra. Note que os diagramas de forças da mesa e da Terra não estão completos. Não representamos, por exemplo, a força que o piso faz na mesa, ou que o Sol faz na Terra.

A reação ao peso do livro está no planeta Terra, afinal o peso do livro é justamente a força da gravidade com que a Terra puxa o livro para baixo. A reação à normal está na superfície da mesa que toca o livro, afinal a normal é a força com que a superfície da mesa empurra o livro para cima.

Na prática utilizamos a terceira lei de Newton para diminuir a quantidade de incógnitas em uma situação em que queremos determinar as várias forças que atuam em um sistema de vários corpos interagindo entre si. Identificando os pares ação-reação nos diagramas de forças, saberemos que ao determinar o valor da ação, o valor da reação também estará determinado, graças à terceira lei de Newton.

Veremos nos próximos capítulos que a terceira lei de Newton tem duas conseqüências marcantes na natureza: a conservação dos momentos linear e angular. De fato, as leis de conservação do momento linear e do momento angular que veremos aqui na mecânica clássica são válidas em contextos mais gerais, como, por exemplo, na mecânica relativística, na mecânica quântica e no eletromagnetismo. Nesse sentido, podemos inverter a ordem e pensar que a terceira lei de Newton da mecânica clássica é conseqüência das leis gerais de conservação do momento linear e do momento angular. Vale a pena registrar que a conservação do momento angular pressupõe a validade da chamada “forma forte” da terceira lei de Newton, qual seja: além de valer $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$, $\vec{F}_{B/A}$ e $\vec{F}_{A/B}$ têm que estar ambas ao longo da linha que conecta as partículas A e B. Essa propriedade (forças centrais) é válida, por exemplo, para as forças eletrostáticas e gravitacionais.

A terceira lei de Newton deixa de valer em referenciais não-inerciais porque as ditas “forças fictícias” não possuem uma “reação”. No exemplo do ônibus e dos observadores **A** e **B** em que discutimos as forças fictícias, **A** vê **B** ser empurrado para a frente do ônibus, mas não vê ninguém (ou nada) ser empurrado para trás desse ônibus. O observador **A** imagina uma ação (em **B**), mas não consegue imaginar uma reação (em algo ou alguém), exatamente porque a força que ele imagina é fictícia, não é uma força no sentido da segunda lei de Newton, uma interação entre dois corpos.

Finalizando, podemos partir agora para a aplicação das leis de Newton na solução de problemas de mecânica que envolvem o cálculo de forças e de movimentos de um certo número de corpos. Esses problemas consistem basicamente em um pequeno número de corpos sob ação da gravidade da Terra e interagindo entre si através de forças de contato. Em geral desejamos determinar os valores das forças atuantes nos corpos e/ou os movimentos que os corpos adquirem devido a essas forças. O algoritmo básico de solução desses problemas consiste em:

1. Construção dos diagramas de forças
2. Atenção para o respeito à terceira lei de Newton
3. Escolha de um referencial para a representação dos vetores
4. Construção das equações via leis de Newton
5. Identificação dos vínculos entre os movimentos (novas equações)

6. Solução dessas equações.

A segunda lei de Newton é uma equação diferencial para a função posição $\vec{r}(t)$. De fato:

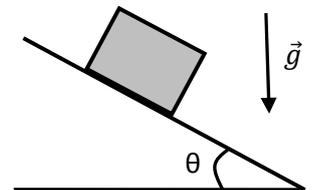
$$\vec{R} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{R}(t) = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$$

Veremos muitos exemplos em que a partícula de interesse está submetida apenas a forças constantes, caso em que \vec{R} é constante e a equação diferencial acima é de solução muito simples. Casos mais complicados são aqueles em que a força é ela mesma uma função do tempo, $\vec{R} = \vec{R}(t)$, ou da posição, $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}(t))$. Nesses casos devemos usar as ferramentas de solução de equações diferenciais ordinárias. Em geral uma equação diferencial ordinária de segunda ordem possui infinitas soluções. As condições iniciais $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$ e $\vec{V}_0 = \vec{V}(t=0)$ selecionam uma solução única para o movimento de uma partícula sujeita à força resultante \vec{R} e que inicia seu movimento na posição \vec{r}_0 com velocidade \vec{V}_0 .

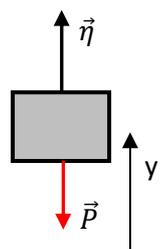
2.3 Aplicações das Leis de Newton

2.3.1 Um bloco em uma superfície inclinada

Consideremos um bloco de massa M estático (em repouso) apoiado em uma superfície plana inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, de acordo com a figura ao lado. A seta com o símbolo \vec{g} logo ao lado representa a aceleração da gravidade e é colocada na figura para que fique claro qual é nessa cena a direção vertical. Vamos calcular as magnitudes de todas as forças que atuam no bloco, para que ele permaneça em repouso, de acordo com a primeira lei de Newton.



Vamos começar pelo caso mais simples, $\theta=0$, caso em que o bloco está apoiado em uma superfície horizontal. Nesse caso, o diagrama de forças que atuam no bloco está mostrado na figura ao lado. A Terra puxa o bloco para baixo (\vec{P}) e a superfície empurra o bloco para cima (\vec{n}). A força normal é vertical porque a superfície do bloco que sofre essa força é horizontal. As duas forças se cancelam mutuamente, de acordo com a primeira lei de Newton:



$$\vec{P} + \vec{n} = \vec{0}.$$

Essa é uma equação bem simples, mas, para nos acostumarmos desde já com o algoritmo de solução de problemas via leis de Newton, vamos adotar um referencial para transformar essa equação vetorial em uma equação escalar, que envolve apenas os módulos das forças, que é o que nos resta determinar. Considere então o eixo y mostrado na figura. Ele vai ser o nosso referencial para decompor as forças em componentes. Nesse referencial (lembre-se que \hat{y} está apontando para cima):

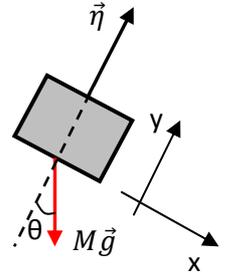
$$\vec{P} = -M g \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{n} = n \hat{y}$$

Portanto:

$$-M g \hat{y} + \eta \hat{y} = \vec{0} \Rightarrow (-M g + \eta) \hat{y} = \vec{0} \Rightarrow -M g + \eta = 0 \Rightarrow \eta = M g$$

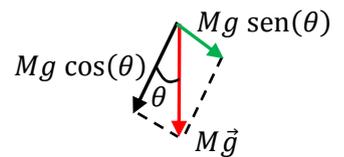
Concluindo, atuam no bloco seu peso, de magnitude $M g$ (vertical para baixo) e a força normal, de magnitude $\eta = M g$ (vertical para cima).

Vamos considerar agora o bloco em repouso em uma superfície inclinada, com $0 < \theta < 90^\circ$. O peso do bloco e a força normal continuam atuando, apenas a direção da normal deve ser modificada no diagrama de forças, como mostrado ao lado. Note que θ também é o ângulo entre a direção da normal e a direção do peso. Adotamos um referencial natural para esse problema, com o eixo x paralelo à superfície do plano inclinado (e à superfície inferior do bloco) e o eixo y ortogonal a essa direção. Nesse referencial as forças se decompõem em:



$$\vec{P} = M g \sin(\theta) \hat{x} - M g \cos(\theta) \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{\eta} = \eta \hat{y}$$

Note a decomposição do peso na figura ao lado. Há um triângulo retângulo com hipotenusa $M g$ e catetos $M g \sin(\theta)$ (componente x , verde) e $M g \cos(\theta)$ (componente y , preta).



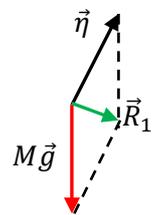
Portanto, a primeira lei de Newton diz que, se o bloco está em repouso:

$$M g \sin(\theta) \hat{x} - M g \cos(\theta) \hat{y} + \eta \hat{y} = \vec{0} \Rightarrow M g \sin(\theta) \hat{x} + (-M g \cos(\theta) + \eta) \hat{y} = \vec{0}$$

Já sabemos que um vetor nulo é aquele que possui todas as componentes nulas, portanto:

$$\begin{aligned} M g \sin(\theta) &= 0 \\ -M g \cos(\theta) + \eta &= 0 \end{aligned}$$

Note, chegamos a um resultado absurdo. A primeira equação diz que: ou $M = 0$, ou $g = 0$ ou $\sin(\theta) = 0$. Como a massa e a gravidade não são nulas, sobraria apenas a possibilidade de valer $\sin(\theta) = 0$, mas isso só é verdade para $\theta=0$, o que não é o caso aqui. Concluindo, o equilíbrio do bloco é impossível somente com essas forças atuando sobre ele. A figura ao lado mostra que não precisamos nem de equações para ver claramente que a soma \vec{R}_1 de \vec{P} com $\vec{\eta}$ não pode ser nula. Para que o bloco permaneça em repouso, tem que haver uma terceira força, que esquecemos de representar no diagrama de forças. Se chamarmos essa terceira força simplesmente de \vec{F} , então, deve valer $\vec{P} + \vec{\eta} + \vec{F} = \vec{0}$, ou seja, $\vec{R}_1 + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{R}_1$. Concluindo: esquecemos de representar no diagrama de forças uma força que atua no bloco empurrando ele para cima, em uma direção paralela à superfície do plano inclinado (e à superfície inferior do bloco). É o que está sugerindo o diagrama de forças que mostra \vec{R}_1 . Qual seria a natureza dessa força? Vemos que na ausência de



\vec{F} , haveria uma resultante \vec{R}_1 no bloco apontando para baixo e o bloco então deslizaria para baixo. Logo, \vec{F} é uma força que se opõe ao deslizamento do bloco.

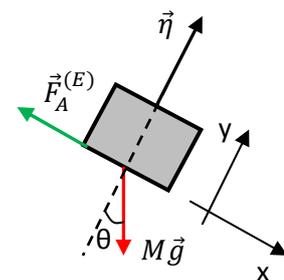
Uma força que se opõe ao deslizamento de duas superfícies que se tocam é uma força de atrito. A força de atrito é uma força de contato, que tem origem na interação entre duas superfícies que se aproximam muito, interação de origem elétrica, que dificulta, e às vezes até impede, o deslizamento de uma superfície em relação à outra. Basicamente, ao se tocarem, duas superfícies se unem/ligam em alguns pontos de aproximação máxima entre os átomos que compõem as duas superfícies. Forças atrativas entre as cargas elétricas dos átomos das duas superfícies aderem uma superfície à outra. Para que haja o deslizamento relativo, essa aderência deve ser quebrada e isso requer uma força: daí nasce a oposição ao deslizamento. Trata-se de uma força comum no nosso dia-a-dia, que permite que consigamos andar sobre a superfície do solo sem escorregar, inclusive subindo uma rampa inclinada, parecida com o plano inclinado que estamos considerando aqui. Há toda uma ciência/tecnologia ligada à força de atrito, às vezes tentando eliminá-la, como no caso da produção de óleos lubrificantes, às vezes tentando maximizá-la, como no caso da produção de discos e pastilhas de freio para veículos. Aqui é importante reconhecermos que na ausência de atrito entre o bloco e a superfície do plano inclinado o bloco simplesmente deslizaria para baixo. Na presença de atrito esse deslizamento fica impedido e o bloco permanece estático. A força de atrito que impede o deslizamento de uma superfície em relação à outra é chamada de força de atrito estático, e será representada pelo símbolo $\vec{F}_A^{(E)}$. Mais adiante veremos que mesmo na presença de deslizamento o atrito continua atuando, não impedindo, mas apenas dificultando o deslizamento. Essa força de atrito que dificulta o deslizamento de uma superfície em relação à outra, enquanto esse deslizamento ocorre, é chamada de força de atrito cinético (ou de deslizamento) e será representada pelo símbolo $\vec{F}_A^{(C)}$.

Após essa constatação, de que nos esquecemos da força de atrito no bloco, o diagrama de forças fica como mostrado ao lado. Note que a força de atrito é paralela à superfície do bloco que está tentando deslizar, e aponta no sentido que se opõe ao deslizamento potencial. Agora a primeira lei de Newton fornece as equações (ao longo de x e de y):

$$\begin{aligned} M g \sin(\theta) - F_A^{(E)} &= 0 \\ -M g \cos(\theta) + \eta &= 0 \end{aligned}$$

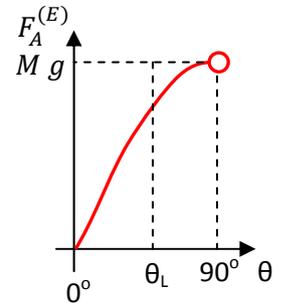
Portanto, concluímos que a superfície do plano inclinado produz sobre o bloco as duas forças de contato, normal e atrito, com as seguintes magnitudes:

$$\begin{aligned} F_A^{(E)} &= M g \sin(\theta) \\ \eta &= M g \cos(\theta) \end{aligned}$$



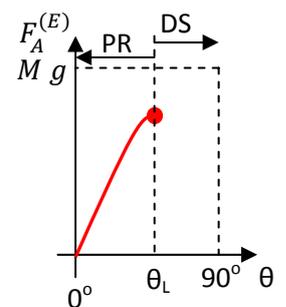
A ação dessas forças, em conjunto com o peso do bloco, produz o repouso do bloco. Note que no caso $\theta=0$ recuperamos o resultado anterior, qual seja: $\eta = M g$ e $F_A^{(E)} = 0$. De fato, em uma superfície horizontal não há atrito no bloco, pois a força de atrito se opõe à tendência de deslizamento do bloco e no caso $\theta=0$ essa tendência de deslizamento, e a oposição a ela, não existem.

Se você realizar um experimento imitando a situação que estamos modelando aqui vai ver que se você for aumentando o valor de θ , vai chegar uma hora em que o bloco desliza para baixo, ou seja, o repouso do bloco se torna impossível. Por que isso ocorre? A equação que define a magnitude de $\vec{F}_A^{(E)}$ responde essa pergunta. Na figura ao lado esboçamos um gráfico de $F_A^{(E)}$ em função de θ ($F_A^{(E)} = M g \sin(\theta)$). A bolinha vazada em $\theta = 90^\circ$ serve para denotar que estamos considerando apenas ângulos menores que esse valor.



Note que a medida que θ cresce, $F_A^{(E)}$ cresce, ou seja, quanto maior a inclinação, maior a tendência do bloco de deslizar e mais atrito é necessário para segurar o bloco em repouso. O fato do bloco não conseguir ficar em repouso para ângulos grandes, maiores que um certo ângulo limite θ_L , está ligado ao limite da força de atrito estático que pode ser produzida entre duas superfícies. Dadas duas superfícies, não é possível produzir atrito estático ilimitado entre elas, o atrito estático possui um limite, acima do qual ocorre o deslizamento das superfícies. Esse limite deve estar ligado à quebra, ou ruptura, das ligações químicas/elétricas entre as duas superfícies. Havendo essa quebra, o deslizamento passa a ocorrer (as superfícies se descolam). Concluímos então que o repouso do bloco e o gráfico de

$\vec{F}_A^{(E)}$ só fazem sentido para ângulos no intervalo $0 \leq \theta \leq \theta_L$. Na figura ao lado mostramos esse gráfico corrigido. Para $0 \leq \theta \leq \theta_L$ o bloco permanece em repouso no plano inclinado (região PR), sob ação da força de atrito estático que já calculamos. Para $\theta > \theta_L$ o bloco não consegue permanecer em repouso e desliza sozinho para baixo no plano inclinado (região DS). A bolinha cheia em $\theta = \theta_L$ serve para denotar que o gráfico se estende até esse ângulo (em $\theta = \theta_L$ o bloco ainda consegue ficar em repouso, mas está na iminência de deslizar). Para calcular o valor de θ_L precisamos conhecer mais sobre o comportamento da força de atrito estático.



A característica mais marcante da força de atrito estático, além de sua própria existência, é a existência desse limite para ela: a força de atrito estático entre duas superfícies não cresce indefinidamente.

$\vec{F}_A^{(E)}$ pode crescer somente até atingir um valor máximo, que chamaremos de $\vec{F}_{A\text{MAX}}^{(E)}$. De que depende $F_{A\text{MAX}}^{(E)}$? Depende dos materiais que compõem as superfícies em contato, onde ocorre esse atrito, e depende do grau de contato entre as superfícies. Depende dos materiais porque a força de atrito nasce exatamente das

ligações químicas/forças elétricas que ocorrem entre as duas superfícies, em pontos específicos onde elas se aproximam muito. Depende do grau de contato porque a força de atrito é uma força de contato, se pressionamos mais uma superfície contra a outra, aumentamos a quantidade de pontos de contato/ligação entre as duas superfícies e conseguimos produzir mais atrito. Note que o grau de contato entre duas superfícies é exatamente o módulo da força normal $\vec{\eta}$ entre elas. Assim, concluímos que $F_{A\text{MAX}}^{(E)}$ é uma função de η , uma função que passa pela origem (se $\eta = 0$ então $F_{A\text{MAX}}^{(E)} = 0$) e uma função crescente de η (maior contato maior atrito). A lei de Amonton diz que a relação entre $F_{A\text{MAX}}^{(E)}$ e η é a mais simples possível, uma proporcionalidade:

$$F_{A\text{MAX}}^{(E)} \propto \eta$$

Para transformar uma proporcionalidade em uma igualdade basta introduzir uma constante de proporcionalidade, que denotaremos por μ_E e chamaremos de coeficiente de atrito estático:

$$F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta$$

O coeficiente de atrito estático introduz na lei do atrito máximo a dependência nos materiais envolvidos no atrito. μ_E é um coeficiente positivo (adimensional) tabelado: dados dois materiais A e B, podemos encontrar em uma tabela o valor do coeficiente de atrito estático entre duas superfícies, uma feita do material A e a outra feita do material B. Se você procurar na internet vai encontrar facilmente uma tabela desse tipo. Por exemplo, para uma superfície de cobre em contato com uma superfície de aço encontramos em uma tabela o valor $\mu_E \cong 0,53$.

Ficamos então com a seguinte situação: enquanto o bloco continua em repouso, graças ao atrito estático, vale: $F_A^{(E)} = M g \sin(\theta)$. Para $\theta = \theta_L$ o bloco fica em repouso e a força de atrito é máxima, ou seja, $F_A^{(E)} = F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta = \mu_E M g \cos(\theta_L)$. Igualando essas duas expressões em $\theta = \theta_L$, ficamos com:

$$M g \sin(\theta_L) = \mu_E M g \cos(\theta_L) \Rightarrow \tan(\theta_L) = \mu_E$$

Concluímos então que o ângulo limite para o qual o bloco consegue ficar seguro pelo atrito estático está determinado unicamente pelo valor do coeficiente de atrito estático. Um bloco em um plano inclinado pode configurar um experimento para a medição do coeficiente μ_E para dois materiais. Basta que coloquemos um bloco feito do material A em repouso apoiado em um plano inclinado feito do material B, e que aumentemos o valor de θ até que o bloco comece a deslizar sozinho. Anotamos o valor de θ em que esse deslizamento ocorre, que é um θ tão próximo quanto se queira de θ_L (a proximidade vai depender de nossa paciência e dedicação no experimento), e finalmente pegamos uma calculadora e calculamos $\tan(\theta_L)$. Se fizermos, por exemplo, um experimento em que um bloco de cobre é apoiado em uma superfície de aço ($\mu_E \cong 0,53$), vamos ver que $\tan(\theta_L) \cong 0,53 \Rightarrow \theta_L \cong 0,49 \text{ rad} \cong 28^\circ$.

Antes de continuar na solução desse exercício, vamos fazer uma pausa para comentar sobre alguns erros, equívocos e confusões comuns, associados à força de atrito estático:

- 1) Diz-se que $F_A^{(E)} = \mu_E \eta$ e não que $F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta$.
- 2) Escreve-se $\vec{F}_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \vec{\eta}$ ao invés de $F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta$.
- 3) Espera-se que $F_{A\text{MAX}}^{(E)}$ dependa da área das superfícies, maior área, maior $F_{A\text{MAX}}^{(E)}$.
- 4) Supõe-se que existe um $\mu_{E\text{MAX}}$, um coeficiente de atrito máximo.

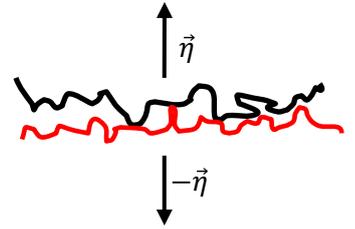
Quanto ao ponto (1): A força de atrito estático pode ter qualquer valor, ela não é igual a $\mu_E \eta$. Ela apenas não pode superar o valor $F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta$. Considere, por exemplo, um bloco de aço de massa $M = 10$ kg em cima de uma superfície horizontal de cobre ($\mu_E \cong 0,53$). Note que nesse caso $F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E M g \cong 53$ N (pois $\eta = Mg$). Se ninguém está empurrando o bloco, então $F_A^{(E)} = 0$. Se o bloco é empurrado por uma força horizontal $F = 10$ N, então $F_A^{(E)} = 10$ N e o bloco continua em repouso. Se o bloco é empurrado por uma força horizontal $F = 50$ N, então $F_A^{(E)} = 50$ N e o bloco continua em repouso. Note, $F_A^{(E)}$ não é igual a $\mu_E \eta = 53$ N. Agora, se o bloco é empurrado por uma força horizontal $F = 53$ N, então $F_A^{(E)} = 53$ N e o bloco continua em repouso. Note, somente nesse caso limite/extremo $F_A^{(E)}$ é igual a $\mu_E \eta$. Dizemos que nesse caso limite o bloco está no limiar de deslizar, ou na iminência de deslizar, mas ainda não desliza. Se o bloco é empurrado por uma força horizontal $F = 54$ N, então o bloco desliza e não faz mais sentido em se falar em atrito estático. Concluindo: não é verdade que $F_A^{(E)} = \mu_E \eta$ mas sim que $F_A^{(E)} \leq \mu_E \eta$ (lei de Coulomb do atrito).

Quanto ao ponto (2): um estudante que já aprendeu sobre vetores entende logo o absurdo da expressão $\vec{F}_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \vec{\eta}$. Essa expressão está afirmando que a força de atrito estático máxima é paralela à força normal (pois μ_E é apenas um número positivo). Isso é um absurdo ululante pois $\vec{F}_{A\text{MAX}}^{(E)}$ é uma força paralela às superfícies que se tocam enquanto que $\vec{\eta}$, como o próprio nome já diz, é ortogonal às superfícies. Portanto $\vec{F}_{A\text{MAX}}^{(E)}$ é sempre ortogonal a $\vec{\eta}$. A expressão $F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta$ diz apenas que o módulo do vetor $\vec{F}_{A\text{MAX}}^{(E)}$ é proporcional ao módulo do vetor $\vec{\eta}$. Quanto às direções desses vetores ela não diz nada, mas nem precisa, pois, já sabemos quais são essas direções.

Quanto ao ponto (3): o gênio Leonardo da Vinci foi um dos primeiros a registrar que a força de atrito $F_{A\text{MAX}}^{(E)}$ é independente da área (aparente) das superfícies que estão em contato. De fato, quando vemos duas superfícies razoavelmente lisas em contato mútuo imaginamos que as suas áreas se tocam em todos os seus pontos. Imaginamos que a área de contato é igual a essa área aparente, a área que enxergamos a olho nu. Mas, nenhuma superfície é lisa no nível microscópico e duas superfícies só se tocam mesmo em alguns

“pontos”, resultando no que poderíamos chamar de “área real” de contato. A área real de contato é a área total desses “pontos” de contato.

A figura ao lado ilustra o que seriam os perfis microscópicos de duas superfícies (preta e vermelha) que se tocam quando “pressionadas” mutuamente pelas forças $\vec{\eta}$ e $-\vec{\eta}$. A área real seria dada apenas pelas áreas dos “pontos” onde as superfícies se aproximam bastante, estabelecendo forças elétricas de atração mútua. A força de atrito independe da área aparente, ela depende apenas da área real de contato (A_{REAL}):



$$F_A \propto A_{REAL}$$

Por outro lado, surpreendentemente, a área real de contato independe da área aparente. Daí segue que F_A independe da área aparente.

De fato, se \mathcal{A}_1 é a área (média) de um ponto de contato (note que ele não é de fato pontual) e N é o número de pontos de contato, então:

$$A_{REAL} = N \mathcal{A}_1$$

Para uma mesma força η , aumentando a área aparente, aumentamos N e diminuímos \mathcal{A}_1 , de tal forma que o produto $N \mathcal{A}_1$ permanece constante. Isso ocorre porque os “pontos” de contato são deformáveis, ou seja, quanto maior a força de compressão em um ponto de contato ($F_1 = \eta / N$), mais “amassado” esse ponto e maior sua área \mathcal{A}_1 :

$$\mathcal{A}_1 = k F_1 = k \frac{\eta}{N}$$

sendo k uma espécie de constante elástica (constante de deformação) do material.

Imagine então que você dobre a área aparente, para uma mesma η . A quantidade de “pontos” de contato vai dobrar ($N' = 2N$), mas a força de compressão em cada contato vai cair à metade ($F'_1 = \eta / 2N$) e a área de cada contato vai cair à metade ($\mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}_1 / 2$). A área real de contato, que era $N\mathcal{A}_1$, vai passar a ser

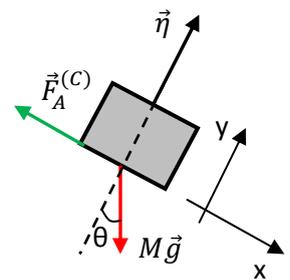
$$A'_{REAL} = N' \mathcal{A}'_1 = 2N k \frac{\eta}{2N} = N \mathcal{A}_1 = A_{REAL}$$

Ou seja, a área real de contato não muda, e nem a força de atrito. No final das contas, o aumento da área (aparente) não produz nenhum efeito sobre o atrito, porque não altera a área real de contato (para uma mesma η).

Quanto ao ponto (4): dois materiais definem um coeficiente de atrito estático, que é fixo, uma constante para esses dois materiais. O valor do coeficiente de atrito não muda se um corpo está sendo forçado mais ou

menos a deslizar sobre outro corpo. Ele depende apenas dos materiais de que esses corpos são feitos. Não existe um $\mu_{E\ MAX}$, existe um μ_E e uma força de atrito máxima, que é igual a $\mu_E \eta$.

Vamos retornar agora ao problema do bloco no plano inclinado. Já entendemos porque o bloco fica em repouso no plano inclinado, basicamente por causa da ação do atrito estático, ação que tem um limite. Queremos entender agora o que acontece quando o bloco desliza no plano inclinado. Essa situação será descrita pela segunda lei de Newton já que esperamos que, em geral, o bloco deslize para baixo acelerado. Note que não precisamos supor aqui que $\theta > \theta_L$, imaginado que o bloco só desliza na superfície se o ângulo θ for grande, maior que θ_L . De fato, para $\theta > \theta_L$ o bloco escorrega sozinho no plano inclinado, mesmo se deixado em repouso. Mas, para qualquer θ o bloco pode deslizar na superfície. Se ele não deslizar sozinho, pode receber um empurrão inicial que force o seu deslizamento. Por exemplo, mesmo para $\theta = 0$ o bloco pode deslizar, basta que se dê um chute nele, que ele vai sair deslizando na superfície horizontal. Portanto, a análise que faremos aqui vale para qualquer valor de θ . Apenas vamos supor que o bloco esteja deslizando para baixo do plano inclinado, não importa se está deslizando porque não consegue ficar em repouso ($\theta > \theta_L$) ou se foi empurrado para baixo. Nesse caso, o deslizamento se dará na presença de uma força de atrito, uma força de origem elétrica que dificulta o deslizamento de uma superfície sobre a outra, enquanto esse deslizamento ocorre. Chamamos essa força de força de atrito cinético (ou de deslizamento) e denotamos por $\vec{F}_A^{(C)}$. O diagrama de forças para o bloco fica igual ao considerado anteriormente, somente trocando $\vec{F}_A^{(E)}$ por $\vec{F}_A^{(C)}$, como mostrado na figura ao lado. Note, estamos supondo que o bloco está deslizando para baixo e a força de atrito cinético aponta então para cima.



A segunda lei de Newton ($\vec{R} = M \vec{a}$) fornece as equações (em x e em y):

$$\begin{aligned} M g \sin(\theta) - F_A^{(C)} &= M a \\ -M g \cos(\theta) + \eta &= 0 \end{aligned}$$

Note, consideramos que o vetor aceleração do bloco no referencial fornecido é $\vec{a} = a \hat{x}$. Estamos interessados aqui em calcular, por exemplo, a magnitude da aceleração de queda do bloco. Para isso precisamos conhecer mais sobre a força de atrito cinético, precisamos de uma lei para o atrito cinético. Experimentos mostram que o atrito cinético entre duas superfícies depende dos materiais que compõem as superfícies em contato, onde ocorre esse atrito, e depende do grau de contato entre as superfícies. A idéia aqui é similar ao que já discutimos sobre a força de atrito estático máxima. $F_A^{(C)}$ depende dos materiais porque a força de atrito nasce das ligações químicas (forças entre cargas elétricas) entre as duas superfícies, em pontos específicos onde elas se aproximam muito (área real de contato) e depende do grau de contato porque se pressionamos mais uma superfície contra a outra, aumentamos a quantidade de pontos de contato/ligação

e conseguimos produzir mais atrito. O grau de contato entre duas superfícies é exatamente o módulo da força normal $\vec{\eta}$ entre elas. Assim, $F_A^{(C)}$ é uma função de η e é a mais simples possível, uma proporcionalidade:

$$F_A^{(C)} \propto \eta$$

Introduzindo uma constante de proporcionalidade, que denotaremos por μ_C e chamaremos de coeficiente de atrito cinético, ficamos com:

$$F_A^{(C)} = \mu_C \eta$$

O coeficiente de atrito cinético introduz na lei do atrito cinético a dependência nos materiais. μ_C é um coeficiente positivo (adimensional) tabelado: dados dois materiais A e B, podemos encontrar em uma tabela o valor do coeficiente de atrito cinético entre duas superfícies, uma feita do material A e a outra feita do material B. Na internet encontramos, por exemplo, para uma superfície de cobre em contato com uma superfície de aço, o valor $\mu_C \cong 0,36$. Notamos aqui uma propriedade geral válida para os coeficientes de atrito μ_C e μ_E , que é $\mu_C < \mu_E$. O coeficiente de atrito cinético entre duas superfícies é sistematicamente menor que o coeficiente de atrito estático entre essas mesmas superfícies (lembre-se que $\mu_E \cong 0,53$ para o contato aço/cobre), ou seja $\mu_C < \mu_E$, podendo haver o caso em que os dois coeficientes são muito próximos, ou seja: $\mu_C \lesssim \mu_E$.

As forças de atrito cinético e estático têm a mesma origem, as atrações elétricas entre as duas superfícies em alguns pontos de contato entre elas (área real de contato). Superfícies em repouso relativo podem se encaixar de forma mais eficiente e se aproximar mais do que superfícies que se movem uma em relação à outra. Como consequência, são criados mais pontos de contato entre as duas superfícies e as forças de atração mútua são mais intensas no caso estático. Esperamos então que seja mais difícil quebrar essas ligações quando as superfícies estão em repouso relativo do que quando elas possuem um movimento de deslizamento uma em relação à outra. Por isso entendemos como razoável a validade geral da desigualdade $\mu_C < \mu_E$.

Vale ressaltar que a lei $F_A^{(C)} = \mu_C \eta$ (atribuída a Charles Coulomb) é válida em um certo regime de contato, basicamente entre superfícies de contato secas no caso em que a velocidade relativa entre essas superfícies é baixa. Para altas velocidades, pode-se observar uma dependência do atrito cinético na velocidade, significando que o regime de atrito já é outro, regido por outras leis. Em geral o coeficiente de atrito cinético diminui lentamente com o aumento da velocidade. No entanto, o fenômeno do atrito entre duas superfícies é muito rico e complexo e muitos comportamentos díspares podem ser observados, dependendo dos materiais e das condições válidas no contato entre essas superfícies.

Voltando ao bloco no plano inclinado, como $\eta = M g \cos(\theta)$, ficamos com:

$$M g \sin(\theta) - \mu_C M g \cos(\theta) = M a$$

e, portanto:

$$a = g [\text{sen}(\theta) - \mu_C \text{cos}(\theta)]$$

A aceleração de queda do bloco depende apenas da gravidade g , do coeficiente de atrito μ_C e do ângulo θ . Note que essa aceleração pode ser positiva ou negativa, dependendo dos valores de θ e μ_C . De fato, a é positiva quando $\text{sen}(\theta) > \mu_C \text{cos}(\theta)$, negativa no caso contrário e nula quando $\text{sen}(\theta) = \mu_C \text{cos}(\theta)$. Essa última expressão define o único valor de θ para o qual $a = 0$, ou seja, para o qual o bloco desce o plano inclinado com velocidade constante (MRU). Chamaremos esse θ especial de θ_{MRU} . Então:

$$\text{sen}(\theta_{MRU}) = \mu_C \text{cos}(\theta_{MRU}) \Rightarrow \tan(\theta_{MRU}) = \mu_C.$$

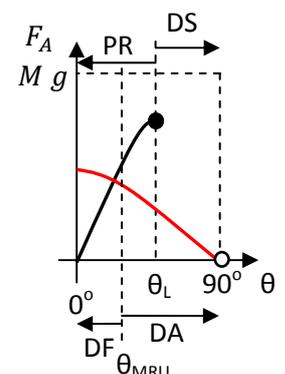
Para $\theta < \theta_{MRU}$ a aceleração do bloco é negativa e para $\theta > \theta_{MRU}$ a aceleração é positiva. Qual o significado de uma aceleração negativa? Ora, o sinal de um vetor define o sentido desse vetor em um dado referencial. No nosso caso apontamos um eixo x para baixo do plano inclinado e escrevemos $\vec{a} = a \hat{x}$. Portanto, uma aceleração positiva é uma aceleração no sentido positivo de x . Uma aceleração negativa significa então uma aceleração apontando para cima do plano inclinado. Concluindo: estamos sempre supondo que o bloco está descendo o plano inclinado (porque representamos a força de atrito cinético no bloco apontando para cima), então, para ângulos pequenos ($\theta < \theta_{MRU}$) o bloco desce freando (velocidade para baixo e aceleração para cima) e para ângulos grandes ($\theta > \theta_{MRU}$) o bloco desce com velocidade crescente (velocidade para baixo e aceleração para baixo). Exatamente em $\theta = \theta_{MRU}$ o bloco desce com velocidade constante. Podemos usar essa idéia para medir o coeficiente de atrito cinético entre dois materiais A e B. Basta determinar o ângulo $\theta = \theta_{MRU}$ para o qual um bloco feito de material A desce em MRU um plano inclinado feito de material B e usar uma calculadora para calcular $\mu_C = \tan(\theta_{MRU})$.

Note que como sempre vale a desigualdade $\mu_C < \mu_E$ então (sendo a função tangente uma função monótona crescente no intervalo $0 \leq \theta < 90^\circ$) sempre valerá a desigualdade

$$\theta_{MRU} = \arctan(\mu_C) < \theta_L = \arctan(\mu_E)$$

No exemplo do bloco de cobre apoiado em uma superfície de aço ($\mu_E \cong 0,53$ e $\mu_C \cong 0,36$) obtemos: $\theta_L \cong 0,49 \text{ rad} \cong 28^\circ$ e $\theta_{MRU} \cong 0,35 \text{ rad} \cong 19^\circ$.

Tendo em vista todos os resultados que obtivemos até aqui, esboçamos na figura ao lado um gráfico da força de atrito no bloco em função do ângulo θ . Notamos que existem duas curvas e várias regiões. A curva preta é a curva da força de atrito estático, que só vale para $\theta \leq \theta_L$ que é a região que chamamos de PR (Permanece em Repouso), correspondente aos valores de θ para os quais o bloco colocado em repouso sobre o plano inclinado continua em repouso. Na região DS ($\theta > \theta_L$) o bloco desliza sozinho, caso seja colocado em repouso sobre o plano inclinado. Essa região



está descrita pela segunda lei de Newton, com o bloco sob efeito do atrito cinético. Note que nessa região vale $a > 0$. A curva vermelha é a curva da força de atrito cinético que vale para todos os valores de $\theta < 90^\circ$ (a bolinha vazada serve para indicar que a análise que fizemos aqui não vale exatamente em $\theta = 90^\circ$). Definimos as duas novas regiões: DF é a região que inclui os valores de θ para os quais o bloco desce freando ($a < 0$); DA é a região que inclui os valores de θ para os quais o bloco desce acelerando ($a > 0$) (note que estamos usando aqui uma linguagem menos precisa do dia-a-dia que chama de movimento acelerado apenas o movimento em que a velocidade cresce. No dia-a-dia dizemos “ele acelerou o carro” quando a velocidade do carro aumenta e dizemos “ele freou o carro” quando a velocidade diminui. De fato, os dois movimentos, em que a velocidade aumenta ou diminui, são igualmente movimentos acelerados, no sentido de possuírem aceleração não-nula). Resumindo, observamos os seguintes comportamentos do bloco, em função do ângulo de inclinação θ :

$\theta < \theta_{MRU}$: se colocado em repouso o bloco fica; se empurrado para baixo, o bloco freia e para.

$\theta_{MRU} < \theta < \theta_L$: se colocado em repouso o bloco fica; se empurrado para baixo o bloco desce acelerando (aumentando a velocidade).

$\theta > \theta_L$: se colocado em repouso o bloco desliza sozinho para baixo acelerando; se empurrado para baixo o bloco desce acelerando. Ele desce acelerando de qualquer jeito.

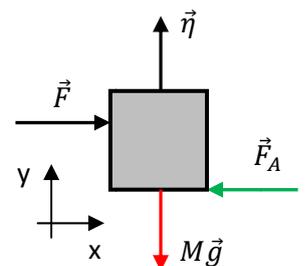
Se você ainda não se convenceu de que a física trata do mundo real, das forças e dos movimentos que você vive no dia-a-dia, você pode tentar realizar um experimento envolvendo a situação que modelamos aqui. Nada precisa ser medido, apenas observe os comportamentos previstos no gráfico acima. Você pode usar, por exemplo, uma régua como plano inclinado e apoiar sobre ela um bloco qualquer, como uma borracha. Varie a inclinação da régua e convença-se de que tudo que está previsto aqui acontece de fato, não é ficção.

2.3.2 Um bloco sendo empurrado em uma superfície horizontal

Para reforçar nosso estudo dos atritos estático e cinético vamos considerar agora um bloco de massa M inicialmente em repouso apoiado em uma superfície horizontal sendo forçado a deslizar por uma força horizontal \vec{F} aplicada por algum agente externo. A situação está ilustrada na



Figura ao lado. Vamos considerar as duas situações possíveis: i) o bloco está sendo empurrado, mas mesmo assim não desliza, por causa da ação do atrito estático; ii) o bloco está sendo empurrado e desliza, sob efeito do atrito cinético. Nos dois casos o diagrama de forças para o bloco é o que está mostrado na Figura ao lado. Resumidamente: a Terra puxa o bloco para baixo ($M\vec{g}$); o piso empurra o bloco para cima ($\vec{\eta}$); a força \vec{F} empurra o bloco para a direita; a força de atrito no bloco (\vec{F}_A), produzida pelo contato com o piso, impede ou somente atrapalha o deslizamento do bloco.



No caso em que o atrito impede o deslizamento, o atrito é estático ($\vec{F}_A = \vec{F}_A^{(E)}$) e no caso em que o atrito apenas atrapalha o deslizamento enquanto ele ocorre, o atrito é cinético ($\vec{F}_A = \vec{F}_A^{(C)}$).

Vamos começar pelo caso em que o bloco permanece em repouso. Essa situação é descrita pela primeira lei de Newton que diz que:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{n} + \vec{F}_A^{(E)} = \vec{0}.$$

Adotando o referencial xy mostrado no diagrama de forças e projetando as forças nesses eixos a equação acima se desmembra em:

$$\text{Ao longo de x: } F - F_A^{(E)} = 0 \Rightarrow F_A^{(E)} = F$$

$$\text{Ao longo de y: } -Mg + \eta = 0 \Rightarrow \eta = Mg$$

Vemos, portanto, que a força de atrito que atua no bloco é igual, em módulo, à força aplicada. Se ninguém empurra o bloco ($F = 0$) então não há atrito ($F_A^{(E)} = 0$). A medida que empurramos mais o bloco, o atrito cresce, segurando o bloco. Mas, sabemos que o atrito estático possui um limite, acima do qual se torna impossível o bloco permanecer em repouso. Esse limite é dado por $F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta$ que nesse caso é $F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E Mg$. Portanto, quando F atingir o valor $F = \mu_E Mg$, valerá $F_A^{(E)} = F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E Mg$, o atrito estático estará no seu limite e o bloco estará ainda em repouso, mas na iminência de deslizar.

Para $F > \mu_E Mg$ temos que considerar que o bloco sairá do repouso e terá um movimento acelerado, descrito pela segunda lei de Newton, que nesse caso fornece a equação:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{n} + \vec{F}_A^{(E)} = M\vec{a}.$$

Adotando o mesmo referencial xy mostrado no diagrama de forças e projetando as forças e a aceleração (suposta $\vec{a} = a\hat{x}$, como não poderia deixar de ser) nesses eixos a equação acima se desmembra em:

$$\text{Ao longo de x: } F - F_A^{(C)} = Ma \Rightarrow F - \mu_C \eta = Ma$$

$$\text{Ao longo de y: } -Mg + \eta = 0 \Rightarrow \eta = Mg$$

Portanto, o bloco sairá do repouso e se moverá para a direita com aceleração:

$$a = \frac{F}{M} - \mu_C g$$

Note que a aceleração pode ser positiva, negativa ou nula. Se $F = \mu_C Mg$, então $a = 0$ e o bloco desliza com velocidade constante (MRU). Se $F > \mu_C Mg$ o bloco desliza cada vez mais rápido ($a > 0$). Se $F < \mu_C Mg$ o bloco desliza freando ($a < 0$). Se considerarmos que o bloco estava inicialmente em repouso e que $F > \mu_E Mg$, conforme nossa discussão anterior, então claramente $F > \mu_C Mg$ (pois $\mu_C < \mu_E$) e só o caso $a > 0$ será observado, ou seja, o bloco vai sair do repouso e acelerar. Mas, podemos sempre imaginar

que o bloco já está deslizando e ajustamos o valor de F arbitrariamente, de tal forma que os três casos $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$ podem ser realizados. Note, no caso $a < 0$ o bloco não freia simplesmente porque a aceleração é negativa. Ele freia porque a aceleração é oposta à velocidade. Ao fazermos o digrama de forças, representamos a força de atrito cinético no sentido $-x$, o que significa que a velocidade do bloco tem que estar no sentido $+x$, por hipótese. Portanto, uma aceleração negativa é uma aceleração no sentido $-x$, ou seja, oposta à velocidade. No caso $a < 0$ o bloco vai freando até parar e, após parar, vai continuar parado já que se $F < \mu_C M g$ então $F < \mu_E M g$, já que $\mu_C < \mu_E$.

Para ilustrar, vamos imaginar um bloco de cobre de massa $M = 10$ kg apoiado em uma superfície de aço ($\mu_E \cong 0,53$ e $\mu_C \cong 0,36$). Então, se o bloco estiver inicialmente em repouso e formos aumentando o valor de F a partir de $F = 0$, a força de atrito estático aumentará também e o bloco estará em repouso até F atingir o valor máximo (lembre-se que $\eta = M g$):

$$F_{MAX} = F_{A MAX}^{(E)} = \mu_E \eta = \mu_E M g \cong 53 \text{ N}$$

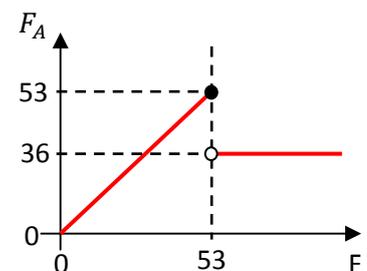
Exatamente quando $F = F_{MAX}$ o bloco ainda permanecerá em repouso, mas estará na iminência de deslizar. Para $F > F_{MAX}$ o bloco vai sair do repouso e passar a deslizar, submetido a uma força de atrito cinético dada por:

$$F_A^{(C)} = \mu_C \eta = \mu_C M g \cong 36 \text{ N}$$

Ele vai deslizar com aceleração:

$$a \cong \frac{F}{10} - 3,6$$

Na figura ao lado mostramos um gráfico da força de atrito no bloco, F_A , em função do valor do módulo da força que empurra o bloco F , partindo da situação em que $F = 0$ e o bloco está em repouso. Inicialmente a força de atrito é uma força de atrito estático que vai crescendo e mantendo o bloco em repouso. Quando $F = 53$ N o atrito estático chega ao seu limite e o bloco fica na iminência de deslizar. Daí em diante ocorre uma transição, o bloco passa a deslizar e a força de atrito

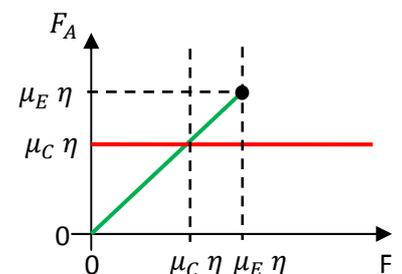


muda para atrito cinético, assumindo o valor constante (independente da aceleração e da velocidade do bloco) $F_A^{(C)} = 36$ N. A característica mais marcante exibida nesse gráfico é a queda abrupta na força de atrito que ocorre quando o bloco sai do repouso e passa a deslizar. Essa queda abrupta está associada à desigualdade $\mu_C < \mu_E$. Como nessa transição a força de atrito salta do valor $F_{A MAX}^{(E)} = \mu_E \eta$ para o valor $F_A^{(C)} = \mu_C \eta$ e vale sempre $\mu_C < \mu_E$, então sempre haverá uma diminuição abrupta no nível do atrito quando há a transição do atrito estático para o cinético. Essa transição ocorre, por exemplo, quando os pneus de um carro em movimento passam a derrapar no asfalto. Antes da derrapagem os pneus apenas rolam no asfalto,

sem deslizar e o atrito pneu/asfalto é estático. Quando a derrapagem inicia os pneus passam a deslizar no asfalto e o atrito passa nesse instante a ser cinético. Portanto, antes de derrapar o carro possuía uma taxa de frenagem maior, pois a força de atrito era maior e a aceleração era maior. Havendo a derrapagem, a força de atrito diminui, a aceleração diminui e a taxa de frenagem diminui. Essa transição atrito estático/atrito cinético deve, portanto, ser evitada nesse caso. Como essa tarefa está em geral além das capacidades humanas, um sistema automático, o sistema ABS, se encarrega de controlar o nível de frenagem, tentando manter, dentro do possível, os pneus sem derrapar e dentro do regime estático de atrito. Podemos imaginar que o sistema ABS funcionaria se ele simplesmente comparasse (através de sensores) a velocidade ω de rotação do pneu com a velocidade V do automóvel. Conforme veremos mais adiante, o rolamento sem deslizamento do pneu pressupõe um vínculo entre ω e V ($V = \omega R$, sendo R o raio do pneu). Uma quebra nesse vínculo, $V > \omega R$, significaria um deslizamento do pneu no solo, que faria com que o sistema ABS modificasse automaticamente a pressão no sistema hidráulico de freio, controlando a taxa de frenagem e buscando restabelecer o vínculo $V = \omega R$. A ideia é simples, mas o funcionamento real de um sistema ABS pode ser bem mais complicado do que isso (ver a referência: *The dynamics of antilock brake systems*, M. Denny, *European Journal of Physics* 26 (2005) 1007–1016).

O gráfico anterior da força de atrito F_A versus F pode levar a uma interpretação errada ou limitada acerca do comportamento do sistema que estamos discutindo aqui. Podemos olhar o gráfico e acreditar que para $F < 53$ N não faz sentido em se falar em atrito cinético no sistema, pois nesse caso o bloco estaria sempre em repouso. Isso não é verdade. Note, o gráfico acima foi obtido para um processo em que o bloco, inicialmente em repouso, vai sendo empurrado por uma força F cada vez maior. A hipótese básica é que o bloco está inicialmente em repouso. Então, nesse caso, é verdade que para $F < 53$ N o bloco continuará em repouso e não faz sentido em se pensar em atrito cinético atuando no bloco nessa região em que $F < 53$ N.

Mas, de fato, o sistema apresenta um comportamento mais rico do que esse, já que o bloco não tem que estar necessariamente em repouso no início do processo de aplicação da força F . Podemos imaginar o bloco deslizando, sob ação de uma força $F < 53$ N e sob ação da força de atrito cinético. Não há nada de absurdo nisso. Por exemplo, o bloco pode receber um chute inicial, e passar a deslizar no piso horizontal e em seguida ser empurrado por uma força F qualquer, enquanto estava deslizando. Considerando todas essas possibilidades, obtemos um gráfico da força de atrito com várias regiões de comportamentos distintos, analogamente ao que obtivemos para o bloco no plano inclinado. Esse gráfico da força de atrito F_A versus F está mostrado na figura ao lado. Encontramos as seguintes regiões:



$F < \mu_C \eta$: se o bloco estiver parado, vai continuar parado; se o bloco estiver deslizando, vai frear até parar ($a < 0$).

$F = \mu_C \eta$: se o bloco estiver parado, vai continuar parado; se o bloco estiver deslizando, vai continuar deslizando com velocidade constante ($a = 0$).

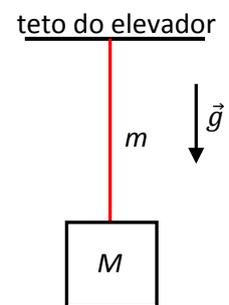
$\mu_C \eta < F \leq \mu_E \eta$: se o bloco estiver parado, vai continuar parado; se o bloco estiver deslizando, vai se mover cada vez mais rápido ($a > 0$).

$F > \mu_E \eta$: se o bloco estiver parado, vai passar a deslizar, e vai cada vez mais rápido; se o bloco já estiver deslizando, vai se mover cada vez mais rápido (nos dois casos $a > 0$). Nessa região não faz sentido se falar em atrito estático, pois o bloco estará sempre deslizando.

Enquanto o bloco desliza vale a curva vermelha, do atrito cinético. Note que para $F < \mu_E \eta$ há duas possibilidades: se o bloco estiver em repouso vale a curva verde, do atrito estático, senão, se o bloco estiver deslizando, vale a curva vermelha. Note, a curva vermelha inclui até o ponto $F = 0$. Seria o caso de um bloco que não está sendo empurrado, mas que está deslizando e sob ação do atrito cinético. Obviamente ele vai frear até parar ($a < 0$). A curva verde também se estende até o ponto $F = 0$, mas nesse caso $F_A^{(E)} = 0$, pois se o bloco está em repouso e não está sendo empurrado, então não há atrito.

2.3.3 Um bloco amarrado ao teto de um elevador por uma corda flexível

Vamos discutir agora o caso de um bloco de massa M que está amarrado, através de uma corda flexível de massa m , ao teto de um elevador. Vamos considerar o elevador parado, subindo e descendo. A idéia está ilustrada na figura ao lado.

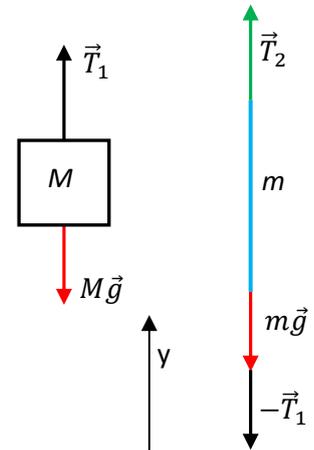


A característica principal de uma corda, ou cabo, ou barbante, flexíveis é que esses objetos só conseguem puxar, nunca empurrar. Se você tentar empurrar algo com um pedaço de barbante vai entender essa idéia. Trata-se de um comportamento bem diferente de uma haste rígida (um cabo de vassoura, por exemplo) que pode empurrar ou puxar. Além disso, uma corda flexível (ou simplesmente uma corda) só consegue puxar com uma força na direção paralela a ela mesma. Uma corda não pode ser horizontal e puxar um bloco na vertical, ela simplesmente se dobraria nesse caso, e não conseguiria exercer força nenhuma. Novamente um comportamento bem diferente de uma haste rígida. Uma corda vertical só puxa na vertical, uma corda horizontal só puxa na horizontal etc. Portanto, as duas pontas da corda puxam os corpos a que elas estão atadas, e são puxadas por esses corpos (ação e reação). Uma corda funciona como transmissora de força: um corpo A atado a uma ponta da corda puxa essa ponta, a corda fica tensionada e puxa o corpo B que está atado à outra ponta da corda. O corpo A não faz força no corpo B, mas a corda transmite, de certa forma, uma ação de A sobre B. Essa é a função principal de uma corda em um

sistema mecânico: transmitir força entre dois corpos distantes um do outro. Vamos considerar aqui apenas o caso ideal de cordas inextensíveis, ou seja, cordas que não esticam ou contraem.

No caso que estamos considerando aqui podemos dizer que o teto do elevador está sustentando o bloco, através da corda tensionada. O teto faz força na corda e a corda tensionada faz força no bloco. O teto não faz força no bloco.

Os diagramas de força para o bloco e para a corda (linha azul) ficam como mostrados ao lado. A Terra puxa o bloco para baixo ($M\vec{g}$), a corda tensiona e puxa o bloco para cima (\vec{T}_1). A Terra puxa a corda para baixo ($m\vec{g}$), o bloco também puxa a corda para baixo ($-\vec{T}_1$ que é a reação à \vec{T}_1) e o teto do elevador puxa a corda para cima (\vec{T}_2). Todas as forças são verticais. Lembre-se que estamos considerando que esses corpos são partículas, e por isso as forças podem ser representadas em posições arbitrárias desses corpos. Mas, é verdade que $-\vec{T}_1$ é uma força que está sendo aplicada na extremidade inferior da corda, dizemos então que $-\vec{T}_1$ é a tensão na extremidade inferior da corda. Por outro lado, \vec{T}_2 está sendo aplicada na extremidade superior da corda e dizemos que \vec{T}_2 é a tensão na extremidade superior da corda. O peso da corda é uma força distribuída, não sendo aplicada em uma posição específica da corda. Mais adiante veremos que é conveniente desenhar a seta do peso da corda na posição do centro de massa da corda. Por enquanto não vamos nos preocupar com isso. Fato é que a tensão em um ponto P da corda possui magnitude $T(P)$, que depende do ponto P. Poderíamos medir $T(P)$ simplesmente cortando a corda no ponto P e introduzindo entre as duas extremidades cortadas da corda um medidor de força, um dinamômetro, por exemplo. No presente caso, se conectarmos um dinamômetro entre a extremidade superior da corda e o teto, ele vai medir uma tensão de magnitude T_2 . Se conectarmos um dinamômetro entre a extremidade inferior da corda e o bloco, ele vai indicar uma tensão de magnitude T_1 .



Vamos iniciar com o caso em que o elevador está parado. Então o bloco e a corda estão em repouso e esse repouso é descrito pela primeira lei de Newton. Usando o eixo y adotado na figura para projetar os vetores ficamos com (partindo de $\vec{R} = \vec{0}$):

$$\text{Bloco: } T_1 - Mg = 0 \Rightarrow T_1 = Mg$$

$$\text{Corda: } T_2 - mg - T_1 = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 + Mg = (m + M)g$$

Note, o teto faz na extremidade superior da corda uma força $T_2 = (m + M)g$ e o bloco é puxado para cima, através da corda, pela força $T_1 = Mg$. A interpretação é simples: o teto sustenta o bloco e a corda, a extremidade inferior da corda sustenta apenas o bloco. A tensão na corda em sua extremidade superior é diferente da tensão em sua extremidade inferior. Pensando a corda como uma transmissora de força

teto/bloco, vemos que a corda produz uma espécie de “perda de força”. O teto quer sustentar o bloco, mas para isso tem que fazer uma força maior na extremidade superior da corda (T_2) do que a força que “atinge” realmente o bloco (T_1). Uma corda ideal seria uma corda que não implicasse em “perda de força”. Das equações, vemos que $T_1 = T_2$ somente no caso $m = 0$. Uma corda ideal é, portanto, uma corda sem massa. Na prática tudo é relativo, e vemos que $T_1 \cong T_2$ se $m \ll M$. Essa condição é facilmente realizada na prática. Mesmo um cabo de aço, que em princípio pode parecer pesado, pode ser muito mais leve que os corpos que ele conecta entre si (dois tratores, por exemplo).

Note que essa solução se aplica também no caso do elevador estar descendo ou subindo com velocidade constante. Isso porque o caso $a = 0$ (MRU) também é descrito pela primeira lei de Newton.

Consideremos agora o elevador (e o bloco e a corda) com aceleração para cima de módulo a ($\vec{a} = a \hat{y}$ com $a > 0$), o que pode significar o elevador subindo cada vez mais rápido (aceleração paralela) ou descendo freando (aceleração antiparalela). A segunda lei de Newton fornece as equações:

$$\text{Bloco: } T_1 - Mg = M a \Rightarrow T_1 = M (g + a)$$

$$\text{Corda: } T_2 - mg - T_1 = m a \Rightarrow T_2 = T_1 + Mg + ma = (m + M)(g + a)$$

Note que nesse caso a corda está mais tensionada do que no caso MRU/repouso. Novamente vemos que não há perda de força se a corda é ideal, ou seja, se $m = 0$. Note também que tudo funciona como se o elevador estivesse em repouso (ou em MRU) e dentro do elevador a aceleração da gravidade fosse $g + a$ e não g .

Caso o elevador esteja com aceleração para baixo de módulo a ($\vec{a} = -a \hat{y}$ com $a > 0$), o que pode significar que o elevador está subindo freando (aceleração antiparalela) ou descendo cada vez mais rápido (aceleração paralela), a segunda lei de Newton fornece as equações:

$$\text{Bloco: } T_1 - Mg = -M a \Rightarrow T_1 = M (g - a)$$

$$\text{Corda: } T_2 - mg - T_1 = -m a \Rightarrow T_2 = T_1 + Mg - ma = (m + M)(g - a)$$

Note que esse é o caso em que a corda está menos tensionada. Não há perda de força se a corda é ideal, ou seja, se $m = 0$. Note também que tudo funciona como se o elevador estivesse em repouso (ou em MRU) e dentro do elevador a aceleração da gravidade fosse $g - a$ e não g . Por exemplo, caso o elevador esteja em queda livre, então $a = g$ e vale $T_1 = T_2 = 0$. A corda fica frouxa, não tensionada, o bloco fica flutuando dentro do elevador (o bloco também está em queda livre) e tudo funciona como se não houvesse gravidade. Essa é a sensação que tem um astronauta dentro de uma nave que orbita a Terra. A nave está em queda livre, e o astronauta se sente em uma gravidade aparente nula, apesar de haver gravidade lá.

A principal conclusão que tiramos desse modelo é que as forças nas duas extremidades de uma corda possuem módulos iguais ($T_1 = T_2$) se a corda for ideal, ou seja, de massa nula ou desprezível.

Equivalentemente, para uma corda de massa nula, $T(P) = T$ para qualquer ponto P da corda. Vamos usar essa propriedade na solução de problemas que envolvem cabos, polias etc. É importante notar que essa propriedade só vale mesmo se a corda estiver livre, ou seja, não arrastando em nada e nem carregando nada junto com ela. De fato, se a corda estiver arrastando em algo haverá uma força de atrito na corda e isso fará com que $T_1 \neq T_2$. Analogamente, se a corda estiver levando algo com massa pendurado nela (em um ponto qualquer entre as duas extremidades) ou mesmo girando uma polia com massa, tudo funcionará como se a corda tivesse massa e novamente $T_1 \neq T_2$. Concluindo, $T_1 = T_2$ somente para uma corda leve e livre, atada e em contato com outros corpos apenas em suas extremidades.

2.3.2 Dinâmica do movimento circular

O movimento circular, uniforme ou não, é caracterizado pela presença obrigatória da aceleração centrípeta, de módulo:

$$a_{cent}(t) = \frac{V(t)^2}{r}$$

sendo r o raio do círculo e $V(t)$ o módulo da velocidade no instante t . É a aceleração centrípeta que dá a variação da direção do vetor velocidade, que é sempre tangente ao círculo.

No caso específico do movimento circular uniforme (MCU), $V(t) = V$ e a aceleração centrípeta tem módulo constante.

Como a segunda lei de Newton diz que:

$$\vec{R} = m \vec{a}$$

então, o movimento circular de uma partícula de massa m é caracterizado pela presença obrigatória de uma força resultante centrípeta de módulo dado por:

$$R_{cent}(t) = m \frac{V(t)^2}{r}$$

Concluindo: as forças que atuam em uma partícula de massa m que está em movimento circular de raio r devem ser tais que produzam nessa partícula uma resultante centrípeta $R_{cent}(t)$ dada pela expressão acima. Vale a pena enfatizar aqui que não estamos definindo uma nova força, a “força centrípeta”. Estamos apenas dizendo que, no movimento circular, as forças com as quais já estamos acostumados: peso, tensão, normal, atrito, etc. devem ser tais que se somem e resultem em uma resultante centrípeta.

No caso do MCU a partícula possui apenas aceleração centrípeta e, portanto, a resultante será apenas uma resultante centrípeta. No caso do movimento circular não uniforme há também a aceleração tangencial $a_{tan}(t)$ de magnitude:

$$a_{tan}(t) = \frac{d}{dt} V(t)$$

Portanto, há também uma resultante tangencial de magnitude:

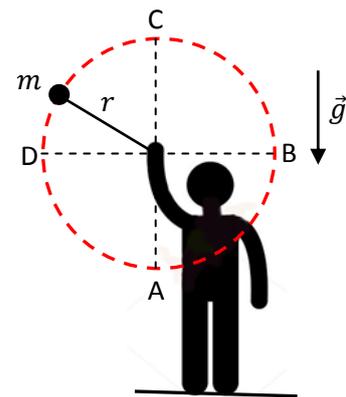
$$R_{tan}(t) = m \frac{d}{dt} V(t)$$

Considere o exemplo da Lua. Abstraindo o movimento desse corpo em torno do Sol, juntamente com a Terra, a Lua possui um movimento que pode ser aproximado razoavelmente como um MCU em torno do centro da Terra. Então, nesse contexto, a resultante das forças que atuam na Lua deve apontar para o centro da Terra. Quais as forças que produzem essa resultante na Lua? Só há uma força responsável pela órbita da Lua em torno da Terra, que é a força da gravidade que a Terra exerce sobre a Lua, que chamaremos de $\vec{F}_{T/L}$. Então, para a órbita circular da Lua podemos afirmar que:

$$R_{cent}(t) = F_{T/L} = m \frac{V^2}{r}$$

sendo m a massa da Lua, r o raio da órbita circular da Lua em torno do centro da Terra e V a velocidade orbital da Lua em torno da Terra. Sendo um MCU, nesse caso $R_{tan}(t) = 0$.

Considere outro exemplo: um garoto que gira uma pequena pedra de massa m amarrada na ponta de um barbante. A massa percorre um círculo de raio r contido em um plano vertical, no sentido anti-horário. A mão do garoto está fixa, definindo o centro do círculo. Ao girar, a pedra passa sucessivamente pelos pontos A, B, C e D mostrados na figura ao lado.



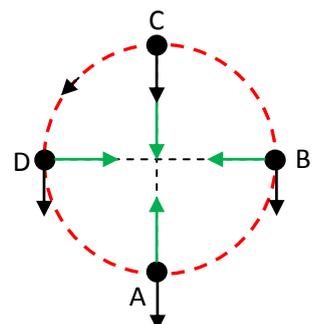
Vamos fazer diagramas de forças para a pedra e descobrir qual a resultante centrípeta em cada um dos pontos destacados na trajetória. Se desprezarmos a força de arraste com o ar na pedra, só sobram duas forças: o peso da pedra e a força de contato \vec{T} que a corda tensionada faz na pedra, que vamos chamar de tensão. Portanto, a segunda lei de Newton diz que:

$$m \vec{g} + \vec{T} = m \vec{a}$$

Na figura ao lado mostramos essas duas forças, o peso como uma seta preta, sempre vertical para baixo e de módulo constante, e a tensão, como uma seta verde, sempre ao longo do barbante (direção radial) e apontando para o centro do círculo (um barbante só pode puxar, nunca empurrar). Obtemos:

$$\text{Em A: } R_{cent}(A) = T_A - m g = m \frac{V_A^2}{r}$$

$$\text{Em B: } R_{cent}(B) = T_B = m \frac{V_B^2}{r}$$



$$\text{Em C: } R_{cent}(C) = T_C + m g = m \frac{V_C^2}{r}$$

$$\text{Em D: } R_{cent}(D) = T_D = m \frac{V_D^2}{r}$$

sendo $R_{cen}(i)$ a resultante centrípeta na pedra, T_i a tensão que a corda faz na pedra e V_i a velocidade da pedra no ponto i .

Analogamente, para a resultante tangencial na pedra:

$$\text{Em A: } R_{tan}(A) = 0 = \frac{d}{dt}V(t)|_A \quad (\text{velocidade passando por um máximo})$$

$$\text{Em B: } R_{tan}(B) = -mg = \frac{d}{dt}V(t)|_B \quad (\text{velocidade para cima diminuindo})$$

$$\text{Em C: } R_{tan}(C) = 0 = \frac{d}{dt}V(t)|_C \quad (\text{velocidade passando por um mínimo})$$

$$\text{Em D: } R_{tan}(D) = m g = \frac{d}{dt}V(t)|_D \quad (\text{velocidade para baixo aumentando})$$

Note que esse movimento é um movimento circular não-uniforme: a bolinha sobe na metade AC do círculo, atinge a altura máxima em C, onde a velocidade é mínima, cai na outra metade CA do círculo e atinge uma altura mínima em A, onde a velocidade é máxima. Durante esse movimento a tensão no barbante varia, ajustando a força centrípeta à velocidade (e vice-versa). A tensão é máxima quando a pedra passa por A e mínima quando ela passa por C.

Se quisermos aproveitar o diagrama de forças acima para pensar na órbita circular da Lua em torno da Terra podemos fazer o seguinte: pensamos que a pedra é a Lua e que a Terra está no centro do círculo; esquecemos a força representada pelas setas pretas; pensamos que a força representada pelas setas verdes é a força de atração gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua, que teria magnitude constante nesse caso, digamos $F_{T/L}$. Então, para a Lua vale:

$$\text{Em A, B, C e D: } R_{cent}(A, B, C, D) = F_{T/L} = m \frac{V_L^2}{r}$$

$$\text{Em A, B, C e D: } R_{tan}(A, B, C, D) = 0 = \frac{d}{dt}V(t) \quad (\text{velocidade orbital de módulo constante } V_L)$$

Nesse caso o movimento da Lua em torno da Terra é um MCU com velocidade de magnitude V_L . A Lua percorre um círculo com raio $r \cong 380.000$ km, gastando um tempo (período orbital) $T \cong 27$ dias para dar uma volta completa nesse círculo. Portanto, sendo a velocidade orbital V_L constante, obtemos:

$$V_L = \frac{2 \pi r}{T} \cong \frac{6,28 \times 380.000}{27 \times 24} \cong 3.700 \text{ km/h} \cong 1 \text{ km/s}$$

2.4 Exercícios resolvidos

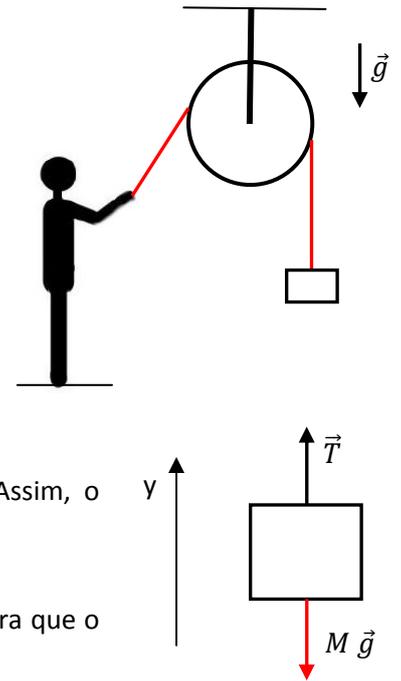
ER 2.1) Máquinas de Atwood: Considere que uma pessoa puxa a ponta de uma corda ideal (uma corda inextensível e de massa desprezível) com uma força \vec{F} . A corda passa por uma polia e tem amarrado na outra ponta um bloco de massa M . O eixo da polia está fixo no teto através de uma haste vertical e a massa da polia é desprezível. A figura ao lado ilustra a idéia.

Dados: \vec{F} e M .

a) Faça um diagrama de forças para o bloco

Atuam no bloco apenas duas forças verticais, o peso e a força de contato que a corda tensionada faz nele, que vamos chamar de tensão. Assim, o diagrama fica como mostrado ao lado.

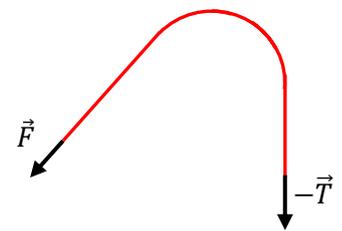
b) Calcule o módulo da força \vec{F} que a pessoa deve fazer na ponta da corda para que o bloco fique em repouso.



Aplicando a primeira lei de Newton para o bloco, já levando em consideração o referencial mostrado no diagrama de forças, obtemos:

$$T - M g = 0 \Rightarrow T = M g$$

Para relacionar esse resultado com F , a força aplicada pela pessoa, devemos entender que uma polia é basicamente um disco chanfrado, onde a corda encaixa. Há duas possibilidades para o seu funcionamento: ou a polia fica travada e a corda desliza no chanfro da polia, ou a polia gira em seu eixo, não havendo deslizamento da corda na polia (na prática as duas coisas podem acontecer ao mesmo tempo, ao acaso). Se a corda desliza, haveria atrito cinético na corda. Vamos desprezar esse atrito. Se a polia gira, o que é o caso mais comum, ela ofereceria inércia associada a esse giro (momento de inércia) e atrito no seu eixo de giro. Ao desprezar a massa da polia, estaremos desprezando essa inércia de rotação. Desprezaremos também o atrito no eixo da polia. Concluindo, em qualquer caso podemos apelar para a propriedade da corda leve e livre: as forças que puxam as duas pontas da corda têm módulos iguais. Essas forças estão ilustradas na figura ao lado, são exatamente \vec{F} e $-\vec{T}$, sendo $-\vec{T}$ a reação à \vec{T} (a corda puxa o bloco com \vec{T} e o bloco puxa a corda com $-\vec{T}$). Portanto, obtemos a equação (que podemos chamar de propriedade da corda leve e livre):



$$F = T \quad (\text{note que } \vec{F} \neq -\vec{T} \text{ mas } |\vec{F}| = F = |-\vec{T}| = T)$$

Logo, para manter o bloco em repouso a pessoa deve fazer na ponta da corda uma força tal que:

$$F = M g$$

Uma força, em módulo, igual ao peso do bloco pendurado.

c) Calcule o módulo da força \vec{F} , F , que a pessoa deve fazer na ponta da corda para que o bloco suba com aceleração de módulo a ($\vec{a} = a \hat{y}$ com $a > 0$).

Aplicando a segunda lei de Newton para o bloco, já levando em consideração o referencial mostrado no diagrama de forças, obtemos:

$$T - M g = M a \Rightarrow T = M (g + a)$$

Novamente, apelando para a propriedade da corda leve e livre:

$$F = M (g + a)$$

A pessoa deve aplicar uma força maior que o peso do bloco.

d) Calcule o módulo da força \vec{F} , F , que a pessoa deve fazer na ponta da corda para que o bloco desça com aceleração de módulo a ($\vec{a} = -a \hat{y}$ com $a > 0$).

Da segunda lei de Newton obtemos:

$$T - M g = M(-a) \Rightarrow T = M (g - a)$$

Portanto:

$$F = M (g - a)$$

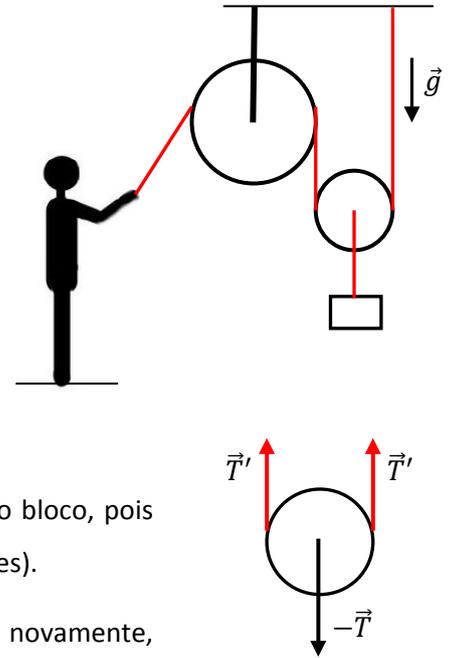
A pessoa deve aplicar uma força menor que o peso do bloco.

Concluindo, para manter o bloco em repouso, a pessoa deve aplicar à extremidade da corda uma força de módulo igual ao peso do bloco. Note que essa seria a mesma força necessária para que o bloco subisse ou descesse com velocidade constante, já que o caso $a = 0$ também é descrito pela primeira lei de Newton. Para puxar o bloco para cima acelerado, a pessoa deve aplicar uma força maior que o peso do bloco. Para deixar o bloco cair acelerado, a pessoa deve aplicar uma força menor que o peso do bloco. Se a pessoa quiser que o bloco caia em queda livre, $a = g$, ela deve aplicar uma força de módulo nulo, ou seja, ela deve soltar a corda. Se a pessoa quisesse que o bloco caísse com aceleração $a > g$, ela deveria aplicar uma força no sentido oposto ao mostrado nas figuras (pois nesse caso $F = M (g - a) < 0$), ou seja, ela deveria empurrar o bloco. Isso seria impossível de ser feito através de uma corda, pois uma corda só puxa, não empurra.

Vamos considerar agora uma máquina de Atwood mais elaborada, como mostrado na figura abaixo. Há duas polias leves, uma com eixo fixo no teto e outra flutuante. O bloco está fixo no eixo da polia flutuante. Vamos calcular novamente o módulo da força \vec{F} que a pessoa deve fazer na ponta da corda para puxar o bloco

nas diversas situações possíveis. O diagrama de forças do bloco não muda, é como mostrado no item (a). O que muda é a relação entre F e T .

De fato, considere o diagrama de forças para a polia flutuante (ver figura). Note, a reação à força \vec{T} no bloco não está mais na ponta da corda que é puxada pela pessoa, ela está agora na ponta inferior da pequena corda vertical que une o eixo da polia flutuante ao bloco. Esse segmento de corda (leve e livre) transmite então uma força de módulo T para o eixo da polia flutuante. Como essa força no eixo da polia flutuante tem módulo T e é vertical para baixo, vamos chamá-la simplesmente de $-\vec{T}$ (mas note, a força no eixo da polia flutuante não é a reação à força no bloco, pois esses dois corpos não interagem entre si, há um segmento de corda entre eles).



Por outro lado, a corda maior dá uma volta na polia flutuante e novamente, apelando para a propriedade da corda leve e livre, concluímos que as forças, \vec{T}' , nas duas pontas desse segmento de corda que abraça essa polia são iguais. Aplicando a segunda lei de Newton para a polia flutuante e lembrando que ela possui, por hipótese, massa M_p desprezível, obtemos (considere um eixo y para cima e $M_p = 0$):

$$2 T' - T = M_p a_p = 0 \Rightarrow T = 2 T'$$

Falta agora relacionar esse resultado com F . Basta olhar novamente o diagrama de forças para o segmento de corda que parte da mão da pessoa e dá uma volta na polia fixa no teto, que mostramos na primeira parte desse exercício. Nessa figura, onde está escrito $-\vec{T}$, considere agora que devemos escrever $-\vec{T}'$. Então, $T' = F$. Conclusão: $T = 2 F$.

Vamos agora considerar os vários casos possíveis.

e) Calcule o módulo da força \vec{F} que a pessoa deve fazer na ponta da corda para que o bloco fique em repouso, suba acelerado ou desça acelerado.

No caso do bloco em repouso, aplicando a primeira lei de Newton para o bloco obtemos:

$$T - M g = 0 \Rightarrow T = M g \Rightarrow F = M \frac{g}{2}$$

O interessante aqui é notar que essa máquina multiplica a força. Para sustentar um peso $M g$, a pessoa deve aplicar apenas metade da força que ela aplicaria com a máquina mais simples, com apenas uma polia. Esse caso também inclui o bloco subindo ou descendo em MRU.

Para o bloco subir (+) ou descer (-) acelerado obtemos, analogamente:

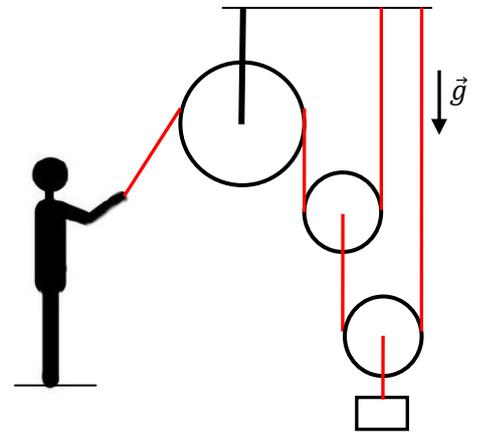
$$F = \frac{M}{2} (g \pm a)$$

É fácil imaginar a aplicação prática dessa máquina: amplificação de força, pois “entra” uma força de módulo F e “sai” uma força de módulo $2F$.

Podemos incrementar o número de polias flutuantes construindo máquinas de Atwood mais complexas e que levam a uma amplificação maior da força. No exemplo da figura ao lado, podemos mostrar que

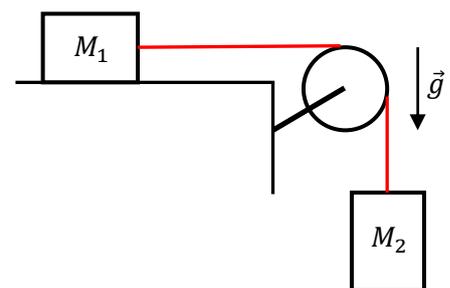
$$F = \frac{M}{4} (g \pm a)$$

Ou seja, temos que aplicar uma força quatro vezes menor para movimentar a mesma massa, quando comparamos com a máquina simples com uma polia apenas.



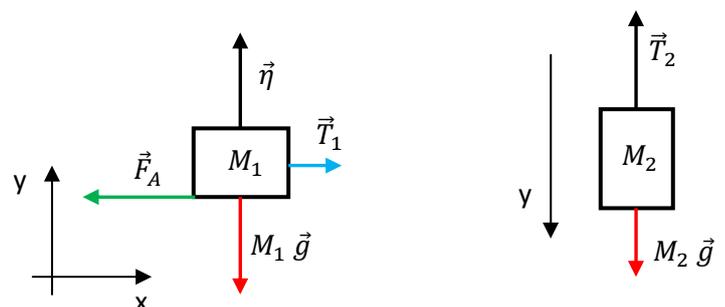
Infelizmente, a máquina de Atwood não faz milagres. Note que se você usar a primeira máquina, com uma polia apenas, ao puxar um comprimento L de corda, o bloco sobe um comprimento L . Usando a segunda máquina, com uma polia flutuante, puxando um comprimento L de corda, o bloco sobe apenas $L/2$ (porque a corda está “dobrada” na polia flutuante). Portanto, na segunda máquina, para erguer o bloco de uma altura h , devemos puxar um comprimento de corda $2h$. Quando estudarmos o conceito de trabalho de uma força, vamos ver que para erguer o bloco de uma dada altura h , realizaremos o mesmo trabalho nas duas máquinas ($W = Fh = (F/2)(2h)$). Não há, portanto, nenhum ganho “energético” no uso dessa máquina mais elaborada, há apenas ganho de força.

ER 2.2) Considere um bloco de massa M_1 amarrado à ponta de uma corda leve e apoiado sobre uma mesa horizontal com atrito. Os coeficientes de atrito entre a mesa e esse bloco são μ_E e μ_C . A corda passa por uma polia leve de eixo fixo e tem a sua outra ponta amarrada em um bloco de massa M_2 , que fica pendurado. Os blocos estão inicialmente em repouso. A situação está mostrada na figura.



Dados: M_1 , M_2 , μ_E , μ_C e g .

a) Faça diagramas de forças para os dois blocos.



Resumidamente: a Terra puxa os dois blocos para baixo, na vertical ($M_1 \vec{g}$ e $M_2 \vec{g}$); a mesa empurra o bloco 1 para cima ($\vec{\eta}$); a corda tensionada puxa o bloco 1 para a direita (\vec{T}_1) e puxa o bloco 2 para cima (\vec{T}_2); o atrito com a mesa impede/atrapalha o deslizamento do bloco 1 (\vec{F}_A) sobre a mesa. Note que já dotamos os referenciais para os dois blocos. Apesar do referencial ser arbitrário, costumamos adotar, por conveniência, referenciais em que um dos eixos aponta na direção e no sentido do movimento (ou do potencial movimento) dos blocos. Nesse caso, sabemos que o bloco 2 vai, ou tem a tendência de, cair; daí adotamos um eixo y para baixo. O bloco 1 vai, ou tem a tendência de, deslizar para a direita; por isso colocamos um eixo x nessa direção e sentido. Adotando eixos orientados na direção e no sentido das acelerações dos corpos diminuimos a chance de cometermos erros de sinal, principalmente em problemas que envolvem vários corpos com movimentos vinculados entre si. Adotaremos essa prática na escolha dos referenciais em toda a extensão desse curso.

b) Calcule a relação entre M_1 e M_2 para que os blocos continuem em repouso.

Vamos supor que os blocos estejam em repouso. Note que nesse caso a força de atrito será uma força de atrito estático $\vec{F}_A^{(E)}$. Usando a primeira lei de Newton, já com os referenciais mostrados nos diagramas de forças, obtemos:

$$\text{Bloco 1: x: } T_1 - F_A^{(E)} = 0 \qquad \text{y: } \eta - M_1 g = 0$$

$$\text{Bloco 2: y: } M_2 g - T_2 = 0$$

Note que a reação à \vec{T}_1 atua na ponta esquerda da corda e a reação à \vec{T}_2 atua na ponta inferior direita da corda. Apelando para a propriedade da corda leve e livre obtemos:

$$T_1 = T_2 = T$$

Portanto, obtemos as equações:

$$\text{Bloco 1: x: } T = F_A^{(E)} \qquad \text{y: } \eta = M_1 g$$

$$\text{Bloco 2: y: } T = M_2 g$$

Dessas equações concluímos que $F_A^{(E)} = M_2 g$, ou seja, quanto maior a massa pendurada M_2 , mais atrito é necessário para segurar o bloco 1, não deixando ele deslizar na mesa.

Aparentemente essas equações não implicam em nenhuma relação entre as massas dos blocos. Mas, devemos nos lembrar que, para que os blocos continuem em repouso, a força de atrito estática não pode superar seu limite, dado por:

$$F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta = \mu_E M_1 g$$

Como já concluímos que $F_A^{(E)} = M_2 g$, chegamos finalmente à seguinte desigualdade:

$$F_A^{(E)} \leq F_{A\text{MAX}}^{(E)} \Rightarrow M_2 g \leq \mu_E M_1 g \Rightarrow M_2 \leq \mu_E M_1$$

Para ilustrar, vamos imaginar um bloco de cobre de massa $M_1 = 10$ kg apoiado em uma mesa de aço ($\mu_E \cong 0,53$ e $\mu_C \cong 0,36$). Então, concluímos que:

$$M_2 \leq \mu_E M_1 \cong 5,3 \text{ kg}$$

Logo, nesse caso, se pendurarmos um bloco de massa $M_2 = 5$ kg, os dois blocos permanecem em repouso. Se pendurarmos um bloco de massa $M_2 = 5,3$ kg, os blocos permanecerão em repouso, mas na iminência de se moverem. Se $M_2 > 5,3$ kg, o bloco 1 desliza e o bloco 2 cai.

c) Calcule as acelerações dos blocos, supondo que o bloco 2 está caindo e arrastando o bloco 1 para a direita.

Note que nesse caso a força de atrito será uma força de atrito cinético $\vec{F}_A^{(C)}$, apontando para a esquerda, como mostrado no diagrama de forças.

Antes de partir para o cálculo dos módulos das acelerações (afinal as direções nós já sabemos: para o bloco 1 a aceleração é horizontal e para o bloco 2 a aceleração é vertical; os sentidos serão dados pelos sinais das acelerações), vale a pena observar que não estamos aqui assumindo que $M_2 > \mu_E M_1$. De fato, no item (b) mostramos que para $M_2 \leq \mu_E M_1$ os blocos permanecem em repouso, se colocados inicialmente em repouso. Mas, nada impede que, mesmo no caso $M_2 \leq \mu_E M_1$, forcemos os blocos a se moverem, através de um peteleco, um empurrão ou um chute. Essa é a hipótese aqui, os blocos estão se movendo, não importa se eles estão se movendo porque $M_2 > \mu_E M_1$, caso em que não haveria atrito estático suficiente para impedir que eles se movessem, ou porque $M_2 \leq \mu_E M_1$, caso em que eles ficariam parados, se estivessem inicialmente parados, mas em que eles foram forçados a se moverem pela ação de um agente externo, um peteleco, por exemplo. Note que a força associada a esse peteleco não está mostrada no diagrama de forças, porque estamos considerando aqui o que acontece após o peteleco e não durante o peteleco.

Se os blocos se movem, devem se mover acelerados, em geral. Portanto, usando a segunda lei de Newton, já com os referenciais mostrados nos diagramas de forças, obtemos:

$$\text{Bloco 1: x: } T_1 - F_A^{(C)} = M_1 a_1 \qquad \text{y: } \eta - M_1 g = 0$$

$$\text{Bloco 2: y: } M_2 g - T_2 = M_2 a_2$$

Continua valendo $T_1 = T_2 = T$. Usando ainda a lei do atrito cinético $F_A^{(C)} = \mu_C \eta$, ficamos com as equações:

$$\text{Bloco 1: x: } T - \mu_C \eta = M_1 a_1 \qquad \text{y: } \eta = M_1 g$$

$$\text{Bloco 2: y: } M_2 g - T = M_2 a_2$$

Note que substituindo η na primeira equação ficamos ainda com duas equações e três incógnitas: T , a_1 e a_2 . Precisamos então de mais uma equação.

Essa última equação não vem da dinâmica, mas do vínculo entre os movimentos dos blocos. De fato, se o bloco 1 se move uma distância L para a direita, então o bloco 2 se move a mesma distância L para baixo. Mais ainda, se o bloco 1 se move uma distância L para a direita em um tempo T , então o bloco 2 se move a mesma distância L para baixo no mesmo tempo T . Isso só não ocorreria se a corda esticasse, afrouxasse ou arrebentasse. Excluindo esses casos, concluímos que as velocidades dos blocos são iguais, em módulo:

$$V_1(t) = V_2(t)$$

Derivando essa igualdade chegamos à conclusão que vale o vínculo entre os movimentos:

$$a_1 = a_2 = a$$

Portanto, ficamos com as equações:

$$\text{Bloco 1: } x: T - \mu_C M_1 g = M_1 a$$

$$\text{Bloco 2: } y: M_2 g - T = M_2 a$$

Concluindo:

$$a = \frac{M_2 - \mu_C M_1}{M_1 + M_2} g$$

Note então que:

Se $M_2 < \mu_C M_1$, então $a < 0$ e os blocos, após o peteleco, freiam até parar, porque as acelerações estarão opostas às velocidades dos blocos. Isso porque assumimos de partida que as acelerações estavam para a direita (no bloco 1) e para baixo (no bloco 2). O sinal negativo indica que nesse caso as acelerações têm sentidos opostos aos que assumimos, ou seja, a aceleração do bloco 1 estará para a esquerda e do bloco 2 para cima. Ambos estarão freando (acelerações antiparalelas).

Se $M_2 = \mu_C M_1$, então $a = 0$ e os blocos, após o peteleco, se movem com velocidade constante, a velocidade inicial arbitrária definida pelo peteleco.

Se $M_2 > \mu_C M_1$, então $a > 0$ e os blocos, após o peteleco, ou após serem soltos do repouso (se também $M_2 > \mu_E M_1$; lembre-se que $\mu_C < \mu_E$), se movem com velocidade crescente (acelerações paralelas às velocidades dos blocos: para a direita (no bloco 1) e para baixo (no bloco 2)).

d) Calcule as acelerações dos blocos, supondo que o bloco 2 está subindo e o bloco 1 deslizando para a esquerda.

Essa situação não vai acontecer espontaneamente. Alguém precisa dar um “peteleco” no bloco 1, para que ele se mova para a esquerda e puxe para cima o bloco 2. Considere então que demos um peteleco no

bloco 1 para a esquerda. Ele vai deslizar para a esquerda puxando o bloco 2 para cima. O que acontece após o peteleco? Basicamente devemos repetir o raciocínio feito em (c), tomando o cuidado de inverter o sentido da força de atrito cinético mostrada no diagrama de forças. Para efetivar essa inversão de sentido basta trocar o sinal de $F_A^{(C)}$ nas equações fornecidas pela segunda lei de Newton. Obtemos:

$$\text{Bloco 1: x: } T + \mu_c \eta = M_1 a \qquad \text{y: } \eta = M_1 g$$

$$\text{Bloco 2: y: } M_2 g - T = M_2 a$$

Portanto:

$$\text{Bloco 1: x: } T + \mu_c M_1 g = M_1 a$$

$$\text{Bloco 2: y: } M_2 g - T = M_2 a$$

O que leva a:

$$a = \frac{M_2 + \mu_c M_1}{M_1 + M_2} g$$

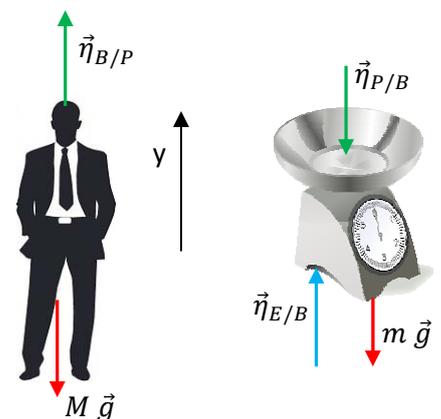
Note, nesse caso não há possibilidade de ocorrer $a < 0$ ou $a = 0$. Os blocos sempre se moverão com velocidades decrescentes (freando: movimento retardado), porque $a > 0$ significa exatamente acelerações opostas às velocidades que estamos assumindo para os blocos nesse item (nos referencias que adotamos as velocidades dos blocos seriam negativas nesse caso).

ER 2.3) Uma balança, como essas que existem nas farmácias, é colocada no piso horizontal de um elevador. Uma pessoa de massa M sobe na balança para “medir o seu peso”.

Dados: M e g .

a) Faça diagramas de forças para a pessoa e para a balança.

Resumidamente: A Terra puxa a pessoa e a balança para baixo ($M \vec{g}$ e $m \vec{g}$, m é a massa da balança); a pessoa sobe na balança e a empurra para baixo ($\vec{\eta}_{P/B}$); a balança, por sua vez empurra a pessoa para cima ($\vec{\eta}_{B/P}$, reação à $\vec{\eta}_{P/B}$); a balança se apóia no piso do elevador e esse piso empurra a balança para cima ($\vec{\eta}_{E/B}$). Essas forças estão representadas nas Figuras ao lado.



b) Suponha que a pessoa esteja quieta sobre a balança e que o elevador esteja em repouso, calcule a leitura da balança.

A balança é um instrumento para medir massa (ou peso na linguagem equivocada do cotidiano). A balança faz isso medindo o peso, da pessoa nesse caso, e calculando a massa através da relação simples entre massa e peso (basicamente $P \cong 9,8 M$). A balança indica então em uma escala o valor da massa M . Mas, a balança não pode “sentir” ou “sofrer” o peso da pessoa. O peso da pessoa atua na pessoa e não na balança. A balança não pode medir uma força que está atuando em outro corpo. Assim sendo, a balança mede o módulo da força de contato que a pessoa faz na balança, o módulo de $\vec{\eta}_{P/B}$ nesse caso. Medindo $\eta_{P/B}$, a balança infere o valor de Mg e daí o valor de M . Essa inferência só funciona se a pessoa ficar quieta sobre a balança. Se você subir em uma balança de farmácia e ficar pulando sobre ela vai ver que a leitura da balança varia, de acordo com os pulos, mas seu peso não muda enquanto você pula. A balança não mede diretamente o peso. Concluindo, vamos calcular o valor de $\eta_{P/B}$, que é o “peso da pessoa indicado pela balança”. Vamos ver que a leitura da balança vai depender do movimento do elevador. Nesse contexto, podemos chamar $\eta_{P/B}$ de “peso aparente” da pessoa, o peso que a pessoa “aparenta” ter no referencial do elevador, pois a balança indica para a pessoa a massa $\eta_{P/B}/g$.

Nesse primeiro caso, elevador e pessoa em repouso, podemos aplicar a primeira lei de Newton para a pessoa. Usando o eixo y na figura obtemos:

$$\vec{R}_P = \vec{0} \Rightarrow \eta_{B/P} - Mg = 0 \Rightarrow \eta_{B/P} = Mg$$

Utilizando a terceira lei de Newton, obtemos:

$$\eta_{P/B} = \eta_{B/P} = Mg$$

Portanto, a balança vai indicar para a pessoa a massa:

$$\frac{\eta_{P/B}}{g} = \frac{Mg}{g} = M$$

Note que esse resultado se aplica para o caso em que o elevador está se movendo com velocidade constante ($a = 0$), que também está no contexto da primeira lei de Newton.

Concluindo, se o elevador for um referencial inercial (com uma farmácia), uma pessoa dentro dele consegue medir sua massa através de uma balança. Esse é o caso do planeta Terra. Sabemos que a Terra não é exatamente um referencial inercial, por causa de seus movimentos curvos no espaço, mas, as acelerações associadas a esses movimentos são muito pequenas e por isso podemos tomar como uma aproximação muito boa a de que a Terra é um referencial inercial. Assim sendo, uma pessoa aqui na Terra, quando entra em uma farmácia, sobe em uma balança e fica quieta sobre ela, consegue medir sua massa com uma boa precisão. Para melhorar mais ainda essa precisão, a balança pode levar em conta no valor de g a aceleração centrípeta associada à rotação da Terra em torno de seu eixo (utilizando o valor da gravidade aparente g_A , mas lembrando que o valor de g_A depende da latitude). A maior diferença entre os valores de g_A e de g ocorre

sobre a linha do equador e é de cerca de $0,03 \text{ m/s}^2$, podendo ser desprezada em problemas em que não se exige grande precisão numérica. É o que faremos aqui.

c) Suponha que a pessoa esteja quieta sobre a balança e que o elevador esteja subindo com aceleração de módulo a , calcule a leitura da balança.

Nesse caso, elevador e pessoa subindo acelerados, podemos aplicar a segunda lei de Newton para a pessoa. Usando o eixo y na figura obtemos:

$$\vec{R}_P = M \vec{a} \Rightarrow \eta_{B/P} - Mg = M a \Rightarrow \eta_{B/P} = M(g + a)$$

Utilizando a terceira lei de Newton, obtemos:

$$\eta_{P/B} = \eta_{B/P} = M(g + a)$$

Portanto, a balança vai indicar para a pessoa a massa:

$$\frac{\eta_{P/B}}{g} = \frac{M(g + a)}{g} = M \left(1 + \frac{a}{g} \right) > M$$

No elevador subindo acelerado, a pessoa se sente mais pesada, comprimindo mais o piso do elevador, nesse caso comprimindo mais a balança. A balança mede um peso (ou uma massa) aparente maior para a pessoa, que no caso do elevador com $a = 0$. Tudo funciona como se o interior do elevador fosse um mundo com gravidade $g + a$. Essa idéia funciona também para o elevador descendo freando (o que importa aqui é que \vec{a} está para cima, por hipótese).

d) Suponha agora que a pessoa esteja quieta sobre a balança e que o elevador esteja descendo com aceleração de módulo a (para baixo), calcule a leitura da balança.

Nesse caso, elevador e pessoa descendo acelerados, a segunda lei de Newton para a pessoa leva a:

$$\vec{R}_P = M \vec{a} \Rightarrow \eta_{B/P} - Mg = -M a \Rightarrow \eta_{B/P} = M(g - a)$$

Utilizando a terceira lei de Newton, obtemos:

$$\eta_{P/B} = \eta_{B/P} = M(g - a)$$

Portanto, a balança vai indicar para a pessoa a massa:

$$\frac{\eta_{P/B}}{g} = \frac{M(g - a)}{g} = M \left(1 - \frac{a}{g} \right) < M$$

No elevador descendo acelerado, a pessoa se sente mais leve, comprimindo menos o piso do elevador, nesse caso comprimindo menos a balança. A balança mede um peso (ou uma massa) aparente menor para a pessoa, que no caso do elevador com $a = 0$. Tudo funciona como se o interior do elevador fosse um mundo

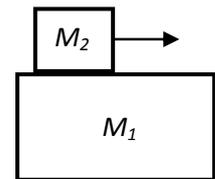
com gravidade $g - a$. Essa idéia funciona também para o elevador subindo freando (o que importa aqui é que \vec{a} está para baixo, por hipótese).

Note que se o elevador estiver em queda livre ($a = g$), obtemos:

$$\eta_{P/B} = 0$$

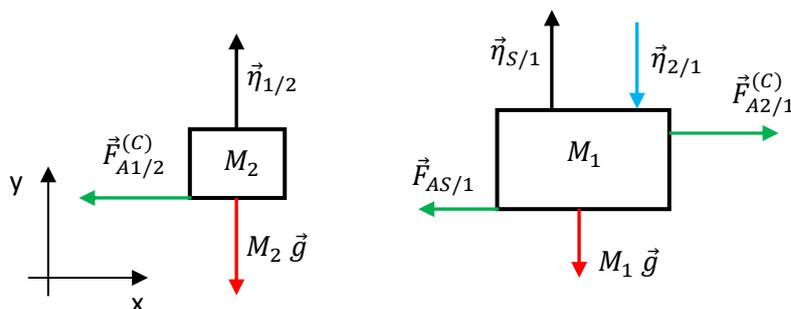
Nesse caso a pessoa não se sente pressionando a balança e seu peso aparente é nulo. A pessoa se sente sem peso. Tudo que está dentro de um elevador em queda livre tem peso aparente nulo. Note, os corpos têm peso (Mg), mas o peso “aparente”, “sentido” e medido por uma balança, é nulo. Essa é a sensação que tem um astronauta dentro de uma nave que orbita a Terra. A nave está em queda livre, como o elevador aqui com $a = g$, e tudo flutua dentro da nave, o astronauta flutua, um copo de água flutua, a água flutua. Nada cai, porque tudo já está caindo de fato, juntamente com a nave. Concluindo: não é correto dizer que não há gravidade dentro do elevador em queda livre e pelo mesmo motivo não é correto dizer que não há gravidade dentro de uma nave que orbita a Terra. Mas, é verdade que dentro do elevador em queda livre e dentro da nave em órbita em torno da Terra a gravidade aparente é nula.

ER 2.4) Um bloco de massa M_1 está apoiado em repouso em uma superfície horizontal com atrito (os coeficientes de atrito são μ_{E1S} e μ_{C1S}). Em um dado instante um segundo bloco de massa M_2 é lançado sobre o bloco 1 e passa deslizar sobre o bloco 1, sob efeito do atrito cinético entre os blocos (coeficientes de atrito μ_{E12} e μ_{C12}).



Dados: M_1 , M_2 , μ_{E1S} , μ_{C1S} , μ_{E12} , μ_{C12} e g .

a) Faça diagramas de forças para os blocos, supondo que o bloco 2 esteja deslizando sobre o bloco 1 no sentido para a direita.



Olhando para as Figuras acima, resumidamente: a Terra puxa os dois blocos para baixo, na vertical ($M_1 \vec{g}$ e $M_2 \vec{g}$); a superfície horizontal onde o bloco 1 está apoiado empurra o bloco 1 para cima ($\vec{n}_{S/1}$); O bloco 2 está em contato sobre o bloco 1 e o empurra para baixo ($\vec{n}_{2/1}$); o bloco 1 responde (ação e reação), empurrando o bloco 2 para cima ($\vec{n}_{1/2}$); o bloco 2 está deslizando sobre o bloco 1 para a direita e o atrito cinético nele atrapalha esse deslizamento ($\vec{F}_{A1/2}^{(C)}$). O bloco 1, por sua vez, é empurrado para a direita pelo

bloco 2, pela ação do atrito nele, a reação à $\vec{F}_{A1/2}^{(C)}$, que chamaremos de $\vec{F}_{A2/1}^{(C)}$. O atrito do bloco 1 com a superfície ($\vec{F}_{AS/1}$) impede ou atrapalha o deslizamento do bloco 1 na superfície.

b) Suponha que o bloco 1 permaneça em repouso. Calcule a relação entre os dados do problema para que isso ocorra.

O bloco 2 está freando e a segunda lei de Newton fornece as equações:

$$\text{Bloco 2: } \mathbf{x}: -F_{A1/2}^{(C)} = M_2 a_2 \Rightarrow -\mu_{C12} \eta_{1/2} = M_2 a_2 \quad | \quad \mathbf{y}: \eta_{1/2} - M_2 g = 0$$

Portanto, o bloco 2 freia com aceleração: $a_2 = -\mu_{C12} g$. O sinal negativo indica apenas que essa aceleração está no sentido $-x$ do referencial adotado na figura.

O bloco 1 está em repouso, por hipótese, e a primeira lei de Newton fornece as equações:

$$\text{Bloco 1: } \mathbf{x}: F_{A2/1}^{(C)} - F_{AS/1}^{(E)} = 0 \quad | \quad \mathbf{y}: \eta_{S/1} - \eta_{2/1} - M_1 g = 0$$

Note que a força de atrito $\vec{F}_{AS/1}$ é uma força de atrito estático nesse caso.

Sabemos que o atrito estático possui um limite máximo. Portanto, o bloco 1 só vai conseguir se manter em repouso se valer, para o atrito entre o bloco 1 e o solo:

$$F_{AS/1}^{(E)} \leq F_{AS/1MAX}^{(E)} = \mu_{E1S} \eta_{S/1}$$

$$\text{Portanto, sabemos que } F_{AS/1}^{(E)} = F_{A2/1}^{(C)} = F_{A1/2}^{(C)} = \mu_{C12} \eta_{1/2} = \mu_{C12} M_2 g \leq \mu_{E1S} \eta_{S/1}$$

Mas, $\eta_{S/1} = \eta_{2/1} + M_1 g = (M_2 + M_1)g$. Concluindo:

$$\mu_{C12} M_2 g \leq \mu_{E1S} (M_1 + M_2)g \Rightarrow \frac{\mu_{C12}}{\mu_{E1S}} \leq \frac{M_1 + M_2}{M_2} = 1 + \frac{M_1}{M_2}$$

Essa é a condição que deve valer entre os parâmetros do problema para que o bloco 1 permaneça em repouso, mesmo sendo empurrado pelo bloco 2, que desliza sobre ele. O caso limite

$$\frac{\mu_{C12}}{\mu_{E1S}} = 1 + \frac{M_1}{M_2}$$

corresponde à situação em que o bloco 1 fica na iminência de deslizar no solo.

c) Suponha que o bloco 1 esteja também deslizando no solo. Calcule o módulo da aceleração dele.

Para o bloco 2 continua valendo:

$$\text{Bloco 2: } \mathbf{x}: -F_{A1/2}^{(C)} = M_2 a_2 \Rightarrow -\mu_{C12} \eta_{1/2} = M_2 a_2 \quad \mathbf{y}: \eta_{1/2} - M_2 g = 0$$

e ele freia com aceleração: $a_2 = -\mu_{C12} g$.

Para o bloco 1, a segunda lei de Newton fornece as equações:

$$\text{Bloco 1: } \mathbf{x}: F_{A2/1}^{(C)} - F_{AS/1}^{(C)} = M_1 a_1 \qquad \mathbf{y}: \eta_{S/1} - \eta_{2/1} - M_1 g = 0$$

Note que a força de atrito $\vec{F}_{AS/1}^{(C)}$ é uma força de atrito cinético nesse caso. Portanto, ficamos com:

$$F_{A2/1}^{(C)} - F_{AS/1}^{(C)} = \mu_{C12} M_2 g - \mu_{C1S} (M_1 + M_2) g = M_1 a_1$$

Concluindo:

$$a_1 = \left[\frac{M_2}{M_1} (\mu_{C12} - \mu_{C1S}) - \mu_{C1S} \right] g$$

Note que se, por exemplo, não houver atrito entre o bloco 1 e o piso ($\mu_{C1S} = 0$), então

$$a_1 = \frac{M_2}{M_1} \mu_{C12} g > 0$$

ou seja, o bloco 1 vai acelerar para a direita, aumentando sua velocidade.

Note que a aceleração a_1 pode ser positiva, nula ou negativa, dependendo dos valores dos parâmetros. $a_1 = 0$ significa que o bloco 1 se move com velocidade constante, enquanto o bloco 2 desliza sobre ele. Quando o bloco 2 parar de deslizar, o bloco 1 começará a frear, sob ação de $\vec{F}_{AS/1}^{(C)}$. O caso $a_1 < 0$ significa que o bloco 1 freia, enquanto o bloco 2 desliza sobre ele e continuará freando, com outra aceleração, quando o bloco 2 parar de deslizar. Esse exemplo mostra que é errado pensarmos que o atrito sempre se opõe a movimento. É verdade que isso é bem comum, mas vemos aqui que a força de atrito $\vec{F}_{A2/1}^{(C)}$ atua no mesmo sentido do movimento do bloco 1, empurrando-o para a frente.

d) Vamos considerar agora que o bloco 2 parou de deslizar sobre o bloco 1 e que os dois blocos passaram a deslizar juntos. Calcule o módulo da aceleração dos blocos.

Os dois blocos se movendo juntos funcionam como se fossem um só bloco, de massa $M_1 + M_2$. Imagine então esse bloco “total”, cujo peso é $\vec{P}_{12} = (M_1 + M_2)\vec{g}$, e em que atuam também, uma força normal $\vec{\eta}_{S/1}$ e uma força de atrito cinético $\vec{F}_{AS/1}^{(C)}$, ambas produzidas pela ação do piso horizontal no bloco 1. A segunda lei de Newton diz que:

$$2 \text{ Blocos: } \mathbf{x}: -F_{AS/1}^{(C)} = (M_1 + M_2) a_{12} \qquad \mathbf{y}: \eta_{S/1} - (M_1 + M_2)g = 0$$

$$\text{Portanto: } -\mu_{C1S} \eta_{S/1} = (M_1 + M_2) a_{12} \Rightarrow -\mu_{C1S} (M_1 + M_2) g = (M_1 + M_2) a_{12}$$

$$\text{Concluindo: } a_{12} = -\mu_{C1S} g$$

Apenas como exercício, podemos calcular essa aceleração com base nos digramas de forças para os blocos mostrados anteriormente, tendo apenas o cuidado de trocar as forças $\vec{F}_{A1/2}^{(C)}$ e $\vec{F}_{A2/1}^{(C)}$ por $\vec{F}_{A1/2}^{(E)}$ e $\vec{F}_{A2/1}^{(E)}$,

já que nesse caso o atrito entre os blocos seria estático e não cinético. A segunda lei de Newton fornece as equações:

$$\text{Bloco 2: } \mathbf{x}: -F_{A1/2}^{(E)} = M_2 a_2 \qquad \mathbf{y}: \eta_{1/2} - M_2 g = 0$$

$$\text{Bloco 1: } \mathbf{x}: F_{A2/1}^{(E)} - F_{AS/1}^{(C)} = M_1 a_1 \qquad \mathbf{y}: \eta_{S/1} - \eta_{2/1} - M_1 g = 0$$

Note, não podemos e nem devemos usar aqui que $F_{A1/2}^{(E)} = \mu_{E12} \eta_{1/2}$ porque isso não é verdade. Apenas se bloco 2 estivesse na iminência de deslizar sobre o bloco 1 poderíamos dizer que $F_{A1/2}^{(E)} = F_{A1/2MAX}^{(E)} = \mu_{E12} \eta_{1/2}$. Mas, não existe essa hipótese aqui. Estamos considerando apenas que o bloco 2 não está deslizando sobre o bloco 1. A força de atrito estático no bloco 2 pode, portanto, ter qualquer valor tal que $F_{A1/2}^{(E)} \leq \mu_{E12} \eta_{1/2}$. Analogamente para a reação $F_{A2/1}^{(E)}$.

O fato dos dois blocos estarem se movendo juntos nos permite assumir que $a_1 = a_2 = a_{12}$. Portanto:

$$\text{Bloco 2: } \mathbf{x}: -F_{A1/2}^{(E)} = M_2 a_{12} \qquad \mathbf{y}: \eta_{1/2} - M_2 g = 0$$

$$\text{Bloco 1: } \mathbf{x}: F_{A2/1}^{(E)} - \mu_{C1S} \eta_{S/1} = M_1 a_{12} \qquad \mathbf{y}: \eta_{S/1} - \eta_{2/1} - M_1 g = 0$$

Apelando para a terceira lei de Newton: $F_{A1/2}^{(E)} = F_{A2/1}^{(E)}$.

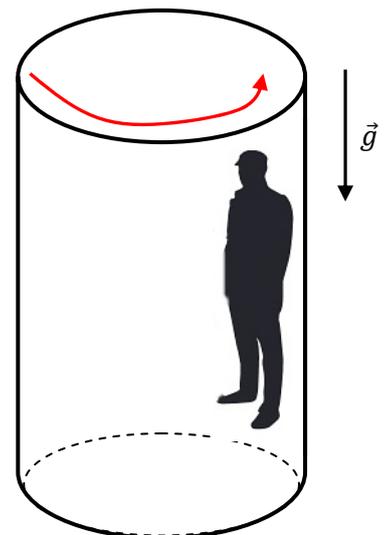
Concluindo:

$$-M_2 a_{12} - \mu_{C1S} (M_1 + M_2) g = M_1 a_{12} \Rightarrow a_{12} = -\mu_{C1S} g$$

ER 2.5) Em um brinquedo de parque de diversões, uma pessoa de massa M fica em contato com a parede interna de um cilindro de raio r que gira com velocidade angular constante. A parede é vertical e mesmo assim, sem nenhum apoio para os pés a pessoa não cai. Ela fica apenas apoiada na parede, girando juntamente com o cilindro. O coeficiente de atrito estático entre a pessoa e a parede do cilindro é μ_E . A idéia está ilustrada na figura ao lado.

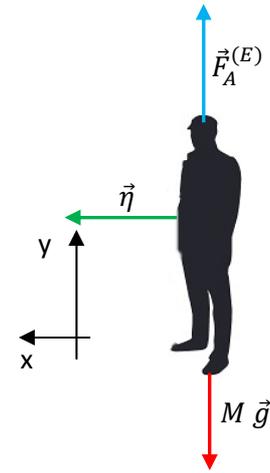
Dados: M , r , μ_E e g .

Calcule a velocidade mínima de rotação que o cilindro deve ter para que a pessoa não deslize e caia.



Vamos iniciar fazendo um diagrama de forças para a pessoa, conforme a Figura abaixo: a Terra puxa a pessoa para baixo ($M \vec{g}$). Enquanto gira, a parede do cilindro possui uma aceleração centrípeta, que é transmitida para a pessoa que está encostada nessa parede, através de uma força normal de contato ($\vec{\eta}$), que é uma força centrípeta. Com isso, a parede do cilindro empurra a pessoa na

direção radial para dentro ($\vec{\eta}$). A pessoa tende a deslizar para baixo na parede do cilindro, mas a força de atrito estático ($\vec{F}_A^{(E)}$) impede esse deslizamento (por hipótese). Estamos supondo que o cilindro, e a pessoa, estão girando com velocidade angular constante. Se não fosse o caso, se a velocidade não fosse constante, teria que haver uma outra força (de atrito estático) na direção tangencial, para garantir a aceleração tangencial da pessoa (e da parede do cilindro).



A pessoa está em MCU e a resultante sobre ela deve ser uma resultante centrípeta. No nosso referencial a direção x é exatamente a direção centrípeta e, portanto, sendo a a aceleração centrípeta, a segunda lei de Newton aplicada à pessoa fornece as equações:

$$x: \eta = M a \quad y: F_A^{(E)} - M g = 0$$

Supondo que o cilindro esteja girando com velocidade angular ω ($a = \omega^2 r$) ficamos com:

$$\eta = M \omega^2 r$$

Notamos que quanto menor a velocidade ω , menos a parede do cilindro pressiona a pessoa (e vice-versa). Para $\omega=0$, por exemplo, não haveria a força η .

Na direção y o peso está sendo equilibrado pela força de atrito estático. Mas a força de atrito estático possui um limite superior, dado por:

$$F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta$$

Podemos notar agora porque a velocidade de rotação do cilindro influencia a tendência que a pessoa tem de deslizar para baixo. Quanto menor ω , menor η e, portanto, menor $F_{A\text{MAX}}^{(E)}$. Mas, $F_A^{(E)}$ tem que equilibrar o peso da pessoa, para que ela não escorregue para baixo. Pode haver o caso, então, da velocidade ser tão baixa, que a força de atrito necessária para equilibrar o peso não possa ser produzida, basicamente porque:

$$F_A^{(E)} = M g > F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E \eta = \mu_E M \omega^2 r$$

Resumindo, para que a pessoa não deslize, o atrito estático tem que satisfazer à desigualdade (de fato tudo tem que satisfazer a uma desigualdade similar, tudo tem que ser menor que seu valor máximo, mas nem tudo possui um limite superior finito):

$$F_A^{(E)} \leq F_{A\text{MAX}}^{(E)}$$

Nesse caso, essa desigualdade fica:

$$F_A^{(E)} = M g \leq F_{A\text{MAX}}^{(E)} = \mu_E M \omega^2 r$$

ou seja,

$$Mg \leq \mu_E M \omega^2 r$$

e portanto

$$\mu_E \omega^2 r \geq g$$

Concluindo, para que haja atrito suficiente para equilibrar o peso da pessoa, tem que existir força normal (contato) suficiente e isso pressupõe que haja velocidade de rotação suficiente. A velocidade satisfaz à desigualdade:

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_E r}}$$

A menor velocidade de rotação aceitável (para a pessoa não deslizar) seria:

$$\omega_{MIN} = \sqrt{\frac{g}{\mu_E r}}$$

Note que esse resultado independe da massa da pessoa, mas depende da roupa que a pessoa estiver usando, através do μ_E . Uma pessoa muito “lisa” teria dificuldade de aproveitar esse brinquedo.

Para dar um exemplo numérico, suponha uma pessoa de massa $M = 70$ kg. Vamos supor que $\mu_E = 0,8$, $r = 5$ m e $g = 9,8$ m/s².

Para que essa pessoa não escorregue, tem que atuar nela uma força de atrito estático de magnitude:

$$F_A^{(E)} = Mg \cong 686 \text{ N}$$

A força de atrito estático máxima nesse caso seria:

$$F_{AMAX}^{(E)} = \mu_E M \omega^2 r = 280 \omega^2$$

e a velocidade mínima seria:

$$\omega_{MIN} = \sqrt{\frac{g}{\mu_E r}} \cong 1,57 \text{ rad/s}$$

Considere que o cilindro esteja girando com $\omega = 1$ rad/s. Nesse caso:

$$F_{AMAX}^{(E)} = 280 \omega^2 = 280 \text{ N}$$

Então, precisamos de 686 N de atrito para segurar a pessoa, mas o atrito máximo que pode ser produzido é de 280 N. Resultado, a pessoa desliza para baixo, sob ação do atrito cinético.

Considere agora que o cilindro esteja girando com $\omega = 2$ rad/s. Nesse caso:

$$F_{AMAX}^{(E)} = 280 \omega^2 = 1.120 \text{ N}$$

Agora precisamos de 686 N de atrito e o atrito máximo que pode ser produzido é de 1120 N. Resultado: o atrito estático será de 686 N e a pessoa ficará girando tranquilamente, sem a menor possibilidade de escorregar para baixo.

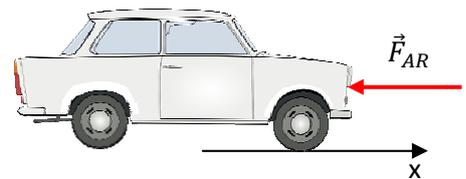
Antes de desligar o brinquedo, deve ser acionado um apoio para os pés da pessoa, para que ela não escorregue e caia enquanto o cilindro vai parando de girar.

ER 2.6) Um carro de massa M está fazendo uma curva circular de raio r em uma estrada horizontal. Discuta o papel do atrito entre os pneus do carro e o asfalto nesse movimento.

Um carro só consegue se mover no asfalto por causa do atrito estático entre os pneus e o asfalto. O atrito é estático, mesmo com o carro se movendo, porque estamos supondo que o carro não está derrapando, ou deslizando, no asfalto. Nesse caso, os pneus apenas rolam no piso, sem deslizar, e o atrito pneus/asfalto é estático. Havendo qualquer derrapagem, o atrito pneus/asfalto passa para o regime cinético. Não vamos considerar esse caso (arbitrário) de derrapagem aqui.

Antes de entrar na discussão do carro fazendo a curva, vamos considerar o papel do atrito pneus/asfalto no movimento de um carro em uma estrada reta. Pelo fato de se mover no ar, o carro já sofre uma força oposta ao seu movimento, a força de arraste com o ar. Essa força é tanto maior quanto maior for a velocidade do carro, e pode ser minimizada, mas nunca anulada, através de desenhos aerodinâmicos. Além disso, há também o atrito de rolamento nos pneus, que é pequeno, para pneus bem calibrados e estradas razoavelmente rígidas, e que por isso vamos desprezar aqui.

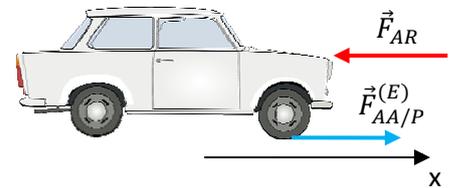
A Figura ao lado mostra um carro se movendo para a direita, apoiado no piso de asfalto horizontal (não mostrado). A força de arraste é \vec{F}_{AR} . Para simplificar, não estamos mostrando nessa figura o peso do carro e a força normal que o piso faz no carro. Essas duas forças estão se cancelando mutuamente. Essa seria a situação de um carro desligado, se movendo por inércia, na presença do arraste. Obviamente ele vai parar após alguns instantes, pois há uma força resultante, e uma aceleração, oposta à velocidade (a velocidade está no sentido $+x$). De fato, a segunda lei de Newton, e o referencial mostrado na figura, fornecem a equação:



$$-F_{AR} = M a$$

A aceleração é negativa, oposta à velocidade. Note que a aceleração não seria constante nesse caso, porque a medida que o carro fosse parando, $F_{AR} \rightarrow 0$ e $a \rightarrow 0$.

Vamos considerar agora que o carro está ligado. Se o motorista quer manter o carro se movendo para a frente, deve haver no carro uma força para a frente, que vença a força \vec{F}_{AR} . Essa força é exatamente a força de atrito estático que o asfalto produzirá nos pneus do carro, quando o motorista pisar no acelerador. Os pneus que estão acoplados ao motor serão forçados a girar no sentido horário (na figura ao lado, para um carro se movendo para a direita), tendendo a deslizar, a patinar, no asfalto. Havendo atrito suficiente entre os pneus e o asfalto, esse deslizamento será impedido e com isso os pneus vão empurrar o chão para trás (-x). O chão, por sua vez, vai empurrar esses pneus para frente (+x) (ação e reação). Vamos chamar essa força de $\vec{F}_{AA/P}^{(E)}$. A Figura ao lado ilustra um desses pneus, que sofre tração, girando no sentido horário, empurrando o piso para trás, e sendo empurrado para frente. Essa força para frente não existe nos pneus que não sofrem tração. Eles apenas rolam, sob efeito do pequeno atrito de rolamento (que é para trás nesse caso e que vamos desprezar). Em um carro de tração dianteira, por exemplo, somente os dois pneus da frente possuem uma força como $\vec{F}_{AA/P}^{(E)}$. Resumindo, um carro que está acelerando para a frente tem o diagrama de forças como mostrado na Figura ao lado (omitindo o peso do carro e a força normal). Considere que $\vec{F}_{AA/P}^{(E)}$ já é a força de atrito resultante nos (dois ou quatro) pneus que tem tração.



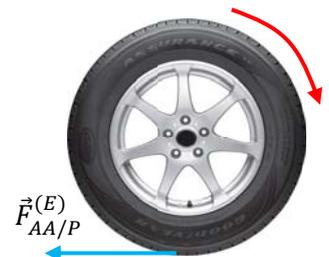
Da segunda lei de Newton:

$$-F_{AR} + F_{AA/P}^{(E)} = M a$$

Supondo que $F_{AA/P}^{(E)} > F_{AR}$, o carro vai acelerar no sentido +x. Para manter a velocidade do carro constante, basta pisar no acelerador de tal forma que $F_{AA/P}^{(E)} = F_{AR}$.

Para um carro freando, a força de atrito nos pneus deve inverter de sentido (se o motorista não quiser contar apenas com a pequena frenagem produzida por F_{AR}). Quando o motorista pisa no freio, a tendência do carro é deslizar para frente no asfalto, devido à inércia. Ele deslizaria de fato se o asfalto estivesse escorregadio. Na presença de atrito, a tendência dos pneus deslizarem para frente é impedida por uma força de atrito nos pneus apontando para trás, produzida pelo contato pneus/asfalto.

A Figura ao lado ilustra essa situação: o pneu rola para a direita, gira no sentido horário, mas possui uma tendência de deslizar para a direita (porque o carro está freando). A força de atrito $\vec{F}_{AA/P}^{(E)}$ impede esse



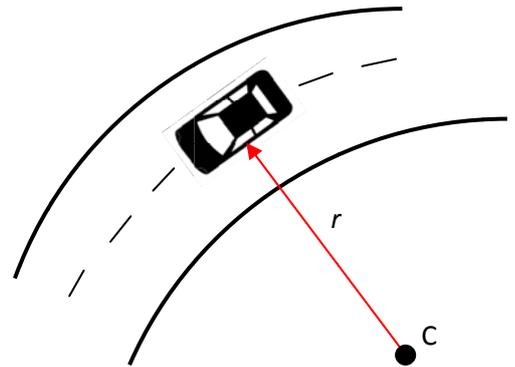
deslizamento. Invertendo o sentido de $\vec{F}_{AA/P}^{(E)}$ no diagrama de forças do carro mostrado anteriormente, a segunda lei de Newton fornece:

$$-F_{AR} - F_{AA/P}^{(E)} = M a$$

Agora a aceleração é negativa, oposta à velocidade, e o carro freia. Nesse caso $\vec{F}_{AA/P}^{(E)}$ atua nos quatro pneus do carro, já que todos os pneus possuem freio.

Concluindo: pisando no acelerador e no freio o motorista controla a força de atrito estático que o asfalto faz nos pneus e, por conseguinte, controla a velocidade do carro.

Vamos considerar agora o foco desse exercício, que é o papel do atrito pneu/asfalto quando um carro faz uma curva. A situação que queremos discutir está ilustrada na figura ao lado, em uma visão de cima. A curva é um arco de círculo de raio r e centro no ponto C.

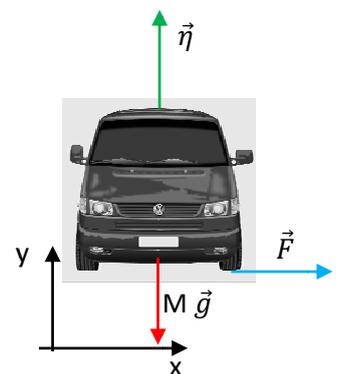


Vamos considerar um carro que faz essa curva com velocidade de módulo constante e, nesse caso, a resultante tangencial das forças no carro é nula. A Figura ao lado ilustra a mesma visão do carro fazendo a curva, mas uma visão de frente. Considere que o carro está saindo do papel com velocidade de módulo V . O carro está fazendo a curva com centro em C e raio r .



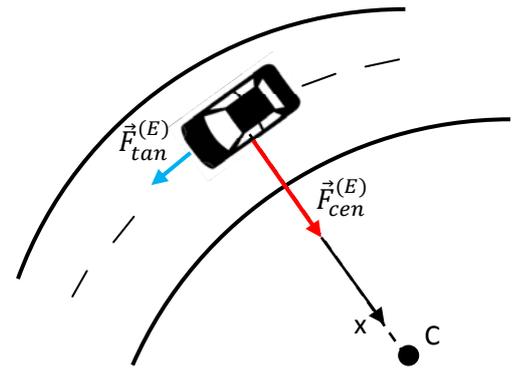
A segunda lei de Newton afirma que para executar um MCU, deve haver no corpo uma força resultante centrípeta. A figura ao lado mostra um diagrama de forças para o carro. Peso e normal se cancelam, supondo que o carro não esteja afundando no asfalto.

Só resta, portanto, a força \vec{F} , que deve apontar para o centro C ($\vec{R} = \vec{F}$). Qual a natureza da força \vec{F} ? A força \vec{F} é paralela ao asfalto, e às superfícies dos pneus em contato com ele. Dadas as opções a que nós já estamos habituados, só nos resta concluir que \vec{F} é uma força de atrito radial, uma força de atrito estático, supondo que o carro não esteja derrapando na pista: $\vec{F} = \vec{F}_A^{(E)}$.



Ao virar o volante na direção da curva, os pneus dianteiros também viram na direção da curva, e o motorista do carro direciona a força de atrito estático nos pneus para o centro C, de tal forma que a força de

atrito estático ganha uma componente centrípeta, apontando para C. Essa força de atrito centrípeta atua nos quatro pneus, pois todos têm a tendência de deslizar para fora da curva. O diagrama ao lado mostra as duas componentes da força de atrito pneus/asfalto: $\vec{F}_{tan}^{(E)}$ é tangente à curva e é responsável por manter constante o módulo da velocidade do carro na curva. $\vec{F}_{cen}^{(E)}$ é centrípeta e é responsável por variar a direção da velocidade do carro na curva, mantendo-a tangente ao círculo de raio r .



A componente tangencial $\vec{F}_{tan}^{(E)}$ desempenha o papel de vencer o arraste do ar e manter a velocidade do carro. Na prática esse arraste não é muito grande e podemos supor que $F_{tan}^{(E)} = 0$, restando apenas a força de atrito centrípeta, indispensável para que o carro faça a curva.

Obtemos da segunda lei de Newton (note que x é a direção centrípeta e y é a vertical):

$$x: F_{cen}^{(E)} = M a_x = M \frac{V^2}{r} \quad y: \eta - M g = 0$$

Notamos que, para um dado carro (M) e uma dada curva (r), quanto maior a velocidade V , maior deve ser a força $F_{cen}^{(E)}$. Mas, sendo $\vec{F}_{cen}^{(E)}$ uma força de atrito estático, há um limite máximo para sua magnitude. Portanto, deve haver um limite máximo na velocidade com que se consegue fazer uma determinada curva. De fato, sabemos que:

$$F_{cen}^{(E)} = M \frac{V^2}{r} \leq F_{cen\ MAX}^{(E)} = \mu_E \eta = \mu_E M g$$

Portanto:

$$\frac{V^2}{r} \leq \mu_E g$$

As condições dos pneus e do asfalto determinam o valor do coeficiente μ_E e, portanto, o lado direito da desigualdade acima está fixo por essas condições. Aumentando V , temos que aumentar r , para continuar valendo a desigualdade. Isso significa que somente conseguimos fazer curvas mais abertas (lembre-se que uma estrada reta corresponde ao limite $r \rightarrow \infty$) em altas velocidades. Diminuindo V podemos diminuir r e manter a desigualdade, ou seja, podemos fazer curvas mais fechadas em baixas velocidades. É o comportamento que já esperávamos, que observamos no mundo real, e que é quantificado aqui. Para uma dada curva, ou seja, um dado r , a velocidade máxima é dada por:

$$V_{MAX} = \sqrt{\mu_E r g}$$

Note que essa velocidade máxima não depende da massa do veículo, vale para um carro pequeno de passeio e para um caminhão. Mas depende sim das condições dos pneus do carro e do asfalto. Melhores condições, maior μ_E , implicam em maior velocidade permitida.

Caso o carro comece a derrapar na curva, a força de atrito passa para o regime cinético ($F_{cen}^{(E)} \rightarrow F_{cen}^{(C)}$), o que implica, como já vimos, em uma queda abrupta na intensidade da força de atrito (porque em geral $\mu_C < \mu_E$). Menor força resultante centrípeta F , para uma mesma velocidade V , implica em maior raio de curvatura, porque vale:

$$F = M \frac{V^2}{r}$$

Portanto, nesse caso, o carro passa a fazer uma curva de raio maior, saindo pelo acostamento.

Essa idéia está ilustrada na figura ao lado. Havendo no carro uma força de atrito estático centrípeta de módulo F_1 , o motorista tinha esperança de fazer a curva de raio r_1 , com velocidade V :

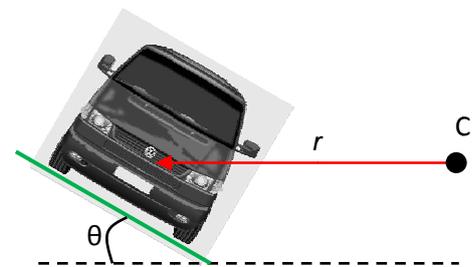
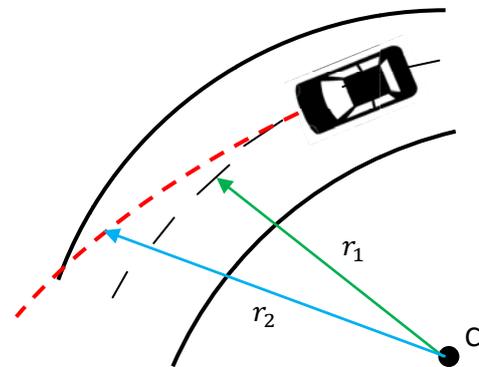
$$F_1 = M \frac{V^2}{r_1}$$

Começando a derrapagem, na mesma velocidade V , a força de atrito passa para um valor F_2 (regime cinético do atrito), tal que $F_2 < F_1$. Daí, o carro passa a fazer uma curva mais aberta (curva vermelha), de raio $r_2 > r_1$, tal que:

$$F_2 = M \frac{V^2}{r_2}$$

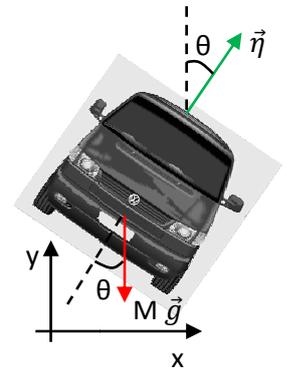
No caso limite em que o atrito desaparecesse completamente ($F_2 \rightarrow 0$), se o carro encontrasse uma poça de óleo na pista, por exemplo, valeria $r_2 \rightarrow \infty$ e o carro sairia pela reta tangente à curva de raio r_1 .

Essa dependência total do atrito pneus/asfalto para a realização de uma curva desaparece se a pista tiver uma inclinação para dentro da curva. No site do DNIT (Departamento Nacional de Estradas de Rodagem), podemos encontrar informações sobre os valores recomendados para essas inclinações. Quanto menor o raio da curva, ou seja, quanto mais fechada a curva, maior é a inclinação recomendada. A figura ao lado ilustra um carro de frente, fazendo uma curva de raio r com centro em C , em uma pista inclinada de um ângulo θ . Nesse caso,



mesmo na ausência de atrito, o carro consegue fazer a curva, com uma velocidade específica, que iremos determinar.

Vamos considerar então, para simplificar, que não há atrito entre os pneus e o asfalto. Nesse caso, o diagrama de forças fica como mostrado na figura ao lado. Só há o peso a força normal atuando no carro. Note que a inclinação θ da pista é também o ângulo entre $\vec{\eta}$ e a vertical e entre o peso e $\vec{\eta}$ (já que o peso é vertical). No referencial adotado, a direção do eixo x é exatamente a direção centrípeta e, portanto, a segunda lei de Newton leva a:



$$x: \eta \sin(\theta) = M a_x = M \frac{v^2}{r}$$

$$y: \eta \cos(\theta) - M g = 0$$

Dividindo a primeira equação pela segunda obtemos:

$$\tan(\theta) = \frac{v^2}{g r}$$

Portanto:

$$V = \sqrt{g r \tan(\theta)}$$

Essa é a única velocidade que garante que esse carro faça essa curva, se mantendo na mesma altura y (já que fizemos $a_y = 0$), na ausência de atrito.

De fato, em um caso mais geral, em que não consideramos de partida que $a_y = 0$, as equações acima ficam:

$$x: \eta \sin(\theta) = M a_x = M \frac{v^2}{r}$$

$$y: \eta \cos(\theta) - M g = M a_y$$

Fazendo novamente a divisão ficamos com:

$$\tan(\theta) = \frac{V^2/r}{g + a_y}$$

Portanto:

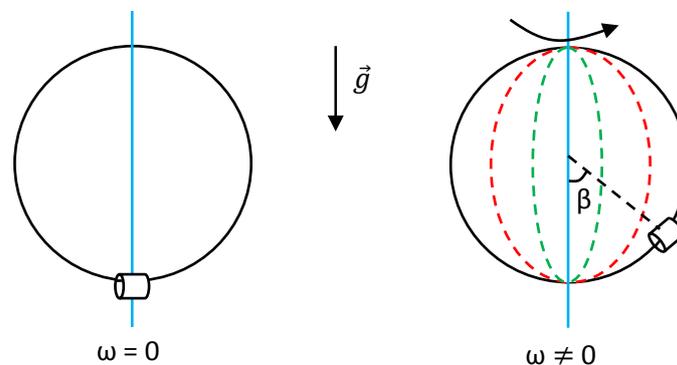
$$a_y = \frac{V^2}{r \tan(\theta)} - g$$

Note então que, para $V = \sqrt{g r \tan(\theta)}$, vale $a_y = 0$, como já sabíamos. Para velocidades baixas, $V < \sqrt{g r \tan(\theta)}$, vale $a_y < 0$, o que significa que o carro escorrega para baixo na pista inclinada. No caso contrário, $V > \sqrt{g r \tan(\theta)}$, vale $a_y > 0$, o que significa que o carro escorrega para cima na pista inclinada.

Portanto, pisando no acelerador e no freio, o motorista pode subir e descer na pista inclinada, posicionando o carro na altura que ele desejar.

No caso mais geral, e mais realista, em que a pista possui uma inclinação e há a presença do atrito pneus/asfalto, as duas forças $\vec{\eta}$ e $\vec{F}_A^{(E)}$ vão contribuir para a resultante centrípeta, e para a aceleração centrípeta, auxiliando o carro a fazer a curva.

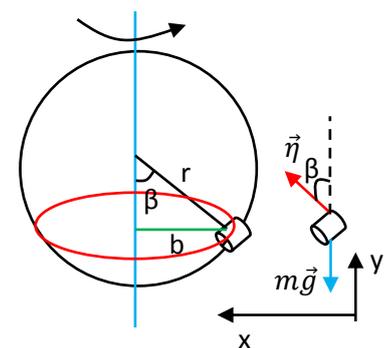
ER 2.7) Um pequeno anel de massa m é colocado em um aro de raio r , contido em um plano vertical. O fio do aro passa por dentro do anel, de tal forma que o anel pode “correr” no aro livremente (desprezando o atrito cinético anel/aro). Vamos considerar que o aro gira em torno de um eixo vertical que passa por seu centro. Nesse caso, podemos mostrar que o anel pode se manter em uma altura β (ver figura), sem escorregar para baixo. A situação está ilustrada na figura abaixo.



Na primeira Figura o aro está parado e o anel escorrega para a posição mais baixa. Não há outra posição de equilíbrio para o anel (se desconsiderarmos o caso em que o anel estivesse na posição mais alta do aro). Havendo rotação do aro, com velocidade $\omega \neq 0$ em torno do eixo vertical (azul), o anel pode permanecer girando, sem escorregar para baixo, em uma órbita circular a uma altura $\beta \neq 0$. Note que para $\omega = 0$, só vale $\beta = 0$. O que queremos calcular aqui é exatamente a função $\beta(\omega)$, ou seja, a função que dá a altura β para uma dada velocidade ω . Para isso vamos aplicar a segunda lei de Newton à órbita circular do anel. Essa órbita circular está mostrada na Figura ao lado (em vermelho), juntamente com o diagrama de forças do anel. Note, enquanto o aro gira, o anel percorre um círculo (MCU) em um plano horizontal (com velocidade angular ω) de raio b tal que:

$$b = r \sin(\beta)$$

As forças que atuam no anel são apenas o peso $m\vec{g}$ e a força normal de contato $\vec{\eta}$ que o aro faz no anel. $\vec{\eta}$ é ortogonal às superfícies que estão em contato, em particular à superfície do aro, ou seja, $\vec{\eta}$ está na



direção do raio r . Aplicando a segunda lei de Newton ao MCU do anel obtemos (note que x é a direção centrípeta):

$$\text{Em } x: \eta \sin(\beta) = m a = m \omega^2 b = m \omega^2 r \sin(\beta)$$

$$\text{Em } y: \eta \cos(\beta) - m g = 0$$

Vemos que para qualquer ω essas equações são satisfeitas por $\beta = 0$ e $\eta = m g$, ou seja, mesmo com o aro girando o anel pode permanecer na parte mais baixa do aro, se for colocado nessa posição. Essa é uma solução já esperada. O que pretendemos aqui é procurar outras soluções para essas equações.

Supondo que $\beta \neq 0$ e dividindo a segunda equação pela primeira obtemos:

$$\cos(\beta) = \frac{g}{\omega^2 r}$$

Para ficar claro o significado dessa equação vamos supor que você monte um experimento que realize a situação descrita aqui. Você constrói um aro de arame de raio $r = 10 \text{ cm}$ ($0,1 \text{ m}$) com o arame passando por dentro de um pequeno anel deslizante. Nesse caso, como $g \cong 10 \text{ m/s}^2$, a equação acima fica:

$$\cos(\beta) = \frac{10}{0,1 \omega^2} = \frac{100}{\omega^2}$$

Daí você gira o aro com uma velocidade $\omega = 1 \text{ rad/s}$ e obtém:

$$\cos(\beta) = 100$$

Você pega uma calculadora para calcular o valor de β , você digita 100 e digita \cos^{-1} (ou arccos). Se você fizer isso na calculadora científica do Windows ele dá como resposta “Entrada inválida”. Não existe nenhum ângulo (real) cujo cosseno valha 100. De fato, o cosseno é uma função limitada entre o valor mínimo -1 e o valor máximo $+1$. Portanto, no caso prático que estamos considerando aqui, vale a seguinte desigualdade:

$$\cos(\beta) = \frac{100}{\omega^2} \leq 1$$

Ou seja:

$$\omega \geq 10 \text{ rad/s}$$

O significado desse resultado é que o anel não fica na posição mais baixa apenas quando o aro está parado. Para $\omega < 10 \text{ rad/s}$ só há uma solução para o ângulo β , que é o caso trivial $\beta = 0$, o anel sempre fica na parte mais baixa do aro (isso inclui também o caso $\omega = 10 \text{ rad/s}$, que é fronteiroço). Já para $\omega > 10 \text{ rad/s}$ há duas soluções para β , incluindo uma solução não nula. O anel pode permanecer elevado no aro, sem deslizar para baixo, desde que a rotação se mantenha. Por exemplo, para $\omega = 20 \text{ rad/s}$, obtemos

$$\cos(\beta) = \frac{100}{400} \Rightarrow \beta \cong 75,5^\circ$$

Voltando ao caso geral, para existir um $\beta \neq 0$ deve valer então a desigualdade

$$\cos(\beta) = \frac{g}{\omega^2 r} < 1$$

Ou seja

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Para $\omega \leq \sqrt{g/r}$ fica claro que a única solução é $\beta = 0$.

Os gráficos de $\cos(\beta)$ versus ω e de β versus ω ficam como mostrados ao lado. Para baixas velocidades só valem as soluções $\cos(\beta) = 1$ e $\beta = 0$. Para

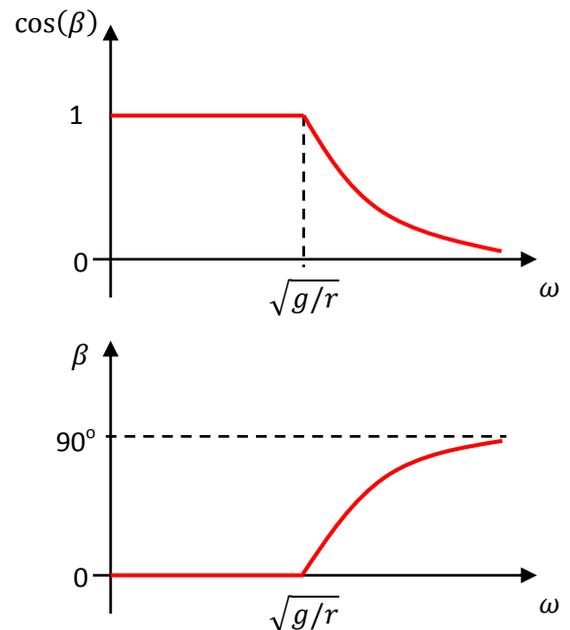
$$\omega > \sqrt{\frac{g}{r}}$$

começa a valer também a solução

$$\cos(\beta) = \frac{g}{\omega^2 r}$$

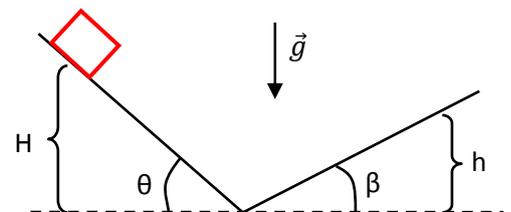
Essa solução vai assintoticamente para $\cos(\beta) = 0$ quando $\omega \rightarrow \infty$. Analogamente, olhando o gráfico de β versus ω , vemos que para baixas velocidades $\beta = 0$. Depois β começa a crescer, significando que o anel vai subindo no aro, à medida que a velocidade cresce. Quando $\omega \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow 90^\circ$, ou seja, o anel fica girando em um círculo de raio r , o raio do aro. Vale notar que a solução $\beta = 0$ existe também para

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{r}}$$



ER 2.8) Um bloco de massa M desliza descendo em um plano inclinado de inclinação θ e depois passa a subir deslizando em um outro plano inclinado de inclinação β . O bloco parte do repouso de uma altura inicial H . O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e as superfícies dos planos inclinados é μ_c . A situação está ilustrada na figura ao lado.

Dados: $M, \theta, \beta, H, \mu_c$ e g .



Calcule a altura máxima h que o bloco vai subir no plano de inclinação β .

A idéia é que o bloco vai partir do repouso e cair cada vez mais rápido, até que ele vai começar a subir, subindo cada vez mais lentamente, até parar na altura h . Há, portanto, dois MRUVs em sequência. Vamos calcular a velocidade final do primeiro MRUV e introduzir essa velocidade como sendo a velocidade inicial do segundo MRUV. A velocidade final do segundo MRUV será igualada a zero, para definir h como sendo a altura máxima que o bloco atinge.

Vamos começar fazendo um diagrama de forças para o bloco enquanto ele desce. No referencial mostrado na Figura ao lado a segunda lei de Newton fornece as equações:

$$M g \sin(\theta) - F_A^{(C)} = M a_{\text{desce}}$$

$$-M g \cos(\theta) + \eta = 0$$

Usando a lei do atrito cinético, obtemos:

$$M g \sin(\theta) - \mu_C M g \cos(\theta) = M a_{\text{desce}}$$

Portanto:

$$a_{\text{desce}} = g [\sin(\theta) - \mu_C \cos(\theta)]$$

Essa é a aceleração do primeiro MRUV, na descida do bloco. Estamos considerando apenas casos em que $a_{\text{desce}} > 0$, ou seja, $\sin(\theta) - \mu_C \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \tan(\theta) > \mu_C$. Somente nesses casos, em que a inclinação é grande o suficiente e/ou o atrito é pequeno o suficiente, o bloco vai escorregar para baixo a partir do repouso e aumentar sua velocidade. De fato, para o bloco partir do repouso e deslizar ele deve ser capaz de vencer o atrito estático, ou seja, deve valer $\tan(\theta) > \mu_E$. Como $\mu_E > \mu_C$, então, fica claro que estamos supondo sempre $\tan(\theta) > \mu_C$.

Vamos aproveitar a oportunidade e calcular a aceleração no segundo MRUV.

A Figura ao lado mostra o diagrama de forças para o bloco enquanto ele sobe. Adotamos um referencial com eixo x para cima ao longo da superfície do plano inclinado. Agora a segunda lei de Newton fornece as equações:

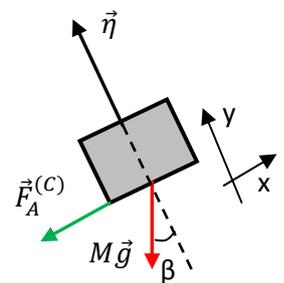
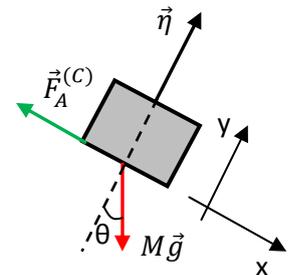
$$-M g \sin(\beta) - F_A^{(C)} = M a_{\text{sobe}}$$

$$-M g \cos(\beta) + \eta = 0$$

Portanto:

$$a_{\text{sobe}} = -g [\sin(\beta) + \mu_C \cos(\beta)]$$

O sinal negativo em a_{sobe} reflete o fato de que enquanto o bloco sobe a aceleração está apontando para baixo, freando o movimento do bloco.



Vamos calcular agora a velocidade final V_F do primeiro MRUV, sabendo que o bloco parte do repouso.

Das equações para o MRUV obtemos:

$$V(t) = V_0 + a t \Rightarrow V_F = 0 + a_{\text{desce}} t$$

$$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \Delta x_d = \frac{1}{2} a_{\text{desce}} t^2$$

sendo Δx_d o deslocamento (positivo) do bloco ao longo do eixo x na descida.

Eliminando o tempo obtemos:

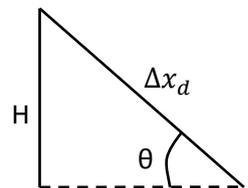
$$\Delta x_d = \frac{1}{2} \frac{V_F^2}{a_{\text{desce}}}$$

ou

$$V_F^2 = 2 a_{\text{desce}} \Delta x_d$$

Da figura ao lado podemos ver que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{H}{\Delta x_d}$$



Portanto:

$$V_F^2 = 2 H g \left\{ 1 - \mu_c \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \right\}$$

Note que (já que $V_F^2 > 0$) essa equação só faz sentido para o caso em que

$$1 - \mu_c \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} > 0$$

ou seja,

$$\tan(\theta) > \mu_c$$

como já comentamos.

Para o segundo MRUV faremos $V_0 = V_F$ e a velocidade final nula, a uma altura h . Com isso descobriremos o valor de h , a altura máxima.

Ficamos com:

$$V(t) = V_0 + a t \Rightarrow 0 = V_F + a_{\text{sobe}} t$$

$$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \Delta x_s = V_F t + \frac{1}{2} a_{\text{sobe}} t^2$$

sendo Δx_s o deslocamento do bloco ao longo do eixo x na subida. Note que a_{sobe} é negativo, conforme nossa dedução anterior, e que, portanto, a velocidade decai na subida do bloco, partindo do valor V_F e indo a zero.

Eliminando o tempo obtemos:

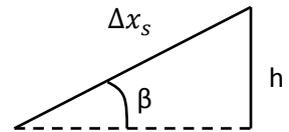
$$\Delta x_s = -\frac{1}{2} \frac{V_F^2}{a_{\text{sobe}}}$$

ou

$$V_F^2 = -2 a_{\text{sobe}} \Delta x_s$$

Da figura ao lado podemos ver que:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{h}{\Delta x_s}$$



Concluindo:

$$V_F^2 = -2 a_{\text{sobe}} \frac{h}{\text{sen}(\beta)}$$

ou seja:

$$h = -\frac{V_F^2 \text{sen}(\beta)}{2 a_{\text{sobe}}}$$

Finalmente:

$$h = H \left\{ \frac{1 - \mu_c \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}}{1 + \mu_c \frac{\cos(\beta)}{\text{sen}(\beta)}} \right\} = H \left\{ \frac{1 - \frac{\mu_c}{\tan(\theta)}}{1 + \frac{\mu_c}{\tan(\theta)}} \right\}$$

Note que, se não houvesse atrito ($\mu_c = 0$), valeria $h = H$ quaisquer que fossem os valores de θ e β . Note também que para $\mu_c \neq 0$, a desigualdade $h < H$ ($h/H < 1$) tem que ser verdadeira, quaisquer que sejam θ e β . O bloco sempre vai subir uma altura menor do que aquela que ele desceu.

De fato, devemos provar que:

$$\frac{h}{H} = \frac{1 - \frac{\mu_c}{\tan(\theta)}}{1 + \frac{\mu_c}{\tan(\theta)}} \leq 1$$

Ou seja:

$$1 - \frac{\mu_c}{\tan(\theta)} \leq 1 + \frac{\mu_c}{\tan(\beta)}$$

Portanto:

$$-\frac{1}{\tan(\theta)} < \frac{1}{\tan(\beta)}$$

Como θ e β estão ambos definidos no intervalo aberto $(0, 90^\circ)$, então as tangentes são ambas positivas e a desigualdade acima é sempre verdadeira.

2.5 Exercícios propostos

EP 2.1) Uma bolinha de massa 200 g está submetida a apenas duas forças, seu próprio peso e uma força \vec{F} de módulo 3 N. Calcule o módulo da aceleração da bolinha (em m/s^2) no caso em que:

- a) \vec{F} é vertical para cima. b) \vec{F} é vertical para baixo. c) \vec{F} é horizontal.

EP 2.2) Uma partícula de massa $m = 100$ g está submetida às seguintes forças:

$$\vec{F}_1 = 10 \hat{x} - 5 \hat{y}, \quad \vec{F}_2 = -5 \hat{x} - 15 \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{F}_3 = -30 \hat{x} + 7 \hat{y}$$

- a) Calcule o vetor aceleração da partícula (em m/s^2).
 b) Calcule o módulo da aceleração da partícula.
 c) Calcule o ângulo ($< 90^\circ$) que a direção da aceleração faz com o eixo x.

EP 2.3) A velocidade (em m/s) de uma partícula de massa $m = 200$ g varia no tempo de acordo com a equação horária:

$$\vec{V}(t) = 5t \hat{x} - 2t^2 \hat{y}$$

- a) Calcule a força resultante (vetor) na partícula (em newtons).
 b) Calcule o módulo da força resultante na partícula no instante em que ela estava momentaneamente parada.

EP 2.4) Um bloco de massa M está descendo com velocidade constante um plano inclinado de inclinação θ com a horizontal. Para ajudar na descida o bloco está sendo puxado para baixo por uma força de módulo F paralela ao plano inclinado. Calcule o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície do plano inclinado.

EP 2.5) Um bloco de massa M está inicialmente em repouso apoiado em uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito estático bloco/superfície é μ_E . No instante $t=0$ o bloco passa a ser empurrado por uma força horizontal de magnitude crescente $F(t)$ dada por:

$$F(t) = k t^2$$

sendo k uma constante positiva. a) Calcule o instante em que o bloco sai do repouso. b) Considere que no instante que é o dobro do instante calculado em (a) a aceleração do bloco seja $a = (7/2) \mu_E g$. Calcule o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície.

EP 2.6) Uma pedrinha amarrada a um barbante está descrevendo um movimento circular uniforme com velocidade de módulo V em um círculo de raio R . O círculo está contido em um plano vertical. Calcule a razão T_A/T_B entre as tensões no barbante no ponto mais alto (A) e no ponto mais baixo (B) da trajetória.

EP 2.7) Um bloco de massa M está sendo puxado para cima de um plano inclinado de inclinação θ com a horizontal. A força que puxa o bloco tem magnitude constante F e inclinação α com a superfície do plano inclinado. O coeficiente de atrito cinético bloco/superfície é μ_c . Calcule o módulo da aceleração do bloco.

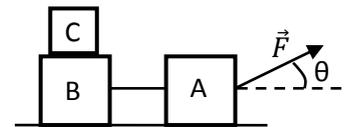
EP 2.8) Um urubu de massa m está descrevendo uma trajetória circular de raio R com velocidade de módulo constante V . O círculo está contido em um plano horizontal, de altura constante.

- Calcule o módulo da força resultante horizontal no urubu em um ponto A de sua trajetória.
- Calcule o módulo da força resultante vertical no urubu em um ponto A de sua trajetória.

EP 2.9) Um bloco de massa M está sendo puxado por uma força de magnitude constante F e inclinação θ com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético bloco/superfície é μ_c . a) Calcule o valor de θ que produz aceleração máxima no bloco. b) Esboce um gráfico do módulo da aceleração do bloco em função de θ ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$).

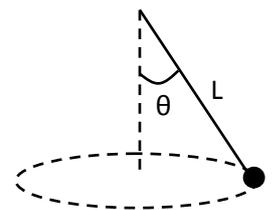
EP 2.10) Dois asteróides flutuando no espaço vazio estão se atraindo mutuamente. O asteróide A tem massa 100 kg e o asteróide B tem massa 1000 kg . O asteróide A está acelerando em direção a B com aceleração de módulo 5 m/s^2 . Calcule o módulo da aceleração do asteróide B.

EP 2.11) Um bloco A, apoiado em uma superfície horizontal, é puxado por uma força externa \vec{F} . Uma corda leve une o bloco A ao bloco B, também apoiado na superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre os blocos A e B e o



piso é μ_c . Um bloco C está apoiado sobre o bloco B, sem deslizar. As massas são M_A , M_B e M_C . Todo o conjunto está acelerando junto devido à ação da força \vec{F} . a) Faça diagramas de forças para os três blocos. b) Calcule o módulo da força de atrito no bloco C. c) Liste todos os pares de forças ação/reação que aparecem nos diagramas de forças dos três blocos.

EP 2.12) Um pêndulo cônico consiste em uma bolinha de massa M amarrada na ponta de um barbante leve de comprimento L . A outra ponta do barbante está fixada no teto. Após receber um peteleco, a bolinha assume uma trajetória circular (MCU) em um plano horizontal, conforme a figura ao lado. Calcule o módulo da velocidade da bolinha.



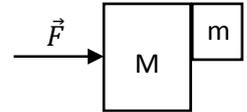
EP 2.13) Um bloco de massa M está inicialmente em repouso apoiado em uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície é μ_E . O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é desprezível. No instante $t=0$ o bloco começa a ser puxado por uma força horizontal de magnitude crescente no tempo $F(t)$ tal que:

$$F(t) = A t^2$$

sendo A uma constante positiva. a) Calcule o instante em que o bloco sai do repouso. b) Esboce um gráfico do módulo da aceleração do bloco em função do tempo.

EP 2.14) Uma criança de massa M está sentada em um disco horizontal que gira com velocidade angular constante ω . O coeficiente de atrito estático entre a criança e a superfície do disco é μ_E . a) Se o raio da criança ao centro do disco é r , calcule o módulo da força de atrito estático na criança. b) Calcule o maior raio em que a criança pode sentar sem deslizar no disco.

EP 2.15) Um bloco de massa M é empurrado por uma força constante \vec{F} e desliza apoiado em uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre esse bloco e a superfície é $\mu_C^{(1)}$. Um segundo bloco de massa m está apoiado na parede frontal do primeiro bloco, sendo empurrado por ele. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre os blocos são $\mu_E^{(2)}$ e $\mu_C^{(2)}$.

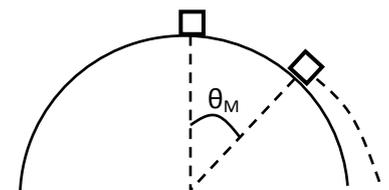


a) Calcule o valor de F (o módulo de \vec{F}) que faz com que o bloco de massa m deslize para baixo com velocidade constante. b) Calcule o menor valor de F que faz com que o bloco de massa m não deslize.

EP 2.16) Um caminhão está viajando em uma pista reta horizontal. No piso horizontal da carroceria do caminhão está apoiada uma caixa de massa M . Suponha que a caixa não deslize na superfície da carroceria. Calcule a força de atrito estático na caixa se: a) o caminhão estiver com velocidade constante; b) o caminhão estiver acelerando com aceleração de módulo a .

EP 2.17) Uma bolinha de massa m está amarrada na ponta de um barbante leve, pendurada no teto de um trem através da outra ponta do barbante. O trem se move em um trilho reto e horizontal (eixo x). Em um dado instante o trem está se movendo com velocidade $\vec{V} = V \hat{x}$ e aceleração $\vec{a} = a \hat{x}$. a) Calcule o ângulo θ que o barbante faz com a vertical. b) o barbante está deitado para frente ($+\hat{x}$) ou para trás ($-\hat{x}$) do trem? Note que os passageiros desse trem se sentem em um mundo com gravidade $\vec{g} - a \hat{x}$.

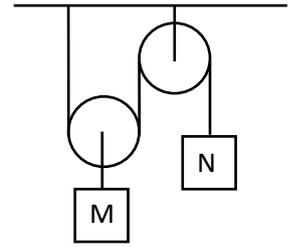
EP 2.18) Um pequeno bloco de massa M está inicialmente em repouso no topo de uma superfície esférica de raio R sem atrito. Em um dado instante o bloco recebe um pequeno peteleco (velocidade inicial desprezível) e começa a deslizar para baixo da esfera. Seja θ_M o ângulo mostrado na figura no instante



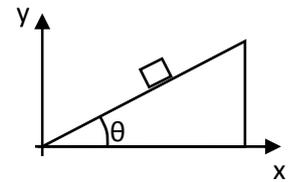
em que o bloco abandona a superfície esférica, e passa a cair em queda livre. a) Calcule a velocidade do bloco nesse instante, em função de θ_M . b) Calcule o vetor velocidade do bloco nesse instante, usando um referencial em que x é horizontal, para a direita e y é vertical para cima.

EP 2.19) Um automóvel de massa M quer subir com aceleração constante de módulo a uma rampa com inclinação θ em relação à horizontal. O coeficiente de atrito estático entre os pneus e a superfície da rampa é μ_E . Calcule a equação para o maior valor possível de θ .

EP 2.20) Dois blocos de massas M e N ($N > M$) estão pendurados em polias leves como na figura ao lado. A corda é leve e inextensível. a) Calcule o módulo da aceleração de queda do bloco N . b) Calcule o módulo da tensão na corda.



EP 2.21) Um pequeno bloco de massa m está apoiado em um plano inclinado de massa M e inclinação θ . O bloco desliza na superfície do plano inclinado e o plano inclinado desliza na superfície horizontal, ambos sem atrito, partindo do repouso. Considere o referencial xy na figura. Vamos chamar de x e y as coordenadas do bloco e de X a coordenada horizontal do plano inclinado (a posição do vértice de ângulo θ). a) Deduza as equações para as acelerações a_x , a_y e a_X , em termos da força normal η entre o bloco e o plano inclinado. b) Mostre que $m a_x + M a_X = 0$. c) Mostre que $a_y = \tan(\theta) (a_x - a_X)$. d) Calcule a força normal η .



2.6 Respostas dos exercícios propostos

EP 2.1) a) $5,2 \text{ m/s}^2$ b) $24,8 \text{ m/s}^2$ c) $17,9 \text{ m/s}^2$

EP 2.2) a) $-250 \hat{x} - 130 \hat{y}$ b) $\sqrt{79400} \cong 281,8 \text{ m/s}^2$ c) $\cong 0,48 \text{ rad} \cong 27,47^\circ$

EP 2.3) a) $\hat{x} - 0,8 t \hat{y}$ b) 1 N

EP 2.4) $\tan(\theta) + \frac{F}{M g \cos(\theta)}$

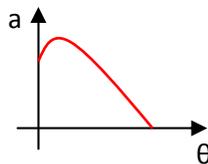
EP 2.5) a) $\sqrt{\mu_E M g/k}$ b) $\mu_E/2$

EP 2.6) $\frac{V^2 - g R}{V^2 + g R}$

EP 2.7) $\frac{F}{M} (\cos(\alpha) + \mu_C \text{sen}(\alpha)) - g (\text{sen}(\theta) + \mu_C \cos(\theta))$

EP 2.8) a) $m V^2/R$ b) 0

EP 2.9) a) $\tan(\theta) = \mu_C$ b)

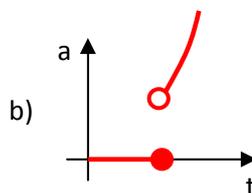


EP 2.10) $0,5 \text{ m/s}^2$

EP 2.11) b) $\frac{M_C}{M_A + M_B + M_C} F \cos(\theta) - M_C \mu_C g$ c) (força de atrito estático C/B, força de atrito estático B/C) e (força normal C/B, força normal B/C).

EP 2.12) $\sqrt{g L \text{sen}(\theta) \tan(\theta)}$

EP 2.13) a) $\sqrt{\frac{\mu_E M g}{A}}$



EP 2.14) a) $M \omega^2 r$ b) $\mu_E \frac{g}{\omega^2}$

EP 2.15) a) $(M + m) \left(\frac{1}{\mu_C^{(2)}} + \mu_C^{(1)} \right) g$ b) $(M + m) \left(\frac{1}{\mu_E^{(2)}} + \mu_C^{(1)} \right) g$

EP 2.16) a) 0 b) Ma

EP 2.17) a) $\tan(\theta) = a/g$ b) para trás.

EP 2.18) a) $V^2 = g R \cos(\theta_M)$ b) $\vec{V} = \sqrt{g R \cos(\theta_M)} [\cos(\theta_M) \hat{x} - \sin(\theta_M) \hat{y}]$

EP 2.19) $\mu_E \cos(\theta) - \sin(\theta) = a/g$

EP 2.20) a) $\frac{N-M/2}{N+M/4} g$ b) $\frac{3M/4}{N+M/4} N g$

EP 2.21) a) $-\eta \sin(\theta) = m a_x$, $\eta \cos(\theta) - mg = m a_y$ e $\eta \sin(\theta) = m a_x$ b) segue da 1ª e da 3ª equações do item (a). c) basta calcular o tempo para que ocorra $x = X$ e igualá-lo ao tempo para que ocorra $y = 0$ (o bloco desce até o piso). d) $\eta = \frac{m M g \cos(\theta)}{M + m \sin^2(\theta)}$

3

Energias mecânicas



3.1 Introdução

Nos capítulos anteriores estudamos como descrever o movimento e como determinar o movimento de um corpo (uma partícula) através das forças que atuam nele. A idéia básica é construir o diagrama de forças, calcular a força resultante e resolver as equações algébricas/diferenciais fornecidas pela segunda lei de Newton. Aplicamos essa idéia a vários problemas simples da mecânica clássica, sem muita dificuldade. Para nossa sorte, quase todos os problemas que abordamos envolviam forças constantes no tempo, ou seja, forças que não mudavam de valor (módulo, direção e sentido) durante o movimento do corpo, o que leva a equações algébricas relacionando forças e acelerações. Problemas que envolvem forças variáveis levam, geralmente, a equações diferenciais, ao invés de equações algébricas. Não há nada de errado com as equações diferenciais, elas apenas são, em geral, mais difíceis de resolver do que as equações algébricas. Nesse capítulo vamos estudar um método geral, baseado nos conceitos de trabalho e energia, que permite, muitas vezes, que consigamos soluções para problemas de forças constantes ou variáveis de uma forma mais simples e direta, quando comparamos com o método baseado na aplicação crua da segunda lei de Newton.

O conceito de energia é universal. Podemos encontrar definições de energias nos mais diferentes contextos, como na física, na química, na biologia, nas ciências sociais e na dita sabedoria popular. A energia é um agente que move o mundo, e a luta pelo domínio das fontes de energia, como o petróleo, molda a história da humanidade. A energia está em todos os lugares, fluindo para cá e para lá. A lei da conservação da energia (primeira lei da termodinâmica) estabelece a ideia de que a energia não é criada e nem desaparece, ela apenas flui, mudando de lugar e de forma. A fusão do hidrogênio no Sol (energia na forma de massa), por exemplo, libera ondas eletromagnéticas (energia eletromagnética, ou radiante) que viajam pelo espaço e chegam à

Terra. Aqui a luz do Sol aquece a água do mar e tudo mais (energia térmica), movendo a máquina atmosférica, e é absorvida pelas plantas na fotossíntese, que armazenam energia química na forma de açúcar. Uma abelha pode colher uma parte desse açúcar no néctar das flores e produzir o mel que é, do ponto de vista da abelha, um depósito de energia química. Uma pessoa pode tomar esse mel e, através de seu metabolismo, quebrar as moléculas de açúcar e usar essa energia para manter sua temperatura corporal estável (energia térmica). Ela pode também usar o mel como fonte de energia para uma corrida (energia cinética) ou para escalar uma montanha (energia potencial gravitacional).

Nesse capítulo teremos oportunidade de discutir algumas formas de energia mecânica, presentes nos movimentos que observamos na natureza e nas máquinas. Nesse contexto, as forças mútuas são os agentes de transferência de energia entre os diferentes corpos e de conversão de energia em diferentes formas.

Vamos começar abordando um problema simples, que vai mostrar que a segunda lei de Newton não é, às vezes, o melhor caminho, ou o caminho mais fácil, para se estudar o movimento de um corpo. Considere um tobogã, ou seja, uma superfície curva onde um bloco de massa M desliza, partindo do repouso do ponto A e passando pelo ponto B. Para simplificar, vamos desprezar o atrito no bloco, enquanto ele desce. No tobogã real esse atrito é minimizado, para tornar a descida mais emocionante. A superfície é uma curva suave arbitrária e não especificada, apenas sabemos que o ponto A está elevado de uma altura H em relação ao ponto B. A pergunta que vamos responder é: qual o módulo da velocidade do bloco quando ele passa por B?

A Figura 3.1 ilustra uma visão de perfil desse tobogã e os pontos A e B. Mostramos também um diagrama de forças para o bloco, quando ele está passando por uma posição qualquer do tobogã. São apenas duas forças no bloco: peso e normal.

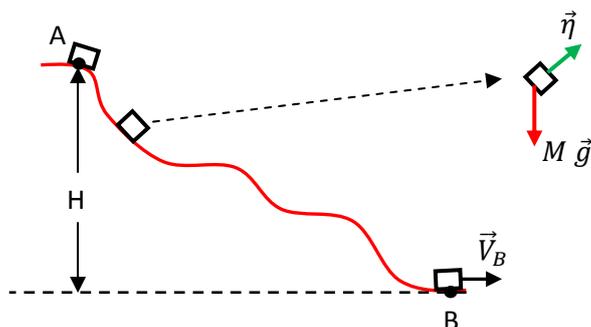


Figura 3.1: Perfil de um tobogã em que um bloco desliza sem atrito desde A até B. Diagrama de forças no bloco enquanto ele passa por uma posição arbitrária no tobogã.

A idéia de aplicar a segunda lei de Newton para o bloco parece simples: a segunda lei de Newton diz que:

$$\vec{\eta} + M \vec{g} = M \vec{a}$$

Conhecendo a aceleração \vec{a} , temos esperança de calcular a velocidade do bloco, afinal a aceleração é a derivada da velocidade. O problema dessa equação é que a força normal no bloco não é constante. Ela é

função do tempo, ou equivalentemente, função da posição do bloco no tobogã, que muda com o tempo. De fato, o tobogã é cheio de curvas e para o bloco fazer uma curva ele precisa de uma aceleração centrípeta, que depende da velocidade. Podemos concluir que, no mínimo, $\vec{\eta}$ é função da velocidade do bloco, ou seja:

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}(\vec{V})$$

Portanto, a equação acima fica:

$$\vec{\eta}(\vec{V}) + M \vec{g} = M \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Essa é uma equação diferencial para a função $\vec{V}(t)$. Para resolvê-la, devemos conhecer a função $\vec{\eta}(\vec{V})$. Não pretendemos avançar nessa análise aqui. Nossa idéia era apenas mostrar que um problema simples de mecânica pode exigir uma análise mais elaborada e complexa, se quisermos insistir em uma abordagem via leis de Newton.

Comparamos essa situação a de um carpinteiro que insistisse em serrar todas as madeiras: troncos de árvores, tábuas e pranchetas, usando apenas um serrote. Seria mais vantajoso para esse carpinteiro se ele reconhecesse que existem outras ferramentas para serrar madeira, além do serrote. Existem, por exemplo, a moto-serra, a serra circular, a serra fita e a serra tico-tico, todas motorizadas. Tendo acesso a esse conjunto de ferramentas, caberia ao carpinteiro selecionar qual a ferramenta mais adequada para cada peça de madeira. Um tronco de árvore pode ser serrado com um serrote. Mas a moto-serra fará esse serviço com menor esforço. Uma prancheta de fórmica pode ser serrada com um serrote. Mas uma serra fita fará isso com menos esforço e de forma mais precisa. Voltando à mecânica, não há nada de “errado” com a equação diferencial para a solução do problema do tobogã. Podemos avançar na análise, integrando essa equação no tempo, e finalmente obtendo a velocidade V_B . Mas, queremos mostrar aqui que há outras ferramentas na mecânica, que podem, às vezes, fornecer a solução para um problema de forma mais rápida, mais simples, mais elegante etc. No caso do tobogã, por exemplo, usando os conceitos de trabalho e energia, podemos mostrar que:

$$M g H = M \frac{V_B^2}{2}$$

ou seja: $V_B = \sqrt{2 g H}$. Veremos que essa equação pode ser lida de duas formas diferentes: 1) o trabalho da força peso na descida do bloco, de A até B, é igual à variação da energia cinética do bloco nesse percurso; 2) A energia potencial gravitacional que o bloco tinha em A, foi convertida em energia cinética em B. Esse é o poder dessas idéias: fornecer equações algébricas (não diferenciais) simples relacionando velocidade e posição no espaço.

De fato, a equação:

$$M g H = M \frac{V_B^2}{2}$$

que é o teorema do trabalho-energia cinética aplicado ao bloco que desce o tobogã, é uma integral no espaço da equação original (segunda lei de Newton para o bloco):

$$\vec{\eta}(\vec{V}) + M \vec{g} = M \frac{d\vec{V}}{dt}$$

O que vamos fazer nesse capítulo é interpretar essa equação integral (o teorema do trabalho-energia cinética) em geral, para um sistema qualquer da mecânica. Dessa forma, daremos um salto conceitual e, tomando um atalho, partiremos diretamente de uma equação mais simples, ao invés de tentar integrar no tempo a segunda lei de Newton para cada sistema individualmente.

Antes de partirmos para o formalismo do trabalho e energia, vale a pena mencionar o equívoco de alguns estudantes que acreditam poder resolver o problema do tobogã utilizando a cinemática do movimento com aceleração constante, que já estudamos em detalhe no capítulo 1. Obviamente isso não pode estar correto. O bloco desce o tobogã com aceleração variável $\vec{a}(t)$ (centrípeta e tangencial) e as equações da cinemática para $\vec{a}(t) = \vec{a}$ não valem nesse caso. Mas, uma sequência de erros pode levar, e muitas vezes leva, a um acerto. O raciocínio desses estudantes é mais ou menos assim (vamos fazer o raciocínio na forma vetorial, mas geralmente isso é feito por esses estudantes na forma escalar):

As equações (vetoriais) básicas da cinemática com aceleração constante são:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \qquad \vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a} t$$

Na direção x, por exemplo, essas equações ficam:

$$\Delta x = x - x_0 = V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$V_x(t) = V_{0x} + a_x t$$

Eliminando o tempo, obtemos a chamada equação de Torricelli:

$$V_x^2(t) = V_{0x}^2 + 2 a_x \Delta x$$

Ou, na forma vetorial (utilizando a operação de produto escalar entre vetores):

$$V^2(t) = V_0^2 + 2 \vec{a} \cdot \Delta \vec{r}$$

O raciocínio (errado) segue: adotando um eixo y vertical para cima, faz-se $\vec{a} = \vec{g} = -g \hat{y}$ (que significaria que o bloco está em queda livre, ou seja, o tobogã foi ignorado) e $\Delta \vec{r} = -H \hat{y}$ (que significaria que o bloco se deslocou apenas na vertical, ou seja, o tobogã foi mais uma vez ignorado). Tomando $t=0$ para o bloco em A e $t=t$ para o bloco em B e tendo em vista que o bloco parte do repouso ($V_0 = 0$), obtemos:

$$V_B^2 = 2 g H$$

que é a resposta correta para a velocidade V_B . Note que a hipótese $\Delta\vec{r} = -H \hat{y}$ não é de fato necessária pois nesse caso $\vec{a} \cdot \Delta\vec{r} = -g \hat{y} \cdot \Delta\vec{r} = g H$ mesmo com um $\Delta\vec{r}$ oblíquo. Não há nada de misterioso aqui. Apenas é verdade que se o bloco partisse do repouso em A e caísse verticalmente em queda livre até a mesma altura do ponto B (o bloco partindo do repouso em A com $\vec{a} = \vec{g}$ só poderia cair verticalmente, ele não poderia cair ao longo do tobogã), essa seria a velocidade com que ele chegaria nessa altura, e o uso da equação de Torricelli nesse caso seria uma forma correta de se chegar nesse resultado. Mas o problema do tobogã é outro: o bloco não cai em queda livre, ele não cai verticalmente, ele nem se move com aceleração constante. Mesmo assim, sua velocidade em B é a mesma do bloco em queda livre. São dois problemas bem diferentes, que possuem a mesma resposta. Através dos conceitos de trabalho e energia poderemos entender por que eles têm a mesma resposta (basicamente porque o peso é a uma força conservativa). Mas, os fins não justificam os meios: o fato da equação de Torricelli levar à resposta correta para o problema do tobogã, através de uma sequência de erros, não torna essa análise correta.

3.2 Trabalho de uma força

Suponha um bloco (uma partícula) submetido a várias forças. Vamos considerar um deslocamento desse bloco desde o ponto A até o ponto B. Podemos associar a cada força \vec{F} , em um dado deslocamento $A \rightarrow B$, um trabalho W , que denotaremos por:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$$

$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$ é o trabalho realizado pela força \vec{F} enquanto o corpo (a partícula) que sofre \vec{F} se desloca no espaço, desde A até B. Podemos definir o trabalho do peso, o trabalho da força de atrito, o trabalho da força normal etc. A cada força podemos associar um trabalho, associado a um deslocamento.

Vamos começar pelo caso mais simples.

3.2.1 Trabalho de uma força constante paralela a um deslocamento retilíneo

Considere um bloco submetido a várias forças, sendo uma delas a força \vec{F} que é constante, ou seja, que não muda de valor (módulo, direção e sentido) enquanto o bloco se desloca em linha reta desde A até B. A situação está mostrada na Figura 3.2. Apenas a força \vec{F} é mostrada.

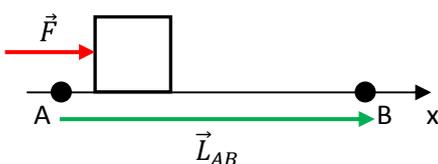


Figura 3.2 Um bloco se desloca desde o ponto A até o ponto B ao longo do eixo x. Seu deslocamento é \vec{L}_{AB} (seta verde). A força \vec{F} é, por hipótese, paralela a esse deslocamento.

Nesse caso, o trabalho realizado pela força \vec{F} nesse deslocamento desde A até B é:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = F L_{AB}$$

Ou seja, $W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$ é simplesmente o produto do módulo do vetor força pelo módulo do vetor deslocamento do bloco que sofre a força. Note que adotando o referencial na figura podemos escrever também:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = F L_{AB} = F (x_B - x_A) = F \Delta x$$

Como podemos ver, a unidade de trabalho, que é a mesma unidade de energia, é o produto da unidade de força (newton=N) pela unidade de distância (metro=m), ou seja, Nm. Como sabemos que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$, podemos dizer também que a unidade de trabalho é $\text{kg m}^2/\text{s}^2$. Esse bloco de unidades é abreviado através da unidade joule (lê-se jaule), cujo símbolo é J. Então, se uma força constante de módulo $F=1 \text{ N}$ empurrar um bloco por uma distância $\Delta x = 1 \text{ m}$, ela realizará um trabalho $W = 1 \text{ J}$. Para ter uma ideia da magnitude dessa unidade, considere que para erguer uma massa $M=1 \text{ kg}$ de um altura $h=1 \text{ m}$ no campo gravitacional na vizinhança da Terra você precisa de aproximadamente 10 J de energia.

3.2.2 Trabalho de uma força constante oblíqua em relação a um deslocamento retilíneo

Considere agora que a força \vec{F} é constante e oblíqua, ou seja, inclinada de um ângulo θ em relação ao deslocamento do bloco, enquanto o bloco se desloca em linha reta desde A até B. A situação está mostrada na Figura 3.3.

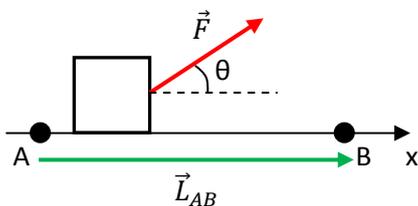


Figura 3.3 Um bloco se desloca desde o ponto A até o ponto B ao longo do eixo x. Seu deslocamento é \vec{L}_{AB} (seta verde). A força \vec{F} é, por hipótese, inclinada de um ângulo θ em relação a esse deslocamento.

Nesse caso, o trabalho realizado pela força \vec{F} nesse deslocamento desde A até B é:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = F L_{AB} \cos(\theta)$$

Ou seja, $W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$ é simplesmente o produto do módulo do vetor força pelo módulo do vetor deslocamento do bloco que sofre a força e pelo cosseno do ângulo entre esses dois vetores. No caso particular $\theta = 0$ recuperamos a definição anterior, pois $\cos(0) = 1$. Essa operação, de se multiplicar os módulos de dois vetores e o cosseno do ângulo entre eles, é chamada, na álgebra vetorial, de “produto escalar”. O ângulo θ entre dois vetores é definido assim: desenhe os dois vetores nascendo na mesma origem; o ângulo θ é o menor ângulo entre esses dois vetores, medido no plano definido por eles. A Figura 3.4 ilustra essa idéia para dois vetores \vec{A} e \vec{B} quaisquer, no plano do papel.

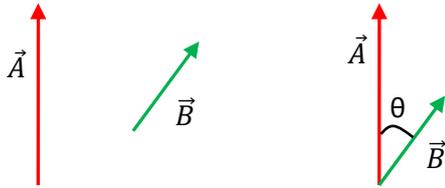


Figura 3.4 Ilustração de como se determinar o ângulo θ entre dois vetores quaisquer. Nesse caso, o produto escalar entre os vetores \vec{A} e \vec{B} é $A B \cos(\theta)$

Em geral, a notação para o produto escalar entre dois vetores quaisquer \vec{A} e \vec{B} é $\vec{A} \cdot \vec{B}$, ou seja:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos(\theta)$$

Assim sendo, podemos escrever o trabalho de uma força constante \vec{F} como:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = F L_{AB} \cos(\theta) = \vec{F} \cdot \vec{L}_{AB}$$

Note o caso particular, quando \vec{F} e \vec{L}_{AB} são paralelos entre si:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \vec{F} \cdot \vec{L}_{AB} = F L_{AB} \cos(\theta) = F L_{AB} \cos(0) = F L_{AB}$$

O uso da notação de produto escalar para o cálculo do trabalho não é obrigatório, mas torna as expressões e demonstrações mais compactas.

Vamos considerar agora um bloco que se desloca em um percurso não-retilíneo, mas em degraus e rampas, como mostrado na Figura 3.5.

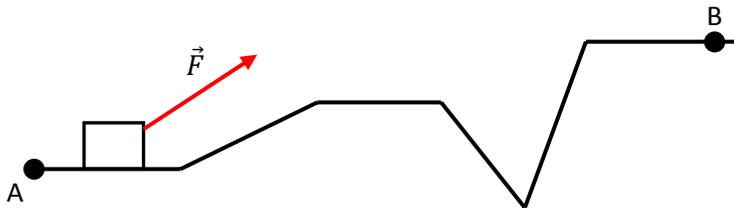


Figura 3.5 Um bloco se desloca de A até B através de um caminho formado por uma sequência de caminhos retos: degraus e rampas.

Ainda supondo que \vec{F} é constante no percurso AB, qual o trabalho $W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$? A ideia é simples e está ilustrada na Figura 3.6, o caminho de A até B pode ser decomposto em 6 sub-caminhos, cada um com deslocamento \vec{L}_i ($i=1,2,\dots,6$), para os quais vale $W_{\vec{F}}(\vec{L}_i) = \vec{F} \cdot \vec{L}_i$, e assim:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \sum_{i=1}^6 \vec{F} \cdot \vec{L}_i = \vec{F} \cdot \sum_{i=1}^6 \vec{L}_i = \vec{F} \cdot \vec{L}_{AB}$$

Na Figura 3.7, ilustramos o uso da regra do paralelogramo para calcular o deslocamento \vec{L}_{AB} :

$$\sum_{i=1}^6 \vec{L}_i = \vec{L}_{AB}$$

Note que esse resultado independe do número N de deslocamentos parciais, que pode ser até infinito, ou seja, esse resultado se aplica mesmo no caso em que o bloco se desloca entre os pontos A e B através de uma curva suave qualquer, ao invés de uma sucessão de degraus e rampas.

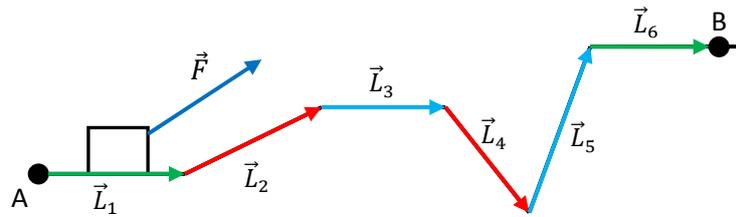


Figura 3.6 Um bloco se desloca de A até B através de um caminho formado por uma sequência de caminhos retos: degraus e rampas. Cada degrau, ou rampa, está associado a um deslocamento parcial e a um trabalho parcial, cuja soma, é o trabalho desde A até B.

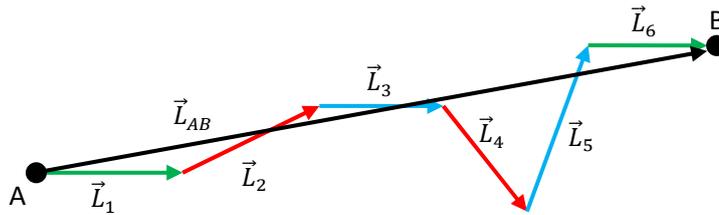


Figura 3.7 Regra do paralelogramo para o deslocamento total \vec{L}_{AB} (seta preta).

Resumindo, para uma força constante no percurso (qualquer) de A até B:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \vec{F} \cdot \vec{L}_{AB}$$

Um exemplo comum de força constante durante o movimento é o peso. Enquanto um corpo de massa M se move no espaço, seu peso não muda, é sempre vertical, para baixo, de magnitude Mg . Vamos voltar então ao exemplo do tobogã e calcular o trabalho do peso do bloco no percurso de A até B:

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = M\vec{g} \cdot \vec{L}_{AB}$$

As informações que precisamos para calcular esse trabalho estão mostradas na Figura 3.8. O vetor \vec{L}_{AB} é simplesmente o vetor (em azul) que nasce em A e tem ponta em B. O peso do bloco $M\vec{g}$ é uma seta vertical para baixo de tamanho Mg (em verde). O ângulo entre esses dois vetores é θ . Note o triângulo retângulo de hipotenusa L_{AB} , de onde concluímos que $\cos(\theta) = H/L_{AB}$.

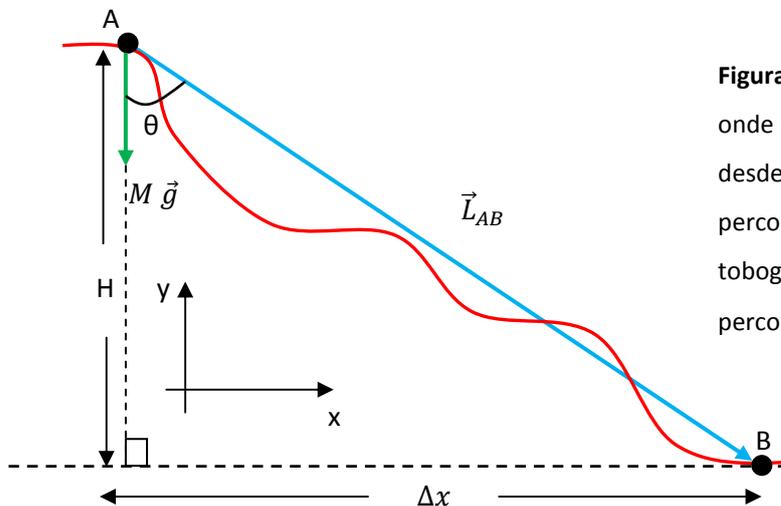


Figura 3.8 Um tobogã (em vermelho), onde um bloco de massa M escorrega desde A até B. Na vertical o bloco percorre uma distância H , a altura do tobogã, e na horizontal o bloco percorre uma distância Δx .

Portanto:

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = M\vec{g} \cdot \vec{L}_{AB} = M g L_{AB} \cos(\theta) = M g L_{AB} \frac{H}{L_{AB}} = M g H$$

O trabalho do peso só depende da altura do tobogã, não depende da distância horizontal Δx e nem da forma do tobogã (da forma da curva vermelha na Figura acima).

Apenas como exercício, vamos calcular esse trabalho do peso utilizando a operação de produto escalar. No referencial xy mostrado na Figura 3.8 os vetores peso e deslocamento se expressam em componentes como:

$$M\vec{g} = -M g \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{L}_{AB} = \Delta x \hat{x} - H \hat{y}$$

Portanto, distribuindo o produto escalar:

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = M\vec{g} \cdot \vec{L}_{AB} = -M g \hat{y} \cdot (\Delta x \hat{x} - H \hat{y}) = -M g \Delta x \hat{y} \cdot \hat{x} + M g H \hat{y} \cdot \hat{y}$$

Agora, levando-se em conta que:

$$\hat{y} \cdot \hat{x} = 1 \times 1 \times \cos(90^\circ) = 0 \quad \text{e} \quad \hat{y} \cdot \hat{y} = 1 \times 1 \times \cos(0^\circ) = 1$$

Chegamos ao mesmo resultado anterior: $W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = M g H$.

Podemos agora generalizar o resultado que obtivemos para uma força constante em um caminho formado por um número arbitrário N de degraus/rampas entre A e B. Considerando que a força \vec{F} não é constante nesse caminho, mas que assume valores diferentes \vec{F}_i em cada degrau/rampa correspondente ao deslocamento \vec{L}_i , obtemos:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{L}_i$$

Note, nessa expressão $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, etc. não são forças diferentes, são apenas valores diferentes da mesma força \vec{F} , que não é mais constante, é variável, por hipótese.

3.2.3 Trabalho de uma força qualquer em um caminho qualquer

Enfim, chegamos a um estágio em que podemos dar um salto na generalização, considerando o caso em que os pontos A e B estão unidos por uma curva suave qualquer e que a força \vec{F} é variável, assumindo um valor, em princípio, diferente em cada ponto da curva. Esse é o caso do tobogã que consideramos no início desse capítulo e da força normal no bloco. A idéia é recorrer a um processo de limite: uma curva qualquer pode ser pensada como uma sucessão de N segmentos retos e infinitesimais, no limite em que $N \rightarrow \infty$. Tomando esse limite na expressão de $W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$ que obtivemos acima, obtemos uma soma infinita (uma soma de Riemann) que define a integral:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{L}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

A idéia dessa integral está ilustrada na Figura 3.9: seja \vec{r} um ponto da curva que conecta os pontos A e B. Um corpo qualquer, uma partícula (bolinha vazada), está percorrendo essa curva. Uma das forças que está atuando nesse corpo, nesse percurso, é a força \vec{F} .

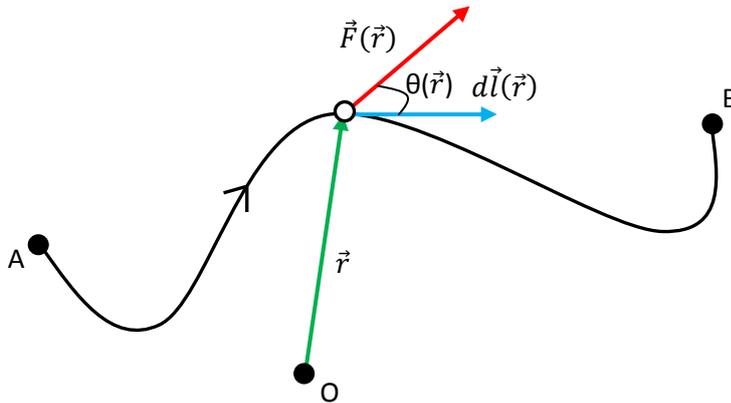


Figura 3.9 Uma trajetória qualquer conecta os pontos A e B. Em cada ponto \vec{r} da curva a força \vec{F} assume o valor $\vec{F}(\vec{r})$ e a partícula se desloca de um deslocamento infinitesimal, tangente à curva, $d\vec{l}(\vec{r})$. No limite, quando houver infinitos deslocamentos infinitesimais, o comprimento $dl(\vec{r})$ do vetor $d\vec{l}(\vec{r})$ vai se tornar infinitesimal.

Seja $\vec{F}(\vec{r})$ o valor da força quando o bloco estiver na posição \vec{r} da curva. Definimos $d\vec{l}(\vec{r})$ como sendo um deslocamento infinitesimal paralelo à curva, no sentido de A para B, de magnitude $dl(\vec{r})$, que é um pequeno comprimento, o comprimento de um pequeno segmento de curva. Quando o bloco percorrer esse pequeno segmento de curva a força \vec{F} vai realizar um pequeno trabalho:

$$dW_{\vec{F}}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}(\vec{r}) = F(\vec{r})dl(\vec{r}) \cos(\theta(\vec{r}))$$

Somando os pequenos trabalhos em todos os segmentos, obtemos finalmente, no limite em que o número de segmentos é infinito, em que $d\vec{l}(\vec{r})$ é um vetor infinitesimal e em que $dW_{\vec{F}}(\vec{r})$ é um trabalho infinitesimal:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N dW_{\vec{F}}(\vec{r}_i) = \int_A^B dW_{\vec{F}}(\vec{r}) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}(\vec{r}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Note, na última igualdade apenas simplificamos a notação, omitindo a dependência em \vec{r} , que vai ficar implícita daqui para frente.

Chegamos finalmente à expressão do trabalho de uma força qualquer, variável ou não, em um caminho qualquer, curvo ou não, que conecta os pontos A e B no espaço:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Note o caso particular: se \vec{F} é constante no percurso de A até B, então:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{L}_{AB}$$

O vetor \vec{L}_{AB} está mostrado na Figura 3.10, como fizemos para o cálculo do trabalho do peso no percurso do tobogã.

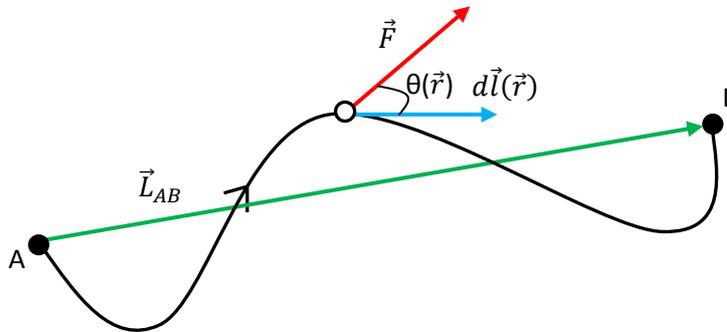


Figura 3.10 Uma trajetória qualquer conecta os pontos A e B. O vetor deslocamento \vec{L}_{AB} (seta verde) é simplesmente o vetor que nasce em A e tem a ponta em B.

Apenas para lembrar e enfatizar, podemos voltar ao caso do trabalho do peso no percurso do tobogã, utilizando agora a forma integral do trabalho:

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = \int_A^B M\vec{g} \cdot d\vec{l}$$

Novamente, usando o referencial xy da Figura 3.8:

$$M\vec{g} = -Mg\hat{y} \quad \text{e} \quad d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} \quad (\text{vetor tangente a uma curva arbitrária})$$

Portanto (distribuindo o produto escalar e lembrando que $\hat{y} \cdot \hat{x} = 0$ e $\hat{y} \cdot \hat{y} = 1$):

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = \int_A^B M\vec{g} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B Mg dy = -Mg \int_A^B dy = -Mg y \Big|_A^B = -Mg(y_B - y_A)$$

Note, y_B é a coordenada y (vertical) do ponto B, analogamente para y_A . Portanto:

$$y_B - y_A = -H$$

e novamente obtemos o resultado já conhecido $W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = MgH$.

Enfim, há várias formas de se calcular o trabalho de uma força constante, que podem ser usadas de acordo com a conveniência.

Lembrando que já afirmamos que a solução para a velocidade V_B no problema do tobogã está na equação:

$$MgH = M \frac{V_B^2}{2}$$

já podemos ver que o termo da esquerda é exatamente o trabalho que o peso do bloco faz no percurso AB. Falta ainda discutirmos o significado do lado direito dessa equação e finalmente o motivo da igualdade entre

essas duas quantidades. Com isso teremos uma nova ferramenta para a solução de problemas de mecânica: o teorema do trabalho-energia cinética.

Antes de partirmos para a discussão do teorema do trabalho-energia cinética, vamos dar um exemplo de força variável e do cálculo do trabalho dessa força. Considere uma mola cilíndrica helicoidal, que pode ser comprimida ou dilatada. Essas molas são amplamente utilizadas em máquinas, com o objetivo de armazenar e fornecer energia mecânica, enquanto se deformam e relaxam. Uma mola é geralmente feita de um fio metálico enrolado, e como tal possui uma massa. Vamos desprezar essa massa aqui (mola ideal). Na sua aplicação mais simples uma mola possui uma extremidade fixa e a outra extremidade livre para interagir com outros corpos: a mola sofre força e faz força nesses outros corpos que interagem com ela (força de contato). Chamamos de “força de mola” a força que a mola faz em um corpo que está em contato com a extremidade livre dela. Denotaremos a força de mola por \vec{F}_M . Fato é que uma mola faz uma força que depende de seu estado de deformação. Uma mola relaxada não faz força nenhuma e uma mola deformada (comprimida ou dilatada) faz uma força tanto maior quanto maior for sua deformação. A maneira mais simples de representar o estado de deformação de uma mola, através de uma variável x , é adotar um eixo x ao longo do eixo da mola, com origem na posição da extremidade livre da mola relaxada e nomear a variável x como sendo a posição da extremidade livre da mola em relação a essa origem. A Figura 3.11 ilustra essa idéia. Assim sendo, dizer que a força de mola \vec{F}_M depende do estado de deformação da mola é o mesmo que dizer que:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_M(x)$$

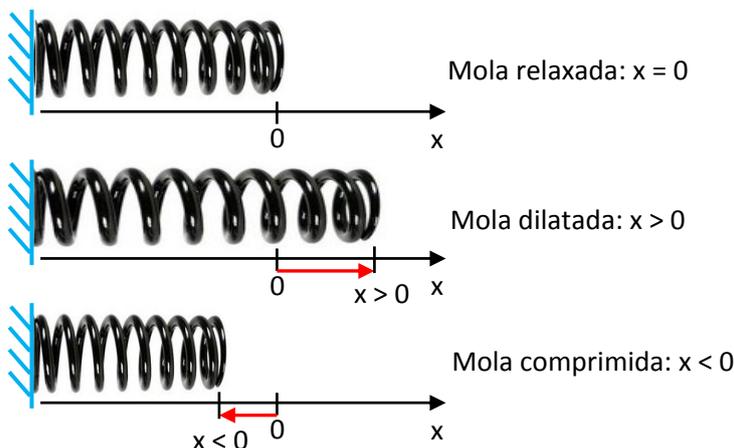


Figura 3.11 Uma mola helicoidal pode ter seu estado de deformação representado por uma simples grandeza escalar x . x é a coordenada da extremidade livre da mola, em um referencial com eixo x ao longo do eixo da mola e origem $x=0$ na posição da extremidade livre da mola relaxa.

ou seja, \vec{F}_M é uma função de x , uma função que passa pela origem, já que $\vec{F}_M(0) = \vec{0}$. A direção de \vec{F}_M é fixa e para simplificar podemos definir a função escalar $F_M(x)$ tal que:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_M(x) = F_M(x) \hat{x}$$

Note que para uma mola dilatada ($x > 0$), \vec{F}_M vai apontar no sentido $-x$, pois essa mola puxa o corpo que estiver atado a sua extremidade livre (se existir esse corpo). Resumindo: $F_M(x > 0)$ é negativo. Analogamente, para uma mola comprimida ($x < 0$), \vec{F}_M vai apontar no sentido $+x$, pois essa mola empurra o corpo que estiver encostado na sua extremidade livre (esse corpo não precisa estar atado à mola). Resumindo: $F_M(x < 0)$ é positivo.

Para entendermos o comportamento mecânico das molas precisamos saber o comportamento da função $F_M(x)$, ou seja, precisamos saber como a magnitude da força de mola depende do estado de deformação da mola. A lei de Hooke, descoberta por volta de 1670, afirma que para todas as molas:

$$F_M(x) = -k x$$

sendo k uma constante que depende da mola, chamada de constante de mola. Note que o sinal $-$ compatibiliza o sinal de $F_M(x)$ com o sinal de x . Essa lei diz simplesmente que uma mola exerce uma força proporcional ao seu estado de deformação: se a deformação dobra, a força dobra. Analogamente, para dobrar a deformação, temos que dobrar a força aplicada na mola. Molas duras possuem constantes k s grandes e molas moles possuem k s pequenos. Por, exemplo, uma mola que possui $k = 100$ N/m vai fazer uma força $F_M = 100 \times 0,01 = 1$ N se ela estiver deformada de $x = 1$ cm. Reciprocamente, você vai ter que aplicar nessa mola uma força de 1 N para mantê-la deformada de 1 cm.

Na forma vetorial a lei de Hooke fica (sendo x o eixo de deformação da mola):

$$\vec{F}_M = \vec{F}_M(x) = -k x \hat{x}$$

Agora podemos considerar a situação ilustrada na Figura 3.12 que segue. Um bloco de massa M está encostado em repouso na extremidade livre de uma mola ideal de constante elástica k . O bloco é solto e a mola passa a empurrar o bloco. Vamos calcular o trabalho da força de mola no bloco, quando o bloco sai do ponto A (mola comprimida de x_0) e vai até o ponto B (mola relaxada). Quando o bloco passar por B, a extremidade livre da mola vai parar e o bloco continuará se movendo ao longo de x (porque estamos supondo que o bloco está apenas encostado, e não fixado, na extremidade livre da mola).

Obtemos:

$$W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F}_M \cdot d\vec{l} = \int_A^B -k x \hat{x} \cdot d\vec{l} = -k \int_A^B x \hat{x} \cdot d\vec{l}$$

Os limites de integração correspondem a $x = x_0$ (A) e $x = 0$ (B). Na Figura 3.12 vemos que $d\vec{l} = dl \hat{x}$, sendo dl um deslocamento infinitesimal ao longo de x . Então, $dl = dx$ e ficamos com (lembrando que $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$):

$$W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B) = \int_A^B -k x \hat{x} \cdot \hat{x} dx = -k \int_A^B x dx = -k \left. \frac{x^2}{2} \right|_A^B = k \frac{x_0^2}{2}$$

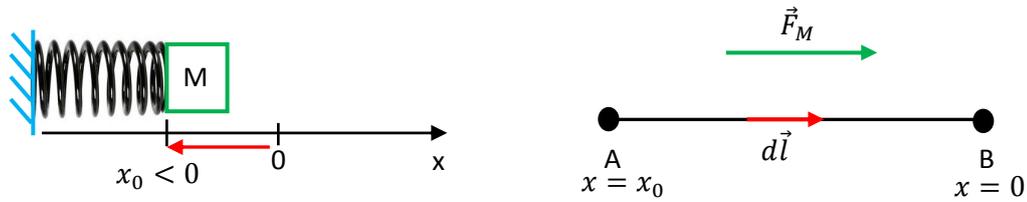


Figura 3.12 Uma mola comprimida empurra um bloco desde A até B. A figura da direita mostra o caminho percorrido pelo bloco e pela extremidade da mola (o segmento de reta AB), o vetor deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ ao longo desse caminho e a força de mola \vec{F}_M que está empurrando o bloco. Note que \vec{F}_M é uma força variável, a magnitude de \vec{F}_M vai diminuindo a medida que a mola vai relaxando.

Concluindo, quando uma mola comprimida empurra um bloco desde a posição $x_0 < 0$ até a posição $x = 0$, ela (a mola, ou a força de mola) realiza um trabalho positivo dado por:

$$W_{\vec{F}_M}(x_0 \rightarrow 0) = k \frac{x_0^2}{2}$$

Obteríamos esse mesmo resultado se considerássemos que a mola estava dilatada de $x_0 > 0$ e puxasse um bloco até a posição $x = 0$. O trabalho da força de mola independe do sinal da deformação x . Se a mola está dilatada de 1 cm ou comprimida de 1 cm e puxa ou empurra o bloco até a origem $x = 0$, o trabalho realizado será o mesmo.

Para posições inicial e final do bloco arbitrárias x_A e x_B , obtemos:

$$W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B) = k \frac{x_A^2}{2} - k \frac{x_B^2}{2}$$

3.3 Teorema do trabalho-energia cinética

Podemos calcular o trabalho de qualquer força, em um dado deslocamento. Na mecânica existe uma força que desempenha um papel especial, a força resultante. Não seria surpreendente se ao calcular o trabalho da força resultante descobríssemos algo interessante. É o que acontece de fato, o cálculo do trabalho da força resultante leva ao teorema do trabalho-energia cinética. Há várias formas de se demonstrar esse teorema. Faremos aqui a demonstração mais sucinta, usando a notação vetorial.

Considere um corpo (uma partícula) de massa M que se desloca no espaço de A até B, em uma trajetória qualquer e submetido a várias forças, cuja resultante é \vec{R} . Vamos calcular o trabalho de \vec{R} no percurso AB:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{l}$$

A segunda lei de Newton ($\vec{R} = M \vec{a}$) vale para esse movimento e, portanto:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{l} = \int_A^B M \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_A^B M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} = M \int_A^B \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l}$$

Note que $d\vec{l}$ é o deslocamento infinitesimal do corpo, ao longo de sua trajetória AB. Então, da cinemática:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow d\vec{l} = \vec{V} dt$$

Portanto:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{l} = M \int_A^B \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} dt = M \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{V}$$

Lembrando o significado do produto escalar vemos que:

$$\vec{V} \cdot d\vec{V} = V_x dV_x + V_y dV_y + V_z dV_z$$

Finalmente (sabendo que $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$):

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = M \left(\frac{V_x^2}{2} + \frac{V_y^2}{2} + \frac{V_z^2}{2} \right) \Big|_A^B = M \left[\frac{V^2}{2} \right]_A^B = M \frac{V_B^2}{2} - M \frac{V_A^2}{2}$$

Vemos que o trabalho da força resultante é igual à variação de uma função, que só depende da massa e da velocidade do corpo. Definindo então essa função:

$$K \equiv M \frac{V^2}{2}$$

Obtemos a forma final do teorema do trabalho-energia cinética (abreviado por TTEC):

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = K_B - K_A$$

A função K é chamada de “energia cinética” do corpo de massa M , pelas razões que discutiremos em breve. O TTEC afirma que podemos calcular a diferença de energia cinética nos extremos da trajetória de um corpo através do cálculo do trabalho da força resultante que atuou no corpo ao longo dessa trajetória. Antes de discutirmos com mais detalhes esse teorema, vale a pena voltarmos ao problema do tobogã e mostrar que a equação que resolve o problema (que calcula V_B), qual seja:

$$M g H = M \frac{V_B^2}{2}$$

é simplesmente o resultado da aplicação do TTEC para o bloco que desce o tobogã.

De fato, para o bloco que desce o tobogã vale:

$$\vec{R} = \vec{\eta} + M \vec{g}$$

Logo (note a fatoração do trabalho: o trabalho da soma é a soma dos trabalhos):

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = W_{\vec{\eta} + M \vec{g}}(A \rightarrow B) = W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) + W_{M \vec{g}}(A \rightarrow B)$$

Já vimos que:

$$W_{M \vec{g}}(A \rightarrow B) = M g H$$

Falta ainda calcular $W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B)$ dado por:

$$W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{\eta} \cdot d\vec{l}$$

Note, a força normal varia ao longo do percurso AB e por isso não podemos dizer que

$$W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) = \vec{\eta} \cdot \vec{L}_{AB}$$

Mas, é fácil ver que $\vec{\eta}$ é sempre ortogonal a $d\vec{l}$, pois a força normal é ortogonal à superfície do tobogã (e à superfície do bloco que toca o tobogã) e o deslocamento do bloco é paralelo ao tobogã. Portanto, $\vec{\eta} \cdot d\vec{l} = \eta dl \cos(90^\circ) = 0$. Logo:

$$W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) = 0$$

Assim, o TTEC diz que:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) + W_{M \vec{g}}(A \rightarrow B) = 0 + M g H = M \frac{V_B^2}{2} - M \frac{V_A^2}{2} = M \frac{V_B^2}{2} - 0$$

Esse problema ilustra a idéia desse capítulo: se abordarmos o problema do tobogã pelo método baseado na segunda lei de Newton, obtemos uma equação diferencial que vai exigir muito mais esforço para ser resolvida (integrada no tempo) do que a abordagem via TTEC (de fato, já mencionamos que o TTEC é o resultado da integração espacial prévia da equação diferencial vinda da segunda lei de Newton). É interessante notar que a força normal $\vec{\eta}$, que é o motivo da complicação na abordagem via segunda lei, desaparece na abordagem via trabalho e energia. Por mais complicada que seja a força $\vec{\eta}$, ela não realiza trabalho no percurso do bloco no tobogã. Daí, o formalismo do TTEC se livra dessa força e das complicações que dela advém.

3.3.1 Energia cinética

O teorema do trabalho-energia cinética envolve a variação da função da massa e da velocidade definida por:

$$K \equiv M \frac{V^2}{2}$$

que chamamos de energia cinética do corpo de massa M , que está se movendo com velocidade de módulo V . O termo “cinética” é fácil de entender: K é função da velocidade, e por isso é função do estado de movimento do corpo. Um corpo estático, não possui energia cinética. Somente corpos que estão se movendo possuem $K \neq 0$. Já o termo “energia” não é tão fácil de definir. Usamos a palavra energia em vários contextos e com vários significados diferentes: na física, engenharia, química, biologia, psicologia, astrologia, etc. Sigmund

Freud, por exemplo, criou o conceito de libido, como uma forma de energia associada à vida. Trata-se de um conceito difícil e abstrato, que não pode ser quantificado: não existe uma fórmula para a libido, ou mesmo um libidômetro. Na física definimos energias mais concretas e que podem ser quantificadas. O dicionário Aurélio define energia como: maneira como se exerce uma força; força moral; firmeza; vigor, força; propriedade de um sistema que lhe permite realizar trabalho etc. No meio dessa confusão, nós aqui vamos ficar com a seguinte definição de energia (mecânica): a energia mecânica de um corpo é a capacidade que esse corpo tem de realizar trabalho, trabalho mecânico como já definimos anteriormente, envolvendo força e deslocamento. Um corpo que tem energia é capaz de fazer força em e deslocar outros corpos que interagem com ele.

Portanto, a energia cinética K de um corpo é a capacidade que ele tem de realizar trabalho, pelo simples fato de estar se movendo. Como esse trabalho é realizado? Considere o exemplo de um projétil de arma de fogo, uma bala de revólver. Essa bala é um corpo metálico pequeno, de massa $M \cong 0,01$ kg (10 g). Uma bala em repouso não pode fazer muita coisa. É basicamente inofensiva. Considere agora que essa bala acabou de ser disparada por uma arma, com uma velocidade $V \cong 400$ m/s. A energia cinética dessa bala é:

$$K \equiv M \frac{V^2}{2} \cong 0,01 \frac{400^2}{2} = 800 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 800 \text{ J}$$

Muitas coisas podem ser feitas com esses 800 J. Essa é, por exemplo, a energia necessária para erguer uma massa $M=1$ kg de uma altura de cerca de 80 metros no campo gravitacional da Terra.

Imagine agora que essa bala atinja um alvo, uma parede, por exemplo. A bala toca a parede, ela faz força na parede (força de contato) e começa a empurrar a parede, abrindo um buraco e deslocando o material que compõe a parede. A bala exerce força e desloca, ela realiza trabalho. A Figura 3.13 ilustra essa idéia.

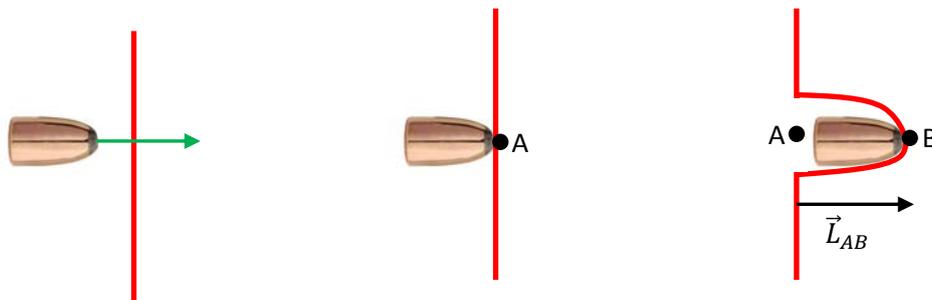


Figura 3.13 Uma bala de revólver chega a uma parede (linha vermelha) com alta velocidade (seta verde), ela toca a parede em A e sai empurrando, abrindo um buraco na parede, através da força de contato $\vec{F}_{B/P}$. Ao final, a bala atinge o repouso no ponto B. A bala, ou mais especificamente a força $\vec{F}_{B/P}$, realiza um trabalho nesse processo.

Vamos calcular o trabalho que a bala faz na parede, ou seja, o trabalho da força que a bala faz na parede $\vec{F}_{B/P}$ desde o momento em que a bala toca a parede (ponto A) até o momento em que a bala atinge o repouso dentro da parede (ponto B). Da definição:

$$W_{\vec{F}_{B/P}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F}_{B/P} \cdot d\vec{l}$$

A força $\vec{F}_{B/P}$ é uma força variável ao longo do percurso AB (um pulso muito rápido de força). Não temos conhecimento suficiente sobre essa força que permita o cálculo direto dessa integral. Por isso, vamos apelar para o TTEC aplicado à bala. Durante o percurso AB atuam na bala o peso $M\vec{g}$ e a força $\vec{F}_{P/B}$, que é a força que a parede faz na bala (uma força de contato, basicamente atrito cinético e normal). Obviamente, da terceira lei de Newton, $\vec{F}_{P/B} = -\vec{F}_{B/P}$.

Note que, se considerarmos que o percurso AB é horizontal (Figura 3.12), então:

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = M\vec{g} \cdot \vec{L}_{AB} = 0$$

pois o peso é vertical e $\cos(90^\circ) = 0$ (poderíamos simplesmente desprezar o trabalho do peso, admitindo que a bala cai muito pouco enquanto penetra na parede, mas nesse caso hipotético que estamos considerando esse trabalho é identicamente nulo). Portanto, aplicando o TTEC para a bala (com $V_A = V$ e $V_B = 0$) ficamos com:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}_{P/B}}(A \rightarrow B) + W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}_{P/B}}(A \rightarrow B) + 0$$

Mas:

$$W_{\vec{F}_{P/B}}(A \rightarrow B) = W_{-\vec{F}_{B/P}}(A \rightarrow B) = -W_{\vec{F}_{B/P}}(A \rightarrow B)$$

Finalmente:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = -W_{\vec{F}_{B/P}}(A \rightarrow B) = M \frac{V_B^2}{2} - M \frac{V_A^2}{2} = -M \frac{V^2}{2} = -K$$

Concluindo:

$$W_{\vec{F}_{B/P}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F}_{B/P} \cdot d\vec{l} = K$$

Essa última equação justifica o nome “energia cinética” para a função K. O trabalho que a bala realiza na parede, através da força de contato bala/parede, é exatamente igual a $M \frac{V^2}{2}$, ou seja, é igual à energia cinética que ela tinha antes de atingir a parede. K é, portanto, a capacidade que a bala tinha de realizar trabalho, enquanto estava em vôo livre. Ao atingir o repouso em B, a bala exaure (gasta) toda sua capacidade de realizar trabalho, e não faz mais nada. Nesse sentido, uma bala de revólver em vôo possui uma capacidade de transformação, associada ao seu movimento. Essa capacidade vai se concretizar em transformação (movimento, ruído, destruição, aumento de temperatura (calor), deslocamento, ferimento, morte etc.) no corpo que se colocar no caminho da bala. Ao se colocar no caminho da bala esse corpo vai sofrer uma força de contato bala/corpo, que vai deslocar o corpo e/ou material desse corpo (deformação) e, portanto, realizar trabalho. Desse trabalho resultam as transformações a que já nos referimos. Através do trabalho a energia

cinética inicial é convertida em outras formas, mecânicas ou não mecânicas, de energia, como a energia térmica (que flui como calor dentro da parede e na bala). A energia cinética de um corpo é, portanto, a quantidade de energia que você vai obter, sob outras formas (como energia térmica, energia sonora, energia elástica etc.), caso esse corpo seja levado ao repouso ($K=0$) por qualquer processo. No caso da bala com massa $M = 0,01$ kg e velocidade $V = 400$ m/s, sua energia cinética é $K = 800$ J, e 800 J de energia, sob outras formas, serão liberados no processo de se levar essa bala ao repouso, não importa que processo seja usado para isso. É melhor que ninguém esteja no caminho dessa bala.

Chegamos então a um ponto em que podemos interpretar o teorema do trabalho-energia cinética, expresso pela equação:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = K_B - K_A$$

de acordo com a seguinte ideia: um corpo X que está se movendo possui capacidade de realizar trabalho em outros corpos que interagem com ele (através das forças que X faz nesses corpos). Essa capacidade é dada pela função K calculada para o corpo X. Quando $W_{\vec{R}}(A \rightarrow B)$ (considere que \vec{R} é a resultante em X, \vec{R} não é uma força que X faz, mas sim uma força que outros corpos fazem em X) é positivo (enquanto X vai de A até B), significa que esses outros corpos estão fornecendo energia para X (através de \vec{R}), e a energia cinética de X aumenta nesse percurso ($K_B > K_A$). Quando $W_{\vec{R}}(A \rightarrow B)$ é negativo, significa que X está fornecendo energia para esses outros corpos, e a energia cinética de X diminui ($K_B < K_A$), porque X está gastando sua energia cinética, ou seja, sua capacidade de realizar trabalho. O trabalho $W_{\vec{R}}(A \rightarrow B)$ representa, portanto, uma transferência de energia cinética do corpo X para sua vizinhança, através da força de interação \vec{R} . Se $W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = 0$, por exemplo, então a energia cinética do corpo se conserva no percurso AB. Ele nem aumentou nem diminuiu sua capacidade de realizar trabalho.

Consideremos o exemplo de uma pessoa que lança uma pedra no ar. A pessoa realiza trabalho e transfere uma energia K para a pedra. Essa energia K não veio do nada, ela veio da pessoa, que realizou trabalho sobre a pedra, através da força pessoa/pedra. A pessoa vai ter que repor essa energia depois, através dos alimentos que ela ingerir. A pedra passa a viajar no espaço transportando essa energia K com ela. Se uma segunda pessoa agarra a pedra, levando-a ao repouso, a energia cinética da pedra vai a zero. Mas a pedra realizou trabalho sobre essa segunda pessoa, através da força pedra/pessoa. Esse trabalho vai resultar em transformações na pessoa. Ela vai sentir dor, contração muscular, aumento de temperatura etc., ao agarrar a pedra. Dessa forma, a primeira pessoa transferiu energia para a segunda pessoa, usando a pedra como veículo de transporte de energia, na forma cinética. De forma análoga, o vento transporta energia cinética através do espaço, que chamamos de energia eólica. Ao bater nas hélices de um cata-vento, o vento realiza trabalho, através da força vento/cata-vento, e transfere sua energia cinética para a rotação da hélice (energia cinética rotacional).

3.3.2 Dificuldades na interpretação do teorema do trabalho-energia cinética

O contexto de aplicabilidade do TTEC é o do movimento de partículas, ou dos corpos rígidos em movimento de translação. Um corpo rígido é um corpo ideal que não admite deformações, ele não amassa, não dobra, não contrai, não dilata, não muda de forma. O movimento de translação (que discutiremos com mais detalhes no capítulo 5) é basicamente um movimento sem rotações. Podemos mostrar que o movimento de um corpo rígido em translação é equivalente ao movimento de uma partícula, ou seja, obedece às mesmas equações cinemáticas e dinâmicas. Esse é o contexto específico do TTEC. Veremos no capítulo 5 que a simples adição de uma energia cinética de rotação estende o contexto para corpos rígidos que também giram no espaço. Mas, para simplificar, vamos continuar pressupondo aqui a ausência de rotações.

Uma partícula não possui interior e a ideia de que essa partícula possa trocar calor com o ambiente e esfriar/aquecer é um tanto absurda. A mesma coisa vale para um corpo rígido, já que calor/temperatura estão associados a movimento/agitação das partículas no interior dos corpos. Trata-se de uma limitação desses modelos, do modelo de partícula e de corpo rígido, na sua tentativa de representar corpos reais.

De fato, se pretendemos discutir sistemas mais interessantes do que simples partículas/corpos rígidos, devemos reconhecer que existem várias formas de energia na natureza, além da energia cinética, que é uma energia mecânica. Por exemplo, a energia térmica (calor), a energia química, associada às ligações químicas entre os átomos/moléculas, a energia elétrica etc. Sabemos, por exemplo, que um corpo composto de vários átomos possui uma energia interna, associada à sua configuração microscópica interna: às posições no espaço e aos movimentos desses vários átomos. Mudanças nessa configuração interna podem estar associadas à absorção ou liberação de energia, na forma de trabalho ou calor. Um litro de gasolina, por exemplo, pode colocar um motor em movimento e liberar calor, ao reagir com o oxigênio do ar. Essa energia está lá, dentro do litro de gasolina. O sistema gasolina+oxigênio muda sua configuração microscópica interna (rearranjo das ligações químicas, ou seja, das posições relativas dos átomos), e energia é liberada.

O TTEC é apenas uma integral da segunda lei de Newton aplicada a uma partícula e não podemos ter esperança de que ele contenha ou descreva as várias formas (não mecânicas) de energia que existem na natureza. Essas várias energias são adequadamente descritas no contexto amplo da primeira lei da termodinâmica:

$$\Delta E_I + \Delta K = Q + W$$

que é um princípio geral de conservação da energia, envolvendo não somente energias mecânicas. A primeira lei da termodinâmica é uma lei geral, que vale para átomos, moléculas, células, estrelas e galáxias. Nessa lei, E_I é a energia interna do sistema (ΔE_I é a variação nessa energia), ou do corpo que estamos estudando, K é a energia cinética do corpo, Q é o calor que esse corpo recebe de sua vizinhança e W é o trabalho que essa

vizinhança faz no corpo. Não entraremos em detalhe sobre essa lei aqui, pois isso fugiria do contexto. Apenas assumiremos que a ideia por trás da primeira lei da termodinâmica é razoável.

Uma partícula não possui estrutura interna e, portanto, nem energia interna. Uma partícula também não troca calor com o ambiente e, por isso, podemos ver o TTEC como um caso particular da primeira lei da termodinâmica em que $E_I = Q = 0$:

$$\Delta E_I + \Delta K = Q + W \Rightarrow \Delta K = W$$

Um corpo rígido pode até ter estrutura interna, mas sendo ela rígida, segue também que $\Delta E_I = Q = 0$ (pois E_I é constante).

Mesmo descrevendo satisfatoriamente a cinemática e a dinâmica de muitos corpos, como já vimos nos capítulos de cinemática e dinâmica, o modelo de partícula/corpo rígido mostra, muitas vezes, sua inadequação quando descrevemos através desse modelo a energia de um corpo mais complexo do ponto de vista do TTEC. Algumas vezes precisamos estender esses modelos, admitindo que eles podem modificar suas energias internas e suas temperaturas. É o caso de sistemas que envolvem forças dissipativas, como o atrito cinético. Essas forças dissipam energia mecânica, ou seja, “desaparecem” com uma parte da energia mecânica do sistema. Para onde vai essa energia? Ela se transforma em quê? A ideia expressa na primeira lei da termodinâmica é a de que energia não pode desaparecer, de que energia apenas muda de forma (natureza) e de lugar. Se a quantidade de energia X diminuiu, é porque a quantidade de outra forma de energia Y aumentou ou se a quantidade de energia X diminuiu aqui, é porque ela aumentou lá. Se uma força de atrito cinético diminui a energia mecânica de um sistema, é porque outra forma de energia (mecânica ou não) aumentou. Geralmente (mas nem sempre) essa energia que aumenta é a energia interna dos corpos envolvidos no atrito, o que se reflete no aumento da temperatura desses corpos. Quando os corpos se atritam eles aquecem. Fica claro então que mesmo nessa descrição/modelo de partículas/corpos rígidos devemos associar a esses corpos uma energia interna, para que o fluxo de energia no sistema seja bem compreendido.

Considere o seguinte exemplo: um bloco de massa M é simplesmente lançado em uma superfície horizontal com atrito e desliza até parar. O bloco passa pelo ponto A com velocidade $V_A \neq 0$ e chega no ponto B, onde ele para ($V_B = 0$). Seja μ_C o coeficiente de atrito cinético bloco/superfície e D a distância entre A e B.

Aplicando o TTEC para o bloco (\vec{R} é a resultante no bloco) obtemos:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) + W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) = \Delta K = -M \frac{V_A^2}{2}$$

Note que peso e normal não realizam trabalho, pois são forças verticais e o deslocamento do bloco é horizontal.

A força de atrito cinético realiza trabalho porque atua em pontos do bloco que estão deslizando na superfície (e, portanto, se deslocando). Usando o fato de que a força de atrito cinético tem magnitude constante $\mu_c M g$ e é oposta ao deslocamento do bloco (ângulo de 180° entre a força e o deslocamento) e que a distância horizontal entre A e B é D obtemos:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = \vec{F}_A^{(C)} \cdot \vec{L}_{AB} = \mu_c M g D \cos(180) = -\mu_c M g D$$

Portanto:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = -\mu_c M g D = \Delta K = -M \frac{V_A^2}{2}$$

O bloco tinha energia cinética em A e quando chegou em B essa energia mecânica “desapareceu”. Energia não pode simplesmente desaparecer, energia apenas muda de forma e de lugar, é o que diz a primeira lei da termodinâmica. No caso do bloco que freia, arrastando no piso, vamos observar uma elevação nas temperaturas do bloco e do piso. A energia cinética inicial do bloco foi convertida em energia interna desses corpos, através do trabalho do atrito cinético. De fato, aplicando a primeira lei da termodinâmica para o sistema (isolado) bloco+superfície horizontal (desprezando trocas de calor com a vizinhança) obtemos:

$$\Delta K + \Delta E_{IB} + \Delta E_{IS} = 0$$

sendo E_{IB} e E_{IS} as energias internas do bloco e da superfície. Note que não aparece nessa equação o trabalho do atrito cinético, pois essa é uma força interna para o sistema bloco+superfície. Como já mostramos que:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = \Delta K$$

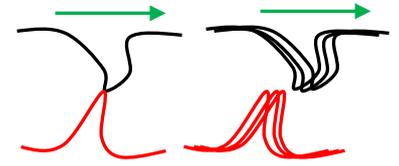
segue que:

$$\Delta E_{IB} + \Delta E_{IS} = -\Delta K = -W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = \mu_c M g D$$

Note que $W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B)$ é negativo e que $-W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = \mu_c M g D$ representa, portanto, o aumento nas energias internas dos (dois) corpos envolvidos no atrito. A energia cinética inicial do bloco foi convertida em energia interna do bloco e da superfície horizontal, graças à atuação do atrito cinético.

Concluimos que devemos adicionar ao nosso modelo o fato de que o bloco possui energia interna E_I (a superfície também) e entender que essa energia interna está mudando, apesar de não haver no TTEC um termo explícito contendo E_I que descreveria essa mudança. O trabalho do atrito cinético deve descrever uma diminuição na energia mecânica e concomitante aumento na energia interna do sistema. De fato, se você esfregar suas mãos vigorosamente em uma superfície vai perceber que o atrito cinético produz elevação de temperatura e, portanto, aumento na energia interna. Podemos até fazer fogo simplesmente atritando um graveto em outro.

Do ponto de vista microscópico, a produção de energia interna pelo atrito cinético está associada às vibrações (agitação) que acompanham a ruptura da adesão entre as superfícies, nos pontos de contato entre elas (área real de contato). Essa vibração se propaga para o interior dos corpos, aumentando suas energias internas. Basicamente, um ponto de contato entre as superfícies é tensionado pelo movimento do bloco e rompe, vibrando em seguida. A vibração ocorre nas duas pontas do ponto de contato que se rompe, na ponta que pertence à superfície do bloco e na ponta que pertence à superfície do piso. Daí a elevação na energia interna das duas superfícies (ΔE_{IB} e ΔE_{IS}). A ideia está ilustrada na figura ao lado. Note que estamos falando de deformações/vibrações de pontos de contato e essas coisas não ocorreriam em uma partícula ou mesmo em um corpo rígido. Daí a impossibilidade do TTEC, que é apenas uma integral espacial da segunda lei de Newton para uma partícula, descrever esse processo de variação da energia interna, devido ao atrito cinético.



Considere um segundo exemplo: um bloco rígido de massa M é empurrado por uma força \vec{F} constante, aplicada por uma pessoa, e desliza em uma superfície horizontal com atrito cinético, com coeficiente de atrito cinético bloco/superfície igual a μ_C . Suponha que a força de atrito cinético seja tal que $\vec{F}_A^{(C)} = -\vec{F}$ e que, portanto, o bloco se mova com velocidade constante (sem variação de energia cinética). Se tomarmos dois pontos A e B quaisquer da trajetória o TTEC diz que:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) + W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) = 0$$

já que $\Delta K = 0$, por hipótese.

Novamente não há trabalho do peso e da força normal por causa do ângulo de 90° entre força e deslocamento e $W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = -\mu_C M g D$. Obtemos então:

$$FD - \mu_C M g D = 0$$

Está correta essa afirmação, pois ela equivale a $F - \mu_C M g = 0$ (eliminando o fator D comum), que foi nossa hipótese inicial ($\vec{F}_A^{(C)} = -\vec{F}$).

Vemos então que uma pessoa está realizando trabalho sobre o bloco (FD) e aparentemente nada está acontecendo, do ponto de vista da energia, a energia mecânica do bloco não está mudando. A pessoa está realizando trabalho positivo sobre o bloco (através de \vec{F}) e deve estar, ela mesma, consumindo sua energia interna, através de seu metabolismo. Essa pessoa vai suar, ficar exausta e com fome se empurrar esse bloco por uma distância muito grande. Para onde está indo a energia da pessoa? Para o bloco? Não na forma mecânica, pois a energia mecânica do bloco não está mudando.

Mas, podemos estar certos de que as temperaturas do bloco e da superfície em que ele desliza (supostos isolados termicamente do resto do universo) estão ficando maiores, suas energias internas estão crescendo, enquanto o bloco desliza. Portanto, nesse processo, a pessoa transfere energia mecânica para o bloco (graças a sua própria energia interna) arrastando-o na superfície e essa energia está sendo convertida em energia interna do bloco e da superfície, pela ação do atrito cinético bloco/superfície.

De fato, aplicando a primeira lei da termodinâmica para o sistema bloco+superfície horizontal, com o bloco submetido à força externa \vec{F} (da pessoa) e desprezando trocas de calor com a vizinhança (que podem ocorrer depois, mas não estamos interessados nelas agora, ou seja, consideramos que o processo $A \rightarrow B$ é adiabático):

$$\Delta E_{IB} + \Delta E_{IS} = W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = FD$$

sendo E_{IB} e E_{IS} as energias internas do bloco e da superfície. Note que não aparece nessa equação o trabalho do atrito cinético, pois essa é uma força interna para o sistema bloco+superfície. Como já mostramos que:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = 0$$

segue que:

$$\Delta E_{IB} + \Delta E_{IS} = -W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = \mu_C M g D$$

Note que $W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B)$ é negativo e que $-W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = \left| W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) \right| = \mu_C M g D$ representa, portanto, o aumento nas energias internas dos (dois) corpos envolvidos no atrito: bloco e superfície horizontal.

Conclusão: a pessoa realiza trabalho sobre o bloco ($W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$), consumindo sua própria energia interna, através de seu metabolismo, e o atrito cinético entre o bloco e a superfície converte esse trabalho da pessoa diretamente em energias internas do bloco e da superfície. A energia mecânica do bloco permanece constante nesse processo. Esse é, basicamente, o processo que usamos para produzir fogo atritando um graveto em outro.

A força de atrito cinético sempre desempenha esse papel, de conversão de energia cinética em energia interna. O atrito cinético produz aumento nas temperaturas das superfícies que deslizam uma contra a outra, aumento nas energias internas. Não há no TTEC um termo descrevendo energia interna, por que ele é um teorema da mecânica e só envolve energias mecânicas e trabalhos. A existência da energia interna do sistema estará implícita na interpretação dos resultados fornecidos pelo TTEC.

A força de atrito estático não desempenha esse mesmo papel, de produzir aumento nas energias internas dos corpos. Não há elevação de temperatura associada ao atrito estático. Do ponto de vista cinemático e dinâmico a força de atrito estático desempenha muitos papéis, do ponto de vista energético ela é

nula. Se você apoiar sua mão em uma mesa de tal forma que ela fique estática, tentando deslizar, mas sem deslizar, não haverá nenhuma elevação de temperatura associada a esse processo. Há exceções óbvias a essa ideia como a de uma caixa apoiada na carroceria de um caminhão que acelera. Se nos concentrarmos apenas na caixa, supondo que ela não desliza, a força de atrito estático vai realizar trabalho positivo e aumentar a energia cinética da caixa. Nesse caso a força de atrito estático estará atuando em lugares que estão se deslocando no espaço, pois o caminhão está se movendo, do ponto de vista de um observador no asfalto. Excetuando essas exceções óbvias (associadas a uma simples mudança de referencial – da carroceria para o asfalto), a força de atrito estático não realiza trabalho.

Para ilustrar essa ideia, considere o seguinte exemplo: um carro de massa M está se deslocando em uma pista horizontal (peso e normal não realizam trabalho por causa do ângulo de 90°). O carro está inicialmente em repouso no ponto A ($V_A = 0$). O motorista acelera o carro, e o carro, sem derrapagens, passa pelo ponto B com velocidade $V_B \neq 0$. A força que acelera o carro é a força de atrito estático $\vec{F}_A^{(E)}$ que o asfalto faz nos pneus (já discutimos essa ideia no capítulo 2). O atrito é estático porque estamos supondo que não ocorrem derrapagens. Note então que:

$$W_{\vec{F}_A^{(E)}}(A \rightarrow B) = 0$$

Isso porque o atrito estático atua no local onde os pneus tocam o asfalto, e esse local está parado enquanto sofre a força. Não há deslocamento onde a força é aplicada e por isso o trabalho é nulo. Podemos comparar essa situação com a de uma pessoa calçando sapatos e caminhando em um piso horizontal não-escorregadio. O sapato da pessoa que está, em cada instante, em contato com o chão, e que está sofrendo a força de atrito estático $\vec{F}_A^{(E)}$, está parado. Não há, portanto, trabalho de $\vec{F}_A^{(E)}$. A mesma situação se dá com o carro. Um pneu é uma espécie de “sapato” circular. Não houve trabalho de $\vec{F}_A^{(E)}$ mas houve claramente uma variação (um ganho) na energia cinética do carro:

$$\Delta K = M \frac{V_B^2}{2} - M \frac{V_A^2}{2} = M \frac{V_B^2}{2} > 0$$

Estamos desprezando nessa expressão as energias cinéticas de rotação dos conjuntos pneus+rodas, que estão, por hipótese, rolando sem deslizar na pista horizontal.

Vamos tentar modelar esse carro através de uma partícula, ou mesmo de um bloco rígido e aplicar o TTEC para o percurso AB. O TTEC diz que (note que nenhuma força realiza trabalho, seja por causa do ângulo força/deslocamento, seja por causa da própria ausência de deslocamento):

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{F}_A^{(E)}}(A \rightarrow B) = 0 = \Delta K = M \frac{V_B^2}{2} > 0$$

Obtivemos uma equação absurda. A origem desse absurdo está no fato de que não consideramos nessa equação a transferência de energia proveniente da queima do combustível (gasolina, por exemplo). Fizemos isso porque essa idéia foge do contexto da mecânica, não existe um termo para representar a energia da queima da gasolina no TTEC, pois para o TTEC o carro é uma partícula/bloco rígido, ele não tem pneus, nem rodas que rolam e nem tanque de combustível.

De fato, somente em um contexto mais geral, que leve em conta as energias internas dos corpos que possuem estrutura interna e energia interna (o que não é o caso das partículas ou corpos rígidos), podemos computar corretamente o balanço de energia em um carro que sai do repouso devido à queima de um combustível. A primeira lei da termodinâmica para o sistema carro+gasolina+oxigênio, desprezando a troca de calor com o ambiente (o atrito estático não realiza trabalho) diz que:

$$\Delta K + \Delta E_I = 0$$

sendo $\Delta K > 0$ o aumento na energia cinética do carro e $\Delta E_I < 0$ a diminuição na energia interna da mistura gasolina+oxigênio. $|\Delta E_I| = -\Delta E_I$ é a energia liberada na queima do combustível e convertida em energia cinética. Um valor aproximado para a densidade de energia da gasolina é 34 milhões de joules por litro (34 MJ/l), ou seja, a combustão de um litro de gasolina libera cerca de 34 milhões de joules. Essa é aproximadamente a energia necessária para erguer um bloco de massa $M=1$ kg de uma altura de 3,4 mil quilômetros no campo gravitacional da Terra. Essa distância é aproximadamente metade do raio da Terra.

Uma reação química (exotérmica), como a combustão da gasolina, libera energia porque o saldo entre a energia gasta para quebrar as ligações entre os átomos dos reagentes e a energia ganha nas novas ligações formadas nos produtos é positivo. As quebras de ligações são produzidas por colisões entre as moléculas (impulsionadas por uma centelha elétrica, por exemplo) e as novas ligações são formadas pela atração elétrica entre os átomos/íons/elétrons liberados na quebra das moléculas. Essas partículas se atraem (por causa das cargas elétricas de sinais opostos) e se juntam vigorosamente, girando e vibrando intensamente, aumentando a temperatura do produto final da reação. A expansão térmica do produto pode empurrar um pistão, como no caso do motor do carro. Ondas eletromagnéticas (luz ou infravermelho) também podem ser geradas na reação, por causa das acelerações das cargas elétricas/transições eletrônicas, como no caso do fogo.

Como outro exemplo que envolve energia interna/química, considere um atleta de massa m que salta do chão, na vertical. Inicialmente o atleta estava parado, agachado no chão (ponto A, $V_A = 0$). De repente ele salta e sai do chão, adquirindo uma velocidade vertical, e uma energia cinética. Ele vai subindo e passa por um ponto B (fora do chão, a uma altura H) com velocidade de módulo V_B . A força que fez o atleta saltar é a força normal $\vec{\eta}$ (vertical para cima) que o chão faz nos pés do atleta, somente enquanto eles tocam o chão. Novamente:

$$W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) = 0$$

porque os pés do atleta, que sofrem a força $\vec{\eta}$ durante o salto, estão parados no chão. Quando os pés do atleta perdem contato com o chão e começam a se deslocar no espaço, a força $\vec{\eta}$ se anula. Note que $\vec{\eta} = \vec{\eta}(t)$ nesse caso, a força normal é um pulso de força.

Transportando essa ideia para o TTEC aplicado ao atleta desde A (chão) até B obtemos (desprezando o arraste do ar):

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) = \Delta K = M \frac{V_B^2}{2} \Rightarrow -m g H = M \frac{V_B^2}{2} > 0$$

Note que o trabalho do peso é negativo, igual a $-m g H$, porque enquanto o atleta sobe a peso está para baixo enquanto que o deslocamento do atleta está para cima.

O TTEC leva novamente a uma equação absurda: uma grandeza estritamente negativa é igual a outra grandeza estritamente positiva. Novamente somos levados a reconhecer que o atleta salta graças a sua energia interna E_I , que é consumida durante o salto. Essa energia E_I vem da queima interna dos alimentos ingeridos pelo atleta, ou seja, de seu metabolismo. Um defunto não dá saltos.

Aplicando a primeira lei da termodinâmica para o atleta, desprezando trocas de calor (a força normal não realiza trabalho):

$$\Delta K + \Delta E_I = W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B)$$

Portanto:

$$\Delta E_I = -m g H - M \frac{V_B^2}{2}$$

Note que a energia interna do atleta diminui nesse processo, ou seja, ΔE_I é negativo. Essa última igualdade diz que a energia liberada pelo metabolismo do atleta, $|\Delta E_I| = -\Delta E_I$, é utilizada para erguê-lo de uma altura H no campo gravitacional da Terra e para fornecer a ele a velocidade V_B . Veremos na próxima seção que $m g H$ é a energia (mecânica) potencial gravitacional da massa m em uma altura H . O processo AB é um processo em que energia química é convertida em energia potencial gravitacional + energia cinética.

A principal conclusão que tiramos desses exemplos é que o teorema do trabalho-energia cinética pode ser aplicado diretamente para a solução de problemas envolvendo o movimento de partículas, ou de corpos rígidos que não giram. Partículas não possuem interior e, portanto, não possuem energia interna. Às vezes, o modelo de partícula/corpo rígido, implícito no TTEC, mostra claramente sua inadequação, como quando tentamos modelar um ser vivo ou um automóvel como sendo uma partícula. Um ser vivo e um automóvel podem adquirir energia cinética a partir de suas energias internas, mas esses processos não são descritos pelo TTEC, que é apenas uma integral espacial da segunda lei de Newton para uma partícula. Somente a primeira lei da termodinâmica é capaz de descrever a inter-relação entre todas as energias de um sistema em geral.

Procuraremos evitar, portanto, a tentativa de usar o TTEC para modelar sistemas como seres vivos e veículos movidos a combustível. Um ser vivo não é uma partícula ou mesmo um corpo rígido. A interpretação do TTEC em termos de trocas de energia não leva a análises corretas nesses casos e em casos semelhantes. Utilizaremos o TTEC para a análise do movimento de corpos (partículas) sem fontes de energia interna. Esses corpos só variam sua energia mecânica devido à ação (trabalho) de forças externas. Mesmo assim, dentro dessa aproximação de partícula/corpo rígido, o “desaparecimento”, ou diminuição, de energia mecânica devido à atuação da força de atrito cinético (forças dissipativas) deve ser interpretado em termos do aumento nas energias internas dos corpos envolvidos no atrito. Uma cadeira, uma mesa, um saco de cimento ou qualquer corpo similar não possui fonte de energia interna (metabolismo ou combustível) e, se ele não estiver girando no espaço, o modelo de partícula pode ser considerado satisfatório, do ponto de vista energético. Se ele estiver girando, veremos em breve que basta acrescentar uma energia cinética de rotação, ou seja, uma $K_{rot} = I \omega^2 / 2$, e o TTEC continua dando resultados consistentes com a realidade.

Nesse ponto alguém poderia objetar dizendo que o deslocamento que está subentendido nos cálculos dos trabalhos no TTEC é o deslocamento de uma partícula e não o deslocamento dos pés de uma pessoa que anda/salta ou dos pontos onde os pneus de um carro tocam o piso. Partículas não possuem pernas, músculos ou tanques de gasolina. É verdade, as equações absurdas que obtivemos a partir do TTEC nesses exemplos foram geradas por essa nossa tentativa, infeliz, de modelar uma pessoa ou um automóvel, do ponto de vista energético, através de uma partícula e do TTEC. Fizemos essa tentativa no intuito de mostrar como o TTEC pode tornar confusa a análise das trocas de energia em sistemas que possuem uma fonte de energia interna, como um ser vivo ou um veículo com motor à combustão.

Se formos fiéis (ao pé da letra) ao modelo de partícula/corpo rígido no caso, por exemplo, do automóvel de massa M que sai do repouso (em A) e acelera no piso horizontal até o ponto B, o TTEC fornece a equação:

$$W_{\vec{F}_A^{(E)}}(A \rightarrow B) = \Delta K = M \frac{V_B^2}{2}$$

Se a força $\vec{F}_A^{(E)}$ nessa partícula que representa o automóvel for constante no percurso AB e a distância entre esses pontos for D , o trabalho da força de atrito estático no contexto do TTEC será $F_A^{(E)} D$ (lembre-se que a força de atrito estático está apontando para a frente no caso de um carro que acelera), ou seja, o TTEC diz que:

$$F_A^{(E)} D = M \frac{V_B^2}{2}$$

Note, $F_A^{(E)} D$ é o trabalho do atrito estático nessa partícula (imaginária, que representa um automóvel, do ponto de vista energético), que se desloca no espaço, na presença de um atrito estático (dá para notar o

contrassenso). A equação está correta, pois se derivarmos essa equação, desfazendo a integral espacial, obtemos para um instante qualquer no percurso AB:

$$\vec{F}_A^{(E)} = M \frac{d}{dt} \vec{V}$$

que é a segunda lei de Newton para o carro. De fato, note que a equação que obtivemos do TTEC, qual seja:

$$V_B^2 = 2 \frac{F_A^{(E)}}{M} D$$

é apenas a equação de Torricelli (da cinemática para uma partícula com aceleração constante) aplicada ao percurso AB.

A equação fornecida pelo TTEC está correta, o problema está na interpretação equivocada dessa equação, que sugere que a fonte de energia cinética do automóvel é o piso, que faz a força de atrito estático nos pneus. Se assim fosse, um carro sem gasolina também andaria, pois ele também está em contato com o piso. Como já discutimos, o carro sai do repouso por causa da queima do combustível, ou melhor, por causa da energia interna do combustível. Essa ideia vai além da segunda lei de Newton e, por isso, não aparece no TTEC. Note então que o carro acelera e sai do repouso por causa da força $\vec{F}_A^{(E)}$, conforme a segunda lei de Newton, mas não ganha energia por causa da força $\vec{F}_A^{(E)}$, como sugere o TTEC.

Esse exemplo simples exhibe a ideia de que o conceito de trabalho na termodinâmica é diferente do trabalho que aparece no TTEC. No exemplo do carro que acelera, do ponto de vista da termodinâmica, ou seja, vendo o trabalho com uma troca de energia entre um corpo e sua vizinhança:

$$W_{\vec{F}_A^{(E)}}(A \rightarrow B) = 0$$

Por outro lado, do ponto de vista do TTEC/partícula/corpo rígido (supondo $F_A^{(E)}$ constante):

$$W_{\vec{F}_A^{(E)}}(A \rightarrow B) = F_A^{(E)} D$$

Não há contradição. As duas expressões estão corretas, pois representam coisas diferentes. O trabalho termodinâmico (nulo) está correto por que a força de atrito estático não transfere energia do chão para o carro. O trabalho $F_A^{(E)} D$ que aparece no TTEC está correto por que ele é apenas o produto de uma força por uma distância, a distância que a partícula que representa o carro percorreu (alguns autores chamam esse produto $F_A^{(E)} D$ de pseudo-trabalho). Esse produto não representa de fato uma troca de energia nesse caso. Não podemos interpretar todos os trabalhos que aparecem no TTEC como trocas/conversões de energia. Nos casos em que o uso do TTEC não é adequado, pelo fato dele ignorar a existência da energia interna, aparecem (pseudo) trabalhos de forças, ou seja, produtos de forças por deslocamentos, que não podem ser interpretados como uma transferência/conversão de energia, no sentido termodinâmico.

Não devemos temer essa aparente contradição por que TTEC não descreve corretamente a energia de um carro que acelera queimando combustível. Não há esperança de interpretar corretamente o TTEC para um ser vivo, um carro ou qualquer outro sistema que disponha de uma fonte de energia interna. Devemos esquecer o TTEC nesses casos.

Consideramos relevante essa discussão, muitas vezes negligenciada nos livros-texto tradicionais de mecânica clássica, porque o estudante deve perceber a unidade entre as várias divisões (tópicos) da física, divisões feitas geralmente apenas por razões didáticas. A natureza é uma só e a física também. Os conceitos da mecânica clássica devem se integrar aos da termodinâmica e vice-versa. Pode haver dificuldades de interpretação, como as que exibimos para o TTEC, mas não pode haver contradições.

Vamos apresentar apenas mais um exemplo, antes de encerrarmos essa discussão e começarmos a aplicar o TTEC, afinal ele tem seu (amplo) domínio de aplicabilidade.

Um carro de massa M sem gasolina (apenas esqueça a gasolina) está se deslocando em uma estrada reta horizontal, após ter descido uma ladeira íngreme. No ponto A (já na superfície horizontal) o carro estava com velocidade de módulo V_A . De repente, o motorista do carro pisa no freio, parando no ponto B, após percorrer uma distância D (de A até B). Supondo que não haja derrapagens, a força que freia o carro é a força de atrito estático, que o asfalto faz nos pneus. Vamos assumir, para simplificar, que a força de atrito estático tenha módulo constante $F_A^{(E)}$ durante todo o percurso AB. O motorista pode fazer isso controlando a pressão do pé no pedal de freio. A segunda lei de Newton diz que ao longo do eixo (x) paralelo à estrada vale:

$$-F_A^{(E)} = M a_x$$

sendo $a_x = dV_x/dt$ a aceleração de frenagem do carro. O sinal negativo indica apenas que a força de atrito e a aceleração estão para a esquerda, se o carro está se movendo para a direita (sentido escolhido para o eixo x). Nesse caso o carro vai frear com aceleração constante e a cinemática desse movimento leva à equação de Torricelli que diz que:

$$V_B^2 = V_A^2 + 2 a_x D \Rightarrow M \frac{V_A^2}{2} = F_A^{(E)} D$$

já que $a_x = -F_A^{(E)}/M$.

De fato, o TTEC aplicado ao carro (considerado como uma simples partícula, ou seja, esquecendo que ele tem pneus que rolam sem deslizar etc.) diz a mesma coisa, pois:

$$W_{\vec{F}_A^{(E)}}(A \rightarrow B) = \Delta K \Rightarrow -F_A^{(E)} D = 0 - M \frac{V_A^2}{2}$$

Nesse sentido, poderíamos abrir mão do TTEC, pois ele não acrescenta nada além da cinemática, e evitaríamos confusões de interpretação.

Mas enfim, aqui vem a questão crucial posta pelo TTEC: o carro tinha energia cinética, e na frenagem ela “desapareceu” (nesse exemplo não há gasolina, por hipótese). O TTEC sugere que isso se deu por causa do trabalho do atrito estático pneus/asfalto, ou seja, que a energia cinética do carro foi transferida para o asfalto, se interpretarmos o trabalho $-F_A^{(E)} D$ como uma transferência/conversão de energia, que é o sentido do trabalho na termodinâmica e também, muitas vezes, mas nem sempre, no TTEC. Está correta essa interpretação? A equação obtida do TTEC está errada?

A equação que obtivemos do TTEC está correta, é a equação de Torricelli, que vale nesse caso (aceleração constante). De fato, a equação obtida do TTEC está sempre correta, pois ela é apenas uma integral da segunda lei de Newton. O problema está em sua interpretação. Não houve transferência de energia para o asfalto, o atrito estático não desempenha esse papel nesse caso. Ele apenas freia o carro, ou seja, ele desempenha apenas seu papel cinemático/dinâmico.

Para onde vai a energia cinética inicial do carro? Só a termodinâmica pode responder. Aplicando a primeira lei da termodinâmica ao carro (desprezando trocas de calor com o ambiente e considerando que o atrito estático não realiza trabalho no sentido termodinâmico) obtemos:

$$\Delta K + \Delta E_I = 0 \Rightarrow \Delta E_I = M \frac{V_A^2}{2}$$

A energia cinética inicial do carro ainda está dentro dele, mas na forma de energia interna. Como ocorreu esse processo de conversão de energia? Ele ocorreu nos freios, onde uma parte do carro, uma pastilha de freio, exerce força de atrito cinético em outra parte do carro, um disco ou um tambor de freio. Trata-se de um processo interno, que acontece dentro do carro. Uma parte do carro atrita na outra (como quando esfregamos as mãos uma na outra, para aquecê-las) e isso eleva suas temperaturas, ou seja, suas energias internas. As pastilhas/discos/tambores de freio esquentam enquanto o carro freia, convertendo a energia cinética do carro em energia interna do carro. O atrito estático pneus/asfalto não tem nada a ver com essa conversão de energia. Os pneus e o asfalto não vão esquentar, se não há derrapagens. Essa conversão de energia cinética/interna não aparece no TTEC, pois para o TTEC o carro não tem partes internas, ele é apenas uma partícula, ou uma massa rígida.

As principais lições que tiramos de todos esses exemplos são:

1. O TTEC pode ser aplicado apenas ao movimento de partículas ou corpos rígidos, sem o risco de erros de interpretação.
2. O TTEC não pode descrever um processo em que ocorre a conversão de energia interna em energia mecânica, porque simplesmente não há o termo de variação da energia interna no TTEC, o ΔE_I . Por isso não devemos usar o TTEC para seres vivos ou veículos impulsionados por combustíveis (ou algo similar).

3. O trabalho do atrito cinético em uma partícula ou corpo rígido representa um processo de conversão/troca de energia. No TTEC, o trabalho do atrito cinético (geralmente oposto ao movimento) implica em diminuição na energia mecânica do sistema (pelo fato de ser geralmente negativo). A magnitude desse trabalho, com o sinal trocado deve ser interpretada como um aumento nas energias internas dos dois corpos envolvidos no atrito. Essas energias internas não estão explícitas no TTEC, mas suas existências devem ser assumidas, para coerência no balanço de energia. Se há atrito cinético, há vibração de pontos de contato e há energia interna. É importante notar que pode haver casos em que o atrito cinético empurra um corpo para frente (é paralelo ao movimento) e contribui, também, para o aumento na energia cinética desse corpo. É o caso, por exemplo, de um bloco A deslizando sobre um outro bloco B e empurrando esse bloco B para a frente. A energia cinética de B pode aumentar graças ao atrito cinético.
4. O trabalho do atrito estático em uma partícula ou em um corpo rígido é nulo. O atrito estático não dissipa energia mecânica. Se há força de atrito estático em uma partícula, então ela está parada e, portanto, o trabalho de qualquer força nessa partícula é obviamente nulo. O caso não trivial é o de um corpo rígido que está se movendo, sob efeito de atrito estático. Nesse caso não pode haver deslizamento da parte do corpo que está em contato com a superfície de outro corpo, onde ocorre o atrito. Fora o caso trivial ligado apenas a uma mudança de referencial (como no caso do bloco na carroceria de um caminhão), um caso clássico é o de um corpo rolando em uma superfície sem deslizar (como o pneu de um carro rolando no asfalto sem derrapar). Estudaremos esse movimento com mais detalhes no capítulo 5. Não havendo deslizamento (deslocamento) no ponto de contato entre os corpos, não há trabalho realizado. É importante frisar que a energia cinética nesse caso vai incluir um termo de energia cinética de rotação ($K_{rot} = I \omega^2/2$). Sem a inclusão de K_{rot} , o balanço energético não fica completo/correto.

3.4 Energia potencial gravitacional

A notação $W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$ para o trabalho de uma força \vec{F} em uma trajetória que inicia no ponto A e termina no ponto B deixa explícito o fato de que o trabalho depende da força e dos extremos A e B. Se a força muda, o trabalho muda. Se os pontos A, ou B, mudam de lugar, o trabalho muda de valor. Mas, olhando para a expressão do trabalho:

$$W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

fica claro que podemos esperar que o trabalho $W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$ dependa também da trajetória que conecta os pontos A e B. A trajetória está representada na expressão de $W_{\vec{F}}(A \rightarrow B)$ através dos vetores $d\vec{l}$, que são tangentes à trajetória. Portanto, se muda a trajetória, mudam os vetores $d\vec{l}$ e esperamos que mude também o

valor do trabalho. Um exemplo simples dessa dependência do trabalho na trajetória pode ser visto no trabalho da força de atrito cinético. Considere um bloco de massa M que desliza em uma superfície horizontal com atrito. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é μ_C . Note que nesse caso a força de atrito tem magnitude constante $F_A^{(C)} = \mu_C \eta = \mu_C M g$ enquanto o bloco desliza. Mas, o vetor $\vec{F}_A^{(C)}$ não é constante, ele é tangente à trajetória, no sentido oposto ao movimento do bloco. A Figura 3.14 ilustra o bloco saindo do ponto A e indo até o ponto B seguindo uma trajetória específica C_1 . Os dois vetores $\vec{F}_A^{(C)}$ e $d\vec{l}$ são ambos tangentes à trajetória, mas sempre de sentidos contrários.

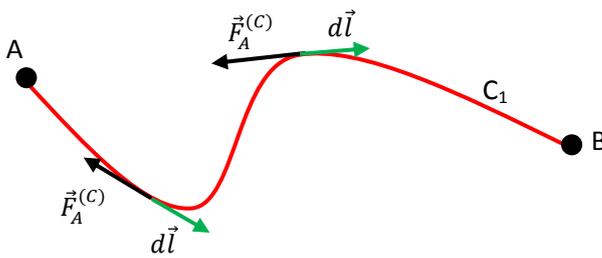


Figura 3.14 Um bloco vai de A até B seguindo a trajetória C_1 (curva vermelha) deslizando em uma superfície horizontal (visão de cima). Em todos os pontos da trajetória os vetores $\vec{F}_A^{(C)}$ e $d\vec{l}$ são anticolineares.

Portanto, para o trabalho da força de atrito cinético nesse percurso obtemos:

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) &= \int_A^B \vec{F}_A^{(C)} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_A^B F_A^{(C)} dl \cos(180^\circ) = \int_A^B \mu_C M g dl (-1) = -\mu_C M g \int_A^B dl = -\mu_C M g l_{AB}^{(C1)} \end{aligned}$$

sendo $l_{AB}^{(C1)}$ o comprimento da curva C_1 desde A até B. Note, $l_{AB}^{(C1)}$ não é o módulo do deslocamento \vec{L}_{AB} , $l_{AB}^{(C1)}$ é o comprimento da curva, desde A até B. Por exemplo, suponha que a curva C_1 seja um círculo de raio r e que o bloco parta de um ponto A do círculo e retorne a esse mesmo ponto ($B=A$) após dar uma volta completa no círculo. Note que nesse caso $\vec{L}_{AB} = \vec{0}$, mas $l_{AB}^{(C1)} = 2\pi r$ e, portanto:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B = A) = -\mu_C M g l_{AB}^{(C1)} = -\mu_C M g 2\pi r$$

O módulo desse trabalho ($\mu_C M g 2\pi r$) é igual ao aumento nas energias internas do bloco e da superfície em que ele desliza (supondo esses dois corpos isolados do resto do universo).

Fica claro nesse exemplo que o trabalho do atrito cinético:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = -\mu_C M g l_{AB}^{(C1)}$$

depende da força de atrito, depende dos pontos A e B e depende também da curva particular C_1 que conecta os pontos A e B. Curvas mais longas implicam em mais trabalho do atrito e em maior aumento na energia

interna dos corpos envolvidos no atrito. Além disso, em uma curva fechada, como em um círculo, o trabalho não é nulo.

Fizemos essa análise do trabalho do atrito cinético para ressaltar o contraste entre o trabalho do atrito e o trabalho do peso. De fato, se um bloco de massa M sai do ponto A e vai até o ponto B seguindo uma trajetória específica C_1 , o trabalho do peso do bloco nesse percurso é dado por (já calculamos esse trabalho anteriormente):

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = M g (h_A - h_B)$$

sendo h_A e h_B as alturas dos pontos A e B em relação a uma referência arbitrária. Note, não há na expressão de $W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B)$ nenhuma referência à curva C_1 . Esse seria o trabalho do peso, qualquer que fosse a curva C_1 . O trabalho do peso independe da trajetória. Como consequência, é fácil mostrar que em uma curva fechada, um círculo, por exemplo:

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B = A) = 0$$

Se uma pessoa sobe dez andares de um prédio carregando uma caixa de massa M , o peso da caixa realiza um trabalho negativo (porque o peso está para baixo e o deslocamento para cima). Se essa pessoa desce em seguida esses dez andares levando de volta a caixa, o peso dela realiza um trabalho positivo (peso e deslocamento para baixo). Ao final, se a pessoa retornar para o mesmo ponto de partida, o trabalho do peso da caixa na trajetória completa de subida e descida é igual a zero. Note, a pessoa nem precisa voltar para o mesmo ponto nesse caso, basta voltar ao mesmo nível de altura, pois, se $h_A = h_B$, então:

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = M g (h_A - h_B) = 0$$

Devido a essa propriedade, do trabalho do peso ser nulo em uma trajetória fechada, dizemos que o peso é uma força conservativa. Veremos que um corpo submetido a apenas forças conservativas conserva sua energia mecânica durante seu movimento, ou seja, sua energia mecânica não muda de valor. Daí vem o nome conservativa. Forças conservativas são forças cujo trabalho independe da trajetória e que, portanto, realizam trabalho nulo em trajetórias fechadas. A independência do trabalho na trajetória permite que calculemos o trabalho antecipadamente, antes da trajetória acontecer, que é a idéia de energia potencial.

Imagine uma luminária de massa $M = 10$ kg fixada no teto a uma altura $H = 3$ m do piso horizontal. Caso essa luminária caia do teto (A) ao chão (B), o peso dela realizará um trabalho:

$$W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = M g (h_A - h_B) = M g H \cong 300 \text{ J}$$

Note, não importa como ou quando a luminária vai cair no chão, se é que ela vai cair. O dia em que isso acontecer, 300 J estarão disponíveis graças ao trabalho do peso da luminária. Nesse dia, deve acontecer o seguinte processo: a luminária vai sair do repouso, do teto, e acelerar para baixo, ganhando energia cinética.

Ao tocar o piso, a energia cinética ($K=300$ J) que a luminária adquiriu na queda vai se converter em outras formas de energia, como energia térmica, energia sonora e energia elástica associada a deformações dos materiais (da luminária e do piso). Exatamente 300 J de outras formas de energia serão gerados, não importa como a luminária vai cair, porque o trabalho do peso independe da trajetória. Assim sendo, podemos nos antecipar, e dizer que a luminária, fixa lá no teto, possui 300 J de capacidade de realizar trabalho, associada ao seu peso. Ela possui 300 J de energia, 300 J de energia potencial gravitacional.

A energia potencial gravitacional de um corpo é a capacidade que o peso dele tem de realizar trabalho, pelo simples fato desse corpo ocupar uma determinada posição, dentro do campo gravitacional (de um planeta, por exemplo). O nome “potencial” se refere ao fato de que essa energia está “guardada” e poderá ser convertida em outras formas de energia, ou não, na dependência desse corpo mudar sua posição no espaço, em algum momento. No caso da luminária, por exemplo, os 300 J estão lá. O dia em que essa luminária cair no chão, se é que vai haver esse dia, esses 300 J serão percebidos por todos que estiverem próximos, através da onda sonora emitida no impacto (energia sonora) e de outras conseqüências que poderão ocorrer, ligadas ao dispêndio desses 300 J.

Definimos então, a energia potencial gravitacional U_g de um corpo como:

$U_g(A) \equiv$ a capacidade que o peso do corpo tem de realizar trabalho (no corpo), pelo simples fato do corpo estar na posição A do espaço, dentro de um campo gravitacional.

O que buscamos agora é a expressão da função $U_g(A)$. Não é muito difícil de imaginar que a expressão que buscamos é $U_g(H) = M g H$, tendo em vista o exemplo da luminária. Mas, pensando genericamente, imaginemos um corpo de massa M (uma partícula) que sai do ponto A, onde sua energia potencial gravitacional era $U_g(A)$, e se desloca até o ponto B, onde sua energia potencial gravitacional é $U_g(B)$. Nesse trajeto, uma parte da energia potencial gravitacional foi “gasta”, ou seja, foi convertida em outras formas de energia (cinética, por exemplo). Como calculo o gasto de energia potencial gravitacional? Ora, se a energia potencial gravitacional é a capacidade de realizar trabalho do peso, então, o gasto de energia potencial gravitacional é justamente o trabalho que o peso realizou. Então ficamos com:

energia depois = energia antes – gasto de energia, ou seja:

$$U_g(B) = U_g(A) - W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B)$$

Portanto:

$$U_g(B) - U_g(A) = -W_{M\vec{g}}(A \rightarrow B) = M g h_B - M g h_A$$

De onde concluímos que:

$$U_g(A) = M g h_A$$

A energia potencial de um corpo depende da massa do corpo, da aceleração da gravidade no local onde está o corpo e da altura do corpo, em relação a uma referência arbitrária. De fato, a solução mais geral da equação para $U_g(B) - U_g(A)$ é:

$$U_g(A) = M g h_A + C$$

sendo C uma constante arbitrária, que desaparece quando fazemos a diferença entre as U_g s. O significado de C é dado por:

$$U_g(h = 0) = C$$

Ou seja, C é a energia potencial gravitacional que o corpo terá quando estiver na altura zero. Mas, altura é um conceito relativo (como qualquer posição) e por isso o nível zero de altura é arbitrário, assim como o valor de C . Podemos escolher o valor de C mais conveniente, que no caso é $C = 0$.

Essa nova energia mecânica que definimos, através do trabalho do peso, pode ser incorporada ao teorema do trabalho-energia cinética, levando a um teorema mais interessante, que chamaremos de teorema do trabalho-energia. Para deduzir esse teorema, começamos isolando na força resultante em um corpo o peso do próprio corpo:

$$\vec{R} = M \vec{g} + OF$$

ou seja, a resultante das forças é igual à soma do peso com as outras forças (OF). Não colocamos setinha sobre o símbolo OF apenas para simplificar, mas trata-se de uma soma de forças, vetores, portanto. Essas outras forças incluem todas as forças diferentes do peso: atrito, normal etc. Ficamos com:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = W_{M \vec{g}}(A \rightarrow B) + W_{OF}(A \rightarrow B) = M \frac{V_B^2}{2} - M \frac{V_A^2}{2} = K_B - K_A$$

Mas, sabemos que:

$$W_{M \vec{g}}(A \rightarrow B) = -\left(U_g(B) - U_g(A)\right)$$

Portanto:

$$\left(K_B + U_g(B)\right) - \left(K_A + U_g(A)\right) = W_{OF}(A \rightarrow B)$$

Definindo então a energia mecânica E de um corpo de massa M e velocidade V que está na altura h como:

$$E = M \frac{V^2}{2} + M g h = K + U_g$$

Obtemos finalmente o teorema do trabalho-energia (abreviado TTE):

$$E_B - E_A = W_{OF}(A \rightarrow B)$$

Esse teorema nos permite uma nova visão sobre os problemas da mecânica, na natureza e nas máquinas. Para ilustrar, considere novamente o problema do tobogã, que definimos logo no início desse capítulo. Um bloco de massa M escorrega desde A até B em um tobogã sem atrito, um tobogã de altura $h_A - h_B = H$. A única outra força que atua nesse bloco enquanto ele desliza é a força normal $\vec{\eta}$, que não realiza trabalho (por causa do ângulo de 90° entre a força e o deslocamento). Portanto:

$$E_B - E_A = W_{OF}(A \rightarrow B) = W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) = 0$$

Ou seja, para o bloco que desce esse tobogã:

$$E_B = E_A$$

Vemos então que na descida o bloco conserva sua energia mecânica, não há perda ou ganho de energia mecânica. Isso ocorre porque a única força que atua no bloco, e que realiza trabalho, é uma força conservativa.

A equação acima fica:

$$E_B = E_A \Rightarrow M \frac{V_B^2}{2} = M g H$$

Essa equação pode ser interpretada assim: quando o bloco estava em A, sua energia mecânica era puramente potencial gravitacional, $U_g(A) = M g H$ (tomando o ponto B como referência de altura, $h_B = 0$). Ao chegar em B, essa energia potencial gravitacional foi toda convertida em energia cinética, $K_B = M V_B^2/2$. A queda do bloco é, portanto, um processo de conversão de uma forma de energia mecânica em outra. Dizemos que esse sistema é conservativo, pois a energia mecânica do bloco ($E = K + U_g$) se conserva no movimento.

A inclusão de atrito (cinético) entre o bloco e o tobogã tornaria esse sistema não-conservativo. Nesse caso:

$$E_B - E_A = W_{OF}(A \rightarrow B) = W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{F}_A^{(c)}}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}_A^{(c)}}(A \rightarrow B) < 0$$

Note, o trabalho do atrito cinético é negativo (força e deslocamento anticolineares entre si) e por isso:

$$E_B - E_A < 0 \Rightarrow E_B < E_A$$

ou seja, a energia mecânica final seria menor que a energia mecânica inicial. Isso porque o atrito cinético converte energia mecânica em outras formas de energia (não mecânicas), conforme nossa discussão anterior. O atrito cinético aumenta as energias internas do bloco e da superfície do tobogã. Nesse caso o bloco chegaria ao ponto B com uma velocidade menor do que no caso sem atrito, mas em compensação verificaríamos um aumento nas temperaturas do bloco e da superfície do tobogã. O cálculo explícito do trabalho do atrito não seria simples nesse caso, porque a força de atrito não é constante durante a queda do bloco (o módulo da força normal não é constante). Além disso, para calcular o trabalho do atrito cinético teríamos que conhecer a

forma exata do tobogã (a curva que conecta A e B), já que a força de atrito cinético não é uma força conservativa.

Juntando os conceitos de energia cinética e energia potencial gravitacional, podemos enxergar vários processos na natureza e nas máquinas com outra perspectiva, que vai além da simples idéia de força e aceleração, focalizada pela segunda lei de Newton. Considere, por exemplo, as situações ilustradas na Figura 3.15 que segue.

Na primeira figura ilustramos o funcionamento de um bate-estacas. Olhando para esse sistema com foco no conceito de energia, vemos que: inicialmente o bate-estacas deve erguer a massa M (o martelo) e para isso deve fornecer energia potencial gravitacional para essa massa. O motor (geralmente à combustão) vai gastar a energia interna de seu combustível para fornecer essa energia potencial para a massa M . Essa parte do processo não é descrita adequadamente pelo teorema do trabalho-energia (conforme nossa discussão anterior). Em seguida, estando o martelo no alto, ele é solto e cai, convertendo sua energia potencial gravitacional em energia cinética (essa parte do processo é descrita adequadamente pelo TTE). O martelo toca a estaca com essa energia cinética. Através da força de contato martelo/estaca, o martelo realiza trabalho na estaca, convertendo sua energia em outras formas de energia. Ao final tudo volta ao repouso, em uma altura menor que a inicial.

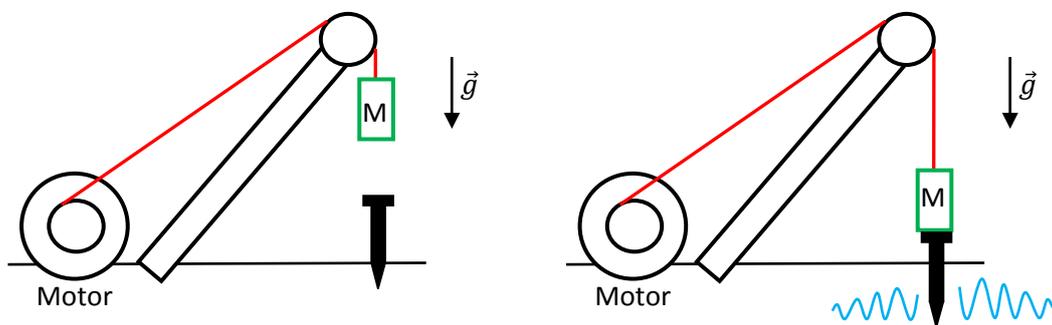


Figura 3.15 O funcionamento de um bate-estacas e de uma usina hidrelétrica podem ser entendidos através do conceito de energia.

A força de atrito cinético na estaca (devido ao contato com o solo) e o próprio impacto do martelo aumentam a energia interna do sistema martelo+estaca+solo. A onda sonora produzida no impacto dissipa energia para o ar e para o solo circundantes. Enfim, várias conversões de energia ocorrem nesse processo. Apenas uma parte da energia original do combustível é aproveitada para fincar a estaca no solo, outra parte é inevitavelmente perdida.

Na segunda figura mostramos a barragem de uma usina hidrelétrica, cujo funcionamento se baseia na queda d'água. O Sol é a fonte inicial de energia. O Sol emite para o espaço energia na forma de energia de radiação eletromagnética (luz visível e invisível) que ele obtém através de reações de fusão nuclear. Nessa reação, o combustível principal do Sol, o hidrogênio, é consumido. Parte dessa radiação atinge a Terra, é absorvida pela água do mar (2/3 da superfície da Terra) e aquece essa água (energia térmica). A água evapora e sobe na atmosfera, uma parte desse vapor condensa em pequenas gotículas e forma as nuvens a grandes altitudes (energia potencial gravitacional). Essas nuvens viajam impulsionadas pelo vento (energia eólica) e atingem a região de montanhas (note que o vento também é produzido pelo calor vindo do Sol). Nas montanhas ocorrem as chuvas, a água cai e é recolhida nos rios. Um rio flui então para a barragem da usina hidrelétrica e a água é acumulada a uma certa altura. Nesse sentido, a barragem da usina pode ser pensada como um grande depósito de energia potencial gravitacional. Parte da água é recolhida por uma tubulação e cai, adquirindo energia cinética. Ao bater nas pás de uma turbina a água realiza trabalho sobre essas pás. Nesse processo, a água perde energia cinética e as pás da turbina ganham energia cinética de rotação. O eixo da turbina faz girar um gerador de energia elétrica. Nesse gerador cargas elétricas são impulsionadas ao longo de fios por um campo magnético. Gera-se então uma separação de cargas elétricas, à qual está associada uma energia elétrica. Essa separação de cargas (essa energia potencial elétrica) é transmitida via linhas de transmissão e chega finalmente ao consumidor final. Ao ligar uma lâmpada, por exemplo, o consumidor converte a energia elétrica em radiação, e novamente é criada energia de radiação eletromagnética. Concomitantemente, a lâmpada esquenta um pouco, porque parte da energia elétrica aumenta a energia térmica da lâmpada.

Enfim, tentamos com esses poucos exemplos convencer o leitor de que ao avançarmos para além da segunda lei de Newton, através dos conceitos de energia, não ganhamos apenas mais uma ferramenta de cálculo de grandezas cinemáticas, ganhamos também uma nova visão do funcionamento das máquinas e da natureza. Essa visão nos permite enxergar os fluxos de energia associados aos processos naturais e artificiais, ampliando nossa compreensão desses processos, para além do conceito de força.

3.4 Energia potencial elástica

A toda força conservativa podemos associar uma energia potencial. Isso porque o trabalho de uma força conservativa pode ser computado a priori, antes dos processos ocorrerem de fato (daí o nome potencial). Isso é consequência da independência do trabalho da força na trajetória.

A força de mola (lei de Hooke):

$$\vec{F}_M = \vec{F}_M(x) = -k x \hat{x}$$

é uma força conservativa. De fato, já calculamos o trabalho dessa força. Suponha que uma mola mude seu estado de deformação, da deformação inicial x_A para a deformação final x_B . Nesse processo, a força de mola realiza um trabalho (no corpo que está encostado na extremidade dela) dado por:

$$W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B) = k \frac{x_A^2}{2} - k \frac{x_B^2}{2}$$

Note que, se a mola partir de uma deformação inicial x_A , digamos uma compressão igual a x_A ($x_A < 0$), for esticada de uma quantidade arbitrária e depois comprimida de volta para $x_B = x_A$, então:

$$W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B = A) = 0$$

ou seja, o trabalho da força de mola em um caminho fechado da extremidade da mola é nulo. O trabalho que a mola faz na ida ela desfaz na volta e o saldo é zero. Essa é a característica de uma força conservativa.

Imagine então uma mola comprimida de x_A . O dia em que essa mola mudar sua deformação para $x = x_B$, não importa como, a força de mola realizará um trabalho

$$W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B) = k \frac{x_A^2}{2} - k \frac{x_B^2}{2}$$

Nesse sentido, o trabalho da força de mola pode ser computado antes da mola ser liberada de sua compressão inicial, na forma de um “trabalho potencial”. Essa é exatamente a ideia de energia potencial de mola, ou energia potencial elástica, que chamaremos de U_E .

Definimos então:

$U_E(A) \equiv$ a capacidade que uma mola (ou a força de mola) tem de realizar trabalho, pelo simples fato dela estar no estado de deformação A.

Qual a expressão da função $U_E(A)$?

Novamente, usamos a ideia: energia depois = energia antes – gasto de energia

Como uma mola gasta sua energia potencial? Realizando trabalho. Portanto:

$$U_E(B) = U_E(A) - W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B)$$

Ou seja,

$$U_E(B) - U_E(A) = -W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B) = k \frac{x_B^2}{2} - k \frac{x_A^2}{2}$$

Concluimos então que:

$$U_E(A) = k \frac{x_A^2}{2}$$

A energia potencial de uma mola depende da dureza da mola (k) e do seu estado de deformação (x).

Note que a solução mais geral da equação para $U_E(B) - U_E(A)$ é:

$$U_E(A) = k \frac{x_A^2}{2} + C$$

sendo C uma constante arbitrária, que desaparece quando fazemos a diferença entre as U_E s. O significado de C é dado por:

$$U_E(x = 0) = C$$

Ou seja, C é a energia potencial elástica que tem uma mola relaxada. Mas, uma mola relaxada não possui capacidade de realizar trabalho, de onde concluimos que $C = 0$.

Essa nova energia mecânica que definimos, através do trabalho da força de mola, pode ser incorporada ao teorema do trabalho-energia, levando a um teorema mais interessante. A idéia é agora isolar, além do peso, a força de mola na força resultante em um corpo:

$$\vec{R} = M \vec{g} + \vec{F}_M + OF$$

ou seja, a resultante das forças é igual à soma do peso e da força de mola com as outras forças (OF). Essas outras forças incluem todas as forças diferentes do peso e da força de mola: atrito, normal etc. Ficamos com:

$$W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = W_{M \vec{g}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B) + W_{OF}(A \rightarrow B) = M \frac{V_B^2}{2} - M \frac{V_A^2}{2} = K_B - K_A$$

Mas,

$$W_{M \vec{g}}(A \rightarrow B) = -(U_g(B) - U_g(A))$$

e

$$W_{\vec{F}_M}(A \rightarrow B) = -(U_E(B) - U_E(A))$$

Portanto:

$$(K_B + U_g(B) + U_E(B)) - (K_A + U_g(A) + U_E(A)) = W_{OF}(A \rightarrow B)$$

Definindo então a energia mecânica de um sistema que contém um corpo de massa M com velocidade V que está na altura h e uma mola de constante k deformada de x como:

$$E = M \frac{V^2}{2} + M g h + k \frac{x^2}{2} = K + U_g + U_E$$

obtemos finalmente o novo teorema do trabalho-energia (TTE):

$$E_B - E_A = W_{OF}(A \rightarrow B)$$

A partir de agora, quando olhamos para uma mola deformada (comprimida ou dilatada), podemos enxergar nela uma energia armazenada, a energia potencial elástica. Havendo a relaxação da mola, novas formas de energia poderão ser criadas.

Como exemplo, considere o funcionamento de uma espingarda de pressão (ou de chumbinho), que se baseia na compressão de uma mola. A espingarda consiste basicamente de um êmbolo, ou pistão que desliza dentro de um cilindro. O êmbolo é impulsionado por uma mola e empurra uma certa quantidade de ar. O ar empurra então um projétil, um chumbinho, que é ejetado do cano da arma com alta velocidade. Para carregar a arma o atirador comprime a mola, usando o cano da espingarda como alavanca (porque a mola é bem dura). A mola é comprimida e trava nesse estado de compressão, digamos x . Com base em nossa discussão anterior, podemos entender que a mola da espingarda acumulou uma quantidade de energia potencial elástica inicial dada por:

$$U_E(x) = k \frac{x^2}{2}$$

Essa energia é potencial porque está lá, na configuração da mola, esperando para ser liberada. Quando o atirador resolver apertar o gatilho a mola será destravada e vai se descomprimir, empurrando o êmbolo no cilindro de ar. Trabalho está sendo realizado pela mola, no êmbolo que empurra o ar. Finalmente, o chumbinho vai ser empurrado pelo ar e vai adquirir energia cinética. Essa energia cinética será usada pelo chumbinho naquilo que se colocar na sua frente. Vemos, portanto, que a espingarda funciona em um processo de conversão de energia elástica na mola em energia cinética na massa (o chumbinho), usando o ar no cilindro apenas com intermediário de força.

A mola é apenas um objeto que possui elasticidade (capacidade de se deformar) evidente. Todos os corpos possuem, maior ou menor, elasticidade e, portanto, podem acumular e liberar energia elástica. Um elástico, uma bola de borracha, a prancha de um trampolim, são exemplos simples de corpos que se comportam como molas, se deformam, acumulando energia elástica, e relaxam, liberando energia elástica. Considere o exemplo de uma bola de borracha que quica no chão, como mostrado na Figura 3.16 que segue.

Nessa Figura mostramos uma bola de borracha que cai em queda livre, bate no solo e é lançada novamente para cima. Para ilustrar, vamos supor que a massa da bola é $M = 0,06$ kg (60 g), que $g = 10$ m/s² e que $H_1 = 2$ m. Em A bola está inicialmente em repouso, no instante em que ela é solta de uma altura H_1 do

piso. Tomando o piso como referência de altura ($h=0$), podemos dizer que em A a bola possui apenas energia potencial gravitacional:

$$U_g(A) = M g H_1 = 1,2 \text{ J}$$

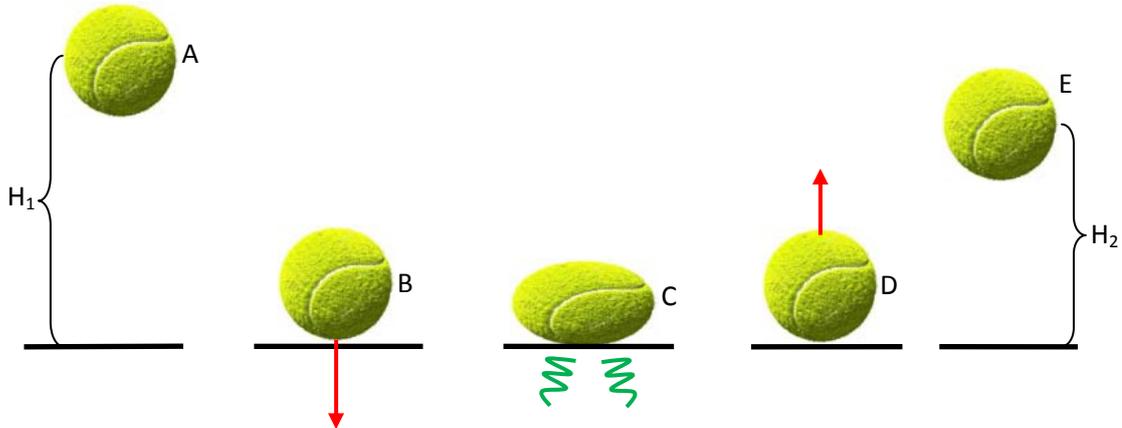


Figura 3.16 Uma bola de borracha cai, bate no solo e sobe de novo, atingindo uma altura máxima H_2 menor que a altura inicial H_1 .

Em B a bola está tão próxima do chão quanto se queira, mas ainda não tocou o chão. Supondo que de A até B a bola se moveu em queda livre, a energia mecânica da bola se conserva nesse percurso (pois $W_{OF}(A \rightarrow B) = 0$), ou seja:

$$K_B = U_g(A) \Rightarrow M \frac{V_B^2}{2} = M g H_1 \Rightarrow V_B = \sqrt{2 g H_1} = 6,3 \text{ m/s}$$

A partir do momento em que a bola toca o piso ela começa a frear e se deformar, perdendo energia cinética K e acumulando energia elástica U_E . Considere que no ponto C a bola atingiu o repouso em contato com o piso, sofrendo sua deformação máxima. De B a C a energia cinética é convertida principalmente em energia elástica da bola. Mas, nesse processo ocorrem outras transformações de energia, como a que leva ao aumento na energia interna da bola e do piso, e por isso não esperamos que a energia mecânica seja conservada. Podemos dizer que, devido à dissipação de energia mecânica:

$$U_E(C) \leq K_B$$

Deixamos o sinal de $=$ para incluir o caso ideal, em que não haveria perdas de energia mecânica (colisão elástica). No ponto D a bola emerge do chão, com sua forma original (relaxada) e velocidade para cima. De C a D a energia elástica é convertida em energia cinética, com perdas. Chamando de E_P ($E_P > 0$) a energia mecânica total perdida na colisão da bola com o piso, podemos dizer que a energia cinética em D é dada por:

$$K_D = K_B - E_P$$

Em E a bola atinge a altura máxima. Novamente, considerando queda livre de D até E obtemos da conservação da energia mecânica no percurso DE (pois $W_{OF}(D \rightarrow E) = 0$):

$$M g H_2 = K_D = K_B - E_P = M g H_1 - E_P$$

Portanto:

$$H_2 = H_1 - \frac{E_P}{M g}$$

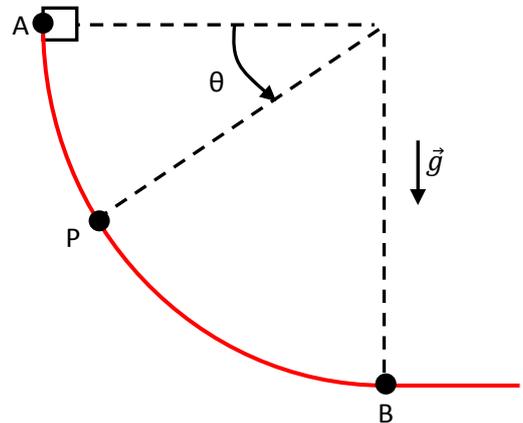
Note que a bola vai subir uma altura menor do que a altura de onde ela caiu, por causa da dissipação de energia mecânica durante a colisão bola/piso. Somente no caso ideal de uma colisão elástica ($E_P = 0$), ou seja, de uma bola que se comportasse como uma mola ideal, valeria $H_2 = H_1$. Nesse caso ideal a bola ficaria quicando no chão eternamente.

3.5 Exercícios resolvidos

ER 3.1) Um pequeno bloco de massa M escorrega em uma superfície sem atrito que tem a forma de um arco de circunferência de raio r . O bloco parte do repouso no ponto A e finalmente passa pelo ponto B, onde inicia a superfície horizontal (veja a figura ao lado).

Dados: M , r e g .

a) Calcule o módulo da velocidade do bloco em um ponto P qualquer da curva circular.



Note, um ponto P qualquer da curva pode ser indicado

pelo ângulo θ mostrado na figura. Por exemplo, para $\theta=0$, o ponto P é o ponto A e para $\theta=90^\circ$, o ponto P é o ponto B. θ então é uma variável no intervalo $[0,90^\circ]$. Queremos determinar a função $V(P)$, ou seja, $V(\theta)$. A condição inicial é $V(\theta = 0) = 0$.

Atuam no bloco apenas o peso e a força normal, que está ao longo do raio do círculo (direção centrípeta). Como no caso do tobogã que já discutimos, uma abordagem desse problema via segunda lei de Newton enfrentará dificuldades, pois a força normal não é constante durante a queda. Pelo contrário, esperamos que $\eta = \eta(\theta)$. Assim sendo, obteríamos uma equação diferencial para a velocidade $V(\theta)$. Preferimos aqui abordar esse problema através dos conceitos de trabalho e energia.

O teorema do trabalho-energia aplicado ao bloco diz que:

$$E_P - E_A = W_{OF}(A \rightarrow P) = W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow P) = 0$$

sendo P um ponto qualquer do semi-círculo. O trabalho da normal é nulo porque essa força é sempre ortogonal ao deslocamento ao longo do círculo (lembre-se que \vec{n} é radial). Portanto, na descida do bloco a energia mecânica se conserva:

$$E_P = E_A \text{ para todo P}$$

Segue que:

$$M g h(P) + M \frac{V(P)^2}{2} = M g h(A)$$

Para definir as alturas, basta escolher uma referência de altura, ou seja, definir onde fica o nível $h = 0$. É conveniente tomar $h = 0$ no ponto B. Portanto, fica claro que $h(A) = r$. Para determinar $h(P)$, ou seja, $h(\theta)$, vamos usar a figura ao lado.

Note na figura que:

$$r \operatorname{sen}(\theta) + h(\theta) = r$$

Portanto:

$$h(\theta) = r (1 - \operatorname{sen}(\theta))$$

A conservação da energia mecânica leva a:

$$M g r (1 - \operatorname{sen}(\theta)) + M \frac{V(\theta)^2}{2} = M g r$$

Finalmente:

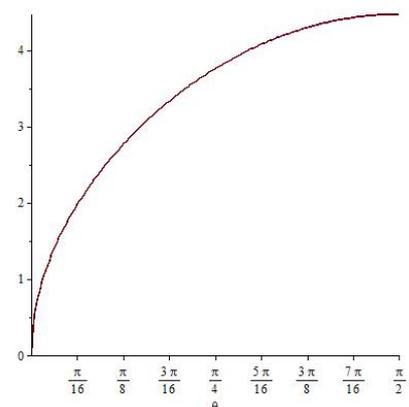
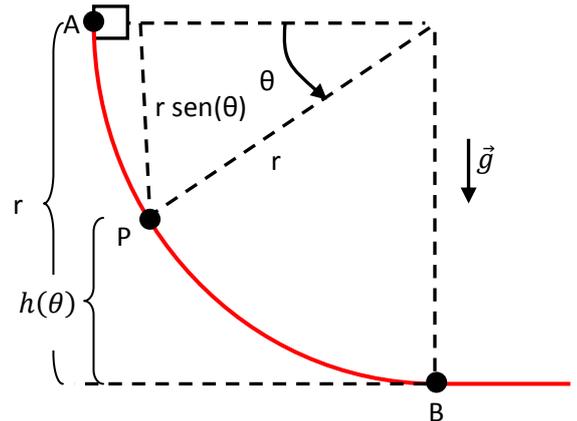
$$V(\theta) = \sqrt{2 g r \operatorname{sen}(\theta)}$$

O gráfico de $V(\theta)$ versus θ é mostrado na figura ao lado. Adotamos $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $r = 1 \text{ m}$. A velocidade parte de $V(\theta = 0^\circ) = 0$, que foi nossa condição inicial, e cresce à medida que o bloco cai. Com esses dados numéricos, o bloco vai chegar no ponto B com velocidade:

$$V(B) = V(\theta = 90^\circ) = \sqrt{2 g r} = \sqrt{20} \cong 4,5 \text{ m/s}$$

b) Calcule o módulo da força normal em um ponto P qualquer da curva circular.

A figura que segue mostra as forças peso e normal que atuam no bloco quando ele está passando por um ponto P qualquer. Note que o ângulo entre o peso e a linha da normal (raio) é $90^\circ - \theta$. O que vamos fazer agora é usar a segunda lei de Newton, aplicada para a resultante centrípeta do movimento circular:



$$R_{cent} = M a_{cent} = M \frac{V^2}{r}$$

Olhando na figura vemos que a resultante das forças que aponta na direção radial, para o centro do círculo é:

$$R_{cent} = \eta - M g \cos(90^\circ - \theta) = \eta - M g \sin(\theta)$$

Portanto, chamando de $\eta(\theta)$ a normal em P, e já tendo calculado a função $V(\theta)$ obtemos:

$$\eta(\theta) - M g \sin(\theta) = M \frac{V(\theta)^2}{r}$$

Como:

$$V(\theta) = \sqrt{2 g r \sin(\theta)}$$

Obtemos finalmente:

$$\eta(\theta) = 3 M g \sin(\theta)$$

A força normal vai crescendo em magnitude, a medida que o bloco cai. O máximo ocorre em $\theta = 90^\circ$ e vale $\eta(\theta = 90^\circ) = \eta(B) = 3 M g$.

c) Vamos supor agora que o bloco sofra um pequeno atrito cinético com a superfície curva, cujo coeficiente de atrito é μ_c . Vamos supor que o atrito é pequeno porque usaremos a expressão de $\eta(\theta)$ obtida em (b), que só vale mesmo se não houver atrito. Vamos calcular o trabalho da força de atrito no bloco, no percurso AB, nessa aproximação.

Note, a força de atrito não é constante em módulo porque a normal não é constante em módulo e sabemos que $F_A^{(C)} = \mu_c \eta$. Portanto:

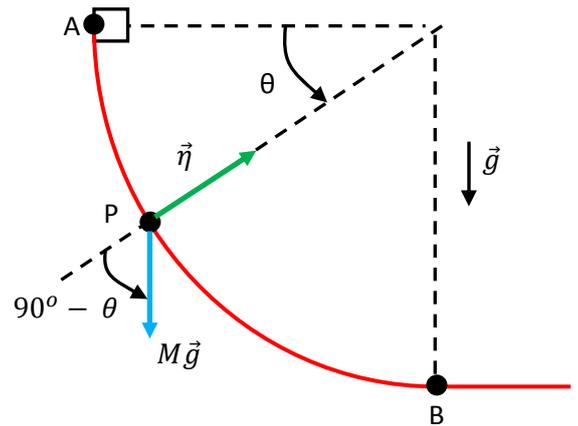
$$F_A^{(C)}(\theta) = \mu_c \eta(\theta) = 3 \mu_c M g \sin(\theta)$$

O trabalho da força de atrito cinético é dado por:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F}_A^{(C)} \cdot d\vec{l}$$

Sabemos que $d\vec{l}$ é sempre tangente ao círculo, orientado de A para B. A força de atrito cinético, por sua vez, é tangente ao círculo, orientada de B para A (oposta ao movimento do bloco). Assim sendo, $d\vec{l}$ e $\vec{F}_A^{(C)}$ são dois vetores anticolineares entre si. Portanto:

$$\vec{F}_A^{(C)} \cdot d\vec{l} = F_A^{(C)} dl \cos(180^\circ) = -F_A^{(C)} dl$$



O módulo dl é um comprimento infinitesimal paralelo ao círculo, ou seja, dl é o comprimento de um arco infinitesimal de círculo. Portanto:

$$dl = r d\theta$$

Então (lembrando que $90^\circ = \pi/2$ rad):

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = - \int_A^B 3 \mu_c M g \operatorname{sen}(\theta) r d\theta = -3 \mu_c M g r \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\theta) d\theta$$

Obtemos finalmente:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = -3 \mu_c M g r$$

Com os dados numéricos $g = 10 \text{ m/s}^2$, $r = 1 \text{ m}$, $\mu_c = 0,04$ (atrito pequeno) e $M = 0,1 \text{ kg}$, obtemos:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = -0,12 \text{ J}$$

Quão boa seria essa estimativa para o trabalho do atrito no percurso AB? Fato é que o resultado que obtivemos superestima o trabalho, pois na presença do atrito a velocidade do bloco seria menor, a força normal seria menor e a força de atrito seria então menor.

É interessante registrar que esse problema possui solução analítica exata (ver o artigo “*Dynamics of circular motion with friction*, de L. P. Franklin e P. I. Kimmel, *American Journal of Physics* **48** (1980) 207-210”).

Lá está provado que:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = - \frac{3 \mu_c M g r}{1 + 4 \mu_c^2} (2 \mu_c + e^{-\pi \mu_c})$$

Note então que para $\mu_c \cong 0$, vale (usando que $e^x = 1 + x$ para $x \cong 0$):

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = - \frac{3 \mu_c M g r}{1 + 0} (2 \mu_c + 1 - \pi \mu_c)$$

Portanto:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = -3 \mu_c M g r [(2 - \pi) \mu_c + 1]$$

Usando nossos dados numéricos obtemos:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) \cong -0,12 (0,95) \text{ J} \cong -0,115 \text{ J}$$

Ou seja, o resultado correto para o trabalho do atrito é 95% do resultado que obtivemos com nosso cálculo aproximado (no caso particular em que $\mu_c = 0,04$).

ER 3.2) Um bloco de massa M desliza para baixo em um plano inclinado de um ângulo θ , partindo do repouso no ponto A. Na parte de baixo do plano inclinado há uma mola ideal de constante elástica k . O bloco vai bater

na mola, comprimi-la e ser rebatido para cima. O coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície do plano inclinado é μ_C . A distância desde A até a extremidade livre da mola relaxada é S (veja a figura ao lado).

Dados: M, θ , k, μ_C , S e g

a) Calcule o módulo da velocidade com que o bloco toca a extremidade livre da mola relaxada.

Vamos chamar de B a posição da extremidade livre da mola relaxada. Queremos calcular V_B . Poderíamos fazer esse cálculo através da segunda lei de Newton e das leis do MRUV, mas nossa idéia aqui é usar o teorema do trabalho energia para calcular a variação de energia mecânica do bloco no percurso AB. O deslocamento \vec{L}_{AB} do bloco é mostrado na figura ao lado (seta verde). Não precisamos nos preocupar com o tamanho do bloco, ele é uma partícula.

As forças que atuam no bloco nesse percurso estão mostradas no diagrama de forças ao lado. Não há força de mola porque o bloco não tocou a mola ainda. Do teorema do trabalho-energia:

$$E_B - E_A = W_{OF}(A \rightarrow B) = W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = 0 + \vec{F}_A^{(C)} \cdot \vec{L}_{AB}$$

Tomando $h_B = 0$ é fácil ver na figura que $h_A = S \sin(\theta)$. Portanto:

$$\left\{ M \frac{V_B^2}{2} + 0 \right\} - \{ 0 + M g S \sin(\theta) \} = \mu_C \eta S \cos(180^\circ)$$

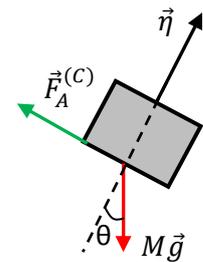
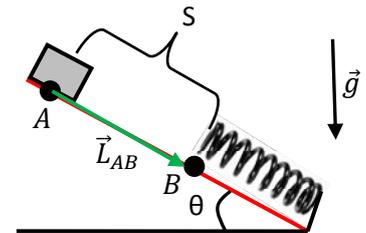
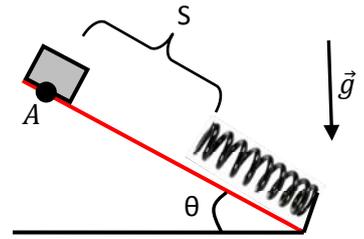
Como $\eta = M g \cos(\theta)$, obtemos:

$$V_B = \sqrt{2 g S [\sin(\theta) - \mu_C \cos(\theta)]}$$

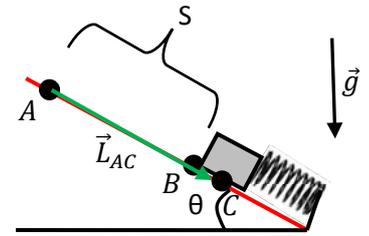
Durante essa queda, e durante os demais movimentos do bloco, as energia internas do bloco e da superfície do plano inclinado vão aumentar, assim como suas temperaturas, por causa da ação do atrito cinético.

b) Após tocar a mola, o bloco passa a comprimi-la. Calcule a compressão máxima da mola.

O bloco vai empurrando a mola e sendo freado pela força de mola, até que chega um instante em que ele para. Nesse instante a mola atinge sua compressão máxima, que vamos chamar de δ . Vamos chamar de C a posição do bloco (que coincide com a posição da extremidade livre da mola) no instante em que a compressão da mola é máxima. A figura ao lado ilustra essas idéias. Note que, sendo a distância entre B e C igual a δ , e



tomando agora $h_C = 0$ é fácil ver na figura que $h_A = (S + \delta) \sin(\theta)$. Portanto, usando o teorema do trabalho energia para comparar o ponto A com o ponto C obtemos (note que no percurso BC atua a força de mola):



$$E_C - E_A = W_{OF}(A \rightarrow C) = W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow C) + W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow C) = 0 + \vec{F}_A^{(C)} \cdot \vec{L}_{AC}$$

Portanto, levando em conta que quando o bloco está em C ele está parado e a mola está comprimida de δ , obtemos:

$$\left\{ 0 + 0 + k \frac{\delta^2}{2} \right\} - \{ 0 + M g (S + \delta) \sin(\theta) + 0 \} = \mu_C \eta (S + \delta) \cos(180^\circ)$$

Note que a ordem das energias é $\{K + U_g + U_E\}$.

Obtemos uma equação quadrática para δ :

$$k \delta^2 - 2 M g [\sin(\theta) - \mu_C \cos(\theta)] \delta - 2 M g [\sin(\theta) - \mu_C \cos(\theta)] S = 0$$

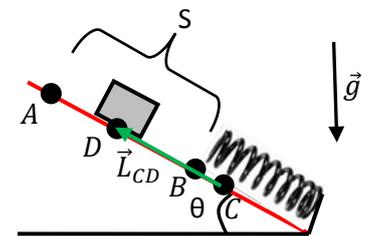
Portanto, definido $b = 2 M g [\sin(\theta) - \mu_C \cos(\theta)]$, obtemos:

$$\delta = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b k S}}{2 k}$$

Note que a solução com o sinal negativo não faz sentido, pois corresponde a um valor de δ negativo (já que $\sqrt{b^2 + 4b k S} > b$). Isso porque desde o momento em que escrevemos $L_{AC} = S + \delta$ ficou claro que δ é uma distância positiva (pois $L_{AC} > S$). Assim sendo, somente a solução com sinal positivo deve ser considerada (se você quiser pode considerar que $x = -\delta$ e $L_{AC} = S - x$, o fato é que $L_{AC} > S$).

c) Suponha agora que o bloco seja rebatido para cima. Calcule a altura máxima que ele sobe no plano inclinado.

Vamos chamar o ponto onde o bloco para, por ter atingido a altura máxima, de D. A figura ao lado ilustra esse ponto. A idéia é que a mola vai relaxando e empurrando o bloco para cima, inicialmente com aceleração para cima, porque a mola está muito deformada e a força de mola é grande, maior que as forças que apontam para baixo (atrito e peso). A partir de um certo instante a aceleração passa a apontar para



baixo, porque a força de mola diminuiu, e o bloco começa a frear, até parar. Vamos adotar agora a referência $h_C = 0$ e vamos chamar de h_D a altura do ponto D em relação ao ponto C, que é o que queremos calcular. Vamos supor inicialmente que o bloco atinja a altura máxima em uma posição em que a mola já está relaxada

($h_D > h_B$). Então, a mola vai empurrando o bloco até que a mola relaxa totalmente e para (em B), enquanto o bloco continua subindo até parar.

Comparando o ponto D com o ponto C obtemos:

$$E_D - E_C = W_{OF}(C \rightarrow D) = W_{\vec{\eta}}(C \rightarrow D) + W_{\vec{F}_A^{(C)}}(C \rightarrow D) = 0 + \vec{F}_A^{(C)} \cdot \vec{L}_{CD}$$

Logo (tomando $h_C = 0$):

$$\{0 + M g h_D + 0\} - \left\{0 + 0 + k \frac{\delta^2}{2}\right\} = \mu_c \eta L_{CD} \cos(180^\circ)$$

Note na figura que: $L_{CD} = h_D / \text{sen}(\theta)$. Portanto:

$$M g h_D - k \frac{\delta^2}{2} = -\mu_c M g \cos(\theta) \frac{h_D}{\text{sen}(\theta)}$$

Finalmente:

$$h_D = \frac{k \frac{\delta^2}{2 M g}}{1 + \frac{\mu_c}{\tan(\theta)}}$$

Falta substituir a expressão de δ obtida em (b), mas preferimos deixar como está.

Se h_A é a altura do ponto A em relação ao ponto C, esperamos que, devido às perdas de energia mecânica associadas ao atrito cinético, valha $h_D \leq h_A$ (a igualdade só valeria para $\mu_c = 0$). De fato:

$$h_A = (S + \delta) \text{sen}(\theta)$$

Mas, em (b) vimos que:

$$S + \delta = \frac{k \delta^2}{2 M g [\text{sen}(\theta) - \mu_c \cos(\theta)]}$$

Portanto:

$$h_A = \frac{k \frac{\delta^2}{2 M g}}{1 - \frac{\mu_c}{\tan(\theta)}}$$

Que é o resultado que obteríamos aplicando o teorema do trabalho-energia no percurso AC.

Concluindo, o ponto A está acima do ponto D desde que:

$$h_D \leq h_A \Rightarrow \frac{k \frac{\delta^2}{2 M g}}{1 + \frac{\mu_c}{\tan(\theta)}} \leq \frac{k \frac{\delta^2}{2 M g}}{1 - \frac{\mu_c}{\tan(\theta)}} \Rightarrow 1 + \frac{\mu_c}{\tan(\theta)} \geq 1 - \frac{\mu_c}{\tan(\theta)} \Rightarrow \tan(\theta) \geq 0$$

O que sempre é verdade, para $0 < \theta < 90^\circ$.

Para $\mu_C = 0$ obtemos:

$$h_D = h_A = k \frac{\delta^2}{2 M g}$$

Nesse caso, sem atrito, o bloco cai de A, comprime a mola e retorna para o ponto A, continuando esse movimento de desce e sobe indefinidamente, pois não há perdas de energia mecânica no sistema.

Podemos considerar também o caso em que o bloco atinge a altura máxima em uma posição em que a mola ainda não relaxou totalmente ($h_D < h_B$). Vamos chamar de δ_F a compressão da mola que ainda resta no instante em que o bloco atinge a altura máxima. A diferença em relação à solução anterior é que lá fizemos $\delta_F = 0$ e agora não faremos essa hipótese. Portanto, o teorema do trabalho-energia leva a:

$$\left\{ 0 + M g h_D + k \frac{\delta_F^2}{2} \right\} - \left\{ 0 + 0 + k \frac{\delta^2}{2} \right\} = \mu_C \eta L_{CD} \cos(180^\circ)$$

Note que agora vai valer: $L_{CD} = \delta - \delta_F = h_D / \text{sen}(\theta)$. Portanto, δ_F é dado por:

$$M g (\delta - \delta_F) \text{sen}(\theta) + k \frac{\delta_F^2}{2} - k \frac{\delta^2}{2} = -\mu_C M g \cos(\theta) (\delta - \delta_F)$$

Segue que:

$$\frac{k}{2} (\delta_F^2 - \delta^2) = -\frac{k}{2} (\delta - \delta_F)(\delta + \delta_F) = -M g (\delta - \delta_F) (\text{sen}(\theta) + \mu_C \cos(\theta))$$

Cortando um $(\delta - \delta_F)$ dos dois lados ficamos com:

$$\delta + \delta_F = \frac{2 M g}{k} (\text{sen}(\theta) + \mu_C \cos(\theta))$$

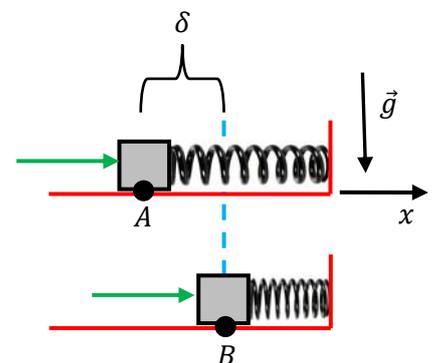
Finalmente:

$$h_D = (\delta - \delta_F) \text{sen}(\theta) = \left(2\delta - \frac{2 M g}{k} (\text{sen}(\theta) + \mu_C \cos(\theta)) \right) \text{sen}(\theta)$$

ER 3.3) Um bloco de massa M está inicialmente em repouso apoiado na extremidade livre de uma mola ideal de constante k . A partir de um dado instante o bloco passa a ser empurrado por uma força constante horizontal \vec{F} . Essa força vai empurrando o bloco e comprimindo a mola. Não há atrito.

Dados: M , k , \vec{F} e g .

Calcule a compressão máxima da mola.



A situação está ilustrada na Figura anterior. O bloco parte do ponto A (mola relaxada) e vai até o ponto B onde a compressão é máxima. Chamamos essa compressão de δ . Note que δ é a distância entre A e B. A seta verde representa a força constante \vec{F} .

Notamos que, nessa situação, muitos estudantes têm a idéia de que a solução é dada pelo equilíbrio de \vec{F} com a força de mola, ou seja:

$$F = k\delta \Rightarrow \delta = \frac{F}{k}$$

Não é essa a resposta do problema. De fato, não foi afirmado que o bloco está em equilíbrio. Pelo contrário, inicialmente a mola está relaxada e há uma resultante $\vec{R} = \vec{F}$ para a direita. O bloco sai então acelerado para a direita. À medida que ele avança, comprimindo a mola, a força de mola vai crescendo. No instante em que a força de mola equilibra com \vec{F} ($\vec{R} = 0$), o bloco possui uma velocidade para a direita, e continua comprimindo a mola. A partir desse instante a força de mola supera \vec{F} e o bloco passa a frear, até parar na compressão máxima. Nesse instante ele não vai permanecer parado, já que há uma resultante para a esquerda. O bloco deve então retornar e realizar um movimento oscilatório, de vai e volta. Note então que a compressão máxima é maior que o valor obtido através do raciocínio errado. Veremos que é o dobro.

De fato, usando o teorema do trabalho-energia, para comparar os pontos A e B, obtemos:

$$E_B - E_A = W_{OF}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{F}}(A \rightarrow B) = 0 + \vec{F} \cdot \vec{L}_{AB}$$

Portanto:

$$\left\{ 0 + 0 + k \frac{\delta^2}{2} \right\} - \{0 + 0 + 0\} = F \delta \cos(0)$$

Note que a ordem das energias é $\{K + U_g + U_E\}$. Note que adotamos o nível $h=0$ como sendo o nível de A e B. Sabendo que o bloco está parado tanto em A quanto em B, concluímos que:

$$\delta = 2 \frac{F}{k}$$

Apenas para ilustrar, vamos mostrar, para efeito de comparação, como seria a solução desse problema através da segunda lei de Newton. Usaremos o referencial x mostrado na figura. A origem $x=0$ está no ponto A, que é a posição da extremidade da mola relaxada. Levando em conta a lei de Hooke, enquanto o bloco avança comprimindo a mola a resultante sobre ele é:

$$\vec{R} = F \hat{x} - k x \hat{x}$$

Sendo $x>0$ a posição da extremidade livre da mola, que coincide com a posição do bloco. Explicitando então a dependência de x com o tempo, a segunda lei de Newton diz que:

$$F - k x(t) = M a(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Essa é a equação diferencial que devemos resolver para calcular a função $x(t)$ e $x_{MAX} = \delta$. Começamos fazendo uma mudança de variável. Seja $f_1(t) = F - k x(t)$. Então, como F é constante:

$$\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} = -k \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Daí obtemos:

$$\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} = -\frac{k}{M} f_1(t)$$

A solução geral dessa equação diferencial é:

$$f_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

com $\omega = \sqrt{k/M}$ e A e φ constantes arbitrárias definidas pelas condições iniciais do problema. Note então que:

$$x(t) = \frac{F - f_1(t)}{k} = \frac{F - A \cos(\omega t + \varphi)}{k}$$

As condições iniciais para o movimento do bloco são: $x(t=0) = 0$ e $V(t=0) = 0$ (note que $V(t) = dx(t)/dt$). Portanto, A e φ satisfazem às seguintes equações:

$$x(t=0) = 0 \Rightarrow \frac{F - A \cos(\varphi)}{k} = 0$$

$$V(t=0) = 0 \Rightarrow \frac{A \omega \sin(\varphi)}{k} = 0$$

Da segunda equação obtemos que $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$. A primeira equação diz que $\cos(\varphi) = F/A > 0$, o que implica que $\varphi = 0$ e, da primeira equação, que $A = F$. Portanto, a posição do bloco é dada por:

$$x(t) = \frac{F(1 - \cos(\omega t))}{k}$$

e a velocidade por:

$$V(t) = \frac{F \omega \sin(\omega t)}{k}$$

O $x_{MAX} = \delta$ vai ocorrer no primeiro instante ($\neq 0$) em que a velocidade se anular, ou seja:

$$V(t) = \frac{F \omega \sin(\omega t)}{k} = 0 \Rightarrow \omega t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{\omega}$$

Note que $t=0$ também satisfaz essa equação, mas não corresponde ao instante em que x é máximo.

Portanto:

$$x_{MAX} = \delta = \frac{F(1 - \cos(\pi))}{k} = \frac{F(1 - (-1))}{k} = 2 \frac{F}{k}$$

Note que, como dissemos, trata-se de um movimento oscilatório, chamado de movimento harmônico simples (MHS). O bloco oscila em torno da posição de equilíbrio $x_E = F/k$ com amplitude $A = F/k$. O bloco oscila entre a posição $x_{MIN} = x_E - A = 0$ e a posição $x_{MAX} = x_E + A = 2F/k$. Vamos estudar o MHS com mais detalhes no capítulo 9.

Esperamos com esse exemplo mostrar a vantagem da abordagem via teorema do trabalho energia, quando comparada à abordagem via segunda lei de Newton. Essa vantagem é evidente em problemas que envolvem forças variáveis, como é o caso da força de mola.

ER 3.4) Um projétil de massa M é lançado do solo para cima na direção vertical com velocidade de módulo V_0 . Vamos considerar a presença da força de arraste com o ar \vec{F}_{AR} , que deve ser uma função da velocidade do projétil. Suponha que na subida do projétil o arraste realize um trabalho W_S e na descida o arraste realize um trabalho W_D .

Dados: M, V_0, W_S, W_D e g .

a) Calcule a altura máxima que o projétil atinge.

Vamos chamar de A o ponto de partida do projétil e de B o ponto onde ele atinge a altura máxima h_M . O teorema do trabalho-energia diz que, nesse percurso:

$$E_B - E_A = W_{OF}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}_{AR}}(A \rightarrow B) = W_S$$

Portanto (tomando $h_A = 0$):

$$\{0 + M g h_M\} - \left\{M \frac{V_0^2}{2} + 0\right\} = W_S$$

Logo:

$$h_M = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{W_S}{Mg}$$

Note que, com certeza, vale $W_S < 0$ pois \vec{F}_{AR} é oposta ao deslocamento do projétil. Por isso, h_M é uma função decrescente de W_S . Quanto maior o arraste, menor a altura máxima.

b) Calcule a velocidade com que o projétil atinge o solo.

Vamos chamar de C o ponto em que o projétil está tão próximo do solo quanto se queira, mas ainda não tocou o solo, após ele ter atingido a altura máxima (note que de fato $A=C$, mas as energias em A e C são diferentes). Novamente, usando o teorema do trabalho-energia no percurso total AC:

$$E_C - E_A = W_{OF}(A \rightarrow C) = W_{\vec{F}_{AR}}(A \rightarrow C) = W_S + W_D$$

Portanto (tomando $h_A = h_C = 0$):

$$\left\{ M \frac{V_F^2}{2} + 0 \right\} - \left\{ M \frac{V_0^2}{2} + 0 \right\} = W_S + W_D$$

Logo:

$$V_F = \sqrt{V_0^2 + \frac{2}{M}(W_S + W_D)}$$

Novamente, como $W_S < 0$ e $W_D < 0$, vale $V_F < V_0$. Somente no caso em que não houvesse arraste ($W_S = W_D = 0$), valeria $V_F = V_0$, que é o caso da queda livre.

ER 3.5) Uma mola ideal de constante k tem uma extremidade fixa e na outra extremidade está amarrada uma corda leve que passa por uma polia leve. Na outra ponta da corda está amarrado um bloco de massa M . O bloco é solto de repouso com a mola relaxada e a corda esticada e passa a cair dilatando a mola. Na queda o bloco sofre uma força de arraste com o ar de magnitude constante F_{AR} (consideraremos que $F_{AR} \ll Mg$).

Dados: k , M , F_{AR} e g .

a) Calcule a velocidade do bloco quando ele tiver caído uma altura h .

A Figura ao lado ilustra essa situação. Considere que o ponto A é o ponto de partida do bloco (mola relaxada e bloco parado) e que o ponto B é um ponto mais baixo, a uma distância vertical h do ponto A (h é a altura de A em relação a B). No ponto B a velocidade do bloco é $V_B = V(h)$, que é a função que queremos calcular, e a mola está dilatada de h . O teorema do trabalho-energia diz que, nesse percurso:

$$E_B - E_A = W_{OF}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}_{AR}}(A \rightarrow B) = \vec{F}_{AR} \cdot \vec{L}_{AB}$$

Portanto (tomando $h_B = 0$):

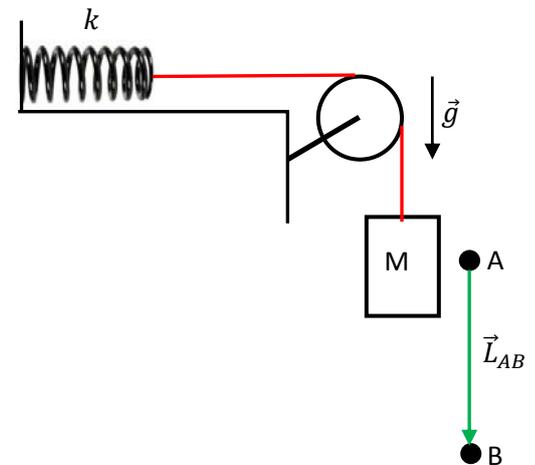
$$\left\{ M \frac{V(h)^2}{2} + 0 + k \frac{h^2}{2} \right\} - \{ 0 + M g h + 0 \} = F_{AR} h \cos(180^\circ)$$

$$= -F_{AR} h$$

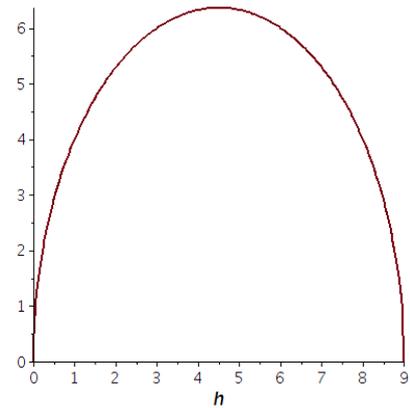
Note que a ordem das energias é $\{K + U_g + U_E\}$, e que o arraste é, como sempre, oposto ao deslocamento.

Portanto:

$$V(h) = \sqrt{2 \left(g - \frac{F_{AR}}{M} \right) h - \frac{k}{M} h^2}$$



A figura ao lado ilustra o comportamento de $V(h)$ em função da altura h , adotando os valores numéricos: $g=10 \text{ m/s}^2$, $M=10 \text{ kg}$, $F_{AR} = 10 \text{ N}$ e $k=20 \text{ N/m}$. No início a velocidade cresce rapidamente porque a mola está relaxada. Depois a mola passa a frear o bloco, levando-o a parar instantaneamente. Para os dados numéricos assumidos nesse gráfico o bloco para após cair 9 metros.



b) Calcule a altura máxima de queda do bloco.

Quando o bloco cair o máximo, sua velocidade vai se anular. Portanto (considerando que $h_M \neq 0$):

$$V(h_M) = 0 \Rightarrow \sqrt{2 \left(g - \frac{F_{AR}}{M} \right) h_M - \frac{k}{M} h_M^2} = 0 \Rightarrow 2 \left(g - \frac{F_{AR}}{M} \right) h_M - \frac{k}{M} h_M^2 = 0$$

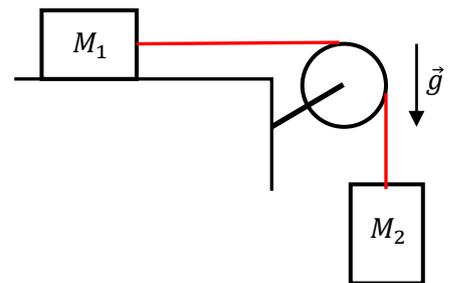
Logo:

$$h_M = \frac{2 (M g - F_{AR})}{k}$$

Após esse instante, o bloco será puxado para cima pela mola e o movimento vai ser oscilatório, com energia mecânica decrescente, devido ao arraste do ar. Para os dados numéricos utilizados no gráfico anterior obtemos $h_M = 9 \text{ m}$.

Note a similaridade desse problema com a situação do ER 3.3. Se fizermos aqui $M g = F$ e $F_{AR} = 0$, as duas situações se tornam iguais (apenas trocando a compressão da mola pela dilatação).

ER 3.6) Dois blocos estão unidos entre si por uma corda leve que passa por uma polia leve. O bloco de massa M_1 está apoiado em uma mesa horizontal. O coeficiente de atrito cinético bloco/mesa é μ_C . O bloco de massa M_2 está pendurado (veja a figura ao lado). Os blocos são soltos do repouso, com a corda tensionada.



Dados: M_1 , M_2 , μ_C e g .

Calcule os módulos das velocidades dos blocos quando o bloco de massa M_2 tiver caído uma altura h .

Note que já abordamos essa situação no exercício 2.2, mas utilizando as leis de Newton.

Aqui vamos chamar de A a configuração inicial do sistema (blocos em repouso em suas posições iniciais) e de B a configuração final (o bloco de massa M_1 deslizou h para a direita e o bloco de massa M_2 caiu uma altura h). Na configuração B as velocidades serão $V_1(h)$ e $V_2(h)$.

Os diagramas de força para os blocos são como mostrados ao lado.

O teorema do trabalho-energia diz que:

Para o bloco 1:

$$\begin{aligned} E_B(1) - E_A(1) &= W_{OF}(A \rightarrow B) = W_{\vec{\eta}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{F}_A}(A \rightarrow B) + W_{\vec{T}_1}(A \rightarrow B) \\ &= W_{\vec{F}_A}(A \rightarrow B) + W_{\vec{T}_1}(A \rightarrow B) \end{aligned}$$

Para o bloco 2:

$$E_B(2) - E_A(2) = W_{OF}(A \rightarrow B) = W_{\vec{T}_2}(A \rightarrow B)$$

Definindo a energia mecânica total do sistema como: $E = E(1) + E(2)$, e somando as duas equações acima ficamos com:

$$E_B - E_A = W_{\vec{F}_A}(A \rightarrow B) + W_{\vec{T}_1}(A \rightarrow B) + W_{\vec{T}_2}(A \rightarrow B)$$

Agora vamos usar a propriedade da corda leve e livre: $T_1 = T_2 = T$. Vamos usar também que os deslocamentos dos blocos são iguais em módulo ($=h$). Portanto:

$$W_{\vec{T}_1}(A \rightarrow B) = \vec{T}_1 \cdot \vec{L}_{AB}(1) = T h \cos(0) = T h$$

$$W_{\vec{T}_2}(A \rightarrow B) = \vec{T}_2 \cdot \vec{L}_{AB}(2) = T h \cos(180^\circ) = -T h$$

Vemos que os trabalhos das forças internas ao sistema se cancelam, e ficamos finalmente com:

$$E_B - E_A = W_{\vec{F}_A}(A \rightarrow B) = \vec{F}_A \cdot \vec{L}_{AB} = \mu_c \eta h \cos(180^\circ) = -\mu_c M_1 g h$$

Logo:

$$\left\{ M_1 \frac{V_1(h)^2}{2} + M_2 \frac{V_2(h)^2}{2} + 0 \right\} - \{0 + M_2 g h + 0\} = -\mu_c M_1 g h$$

Falta apenas reconhecermos o vínculo entre os movimentos dos blocos: a corda (inextensível) faz com que os blocos se desloquem da mesma quantidade e, portanto, suas velocidades são iguais em módulo. Fazendo então $V_1(h) = V_2(h) = V(h)$, obtemos finalmente:

$$V(h) = \sqrt{\frac{(M_2 - \mu_c M_1) g h}{M_1 + M_2}}$$

O caso $M_2 - \mu_c M_1 = 0$ parece estranho pois vale $V(h) = 0$. Ou seja, parece que os blocos partem do repouso e após se deslocarem h possuem ainda velocidade nula: os blocos estariam se movendo com velocidades nulas. Não é esse o caso. De fato, para $M_2 = \mu_c M_1$ os blocos desceriam sem aceleração, com velocidades de módulo constante. No exercício 2.2 vimos que nesse caso os blocos só se movem se receberem um peteleco de estímulo, pois o atrito estático é capaz de manter os blocos em repouso, se eles estiverem

inicialmente parados. Portanto, nesse caso, deveríamos considerar essa energia cinética inicial, dada pelo peteleco, em E_A , ou seja:

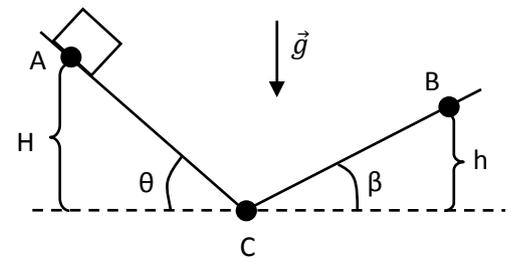
$$E_A = \left\{ (M_1 + M_2) \frac{V_0^2}{2} + M_2 g h + 0 \right\}$$

sendo V_0 o módulo das velocidades iniciais dos blocos logo após o peteleco. Assim sendo, havendo esse peteleco inicial, a resposta para esse exercício fica:

$$V(h) = \sqrt{V_0^2 + \frac{(M_2 - \mu_c M_1) g h}{M_1 + M_2}}$$

Portanto, para $M_2 - \mu_c M_1 = 0$ vale $V(h) = V_0$. Nesse caso as energias cinéticas dos blocos são constantes e a energia potencial gravitacional do bloco 2 vai sendo convertida em outras formas de energia (pela ação do atrito cinético), como energia interna do bloco 1 e da mesa, que aquecem à medida que os blocos se movem.

ER 3.7) Um bloco de massa M desliza descendo em um plano inclinado de inclinação θ e depois passa a subir deslizando em um outro plano inclinado de inclinação β . O bloco parte do repouso de uma altura inicial H . O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e as superfícies dos planos inclinados é μ_c . A situação está ilustrada na figura ao lado.



Dados: $M, \theta, \beta, H, \mu_c$ e g .

Calcule a altura máxima h que o bloco vai subir no plano de inclinação β .

Trata-se do mesmo exercício 2.8 que abordamos utilizando a segunda lei de Newton e a cinemática. Aqui vamos encontrar a altura h através dos conceitos de energia, que propiciarão uma solução mais rápida e direta para o problema.

Se A é o ponto de partida do bloco e B o ponto final do trajeto, o teorema do trabalho energia diz que:

$$E_B - E_A = W_{OF}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B)$$

Sendo $\vec{F}_A^{(C)}$ a força de atrito cinético no bloco. Note que não podemos usar aqui a igualdade

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = \vec{F}_A^{(C)} \cdot \vec{L}_{AB}$$

porque a força de atrito não é constante no percurso AB (o módulo da normal muda de valor quando o bloco muda de plano inclinado). Chamando de C o ponto de transição entre os dois planos inclinados, podemos escrever:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow B) = W_{\vec{F}_A^{(C)}}(A \rightarrow C) + W_{\vec{F}_A^{(C)}}(C \rightarrow B) = \vec{F}_A^{(C)} \cdot \vec{L}_{AC} + \vec{F}_A^{(C)} \cdot \vec{L}_{CB}$$

De A até C vale:

$$\eta = M g \cos(\theta)$$

$$L_{AC} = \frac{H}{\text{sen}(\theta)}$$

De C até B vale:

$$\eta = M g \cos(\beta)$$

$$L_{AC} = \frac{h}{\text{sen}(\beta)}$$

Portanto, o TTE diz que:

$$\{0 + M g h\} - \{0 + M g H\} = -\mu_c M g \left(\cos(\theta) \frac{H}{\text{sen}(\theta)} + \cos(\beta) \frac{h}{\text{sen}(\beta)} \right)$$

Simplificando, obtemos finalmente:

$$h = H \left\{ \frac{1 - \mu_c \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}}{1 + \mu_c \frac{\cos(\beta)}{\text{sen}(\beta)}} \right\}$$

ou

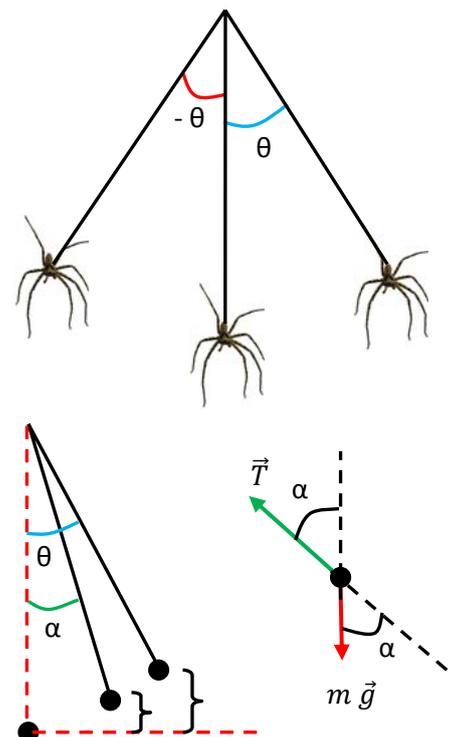
$$h = H \left\{ \frac{1 - \frac{\mu_c}{\tan(\theta)}}{1 + \frac{\mu_c}{\tan(\beta)}} \right\}$$

ER 3.8) Uma aranha de massa m balança para cá e para lá (em um movimento pendular) pendurada em um segmento de teia de comprimento L . A aranha oscila entre os ângulos $-\theta$ e $+\theta$, como mostrado na Figura. A teia da aranha é um fio finíssimo que suporta uma tensão máxima T_M , acima da qual ela simplesmente arrebenta.

Dados: m , T_M e g .

Calcule o maior ângulo θ de oscilação da aranha sem que a teia arrebente.

Vamos modelar a aranha por uma partícula de massa m , pendurada na extremidade de uma corda leve de comprimento L (que é o que chamamos de pêndulo simples). A figura ao lado ilustra a aranha partindo do repouso da posição mais alta (θ) e caindo até uma posição α



qualquer de sua trajetória circular. No diagrama de forças da aranha há apenas o peso e a tensão transmitida pela teia, que é uma força centrípeta. A idéia então será usar esse fato, de que a tensão é centrípeta para calcular sua magnitude. Da figura vemos que a resultante centrípeta na aranha, quando ela estiver em uma posição α , é:

$$R_{cent} = T - m g \cos(\alpha)$$

Portanto, da segunda lei de Newton:

$$R_{cent} = T(\alpha) - m g \cos(\alpha) = m a_{cent} = m \frac{V(\alpha)^2}{L}$$

sendo $V(\alpha)$ a velocidade que a aranha tem quando passa por essa posição α . Portanto, a tensão no fio de teia pode ser calculada por:

$$T(\alpha) = m g \cos(\alpha) + m \frac{V(\alpha)^2}{L}$$

Vemos que a tensão máxima ocorrerá quando $\cos(\alpha) = 1$ e $V(\alpha)$ for máxima. As duas coisas acontecem em $\alpha=0$, que é a posição mais baixa da aranha.

Para calcular a velocidade da aranha, partimos do fato de que a tensão é radial e não realiza trabalho. Trata-se, portanto, de uma situação em que a energia mecânica da aranha se conserva. Calcularemos a energia potencial gravitacional da aranha tomando como referência de altura ($h=0$) a posição mais baixa da aranha (linha vermelha horizontal). Da figura vemos logo que essas alturas são:

$$h(\theta) = L(1 - \cos(\theta))$$

$$h(\alpha) = L(1 - \cos(\alpha))$$

Igualando as energias mecânicas em θ (aranha parada momentaneamente) e α obtemos:

$$E(\theta) = E(\alpha) \Rightarrow 0 + m g h(\theta) = m \frac{V^2}{2} + m g h(\alpha)$$

Portanto, a velocidade da aranha quando ela passar pelo ângulo α será:

$$V(\alpha) = \sqrt{2 g (h(\theta) - h(\alpha))} = \sqrt{2 g L (\cos(\alpha) - \cos(\theta))}$$

Note que a velocidade máxima ocorre em $\alpha=0$ e vale:

$$V_{MAX} = V(\alpha = 0) = \sqrt{2 g L (1 - \cos(\theta))}$$

Portanto, a tensão máxima no fio é:

$$T(\alpha = 0) = m g + 2 m g (1 - \cos(\theta)) = m g (3 - \cos(\theta))$$

Para que o fio não arrebente deve valer:

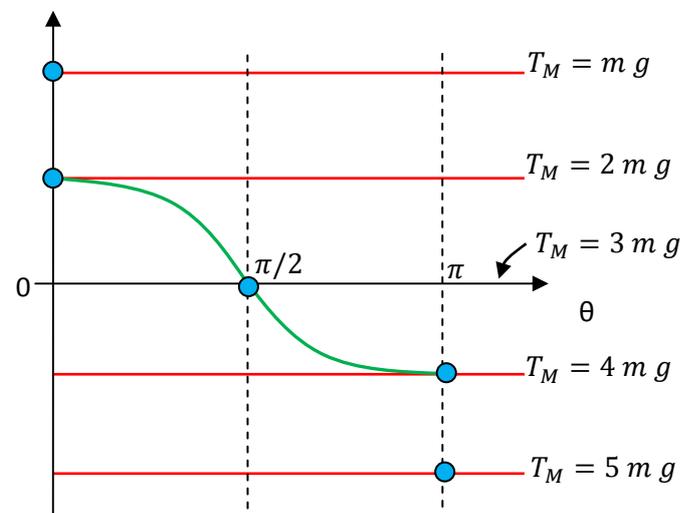
$$T \leq T_M$$

Portanto, o ângulo θ deve ser tal que:

$$\cos(\theta) \geq 3 - \frac{T_M}{m g}$$

Por exemplo, se $T_M = m g$, então $\cos(\theta) \geq 2$, o que é absurdo pois $\cos(\theta) \leq 1$. Logo, não haveria nenhum θ satisfazendo a desigualdade, ou seja, a aranha não poderia oscilar em hipótese nenhuma. De fato, como vale $\cos(\theta) \leq 1$, a teia tem que ser tal que $T_M \geq 2 m g$. Por outro lado, se $T_M = 3 m g$, então $\cos(\theta) \geq 0$, o que vale para $\theta \leq 90^\circ$. A aranha poderia oscilar até a teia ficar na horizontal ($\theta = 90^\circ$). Um caso extremo ocorreria se $T_M = 4 m g$, pois obtemos $\cos(\theta) \geq -1$, que vale para $\theta \leq 180^\circ$. Nesse caso, a aranha poderia oscilar como bem desejasse, subindo até a posição em que a teia estivesse vertical ($\theta = 180^\circ$). Para $T_M > 4 m g$ essa liberdade continuaria valendo com folga.

A figura ao lado ilustra graficamente essa situação. A curva verde é o gráfico da função $y = \cos(\theta)$, sendo $0 \leq \theta \leq \pi$ representado no eixo horizontal. Para que a teia não arrebente, ou seja $T \leq T_M$, θ deve ser tal que a curva verde está acima da reta vermelha, que é a função constante (independente de θ) $y = 3 - \frac{T_M}{m g}$ para um valor fixo de T_M . Para $T_M = m g$, isso nunca ocorre, a curva verde (que assume valores no intervalo $[-1,1]$) está sempre abaixo da reta $y = 2$.



Portanto, $\theta_{MAX} = 0$, ou seja, a aranha não pode oscilar. Para $T_M = 2 m g$, a curva verde intercepta a reta $y = 1$ em $\theta = 0$ e, portanto, ainda vale $\theta_{MAX} = 0$. Para $T_M = 3 m g$ a curva verde está acima da reta $y = 0$ para $\theta \leq \pi/2$ e portanto $\theta_{MAX} = \pi/2$. Para $T_M = 4 m g$, a curva verde está sempre acima da reta $y = -1$ e portanto $\theta_{MAX} = \pi$. Para $T_M > 4 m g$, a curva verde continua sempre acima da reta $y = 3 - \frac{T_M}{m g}$ e, portanto, continua valendo $\theta_{MAX} = \pi$.

3.6 Exercícios propostos

EP 3.1) a) Estime a energia cinética de um automóvel viajando a 100 km/h. b) Estime a energia potencial gravitacional de uma pessoa no alto de um prédio de 10 andares (considerando $h=0$ no solo).

EP 3.2) Um projétil de massa M é lançado para cima com velocidade inicial oblíqua dada por:

$$\vec{V}_0 = A\hat{x} + B\hat{y}$$

Na subida do projétil, o arraste com o ar que atua no projétil realiza um trabalho W e ele atinge uma altura máxima H . calcule o módulo da velocidade do projétil quando ele atinge a altura máxima.

EP 3.3) Uma mola ideal de constante k que estava comprimida de uma distância L empurra um bloco de massa M , lançando-o na vertical. O bloco estava inicialmente em repouso encostado na extremidade da mola comprimida. Desprezando o arraste do ar, calcule a altura máxima que o bloco alcança, em relação à sua posição inicial.

EP 3.4) Um bloco de massa M sobe deslizando em um plano inclinado de inclinação θ com a horizontal. O bloco é lançado no plano com velocidade inicial de módulo B , sobe deslizando e para após percorrer uma distância L ao longo do plano inclinado. Desprezando trocas de calor com o ambiente, calcule o aumento nas energias internas do bloco e da superfície nesse processo.

EP 3.5) Um bloco 1 de massa M é lançado sobre outro bloco 2 de massa N que estava inicialmente parado, apoiado em uma superfície sem atrito. O bloco 1 é lançado com velocidade inicial de módulo A e desliza sobre o bloco 2, empurrando esse bloco, devido ao atrito cinético entre os blocos. O deslizamento ocorre até que os blocos passam a deslizar juntos, com velocidade constante. Suponha que nesse processo o atrito cinético entre os blocos realize um trabalho $W_1 < 0$ no bloco 1 e $W_2 > 0$ no bloco 2. Mostre que:

$$\frac{W_2}{N} - \frac{W_1}{M} = \frac{A^2}{2}$$

* Esse é um exemplo em que o atrito cinético realiza um trabalho positivo, no bloco 2.

EP 3.6) Um bloco de massa M com velocidade inicial de módulo A bate em uma mola ideal (de constante k) inicialmente relaxada e passa a comprimi-la, sendo logo após rebatido de volta para longe da mola. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície horizontal é μ_c . Calcule a distância entre a posição em que o bloco finalmente para, entrando em repouso, e a extremidade da mola relaxada.

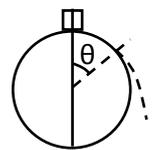
EP 3.7) Um bloco de massa M estava inicialmente em repouso comprimindo uma mola ideal de constante elástica k_1 de uma distância L . O bloco é então solto e desliza em uma superfície horizontal até bater em uma segunda mola ideal de constante elástica k_2 . O bloco vai comprimindo essa segunda mola até parar momentaneamente na compressão máxima. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície horizontal é μ_c . A distância horizontal entre as extremidades das molas relaxadas é D . Calcule a distância de compressão máxima da segunda mola.

EP 3.8) Uma partícula de massa m está descrevendo uma trajetória circular de raio R . Inicialmente a partícula estava com velocidade de módulo A constante (MCU) e a partir de um certo instante essa partícula ficou submetida a uma força tangente ao círculo de magnitude constante F , paralela a sua velocidade. Calcule o

módulo da velocidade da partícula após ela dar N voltas completas no círculo, submetida a essa força tangencial de magnitude constante.

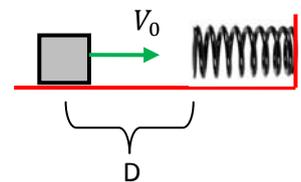
EP 3.9) Para elevar a temperatura de um litro de água de $14,5^\circ\text{C}$ para $15,5^\circ\text{C}$ devemos fornecer para esse litro de água uma energia $E = 1$ kcal (uma quilocaloria). Essa é, de fato, a definição da caloria. Como $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ (que é o equivalente mecânico do calor), segue que $E = 4.180 \text{ J}$. Suponha que um bloco de massa $M=80 \text{ kg}$ seja arrastado em uma superfície horizontal cujo coeficiente de atrito cinético bloco/superfície é $\mu_c=0,2$. Calcule a distância, em metros, que esse bloco deve ser arrastado para que as energias internas do bloco e da superfície aumentem exatamente da energia E definida acima (desprezando trocas de energia do bloco e da superfície com o resto do universo).

EP 3.10) Um pequeno bloco de massa M desliza sobre a superfície de uma esfera de raio R sem atrito, percorrendo um arco de círculo de raio R . O bloco parte do repouso da posição mais alta e desliza até perder contato com a superfície da esfera. Calcule o valor de θ (ver figura) em que o bloco perde contato com a esfera.



EP 3.11) Uma caixa de massa M está depositada sobre a carroceria de um caminhão que está inicialmente parado no ponto A. O caminhão acelera em uma pista horizontal e atinge uma velocidade final V em um ponto B, sem que a caixa deslize na carroceria. a) Calcule a variação da energia cinética da caixa. B) De acordo com o TTEC, qual a força que realizou trabalho positivo na caixa, variando/aumentando sua energia cinética?

EP 3.12) Um bloco é lançado com velocidade inicial de módulo V_0 contra uma mola que está inicialmente relaxada e apoiada em uma parede. O bloco parte de uma distância D da extremidade da mola relaxada. Calcule a compressão máxima da mola se: a) não há atrito entre o bloco e a superfície. b) o coeficiente de atrito cinético bloco/superfície é μ_c . c) A força de atrito cinético no bloco é constante de módulo F_A . d) O atrito cinético realiza um trabalho W_A no bloco.



EP 3.13) Um projétil cai em queda livre após ser lançado com velocidade inicial de módulo V_0 inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. Do ponto de partida no solo até a altura máxima o peso do projétil realiza um trabalho W_p . Calcule θ .

EP 3.14) A mola de uma espingarda de pressão possui uma constante elástica $k=500 \text{ N/m}$. A espingarda atira um chumbinho de massa $M=0,5 \text{ g}$, através da descompressão da mola. Calcule a compressão inicial da mola (em metros), para que o chumbinho saia do cano da espingarda com velocidade $V=250 \text{ m/s}$ (desprezando todas as perdas de energia no processo de tiro).

3.7 Respostas dos exercícios propostos

EP 3.1) a) 400 kJ b) 20 kJ

EP 3.2) $\sqrt{A^2 + B^2 - 2gH + \frac{2W}{M}}$

EP 3.3) $kL^2/2Mg$

EP 3.4) $M\frac{B^2}{2} - M g L \sin(\theta)$

EP 3.5) Basta aplicar o TTE a cada um dos blocos

EP 3.6) $\frac{A^2}{2\mu_c g} + \frac{2\mu_c M g}{k} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{kA^2}{M(\mu_c g)^2}} \right]$

EP 3.7) $-\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\beta(D+L) + (k_1/k_2)L^2}$ com $\beta \equiv \mu_c M g/k_2$

EP 3.8) $\sqrt{A^2 + 4NF\pi R/M}$

EP 3.9) $\cong 26,7$ m

EP 3.10) $\cos(\theta) = 2/3$, $\theta \cong 48,2^\circ$

EP 3.11) a) $MV^2/2$ b) A força de atrito estático realizou trabalho positivo na caixa.

EP 3.12) a) $\sqrt{\frac{M}{k}} V_0$ b) $-\frac{\mu_c M g}{k} + \sqrt{\frac{M}{k} V_0^2 + \frac{\mu_c M g}{k} \left(\frac{\mu_c M g}{k} - 2D \right)}$

c) $-\frac{F_A}{k} + \sqrt{\frac{M}{k} V_0^2 + \frac{F_A}{k} \left(\frac{F_A}{k} - 2D \right)}$ d) $\sqrt{\frac{M}{k} V_0^2 + 2\frac{W_A}{k}}$

EP 3.13) $\cos(\theta) = \sqrt{1 + 2\frac{W_P}{M V_0^2}}$

EP 3.14) $\cong 0,25$ m

4

Momento Linear



4.1 Introdução

Nesse capítulo continuaremos nossa busca por novas ferramentas para abordar os problemas da mecânica clássica. Iniciamos com as leis de Newton, que formam a base da mecânica clássica. Depois vimos os conceitos de trabalho e energia e passamos a enxergar os sistemas mecânicos naturais e artificiais sob uma nova perspectiva. Do ponto de vista computacional, vimos que alguns problemas, como os que envolvem forças variáveis, têm solução mais rápida e mais simples através dos conceitos de trabalho e energia. Nesse capítulo vamos estudar os conceitos de impulso e momento linear, que trarão uma nova perspectiva e uma nova ferramenta de abordagem para os problemas da mecânica: o teorema do impulso-momento linear. Apesar de geral, as vantagens na aplicação desse novo formalismo ficam evidentes quando abordamos problemas que envolvem sistemas com forças internas desconhecidas, como os problemas de colisões e explosões. Colisões e explosões têm em comum a curta duração e a ação de forças internas intensas e imprevisíveis.

Como motivação, vamos pensar na situação de um tiro de rifle. Para simplificar o problema, vamos supor um rifle de massa M flutuando no espaço vazio, na ausência de gravidade. Ninguém está segurando o rifle, ele vai ser acionado por controle remoto. Quando acionado, ocorre uma explosão dentro do rifle e uma bala de massa m sai do cano do rifle com velocidade de módulo V_B . Nosso objetivo é calcular o módulo da velocidade de recuo do rifle V_R . A situação está ilustrada na Figura 4.1 abaixo.

Antes do tiro, o rifle e a bala estavam parados. Logo após o tiro, que dura um tempo pequeno Δt , a bala viaja com velocidade \vec{V}_B e o rifle recua com velocidade \vec{V}_R . Queremos calcular V_R , dados M , m e V_B .

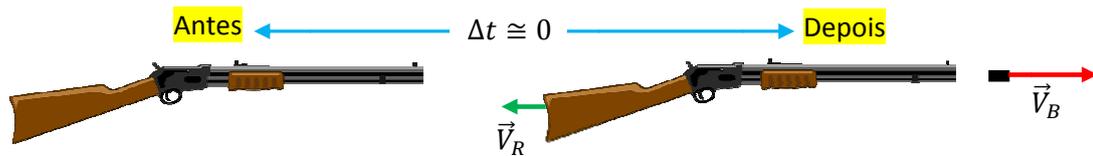


Figura 4.1: Ilustração de um tiro de rifle (imediatamente antes e imediatamente depois), um evento intenso que dura um tempo Δt muito curto.

Quanto ao recuo do rifle, não há dúvida de que ele sempre existirá, afinal, a bala vai para a direita porque o rifle a empurrou nesse sentido e, portanto, da terceira lei de Newton (ação e reação), sabemos que a bala empurrou o rifle para a esquerda. Na prática esse recuo deve ser “absorvido” pelo atirador, que vai apoiar a coronha do rifle no ombro e frear o rifle, através da força ombro/rifle. Aqui estamos supondo que não há esse apoio do rifle no ombro de algum atirador. Se procurarmos na internet, vamos encontrar diversas imagens e vídeos de acidentes com armas de fogo, causados pela surpresa do atirador, distraído e/ou inexperiente, com o recuo repentino da arma. Acidentes desse tipo com armas são comuns, pela negligência de uma lei básica da natureza: ação e reação. Se a bala vai para frente, a arma vai para trás. Somente nos filmes as armas não oferecem nenhum “coice” ao atirador.

Queremos calcular a velocidade de recuo do rifle e para isso poderíamos tentar aplicar a segunda lei de Newton, para calcular a aceleração do rifle e depois sua velocidade. A idéia seria calcular a aceleração \vec{a}_R e depois a velocidade \vec{V}_R , usando a cinemática. Mas, ao escrever essa lei nos deparamos com uma força sobre a qual não sabemos nada, a força que a bala faz no rifle $\vec{F}_{B/R}$. De fato, para o rifle vale (desprezando outras forças, como atrito, alguém segurando o rifle etc.):

$$\vec{F}_{B/R} = M \vec{a}_R$$

Mas, nada foi dito sobre a força $\vec{F}_{B/R}$, sabemos apenas que ela é uma função do tempo $\vec{F}_{B/R} = \vec{F}_{B/R}(t)$ e que varia de uma forma rápida e imprevisível, como ilustrado na Figura 4.2 abaixo.

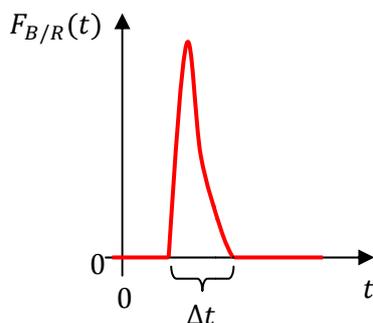


Figura 4.2: Ilustração da variação no tempo da magnitude da força $\vec{F}_{B/R}$ que a bala faz no rifle durante um tiro. A força atua como um pulso intenso e de curta duração. A forma exata da curva é imprevisível. O gráfico da magnitude da força $\vec{F}_{R/B}$ que o rifle faz na bala é igual a esse, dada a terceira lei de Newton.

Assim sendo, como não conhecemos nada sobre a força $\vec{F}_{B/R}$, essa abordagem do problema se torna inútil.

Poderíamos então tentar abordar o problema com os conceitos de energia. Vemos claramente que há uma “criação” de energia cinética durante o tiro já que:

$$K_{\text{antes}} = 0 + 0 \quad \text{e} \quad K_{\text{depois}} = m \frac{V_B^2}{2} + M \frac{V_R^2}{2}$$

Portanto:

$$\Delta K = m \frac{V_B^2}{2} + M \frac{V_R^2}{2}$$

Note que se pudéssemos calcular ΔK , saberíamos o valor de V_R . O teorema do trabalho energia nos diz que essa energia veio do trabalho das forças internas ao sistema: $\vec{F}_{B/R}$ e $\vec{F}_{R/B}$. Novamente, não podemos calcular esses trabalhos porque não conhecemos essas forças. Pensando em um contexto mais geral, podemos dizer que essa energia cinética foi “criada” na explosão da pólvora que estava dentro do cartucho de onde saiu a bala. Ao acionar o gatilho, uma pequena quantidade de pólvora dentro do cartucho explode e a explosão empurra a bala (o projétil) para frente e a arma para trás. Aplicando a primeira lei da termodinâmica para o sistema rifle+bala+pólvora, obtemos (desprezando trocas de energia com a vizinhança):

$$\Delta K + \Delta E_i = 0$$

sendo ΔE_i a variação na energia interna da pólvora, ou seja, $|\Delta E_i|$ é a energia (interna) liberada na queima da pólvora que estava dentro do cartucho. Note que os trabalhos de $\vec{F}_{B/R}$ e $\vec{F}_{R/B}$ não aparecem nessa equação, pois são trabalhos de forças internas ao sistema rifle+bala+pólvora. A queima da pólvora é responsável pela energia cinética da bala e do rifle e também por outras energias criadas na explosão, como a energia sonora, a energia térmica etc. Apesar de interessante, esse raciocínio não vai nos levar à solução do problema, já que nos deparamos com conceitos que fogem do contexto da mecânica, como a energia liberada na queima da pólvora (Qual pólvora? Quantos gramas de pólvora?).

Estamos tentando evidenciar a inadequação dos métodos que já estudamos para abordar esse problema de mecânica, que é simples de fato. Veremos que a solução desse problema está na equação:

$$m V_B + M V_R = 0$$

Ou seja:

$$V_R = -\frac{m}{M} V_B$$

O sinal negativo indica que, como não poderia deixar de ser, V_R é oposta à V_B . Valores típicos das grandezas envolvidas nessa equação são $m = 10 \text{ g}$, $M = 5 \text{ kg}$ e $V_B = 500 \text{ m/s}$. Nesse caso, obtemos:

$$V_R = 1 \text{ m/s}$$

O rifle recuaria com essa velocidade, logo após o tiro, e deveria ser firmemente apoiado no ombro do atirador para que essa energia cinética fosse absorvida.

Para entender a solução desse problema precisamos discutir os conceitos de impulso e momento linear. Veremos então que a equação acima para as massas e velocidades do rifle e da bala expressa a conservação do momento linear do sistema rifle+bala.

4.2 Impulso de uma força

Imagine um bloco que se move submetido a várias forças. Uma dessas forças é \vec{F} . Considerando um intervalo de tempo que inicia em t_i e termina em t_f , podemos definir o impulso da força \vec{F} nesse intervalo de tempo, que denotaremos por:

$$\vec{J}_{\vec{F}}(t_i, t_f)$$

$\vec{J}_{\vec{F}}(t_i, t_f)$ é o impulso da força \vec{F} no intervalo de tempo de t_i até t_f .

4.2.1 Impulso de uma força constante no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$

Suponha que \vec{F} seja uma força constante, ou seja, uma força cujo módulo F , e cuja direção e sentido não mudam no intervalo de tempo de interesse $[t_i, t_f]$. Então:

$$\vec{J}_{\vec{F}}(t_i, t_f) = \vec{F} (t_f - t_i)$$

O impulso de uma força constante é simplesmente o produto da força pelo intervalo de tempo considerado. A unidade de impulso é o produto Newton (N) vezes segundo (s), ou seja, N s.

A menção à palavra impulso lembra um empurrão, que é, basicamente, a aplicação de um pulso de força. Esse pulso pode imprimir uma força grande ou pequena, por um tempo mais longo ou mais curto. O impulso é a grandeza que envolve a intensidade da força e o tempo e mede, de uma certa forma, a intensidade desse empurrão

Se adotarmos um referencial xyz, as componentes do impulso são:

$$J_{\vec{F}_x}(t_i, t_f) = F_x (t_f - t_i), \text{ etc.}$$

Essa equação acima tem uma interpretação simples, em termos de área abaixo do gráfico de F_x em função do tempo, no intervalo $[t_i, t_f]$. Note que $J_{\vec{F}_x}(t_i, t_f)$ é dado simplesmente pela área de um retângulo, já que F_x é constante. Essa ideia, da componente x do impulso como sendo a área abaixo da curva da componente x da força (constante nesse caso) em função do tempo, está ilustrada na Figura 4.3 abaixo.

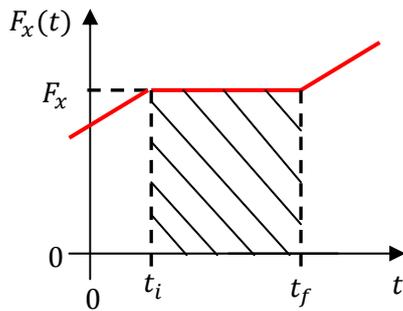


Figura 4.3: Quando uma força é constante, todas suas componentes são constantes. A componente x do impulso dessa força é dada pela área abaixo do gráfico da componente x da força, F_x , no intervalo de tempo de interesse. O que acontece fora desse intervalo de tempo não interessa.

4.2.2 Impulso de uma força qualquer, variável no tempo

Suponha agora que \vec{F} não seja uma força constante, ou seja, que $\vec{F} = \vec{F}(t)$ mude com o passar do tempo, como o caso da força no rifle mostrada na Figura 4.2. Ela pode mudar em módulo, em direção e em sentido. Então, no intervalo de tempo de interesse $[t_i, t_f]$, o impulso de $\vec{F}(t)$ é dado por:

$$\vec{J}_{\vec{F}(t)}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

Novamente, se adotarmos um referencial xyz, as componentes do impulso são:

$$J_{\vec{F}(t)x}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} F_x(t) dt, \quad \text{etc.}$$

Essa equação acima tem uma interpretação simples, em termos de área abaixo do gráfico de $F_x(t)$ em função do tempo, no intervalo $[t_i, t_f]$, conforme ilustrado na Figura 4.4.

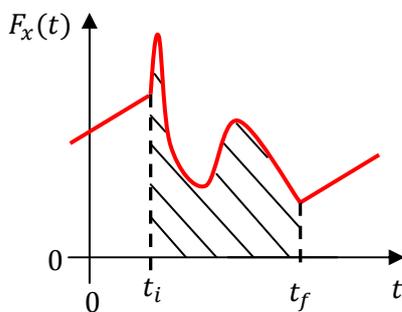


Figura 4.4: Ilustração do gráfico da componente x de uma força que varia no tempo. A componente x do impulso dessa força é dada pela área abaixo do gráfico da componente x da força, $F_x(t)$, no intervalo de tempo de interesse. O que acontece fora desse intervalo de tempo não interessa.

Note que no caso particular em que \vec{F} é constante:

$$\vec{J}_{\vec{F}(t)}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \vec{F} \int_{t_i}^{t_f} dt = \vec{F} (t_f - t_i)$$

como já havíamos definido anteriormente.

Não podemos deixar de notar uma certa similaridade entre o impulso e o trabalho de uma força. Mas, há mais diferenças que semelhanças. O trabalho é uma grandeza escalar, enquanto que o impulso é uma grandeza vetorial. O trabalho é uma integral no espaço (em x, em y, ou algo similar) enquanto que o impulso é

uma integral no tempo. Dessa forma, uma força que não realiza trabalho em um determinado sistema, como a força de atrito estático, pode realizar um impulso. Por exemplo, a força normal que o piso faz em uma pessoa que dá um salto para cima não realiza trabalho, porque atua nos pés da pessoa que estão parados em contato com o piso. Mas, essa mesma força normal realiza um impulso (um empurrão) para cima durante o salto. Por outro lado, uma força que muda de sentido pode não realizar impulso (porque a integral da porção positiva da curva da força é anulada pela integral da porção negativa da curva), mas pode realizar trabalho, se o deslocamento mudar de sentido junto com a força. Por exemplo, considere um bloco de massa M que desliza em uma superfície horizontal, ao longo do eixo x , oscilando para cá e para lá. O bloco sai de $x=0$, vai até $x=L$ e em seguida volta, de $x=L$ até $x=0$, gastando o mesmo tempo Δt na ida e na volta (um movimento oscilatório). Considere a força de atrito cinético nesse bloco. Na ida a força de atrito é $\vec{F}_A^{(C)} = -\mu_c M g \hat{x}$ e na volta essa força é $\vec{F}_A^{(C)} = \mu_c M g \hat{x}$, então, na ida $\vec{J}_{\vec{F}_A^{(C)}} = -\mu_c M g \Delta t \hat{x}$ e na volta $\vec{J}_{\vec{F}_A^{(C)}} = \mu_c M g \Delta t \hat{x}$. Portanto, no percurso completo: $\vec{J}_{\vec{F}_A^{(C)}} = \vec{0}$. Por outro lado, o trabalho do atrito é: $W_{\vec{F}_A^{(C)}} = -2 \mu_c M g L$.

Considere o exemplo da queda livre, que já conhecemos bem. Uma partícula de massa m é lançada do solo com velocidade de módulo V_0 inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. Se Δt é o tempo total de queda, ou seja, o intervalo de tempo que demora para a partícula retornar ao solo, então, durante essa queda o peso da partícula (que é uma força constante) realizou um impulso:

$$\vec{J}_{m\vec{g}}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} m\vec{g} dt = m\vec{g} \Delta t$$

Adotando um eixo x na horizontal e um eixo y vertical para cima (no plano de \vec{V}_0), ficamos com:

$$\vec{J}_{m\vec{g}}(t_i, t_f) = -mg \Delta t \hat{y}$$

Como já sabemos que para a queda livre o tempo total de queda é:

$$\Delta t = \frac{2 V_0}{g} \text{sen}(\theta)$$

Então:

$$\vec{J}_{m\vec{g}}(t_i, t_f) = -2 m V_0 \text{sen}(\theta) \hat{y}$$

Durante a queda, a partícula sofre um impulso vertical para baixo. A palavra impulso está associada ao ato de impelir, empurrar, projetar. Podemos entender que um projétil em queda livre está sendo empurrado para baixo pela ação do seu próprio peso. Esse “empurrão” está quantificado na grandeza impulso. Veremos em breve que podemos usar esse impulso para calcular a variação da velocidade do projétil na queda, que é a ideia do teorema do impulso-momento linear. Voltando à comparação entre impulso e trabalho, note que nesse exemplo o trabalho do peso da partícula no percurso total de queda é nulo. Na subida o trabalho de

peso é negativo e na descida ele é positivo. O saldo é nulo (o peso é uma força conservativa). O peso do projétil não realiza trabalho nesse percurso, mas realiza um impulso vertical para baixo.

A grandeza impulso pode ser usada para definir o valor médio de uma força variável no tempo.

Sabemos que há diversas maneiras de se definir o valor médio de uma grandeza variável no tempo. Por exemplo, quando dizemos que em uma tomada da rede elétrica existe uma tensão, ou voltagem, de 127 volts, estamos nos referindo a um valor médio de uma voltagem $V(t)$ que oscila senoidalmente no tempo, como ilustrado na Figura 4.5. O valor 127 volts não pode se referir a simples média aritmética de $V(t)$, já que essa é identicamente nula, tendo em vista a inversão periódica de sinal. Esse valor médio de 127 V, também chamado de valor eficaz da voltagem, é definido como uma espécie de equivalente contínuo da voltagem, que produziria a mesma potência dissipada em uma resistência elétrica dada. Por exemplo, dizer que a voltagem senoidal na tomada tem um valor médio de 127 volts é a mesma coisa que dizer que um chuveiro elétrico ligado nessa voltagem vai dissipar a mesma quantidade de calor (para a água) que esse chuveiro dissiparia se ele estivesse ligado a uma bateria de voltagem contínua (constante) igual a 127 volts.

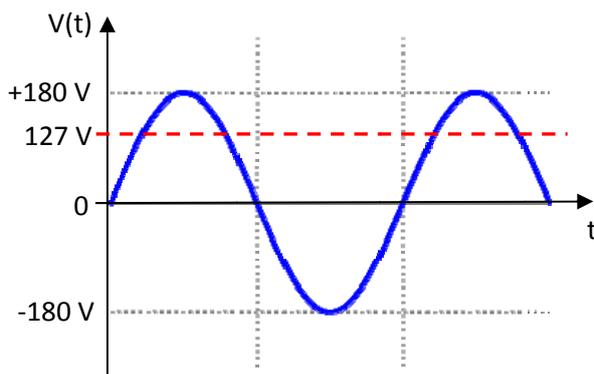


Figura 4.5: Ilustração do comportamento de uma voltagem senoidal $V(t)$ em função do tempo t . A voltagem oscila entre +180 volts e -180 volts (inversão de polaridade) periodicamente, com frequência de 60 Hz. O valor médio (eficaz) é próximo de 127 volts.

O valor 127 volts é, portanto, um equivalente contínuo da voltagem senoidal. Equivalente no sentido de que este é o valor constante de tensão que produziria a mesma potência dissipada em um equipamento elétrico.

Definiremos aqui o valor médio (no tempo) de uma força de uma forma análoga, mas no sentido da igualdade do impulso e não da potência. Dada uma força variável no tempo $\vec{F}(t)$, o valor médio dessa força, no intervalo de tempo de t_i até t_f , é igual ao valor constante de força \vec{F}_{MED} que produz o mesmo impulso de $\vec{F}(t)$ nesse mesmo intervalo de tempo. Portanto, igualando os impulsos:

$$\vec{F}_{MED}(t_f - t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

Concluimos que a força média é dada por:

$$\vec{F}_{MED} = \frac{1}{(t_f - t_i)} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

A Figura 4.6 ilustra essa idéia.

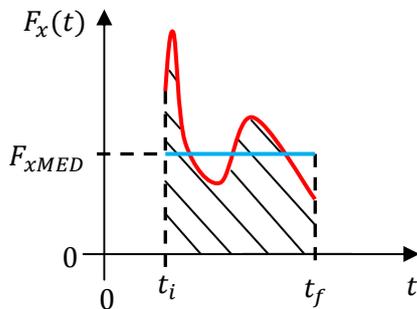


Figura 4.6: Ilustração do comportamento de uma força variável em função do tempo t (curva vermelha). Mostramos apenas a componente x da força. O valor médio da componente x da força nesse intervalo de tempo é o valor de força constante (linha azul) que produziria, ao final, o mesmo impulso. Portanto, a área hachurada abaixo da curva vermelha é igual à área do retângulo de altura F_{xMED} e largura $t_f - t_i$.

É interessante notar que para o caso de uma força de magnitude senoidal, análoga à voltagem na Figura 4.5, uma força que invertesse simetricamente de sentido, a força média seria nula. Isso porque o impulso na porção positiva da força (força, digamos, para a direita) cancelaria com o impulso na porção negativa da força (força para a esquerda) e o efeito final, em termos de impulso, seria nulo (como no caso do exemplo da força de atrito que demos anteriormente). No caso do valor médio da voltagem, ele não é nulo porque a potência dissipada na porção positiva da voltagem é igual à potência dissipada na porção negativa. Os efeitos se somam. O chuveiro esquenta a água tanto quando a corrente elétrica está indo como quando a corrente está voltando.

A estimativa de força média é importante quando analisamos sistemas que envolvem forças de variação imprevisível, como as colisões, impactos de projéteis, explosões etc. Nas investigações de crimes e acidentes, por exemplo, estimativas de força média são cruciais para validar ou não as hipóteses em um processo criminal. Essas investigações fazem parte da física forense, que é uma área da criminalística onde se usam as leis da física (as leis da natureza) para elucidar fenômenos de interesse judiciário (crimes, acidentes etc.). Por exemplo, em um atropelamento de uma pessoa por um carro, a velocidade do carro no momento do impacto vai determinar a força que o carro faz na pessoa, que vai determinar, por sua vez, a trajetória da pessoa após o impacto e as fraturas que ela vai sofrer. Como a força carro/pessoa é basicamente um pulso rápido, intenso e imprevisível de força, a estimativa de um valor médio é a ferramenta usada para se inferir, a partir da trajetória e das fraturas na vítima, a velocidade que o carro tinha no momento do atropelamento. Nessa associação fratura/força média/velocidade é importante levar em conta o tipo de estrutura que compõe a parte do carro que se chocou com a pessoa. Se a pessoa recebeu o impacto do para-choque do carro, por exemplo, um para-choque mais deformável vai levar a uma força média menor no impacto, quando comparado a um para-choque mais rígido. A Figura 4.7 ilustra essa idéia.

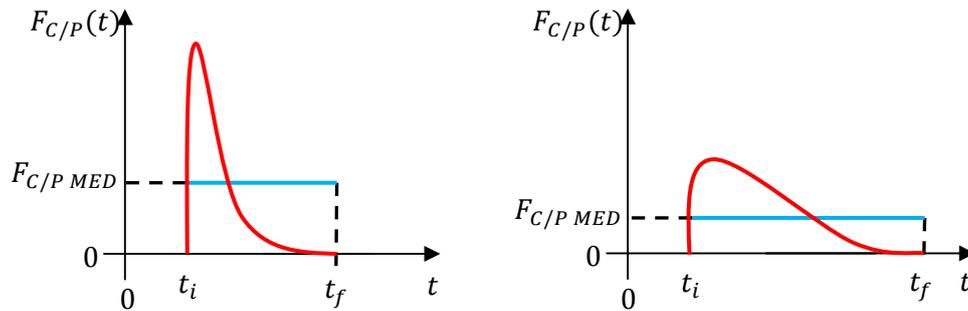


Figura 4.7: Força que o carro faz na pessoa $F_{C/P}(t)$, e força média $F_{C/P MED}$, para um para-choque duro e para um para-choque mole, supondo o mesmo impulso (mesma área).

Basicamente, em uma colisão carro/pessoa, a força que o carro faz na pessoa $F_{C/P}(t)$, assim com a força média $F_{C/P MED}$, não estão determinadas somente pela velocidade do carro no impacto. Elas estão determinadas também pelos materiais envolvidos na colisão. Pensando em um mesmo impulso na colisão (mesma área abaixo da curva da força), um para-choque duro vai implicar em um pulso mais concentrado de força e, portanto, mais intenso; um para-choque macio (deformável) vai alongar o tempo de interação carro/pessoa e, portanto, vai produzir um pulso de força mais duradouro e menos intenso. Após estudarmos o momento linear, veremos como é possível associar impulso e velocidade.

4.3 Momento linear

4.3.1 Momento linear de uma partícula

O conceito de momento linear é simples. Considere a segunda lei de Newton para uma partícula de massa m :

$$\vec{R} = m \vec{a} = m \frac{d}{dt} \vec{V}$$

Sendo a massa da partícula uma constante durante o movimento, podemos simplesmente passar a massa para dentro da derivada e obtemos:

$$\vec{R} = \frac{d}{dt} m \vec{V} = \frac{d}{dt} \vec{p}$$

Definimos nessa equação o momento linear da partícula: $\vec{p} = m \vec{V}$. A unidade de momento linear é dada pelo produto kg m/s .

Vemos então que a segunda lei de Newton é uma lei de evolução do momento linear: a taxa de variação no tempo do momento linear de uma partícula é igual à força resultante que está atuando na partícula. Em particular, se $\vec{R} = \vec{0}$, então \vec{p} é constante. Não há muita novidade nisso, afinal, se $\vec{R} = \vec{0}$, então $\vec{a} = \vec{0}$, \vec{V} é constante e $\vec{p} = m \vec{V}$ é constante. Estamos fazendo apenas uma mudança de linguagem aqui,

saindo do produto da massa pela aceleração e indo para a derivada do momento linear. O ganho conceitual é mais evidente quando tratamos de um sistema de várias partículas.

4.3.2 Momento linear de um sistema de partículas

As coisas começam a ficar interessantes quando aplicamos essa idéia a um sistema de partículas. Considere, para ilustrar, um sistema composto de duas partículas, 1 e 2. Para cada partícula ($i = 1, 2$) vale:

$$\vec{R}_i = \frac{d}{dt} \vec{p}_i$$

A diferença essencial entre um sistema de partículas e uma partícula apenas é que em um sistema de partículas podemos classificar as forças em internas e externas. Forças internas do sistema são as forças que uma partícula faz na outra, como as forças de atração entre átomos de um corpo, por exemplo. Forças externas do sistema são forças que os outros corpos fazem nas partículas que compõem o sistema. Por exemplo, se a Terra não faz parte do sistema, então os pesos das partículas são forças externas ao sistema. Note, todas as forças que atuam nas partículas do sistema estão atuando dentro do sistema, são todas internas nesse sentido. A classificação que estamos fazendo aqui se refere à origem da força, se a origem é interna (as próprias partículas do sistema) ou externa (outros corpos na vizinhança do sistema). Uma força externa não é, portanto, uma força que está fora do sistema, mas sim uma força que é produzida por um outro corpo fora do sistema e que atua nos componentes do sistema.

Dessa forma, para a partícula 1 do sistema de duas partículas obtemos:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_{2/1} + \vec{R}_{EXT 1} = \frac{d}{dt} \vec{p}_1$$

Analogamente para a partícula 2. $\vec{F}_{2/1}$ é a força interna do sistema, ou seja, a força que a partícula 2 faz na partícula 1. Somando as equações para as duas partículas obtemos:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \{\vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{1/2}\} + \{\vec{R}_{EXT 1} + \vec{R}_{EXT 2}\} = \frac{d}{dt} \{\vec{p}_1 + \vec{p}_2\}$$

Agora apelamos para a terceira lei de Newton que diz que (para um par ação-reação):

$$\vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{1/2} = \vec{0}$$

Definindo a resultante das forças externas do sistema: $\vec{R}_{EXT} = \vec{R}_{EXT 1} + \vec{R}_{EXT 2}$; e o momento linear do sistema: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, obtemos finalmente:

$$\vec{R}_{EXT} = \frac{d}{dt} \vec{P}$$

Essa é a lei central do formalismo de momento linear: ela diz que o momento linear de um sistema de partículas varia somente por ação de forças externas, forças exercidas no sistema por outros corpos em sua

vizinhança. As forças internas não afetam, em nada, o momento linear do sistema. Podemos chamar essa lei de “segunda lei de Newton para um sistema de partículas”, pois ela é uma extensão, para um sistema de várias partículas, da segunda lei de Newton para uma partícula: $\vec{R} = m \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{p}$. Não há de fato muita diferença entre as duas leis, com exceção do subíndice EXT na força resultante. De fato, mesmo na lei para apenas uma partícula poderíamos ter colocado esse subíndice, mas nesse caso ele seria redundante, pois para uma partícula todas as forças são externas. A diferença entre as duas leis, de partícula e de sistema de partículas, está apenas no fato de que todas as forças que atuam em uma partícula podem alterar seu momento linear ao passo que para um sistema de partículas somente as forças externas que atuam no sistema têm essa capacidade.

Um caso particular interessante é o de um sistema livre de forças externas, ou, equivalentemente, submetido a várias forças externas que se anulam mutuamente. Nesse caso, $\vec{R}_{EXT} = \vec{0}$ e, portanto:

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{0}$$

ou seja, o momento linear do sistema é uma constante. Concluímos então que em processos regidos por forças internas, o momento linear de um sistema se conserva. Podemos chamar esse resultado de “lei da conservação do momento linear”, mais especificamente:

$$\text{Se } \vec{R}_{EXT} = \vec{0}, \text{ então } \vec{P} = \text{constante.}$$

Colisões e explosões são, tipicamente, processos em que as forças internas são preponderantes, comparadas com as forças externas. Nesses processos observamos muitas vezes (quando podemos desprezar a \vec{R}_{EXT}) a conservação do momento linear do sistema.

Note, podemos fazer uma conexão simples entre o impulso e o momento linear. De fato:

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{R}_{EXT} \Rightarrow \vec{P}(t_f) - \vec{P}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_{EXT} dt = \vec{J}_{\vec{R}_{EXT}}(t_i, t_f)$$

Portanto:

$$\vec{P}(t_f) - \vec{P}(t_i) = \vec{J}_{\vec{R}_{EXT}}(t_i, t_f)$$

Essa última igualdade é o teorema do impulso-momento linear, que diz que: a variação do momento linear de um sistema em um intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ é igual ao impulso da força resultante externa que atua no sistema nesse mesmo intervalo de tempo. Note que aqui a condição $\vec{J}_{\vec{R}_{EXT}}(t_i, t_f) = \vec{0}$ não implica que \vec{P} é uma constante no tempo, implica apenas que $\vec{P}(t_f) = \vec{P}(t_i)$, ou seja, implica que o momento linear tem o mesmo valor nos dois instantes t_i e t_f (o que aconteceu no meio desse intervalo de tempo não importa). O

teorema do impulso-momento linear é apenas a forma integral da segunda lei de Newton para um sistema de partículas. A “lei da conservação do momento linear” expressa na grandeza impulso fica:

$$\text{Se } \vec{J}_{\vec{R}_{EXT}}(t_i, t_f) = \vec{0}, \text{ então } \vec{P}(t_f) = \vec{P}(t_i).$$

Notamos que há uma certa confusão entre os conceitos de momento linear e energia cinética. De fato, para uma partícula essas duas grandezas são diretamente relacionadas entre si, pois:

$$K = m \frac{v^2}{2} \text{ e } \vec{p} = m \vec{v}, \text{ logo, } K = \frac{p^2}{2m}.$$

Mas, sendo \vec{p} um vetor e K um escalar, podemos nos surpreender com os comportamentos bem distintos dessas duas grandezas. Por exemplo, considere uma partícula de massa m que se move na horizontal com velocidade constante \vec{V} . Essa partícula bate na parede e volta, com velocidade $-\vec{V}$. Então, a energia cinética da partícula não variou nessa colisão (colisão elástica, $\Delta K = 0$), mas o momento linear variou:

$$\Delta \vec{p} = m\vec{V} - (-m\vec{V}) = 2m\vec{V}$$

A energia cinética não variou porque a força parede/partícula não realiza trabalho (parede rígida) e o momento linear variou porque essa mesma força produz um impulso na partícula.

Para um sistema de N partículas a relação entre K e \vec{P} se torna mais complicada. De fato:

$$K = \sum_{i=1}^N m_i \frac{V_i^2}{2}$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i$$

Nota-se que não há relação simples entre K e \vec{P} . As duas funções podem variar ou não, independentemente uma da outra. Por exemplo, existem sistemas em que o momento linear se conserva, mas a energia cinética não, e vice-versa.

Na sequência vamos aplicar essas idéias em alguns problemas típicos da mecânica clássica.

O problema do tiro de rifle, que usamos como motivação inicial, será nosso primeiro exemplo. Relembrando: supomos um rifle de massa M flutuando no espaço vazio, na ausência de gravidade. Ninguém está segurando o rifle, ele vai ser acionado por controle remoto. Quando acionado, ocorre uma explosão dentro do rifle e uma bala de massa m sai do cano do rifle com velocidade de módulo V_B . Nosso objetivo é calcular o módulo da velocidade de recuo do rifle V_R . A situação está ilustrada novamente na Figura 4.8 que segue.

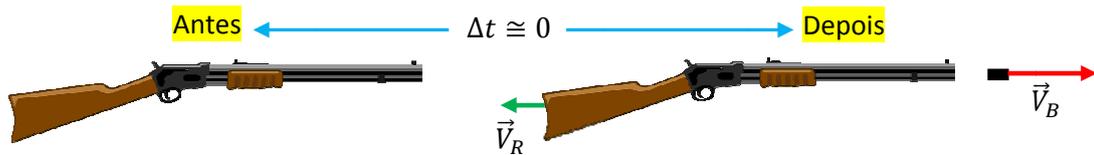


Figura 4.8: Ilustração de um tiro de rifle, um evento intenso que dura um tempo Δt muito curto.

Antes do tiro, o rifle e a bala estavam parados. Logo após o tiro, que dura um tempo pequeno Δt , a bala viaja com velocidade \vec{V}_B e o rifle recua com velocidade \vec{V}_R , conforme a Figura 4.8. Queremos calcular V_R , dados M , m e V_B . A ideia central é que, pensando no sistema rifle+bala, as forças que são responsáveis pelo tiro são forças internas, força do rifle na bala e força da bala no rifle. Essas forças não afetam o momento linear desse sistema rifle+bala. O contexto nos leva a desprezar as forças externas ao sistema rifle+bala (pesos, normais, atritos etc.). Assim sendo, o momento linear do sistema rifle+bala se conserva durante o tiro. Sejam então t_i um instante imediatamente anterior ao tiro e t_f um instante imediatamente posterior ao tiro. Vale, portanto:

$$\vec{P}(t_i) = \vec{P}(t_f)$$

Ou seja:

$$m \vec{0} + M \vec{0} = \vec{0} = m \vec{V}_B + M \vec{V}_R$$

Segue então a resposta do problema ($\vec{V}_R = ?$) que já mencionamos anteriormente:

$$\vec{V}_R = - \frac{m}{M} \vec{V}_B$$

Note, na prática não existem rifles flutuando no espaço e atirando por controle remoto. Sempre há alguém segurando o rifle, de preferência apoiando a coronha no ombro. Sempre há o arraste do ar, principalmente na bala que se move em alta velocidade dentro do cano do rifle. Mas, se considerarmos que as forças internas ao sistema são de fato muito mais intensas que essas forças que mencionamos e que o tiro é um evento muito rápido, a idéia de desprezar o impulso das forças externas durante um tiro não é absurda, pelo contrário, pode ser uma aproximação bastante razoável. Matematicamente, essa idéia seria expressa da seguinte forma:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_{EXT} dt \cong \vec{0} \Rightarrow \vec{P}(t_i) \cong \vec{P}(t_f)$$

Ou seja, o momento linear de um sistema se conserva se o impulso das forças externas que atuam nele durante o processo considerado é desprezível. Esse impulso pode ser desprezível basicamente por duas razões: as forças externas são pequenas e/ou a duração $\Delta t = t_f - t_i$ do processo em questão é muito pequena. No caso do tiro de rifle idealizado na Figura 4.8 vale exatamente $\vec{R}_{EXT} = \vec{0}$ no sistema rifle+bala e,

portanto, vale exatamente $\vec{P}(t_i) = \vec{P}(t_f)$. No caso de um tiro qualquer, realizado por um atirador, podemos nos basear no fato de que as forças internas são muito mais intensas que as forças externas no sistema rifle+bala e na validade de $\Delta t \cong 0$ para concluir que $\vec{P}(t_i) \cong \vec{P}(t_f)$.

Concluindo, quando vemos uma pessoa atirar com um rifle, podemos pensar que o recuo do rifle se deve à conservação do momento linear do sistema rifle+bala, mesmo que isso não seja exatamente verdade (porque há de fato uma ação, um impulso, mesmo que pequeno, de forças externas no sistema). Mas, a verdade é que nesse caso há de fato uma quase-conservação do momento linear. Quanto à energia cinética, está longe de ser conservada, como já vimos. Vale a pena mencionar que o processo de tiro envolve de fato três corpos: o rifle, a bala e a porção de gás criada na queima da pólvora, responsável por empurrar o rifle e a bala, cada um para um lado. Mas, como a massa desse gás é muito pequena e após o tiro o gás se move em dois sentidos opostos, o momento linear associado a esse terceiro corpo é desprezível, quando comparado aos momentos lineares do rifle e da bala.

Vamos aproveitar o ensejo para calcular/estimar a força média que o rifle faz na bala, durante a duração do tiro. A idéia básica aqui é novamente desprezar as forças na bala, com exceção da força que o rifle faz na bala. Assim:

$$\vec{R}_B = \vec{F}_{R/B}$$

Portanto, segue que:

$$\vec{F}_{R/B \text{ MED}} = \frac{1}{(t_f - t_i)} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{R/B} dt = \frac{1}{(t_f - t_i)} \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_B dt = \frac{1}{(t_f - t_i)} [\vec{p}_B(t_f) - \vec{p}_B(t_i)]$$

Na última igualdade aplicamos o teorema do impulso-momento linear para a bala. Como:

$$\vec{p}_B(t_f) - \vec{p}_B(t_i) = m \vec{V}_B - m \vec{0} = m \vec{V}_B$$

Segue que:

$$\vec{F}_{R/B \text{ MED}} = \frac{m \vec{V}_B}{(t_f - t_i)}$$

A parte mais difícil do cálculo da força está na estimativa do tempo de duração de um tiro: $\Delta t = t_f - t_i$. Sabemos apenas que Δt é muito pequeno. Quanto tempo dura um tiro? O uso de um cronômetro não funciona nesse caso. Em um piscar de olhos o tiro termina e a bala sai do cano do rifle. Uma maneira de estimar Δt é considerar que a bala viaja todo o comprimento L do rifle com velocidade \vec{V}_B . Obviamente isso não é verdade, a bala sai do repouso e vai acelerando, até atingir a velocidade \vec{V}_B . Mas trata-se apenas de uma estimativa e não vale a pena elucubrar muito sobre ela, já que nossa esperança é obter apenas uma ordem de grandeza para $\vec{F}_{R/B}$. Nesse caso, vale:

$$V_B = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{V_B}$$

Portanto, uma estimativa para o módulo da força média que o rifle faz na bala é:

$$F_{R/B\ MED} = \frac{m V_B}{\Delta t} = m \frac{V_B^2}{L}$$

Considerando os dados numéricos: $m = 10\text{ g}$ ($10 \times 10^{-3}\text{ kg}$), $V_B = 500\text{ m/s}$ e $L = 1\text{ m}$, obtemos:

$$F_{R/B\ MED} = 10 \times 10^{-3} \times \frac{(500)^2}{1} = 2.500\text{ N}$$

Durante a curta duração de um tiro, uma bala sofre um pulso de força, como aquele mostrado na Figura 4.2. Um pulso de força na direção e sentido de \vec{V}_B . Durante esse pulso a força $\vec{F}_{R/B}(t)$ cresce rapidamente e atinge um valor máximo, um comportamento que não sabemos como avaliar. Mas, tudo funciona (para efeito de impulso, e de variação do momento linear da bala) como se a bala fosse empurrada constantemente, ao longo de todo o cano do rifle, pela força média $\vec{F}_{R/B\ MED}$. Um valor típico do módulo dessa força é $F_{R/B\ MED} = 2.500\text{ N}$. Para ter uma ideia do que representa uma força de 2.500 N, considere que esse é o peso de uma pessoa que sobe na balança da farmácia e diz “meu peso é 250 kg”, ou seja, 2.500 N é o peso aproximado de uma pessoa cuja massa é 250 kg. É também o peso aproximado de 5 sacos de cimento juntos (cada saco possui massa de 50 kg). Trata-se de uma força imensa para um pequeno pedaço de metal.

Voltando à física forense, vamos estimar a força média que uma pessoa de massa M sofre quando bate no chão após cair verticalmente de um prédio de altura H . A pessoa que cai de uma altura H atinge uma velocidade de magnitude $\sqrt{2 g H}$ (na aproximação de queda livre). Portanto, adotando um eixo y vertical para cima, a pessoa chega ao chão com momento linear $\vec{p}_0 = M \sqrt{2 g H} (-\hat{y})$. A pessoa toca o chão e vai sendo freada até parar pela força resultante vertical, que é a resultante da força que o chão faz nela (força normal $\vec{\eta}(t)$) e do seu peso:

$$\vec{R}_y(t) = \vec{\eta}(t) - M g \hat{y}$$

Do teorema do impulso-momento linear aplicado à pessoa obtemos (note que $\vec{p}_f = \vec{0}$):

$$\int_{\Delta t} \vec{R}_y(t) dt = \Delta \vec{p}_y = \vec{0} - \vec{p}_0 = M \sqrt{2 g H} \hat{y}$$

sendo Δt o tempo que demora desde o instante em que a pessoa toca o chão até ela atingir o repouso. A pessoa sofre um impulso vertical para cima ($+\hat{y}$), produzido pelo contato com o chão. A força vertical resultante média na pessoa durante a colisão será dada por:

$$\vec{R}_{y\ MED} \Delta t = (\vec{\eta}_{MED} - (M g)_{MED} \hat{y}) \Delta t = \int_{\Delta t} \vec{R}_y(t) dt = M \sqrt{2 g H} \hat{y}$$

Portanto (note que o peso é constante e então $(Mg)_{MED} = Mg$):

$$\vec{\eta}_{MED} \Delta t - Mg \Delta t \hat{y} = M \sqrt{2gH} \hat{y}$$

Concluindo, a força média que o chão faz na pessoa durante o curto contato pessoa/chão é:

$$\vec{\eta}_{MED} = M \left(g + \frac{\sqrt{2gH}}{\Delta t} \right) \hat{y}$$

Vemos que durante o impacto da pessoa no chão a força normal média que o chão faz na pessoa é maior que o peso da pessoa, produzindo uma resultante e um impulso vertical para cima. O tempo de impacto Δt será determinado pela composição/dureza do chão (e da pessoa). Um chão duro, de concreto, por exemplo, implicará em um Δt pequeno (a pessoa bate e para) e em uma força média grande no impacto. Um chão macio, de areia, por exemplo, implicará em um Δt grande (a pessoa vai afundando na areia) e em uma força média pequena no impacto. Analogamente, se a pessoa cair em pé e ir dobrando as pernas “amortecendo” o choque, aumentará o tempo de impacto Δt e reduzirá a força $\vec{\eta}(t)$ e consequentemente $\vec{\eta}_{MED}$. Costumamos usar essa estratégia de dobrar as pernas quando saltamos e batemos no chão. Para uma altura muito grande de queda podemos desprezar a ação do peso sobre a pessoa durante o impacto com o chão e, nesse caso:

$$\vec{\eta}_{MED} = M \frac{\sqrt{2gH}}{\Delta t} \hat{y}$$

Pessoas mais pesadas e que caem de alturas maiores sofrem impactos mais intensos na queda.

Um raciocínio parecido pode ser usado para estimar a força média que uma pessoa de massa M sofre ao colidir seu carro que estava com velocidade $V_0 \hat{x}$ contra um obstáculo fixo (x é uma direção horizontal), como um muro, um poste ou uma árvore. A pessoa (dentro do carro) possuía momento linear $\vec{p}_0 = M V_0 \hat{x}$ e é levada ao repouso após a colisão, ou seja, $\vec{p}_f = \vec{0}$. Portanto, a força resultante média que atua na pessoa que estava no carro durante a colisão é dada por:

$$\vec{F}_{P MED} \Delta t = \vec{0} - \vec{p}_0 = -M V_0 \hat{x}$$

sendo Δt o tempo que demora desde o instante em que o carro toca o obstáculo fixo (uma árvore grande, por exemplo) até ele, e a pessoa, atingirem o repouso. O obstáculo “empurra” o carro e a pessoa na direção $-\hat{x}$.

Portanto:

$$\vec{F}_{P MED} = - \frac{M V_0}{\Delta t} \hat{x}$$

A colisão com o obstáculo produz na pessoa uma força, e um impulso, na direção $-\hat{x}$, opostos ao seu movimento. Novamente, o tempo Δt estará determinado pela constituição/dureza do objeto (no interior do carro) que colide com a pessoa e a leva ao repouso. Conseguimos entender aqui a importância de um sistema

como o *airbag*, de bolsa de ar inflável. Esse sistema se interpõe na frente da pessoa durante uma colisão, aumentando o tempo de impacto/frenagem (da pessoa) Δt e reduzindo a força de impacto (na pessoa) $\vec{F}_P(t)$ e, conseqüentemente, seu valor médio $\vec{F}_{P\text{MED}}$. O *airbag* não pode mudar a velocidade de colisão do carro (V_0) e nem a massa da pessoa (M), mas ele pode aumentar Δt e reduzir, portanto, $\vec{F}_{P\text{MED}}$.

Voltemos agora ao exemplo que demos anteriormente de uma partícula de massa m lançada do solo com velocidade de módulo V_0 inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. Mostramos que o impulso do peso no tempo total de queda (livre) é dado por:

$$\vec{J}_{m\vec{g}}(t_i, t_f) = -2 m V_0 \text{sen}(\theta) \hat{y}$$

Portanto, aplicando o teorema do impulso-momento linear nesse mesmo intervalo de tempo obtemos (adotando um eixo x na horizontal e um eixo y vertical para cima (no plano de \vec{V}_0):

$$m \vec{V}(t_f) - m \vec{V}(t_i) = \vec{J}_{m\vec{g}}(t_i, t_f) = -2 m V_0 \text{sen}(\theta) \hat{y}$$

Sabendo que a partícula partiu do chão com velocidade dada por:

$$\vec{V}(t_i) = V_0 \cos(\theta) \hat{x} + V_0 \text{sen}(\theta) \hat{y}$$

Concluimos que a partícula chega no solo com velocidade:

$$\vec{V}(t_f) = V_0 \cos(\theta) \hat{x} + V_0 \text{sen}(\theta) \hat{y} - 2 V_0 \text{sen}(\theta) \hat{y} = V_0 \cos(\theta) \hat{x} - V_0 \text{sen}(\theta) \hat{y}$$

que é o resultado que já havíamos demonstrado através das leis da cinemática da queda livre.

Note que o momento linear da partícula na direção x , dado por:

$$p_x = m V_x(t) = m V_0 \cos(\theta)$$

se conserva durante todo o movimento, porque não há força ou impulso na partícula nessa direção. Já a componente y do momento linear da partícula, dada por:

$$p_y = m V_y(t)$$

varia, devido a ação do peso da partícula.

A força resultante média que atuou na partícula durante sua queda livre foi:

$$\vec{R}_{MED} = \frac{\vec{J}_{m\vec{g}}(t_i, t_f)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m \vec{V}(t_f) - m \vec{V}(t_i)}{\Delta t} = -\frac{2 m V_0 \text{sen}(\theta) \hat{y}}{\Delta t}$$

Lembrando que o tempo total de queda é:

$$\Delta t = \frac{2 V_0}{g} \text{sen}(\theta)$$

Obtemos finalmente:

$$\vec{R}_{MED} = -\frac{2 m V_0 \operatorname{sen}(\theta) \hat{y}}{\frac{2 V_0}{g} \operatorname{sen}(\theta)} = -m g \hat{y}$$

Como não poderia deixar de ser, na queda livre a força resultante é o peso, que é uma força constante, e o valor médio de uma constante é a própria constante.

Esse exemplo da queda-livre não exhibe muita vantagem no uso do formalismo do impulso-momento linear, quando comparado ao uso dos conceitos de força e aceleração, mas exhibe a consistência do formalismo da mecânica.

Uma classe de problemas em que a aplicação do formalismo do impulso-momento linear se mostra bastante vantajosa é a que trata das colisões entre os corpos. As colisões têm em comum com as explosões o fato de serem processos rápidos e intensos. Uma colisão é basicamente um processo repentino de contato, entre dois ou mais corpos. Um jogo de sinuca, por exemplo, é basicamente uma sequência de colisões taco/bola e bola/bola. Nessas colisões, forças internas (considerando que o sistema é composto por todos os corpos envolvidos na colisão) intensas de contato atuam, modificando as velocidades e os momentos lineares dos corpos. Se pudermos desprezar o impulso das forças externas, porque essas forças são muito menores que as forças internas e porque a colisão é um evento de curta duração, então haverá a conservação do momento linear do sistema durante a colisão. Essa conservação fornece uma equação relacionando as velocidades dos corpos envolvidos nesse processo.

Matematicamente, em uma colisão, se:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_{EXT} dt = \vec{0}$$

(porque $R_{EXT} \cong 0$ e $\Delta t = t_f - t_i \cong 0$). Então:

$$\vec{P}(t_i) = \vec{P}(t_f)$$

Sendo t_i e t_f dois instantes imediatamente antes e imediatamente depois da colisão. Note, não estamos dizendo que em colisões o momento linear do sistema sempre se conserva. Essa conservação só ocorre mesmo em colisões em que as forças externas possuem impulso desprezível, o que é uma situação comum de acontecer.

Com relação ao comportamento da energia cinética do sistema, as colisões podem ser classificadas conforme mostrado na Tabela 4.1 abaixo. Basicamente, uma colisão entre corpos macroscópicos produz uma intensa vibração dos átomos que compõem esses corpos, vibração essa que se transmite para o interior dos corpos, aumentando suas energias internas. Os átomos passam a se mover mais intensamente após a colisão,

o que se reflete em um aumento nas temperaturas dos corpos que participam de uma colisão. Se a energia interna aumenta, segue que a energia cinética do sistema diminui: a energia cinética final é menor que a inicial. Essas colisões são chamadas de inelásticas. Idealmente, pode haver casos em que a “perda” de energia cinética é muito pequena, desprezível quando comparada à energia cinética inicial. Nesse caso, dizemos que a colisão é elástica: a energia cinética final é igual à inicial. A colisão entre duas bolas de sinuca é bem próxima de uma colisão elástica, mas há uma pequena “perda” de energia cinética. Dependendo do contexto, podemos desprezar a “perda” de energia cinética e considerar que uma dada colisão é elástica (por exemplo, quando as velocidades envolvidas na colisão são pequenas).

Classificação	Comportamento da variação da energia cinética		
Colisões elásticas	$\Delta K = K_f - K_i = 0$	A energia cinética se conserva, não há conversão de energia cinética em outras formas de energia.	Idealização para corpos macroscópicos. Comum no mundo das partículas elementares (elétrons, por exemplo).
Colisões inelásticas	$\Delta K = K_f - K_i < 0$	Parte da energia cinética do sistema é convertida em outras formas de energia, como, por exemplo, energia interna dos corpos (aumentando suas temperaturas).	Caso comum no mundo macroscópico (corpos com estrutura interna).

Tabela 4.1: Classificação das colisões com relação ao comportamento da energia cinética do sistema (formado por todos os corpos envolvidos na colisão).

Colisões elásticas mesmo, sem nenhuma variação na energia cinética do sistema, só ocorrem no mundo microscópico das partículas elementares. Por exemplo, quando dois elétrons colidem entre si. As colisões entre átomos são geralmente inelásticas, pois os átomos possuem uma estrutura interna: núcleo+elétrons. Em uma lâmpada fluorescente, por exemplo, átomos de um gás colidem entre si e absorvem uma parte da energia cinética inicial, que é usada para excitar os elétrons dentro dos átomos. Quando os elétrons decaem (se desexcitam), os átomos emitem luz. A energia luminosa emitida pela lâmpada fluorescente vem das colisões inelásticas entre os átomos do gás contido na lâmpada.

Dentro da classe de colisões inelásticas existem as colisões completamente inelásticas, que são aquelas em que os corpos que colidem se fundem durante a colisão, formando ao final da colisão uma massa única. Essas são as colisões mais simples de se analisar, pois apresentam menos incógnitas (velocidades) a serem determinadas.

Considere o seguinte exemplo de colisão completamente inelástica. Uma bola de massa de modelar, de massa m , é lançada contra uma parede fixa. A bola chega na parede com velocidade horizontal de módulo V_0 e, após a colisão, fica grudada na parede. A Figura 4.9 ilustra essa idéia.

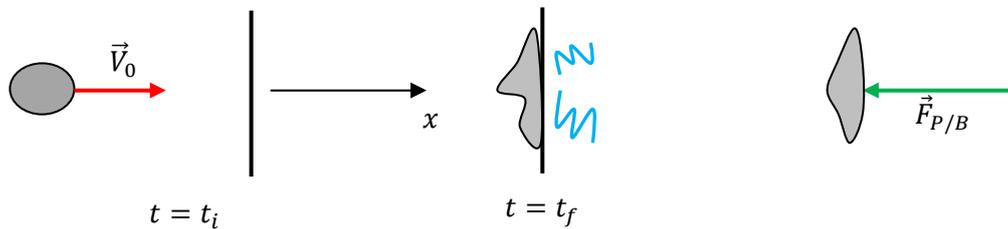


Figura 4.9: Uma bola de massa de modelar colide com uma parede e gruda. Durante a colisão atua na bola uma força (parede/bola) para a esquerda (variável no tempo), $\vec{F}_{P/B}$.

Quanto à energia cinética do sistema bola+parede, podemos ver que ela “desaparece” ($\Delta K < 0$), ou seja, a energia cinética inicial da bola é convertida em outras formas de energia, por exemplo, incrementando as energias internas da parede e da bola (que vão esquentar com a colisão).

Vamos analisar agora o momento linear. Vamos nos concentrar inicialmente apenas na bola: o sistema é a bola. Ao longo do eixo x :

$$\Delta p_B = p_B(t_f) - p_B(t_i) = 0 - m V_0 = -m V_0$$

Vemos que o momento linear do sistema (somente a bola) variou durante a colisão. Por que variou? Por causa da atuação de uma força externa no sistema. Se o sistema é apenas a bola, então a força que a parede faz na bola $\vec{F}_{P/B}$ é uma força externa no sistema. Estamos desprezando outras forças na bola, como o peso, o arraste com o ar etc. A única força que não podemos desprezar é $\vec{F}_{P/B}$, pois isso seria a mesma coisa que desprezar a existência da parede, o que não faria o menor sentido. Portanto, sabemos que:

$$\vec{R}_{EXT B} = \vec{F}_{P/B} = \frac{d}{dt} \vec{p}_B$$

Equivalentemente (ao longo de x):

$$\Delta p_B = p_B(t_f) - p_B(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} -F_{P/B} dt$$

Note que a componente x de $\vec{F}_{P/B}$, $-F_{P/B}$, é negativa no referencial que adotamos (eixo x) e por isso Δp_B também é negativo, ou seja, o vetor $\Delta \vec{p}_B$ aponta para a esquerda. De fato, a parede aplica na bola um impulso (um empurrão) para a esquerda, e esse impulso varia o momento linear da bola nesse mesmo sentido. Não há, portanto, conservação do momento linear, se o sistema é somente a bola.

Vamos estender o sistema, considerando agora que o sistema é a bola e a parede. Então, como a parede estava parada e continuou parada:

$$\Delta P_{B+P} = P_{B+P}(t_f) - P_{B+P}(t_i) = \{0 + 0\} - \{m V_0 + 0\} = -m V_0$$

Vemos novamente que o momento linear do sistema (bola+parede) variou durante a colisão. Por que variou? Por causa da atuação de forças externas no sistema. Quais forças? As forças que fixam a parede no lugar, forças teto/parede, piso/parede etc. Estamos desprezando outras forças externas na bola e na parede, como os pesos, o arraste com o ar na bola etc. As únicas forças que não podemos desprezar são as forças que fixam a parede no lugar, $\vec{F}_{PT/P}$ (força que o piso e teto fazem na parede), pois isso seria mesma coisa que considerar que a parede está solta e nesse caso ela não permaneceria em repouso com o impacto da bola.

Portanto, sabemos que:

$$\vec{R}_{EXT\ B+P} = \vec{F}_{PT/P} = \frac{d}{dt} \vec{P}_{B+P}$$

Equivalentemente (ao longo de x):

$$\Delta P_{B+P} = P_{B+P}(t_f) - P_{B+P}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} -F_{PT/P} dt$$

Note que a força que a parede faz na bola não aparece mais nessas equações porque ela passou a ser uma força interna ao sistema bola+parede. Seu efeito é cancelado pelo efeito da reação bola/parede. Note que a componente x de $\vec{F}_{PT/P}$, $-F_{PT/P}$, é negativa no referencial que adotamos (eixo x) e por isso ΔP_{B+P} também é negativo, ou seja, o vetor $\Delta \vec{P}_{B+P}$ aponta para a esquerda. De fato, no momento do impacto da bola, o teto e o piso onde a parede está apoiada aplicam na parede um impulso (um empurrão) para a esquerda, para segurar a parede, e esse impulso varia o momento linear do sistema bola+parede nesse mesmo sentido.

Podemos continuar essa idéia, expandindo o sistema, em busca de uma conservação do momento linear (como se isso fosse necessário). Por exemplo, poderíamos definir o sistema como sendo bola+parede+piso+teto. Mas o piso e o teto estão também fixos em alguma coisa e essa coisa faz força externa nesse sistema. Ainda assim não haveria conservação do momento linear.

Enfim, poderíamos pensar que a bola colide com a parede, com o que fixa a parede, com o que fixa o que fixa a parede etc. Enfim, poderíamos pensar na colisão da bola com o planeta Terra. Então considere o sistema bola+Terra. Há forças externas nesse sistema? Sim, as forças que o Sol faz na Terra e na bola, as forças que a Lua faz etc. Se desprezarmos essas forças, apenas como exercício, teríamos finalmente a conservação do momento linear do sistema, pois se:

$$\vec{R}_{EXT\ B+T} = \vec{0}$$

Então:

$$P_{B+T}(t_f) = P_{B+T}(t_i) \Rightarrow (m + M_T) V_f = m V_0 + 0$$

Estamos supondo que a Terra estava parada antes da colisão e M_T é a massa da Terra, que se move junto com a bola após a colisão (colisão completamente inelástica) com velocidade V_f ao longo de x . Portanto, com essa colisão a Terra (juntamente com a bola) adquiriria uma velocidade para a direita dada por:

$$V_f = \frac{m}{m + M_T} V_0$$

Sendo a massa da Terra da ordem de 10^{24} kg, dá para ver que essa velocidade é desprezível. Esse exemplo evidencia a importância da escolha do sistema, quando analisamos problemas sob a ótica do momento linear. Dependendo do sistema que focalizamos, pode haver ou não conservação do momento linear.

Considere agora o seguinte exemplo. Uma pessoa de massa M está em pé parada em um piso horizontal. Em um dado instante essa pessoa recebe uma bola de basquete de massa m que foi lançada para ela. Antes de ser recebida pela pessoa a bola estava se movendo com velocidade horizontal de módulo V_0 . A Figura 4.10 ilustra essa idéia. Vamos considerar várias possibilidades:

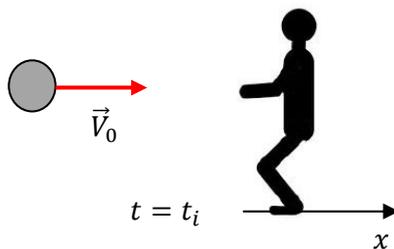


Figura 4.10: Uma bola de basquete é lançada para uma pessoa. Imediatamente antes de atingir a pessoa ($t = t_i$), a bola estava se movendo com velocidade horizontal $\vec{V}_0 = V_0 \hat{x}$.

a) a pessoa está usando sapatos que não escorregam no piso e ela agarra a bola, ficando ambos parados no lugar.

Note que esse caso é parecido com o que discutimos anteriormente, da colisão da bola de massa de modelar na parede. Trata-se de uma colisão completamente inelástica. Consideremos o sistema bola+pessoa (B+P). Então, ao longo de x :

$$\Delta P_{B+P} = P_{B+P}(t_f) - P_{B+P}(t_i) = \{0 + 0\} - \{m V_0 + 0\} = -m V_0$$

Vemos que o momento linear do sistema variou. O vetor variação do momento linear é

$$\Delta \vec{P}_{B+P} = -m V_0 \hat{x}$$

Portanto, o teorema do impulso-momento linear diz que:

$$\Delta \vec{P}_{B+P} = \vec{P}_{B+P}(t_f) - \vec{P}_{B+P}(t_i) = -m V_0 \hat{x} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_{EXT B+P} dt$$

Essa equação nos diz que houve um impulso de força externa no sistema bola+peessoa ao longo do eixo x , apontando para a esquerda. As forças externas que atuam no sistema bola+peessoa são o peso da bola, o peso da peessoa, a normal do piso na peessoa e a força de atrito estático do piso na peessoa. Os pesos e normal se cancelam mutuamente (além de estarem ao longo de y) e, portanto:

$$\vec{R}_{EXT\ B+P} = \vec{F}_{AP/P}^{(E)}$$

$\vec{F}_{AP/P}^{(E)}$ é a força de atrito estático do piso na peessoa. De fato, ela é horizontal (ao longo de x) e aponta para a esquerda, porque a peessoa, ao agarrar a bola, tem tendência de escorregar no piso para a direita. Com esse raciocínio entendemos a causa da variação do momento linear do sistema bola+peessoa, qual seja, a ação (o impulso) da força de atrito estático piso/peessoa sobre a peessoa. Quanto à energia cinética inicial da bola, foi totalmente convertida em outras formas de energia (colisão inelástica).

b) a peessoa está usando patins que escorregam facilmente no piso e ela agarra a bola. Peessoa e bola se movem juntos após a colisão.

Trata-se de novamente de uma colisão completamente inelástica. Mas agora, considerando o sistema bola+peessoa, a força de atrito do piso na peessoa não existe mais e, portanto, o sistema possui resultante externa nula. Então, ao longo de x :

$$\Delta P_{B+P} = P_{B+P}(t_f) - P_{B+P}(t_i) = (m + M)V_f - \{m V_0 + 0\} = 0$$

V_f é a velocidade comum da peessoa e da bola ao longo de x logo após a colisão.

Usamos acima a conservação do momento linear do sistema. De fato, o teorema do impulso-momento linear diz que:

$$\Delta \vec{P}_{B+P} = \vec{P}_{B+P}(t_f) - \vec{P}_{B+P}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_{EXT\ B+P} dt = \vec{0}$$

Essa equação nos diz que não houve impulso de força externa no sistema bola+peessoa durante a colisão, o que leva à conservação do momento linear. Note que os pesos e a normal na peessoa se cancelam mutuamente. Após a colisão, a peessoa e a bola se moverão ao longo de x para a direita com a velocidade:

$$V_f = \frac{m}{m + M} V_0 = \frac{1}{1 + M/m} V_0$$

Vemos que se a peessoa tiver muito mais massa que a bola ($M/m \gg 1$), a velocidade final do sistema será pequena. Caso contrário, se a bola for muito mais pesada, então $V_f \cong V_0$. Não tem como valer $V_f > V_0$. Isso violaria a ideia de conservação do momento linear \vec{P}_{B+P} .

Quanto à energia cinética inicial da bola, uma parte foi convertida em outras formas de energia (energias internas). De fato:

$$\Delta K = K(t_f) - K(t_i) = \frac{(M+m)}{2} \left(\frac{m}{m+M} V_0 \right)^2 - \frac{m}{2} V_0^2 = -\frac{M m}{m+M} \frac{V_0^2}{2}$$

c) a pessoa está usando patins que escorregam facilmente no piso e ela rebate a bola. A bola é rebatida para a esquerda com velocidade horizontal de módulo V_B .

Novamente o sistema pessoa+bola possui resultante externa nula. Então, no eixo x:

$$\Delta P_{B+P} = P_{B+P}(t_f) - P_{B+P}(t_i) = \{-mV_B + M V_P\} - \{m V_0 + 0\} = 0$$

V_P é a velocidade da pessoa ao longo de x logo após a colisão. Note que o sinal de $-$ foi introduzido em $-mV_B$ por que o vetor \vec{V}_B está para a esquerda (a bola é rebatida para a esquerda).

Após a colisão, a pessoa se moverá ao longo de x com a velocidade

$$V_P = \frac{m}{M} (V_0 + V_B)$$

Sendo V_P positivo, significa que a pessoa vai se mover para a direita, como não poderia deixar de ser. Vemos que a velocidade da pessoa depende da razão entre as massas, da velocidade de chegada e da velocidade de rebatida da bola. Quanto maior a velocidade de rebatida, mais rapidamente a pessoa recua.

Quanto à variação na energia cinética vale a equação:

$$\Delta K = K(t_f) - K(t_i) = \left\{ \frac{m}{2} V_B^2 + \frac{M}{2} \left(\frac{m}{M} (V_0 + V_B) \right)^2 \right\} - \frac{m}{2} V_0^2$$

Essa variação pode ter qualquer sinal, por que a pessoa que rebate a bola possui um manancial de energia interna que pode ser convertido em energia cinética do sistema bola+pessoa, de acordo com sua vontade. Se a pessoa estivesse morta, então valeria $\Delta K < 0$.

Sendo o momento linear um vetor, cada uma de suas componentes pode ser conservada ou não, independentemente uma da outra. Por exemplo, considere uma bolinha de borracha de massa m que rebate no chão horizontal e rígido, exatamente em cima de uma poça de óleo. A bolinha chega ao chão com velocidade $\vec{V}_0 = a \hat{x} - b \hat{y}$ e sai do chão com velocidade $\vec{V}_f = a \hat{x} + b \hat{y}$. Veja a Figura 4.11.

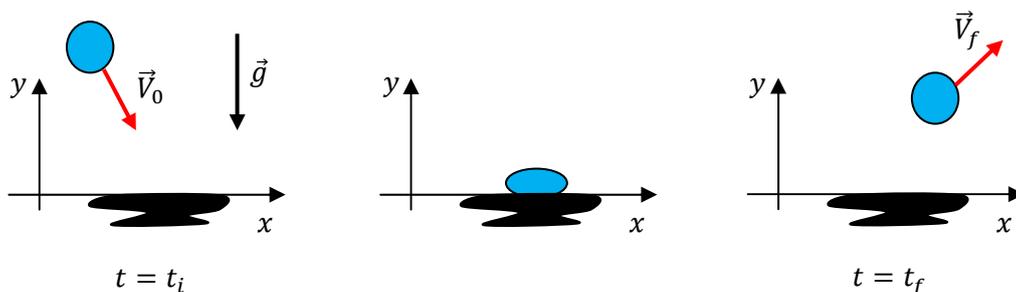


Figura 4.11: Uma bolinha de borracha quica em uma poça de óleo.

Note então que:

$$\Delta p_{Bx} = p_{Bx}(t_f) - p_{Bx}(t_i) = ma - ma = 0$$

O momento linear da bolinha ao longo x, paralelo ao chão, se conservou. Isso porque a resultante das forças externas na bola nessa direção é nula, por causa da ausência de atrito entre o chão e a bola (por isso supusemos a presença do óleo). De fato:

$$R_{EXT\ Bx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} p_{Bx} = 0$$

Ou, equivalentemente:

$$\Delta p_{Bx} = \int_{t_i}^{t_f} R_{EXT\ Bx} dt = 0$$

Já para a componente vertical do momento linear da bolinha vale:

$$\Delta p_{By} = p_{By}(t_f) - p_{By}(t_i) = mb - (-mb) = 2mb$$

Houve, portanto, variação no momento linear vertical da bolinha. Ela recebeu um impulso nessa direção durante a colisão. Qual a força que realizou esse impulso? As forças verticais que atuam na bolinha quando ela entra em contato com o chão rígido são a força normal $\vec{\eta} = \eta \hat{y}$ (que deve ser dependente do tempo, $\eta = \eta(t)$) e o peso (constante) da bolinha $-mg \hat{y}$. Portanto:

$$R_{EXT\ By} = \eta(t) - mg = \frac{d}{dt} p_{By}$$

e ainda:

$$\Delta p_{By} = \int_{t_i}^{t_f} [\eta(t) - mg] dt = 2mb$$

A Figura 4.12 abaixo mostra um gráfico das forças que atuam na bolinha na direção y durante o quique no chão. O peso é constante (reta verde), e atua sempre, estando a bolinha em contato com o chão ou não. Já a força normal (curva vermelha) só existe no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$. Note que a força normal supera o valor do peso, para produzir uma resultante e um impulso para cima igual a $2mb$. Fora do intervalo $[t_i, t_f]$ a bolinha está em queda livre.

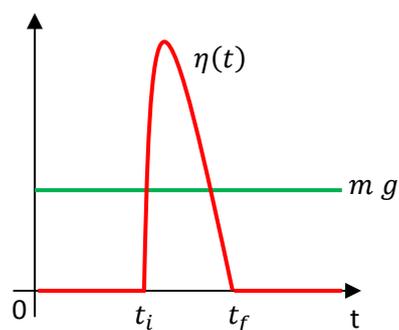


Figura 4.12: Esboço do gráfico dos módulos das forças verticais que atuam em uma bolinha que quica no chão. Curva vermelha: força normal; reta verde: peso.

Como a força média é o impulso da força dividido pelo intervalo de tempo obtemos:

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\eta(t)}{\Delta t} - \frac{m g}{\Delta t} \right] dt = \frac{2 m b}{\Delta t} \Rightarrow \eta_{MED} - m g = \frac{2 m b}{\Delta t}$$

Portanto, vemos que a força normal média durante o quique da bolinha no chão supera o peso da bolinha (note que a média do peso é o próprio peso, pois trata-se de uma força constante no tempo):

$$\eta_{MED} = m g + \frac{2 m b}{\Delta t}$$

Neste exemplo idealizamos uma colisão elástica da bolinha, pois:

$$\Delta K = K(t_f) - K(t_i) = \frac{m}{2}(a^2 + b^2) - \frac{m}{2}(a^2 + b^2) = 0$$

Como último exemplo de colisão, consideremos a colisão elástica entre duas bolas que deslizam (sem girar) em uma superfície horizontal sem atrito. A bola 1, de massa M_1 estava viajando com velocidade horizontal de módulo V_0 e colide com a bola 2, de massa M_2 , que estava inicialmente parada. Para simplificar, vamos considerar que a colisão é frontal, ou seja, que após a colisão as bolas continuam se movendo na mesma direção do movimento inicial da bola 1, que chamaremos de x . Trata-se, portanto, de uma colisão unidimensional. A Figura 4.13 ilustra essa idéia.

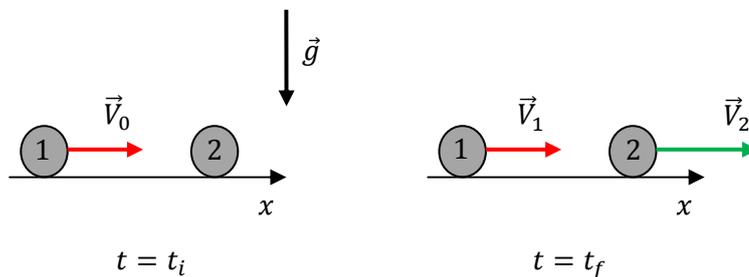


Figura 4.13: Uma colisão unidimensional entre duas bolas.

Consideremos o sistema bola 1 + bola 2. Ao longo de x , como não há atrito entre o piso e as bolas, o momento linear se conserva:

$$P_{1+2x}(t_f) = P_{1+2x}(t_i) \Rightarrow M_1 V_1 + M_2 V_2 = M_1 V_0$$

Sendo a colisão elástica, por hipótese, a energia cinética também se conserva:

$$K_{1+2}(t_f) = K_{1+2}(t_i) \Rightarrow M_1 \frac{V_1^2}{2} + M_2 \frac{V_2^2}{2} = M_1 \frac{V_0^2}{2}$$

Portanto, definindo, por conveniência, a razão entre as massas r :

$$r \equiv \frac{M_2}{M_1}$$

As equações de conservação acima ficam:

$$V_1 + r V_2 = V_0 \Rightarrow V_0 - V_1 = r V_2$$

$$V_1^2 + r V_2^2 = V_0^2 \Rightarrow V_0^2 - V_1^2 = r V_2^2$$

Há várias maneiras de se resolver essas equações algébricas, para determinar V_1 e V_2 . Por exemplo, a segunda equação pode ser simplificada da seguinte forma:

$$V_0^2 - V_1^2 = r V_2^2 \Rightarrow (V_0 + V_1)(V_0 - V_1) = r V_2^2$$

Usando a primeira equação obtemos:

$$V_0 + V_1 = V_2$$

Somando essa equação com a primeira obtemos então:

$$V_2 = \frac{2 V_0}{1 + r}$$

Segue que:

$$V_1 = \frac{1 - r}{1 + r} V_0$$

Consideremos, para ilustrar, alguns casos particulares:

a) Duas bolas iguais, $M_1 = M_2$ e $r = 1$. Esse é o caso, por exemplo, de duas bolas de sinuca, que são praticamente idênticas. Nesse caso:

$$V_1 = 0 \text{ e } V_2 = V_0$$

Vemos que, se uma bola de sinuca colide frontalmente com outra e a colisão é elástica, logo após a colisão a bola incidente fica parada e a bola alvo que estava parada passa a se mover com a mesma velocidade da bola incidente. Essa é uma jogada corriqueira para aqueles jogadores bem treinados na sinuca. A rotação das bolas complica bastante o jogo de sinuca real, mas não altera o fato de que o momento linear se conserva nas colisões entre bolas (a rotação altera a equação da energia, que tem que levar em conta as energias cinéticas de rotação).

b) $M_1 \gg M_2$ e $r \rightarrow 0$. Esse é o caso, por exemplo, de um caminhão colidindo com uma bicicleta, ou de uma bola de boliche colidindo com um pino. Nesse caso:

$$V_1 \rightarrow V_0 \text{ e } V_2 \rightarrow 2 V_0$$

Vemos que se um caminhão colide com uma bicicleta e a colisão é elástica, o caminhão continua se movendo como se nada tivesse acontecido e a bicicleta é arremessada para frente com o dobro da velocidade do caminhão. Analogamente, no jogo de boliche podemos observar a velocidade alta que o pino adquire logo após receber o impacto da bola.

c) $M_1 \ll M_2$ e $r \rightarrow \infty$. Esse é o caso, por exemplo, de uma bicicleta colidindo com um caminhão, ou de uma bolinha de borracha colidindo com o planeta Terra. Nesse caso:

$$V_1 \rightarrow -V_0 \text{ e } V_2 \rightarrow 0$$

Vemos que se uma bicicleta colide com um caminhão e a colisão é elástica, a bicicleta rebate (note o sinal negativo na velocidade) com a mesma velocidade com que bateu (em módulo) e o caminhão continua parado como se nada tivesse acontecido. Uma bolinha de borracha que quica no chão também não é capaz de mover o planeta Terra.

Na prática esses exemplos que mencionamos não constituiriam colisões elásticas de fato. Sempre há alguma perda de energia cinética. Mas, sendo a perda de energia muito menor que as próprias energias envolvidas na colisão, comportamentos bem próximos dos previstos aqui podem ser observados no mundo real. O jogo de sinuca é um exemplo em que as colisões entre as bolas são bem próximas de colisões elásticas (bem próximas, mas não exatamente elásticas). Note que se as bolas estivessem rolando (ao invés de deslizando), ou seja, girando ao mesmo tempo em que estão se deslocando, o momento linear continuaria conservando, na ausência de forças externas. O giro das bolas não faz com que o momento linear deixe de ser conservado, na ausência de forças externas. A adição de rotação no movimento das bolas apenas torna seus movimentos após a colisão mais complexos e, portanto, mais difíceis de prever. Do ponto de vista computacional, teríamos que levar em conta a energia cinética de rotação (que estudaremos em breve) na equação da conservação da energia cinética.

Vimos no capítulo 1 que a velocidade \vec{V} é relativa, ou seja, é sempre definida em relação a algum ponto de referência (um referencial), por exemplo, o solo. Portanto, a energia cinética $K = M V^2/2$ também é relativa e a afirmação de que uma colisão é elástica ($K_i = K_f$) para velocidades definidas em um dado referencial não necessariamente garante que essa colisão também seja elástica para essas mesmas velocidades medidas em outro referencial ($K'_i = K'_f$). Pode-se mostrar que a propriedade de uma colisão em um dado sistema ser elástica é independente do referencial se o momento linear do sistema for também conservado (ver Ref. *Connection between conservation of energy and conservation of momentum*, C. G. Adler, American Journal of Physics 44 (1976)). Esse é o contexto da colisão elástica que consideramos anteriormente.

4.4 Centro de massa

Nos capítulos anteriores utilizamos a ideia de modelar qualquer corpo, ou sistema de partículas, através de uma partícula apenas, contendo toda a massa do corpo e submetida às forças externas que atuam no corpo. Um sistema de N partículas, cada uma de massa m_i (com $i = 1, \dots, N$) é representado através de uma partícula apenas, de massa $M = \sum_i m_i$. A pergunta que fica é: onde devemos posicionar essa partícula, de tal forma a tornar essa descrição (modelo) mais precisa. Considere o exemplo ilustrado na Figura 4.14. Um corpo possui a forma de um triângulo de massa M e está submetido (apenas) às duas forças externas \vec{F}_1 e \vec{F}_2 . Queremos representar esse corpo através de uma partícula apenas, um partícula de massa M submetida às forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

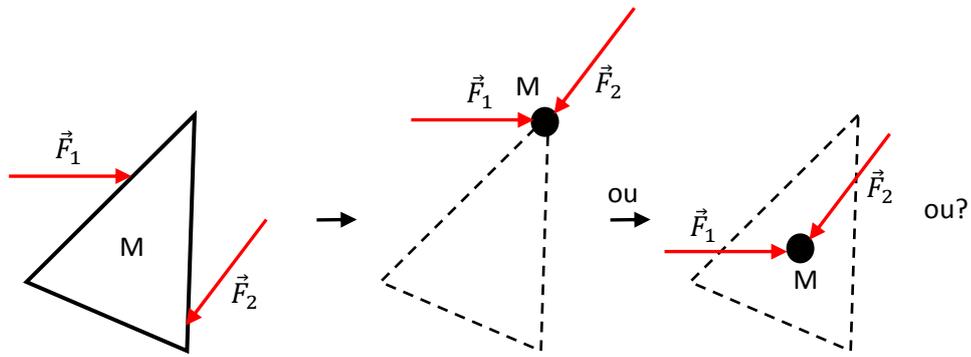


Figura 4.14: Um corpo qualquer pode ser representado por uma partícula concentrando toda sua massa e todas as forças externas que atuam nele. Onde devemos posicionar essa partícula para tornar a descrição (o modelo) fisicamente correta?

Em que posição representamos essa partícula? Em um vértice do triângulo? Mais ou menos no meio? Enfim, há uma ambigüidade nessa forma de modelar o sistema através de uma partícula. Onde está posicionada essa partícula? Essa ambigüidade é eliminada através do conceito de centro de massa (CM) que definiremos em seguida.

Essa questão pode ser colocada também nos seguintes termos: para uma partícula a segunda lei de Newton assume duas formas equivalentes:

$$\vec{R} = m \vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{R} = \frac{d}{dt} \vec{p}$$

sendo $\vec{p} = m \vec{V}$ o momento linear da partícula. Essas equações são equivalentes, porque:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} m \vec{V} = m \frac{d}{dt} \vec{V} = m \vec{a}$$

Para um sistema de partículas, conforme já mostramos em nossa discussão anterior, a segunda lei de Newton assume a forma:

$$\vec{R}_{EXT} = \frac{d}{dt} \vec{P}$$

sendo $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_i$ o momento linear do sistema.

A pergunta que vamos responder agora é: é possível escrever a segunda lei de Newton para um sistema de partículas também na forma:

$$\vec{R}_{EXT} = M \vec{a}_P$$

sendo $M = \sum_i m_i$ a massa do sistema e \vec{a}_P a aceleração de um ponto P associado a esse sistema? Se a resposta for sim, então devemos definir adequadamente o ponto P que aparece nessa equação. O ponto P é a posição em que devemos concentrar a massa e as forças, para descrever/modelar o movimento do sistema como se ele fosse uma partícula apenas. Vamos mostrar que o ponto P existe e é o centro de massa do sistema de partículas.

O centro de massa é uma posição média de uma distribuição de massa. Uma distribuição de massa pode ser definida em termos das partículas que compõem um corpo/sistema. Os corpos que observamos no dia-a-dia são objetos extensos, compostos de muitos átomos. Um átomo é basicamente uma bolinha de raio igual a 10^{-10} m (1 angstrom) e a idéia de chamá-lo de partícula não parece muito absurda (apesar do átomo não ser uma partícula no sentido matemático, de um objeto pontual, mas sim no sentido de que se ele fosse menor não faria muita diferença). Nesse sentido, um corpo macroscópico é basicamente um sistema, ou conjunto, de N partículas, com $N \cong 10^{24}$ (o número de Avogadro). Quando um corpo se move, todas as partículas que compõem esse corpo se movem juntas, cada partícula tendo um movimento próprio, diferente, em princípio, dos movimentos das outras partículas. Quanto à rigidez, podemos distinguir dois tipos de corpos:

1. Corpo rígido: um corpo que, enquanto se move, mantém sua forma e tamanho inalterados. Trata-se de uma idealização, pois todos os corpos reais, por mais duros que possam parecer, aceitam pequenas deformações. Em um corpo rígido as distâncias entre as partículas que o compõem são constantes. A aproximação de corpo rígido é usada frequentemente quando não queremos levar em conta as mudanças na forma/tamanho do corpo ao longo do seu movimento.
2. Corpo não-rígido, ou deformável: todos os corpos reais são deformáveis. Um caso extremo é o dos corpos fluidos, como uma porção de um líquido ou de um gás, por exemplo.

Como cada partícula possui uma massa, podemos pensar também que um corpo é uma distribuição de massa no espaço. Uma bola de sinuca, por exemplo, é uma distribuição esférica de massa (algo próximo de um corpo rígido). Toda distribuição de massa possui um centro, chamado de “centro de massa”, ou abreviadamente CM. O CM de um corpo é o centro da distribuição de massa desse corpo. Enquanto um corpo se move, o CM se move junto. Se pudermos prever como se move o CM de um corpo, teremos uma ferramenta para acompanhar o movimento desse corpo. Vamos mostrar que:

O CM de um corpo de massa M se move como se houvesse nele uma partícula de massa M , submetida às forças externas que atuam no corpo. Mostraremos essa propriedade usando o conceito de momento linear.

A idéia básica é que um corpo é uma distribuição de N massas pontuais (partículas): a partícula i possui massa m_i e está localizada na posição \vec{r}_i (em relação a uma referência arbitrária “O”). O CM desse corpo está na posição \vec{r}_{CM} (em relação à mesma referência “O”) dada por:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

sendo $M = \sum_{i=1}^N m_i$ a massa do corpo. Note que \vec{r}_{CM} é uma média ponderada das posições das partículas. O peso da posição \vec{r}_i na média é a razão m_i/M , pois:

$$\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{M} \right) \vec{r}_i$$

Dessa forma, se na posição \vec{r}_j existe uma partícula de massa m_j grande, então o valor de \vec{r}_{CM} se aproximará do valor de \vec{r}_j : o CM está mais próximo de onde tem mais massa. A Figura 4.15 ilustra essa idéia.

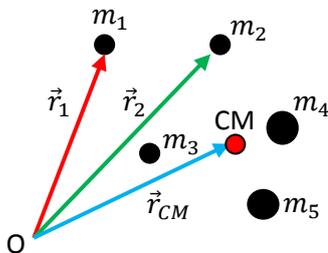


Figura 4.15: Um corpo composto de apenas $N=5$ partículas. As bolinhas maiores representam partículas de massas maiores. O CM desse corpo estará localizado em um ponto de espaço de posição \vec{r}_{CM} (bolinha vermelha), que estará mais próximo das partículas mais “pesadas” (ou de onde tem mais partículas). Note que não existe nenhuma partícula em \vec{r}_{CM} (seta azul), ou seja, no ponto vermelho.

É interessante notar que o centro de massa de um corpo é apenas um ponto no espaço. Não há necessariamente massa no centro de massa. O CM pode estar no espaço vazio. Ele é apenas um ponto.

Para ilustrar, vamos imaginar um sistema formado por apenas $N=2$ partículas, de massas m_1 e m_2 distantes L uma da outra. Esse sistema pode ser chamado de haltere (como esses usados em academias de ginástica), um haltere cuja haste que une as duas partículas possui comprimento L e massa desprezível. Onde está o CM desse corpo? A Figura 4.16 ilustra esse corpo e um referencial conveniente para representar as posições das duas partículas. Nesse referencial:

$$\vec{r}_1 = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = L \hat{x}$$

Portanto, o CM desse haltere está na posição:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{m_1 \vec{0} + m_2 L \hat{x}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L \hat{x}$$

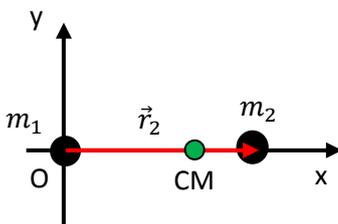


Figura 4.16: Um haltere ideal formado por duas partículas e uma haste leve de comprimento L . O CM desse haltere (bolinha verde) está em algum lugar entre as duas partículas.

Ou seja, o CM do haltere está sobre o eixo x , em um ponto intermediário entre as duas partículas. Vejamos os seguintes casos particulares:

1. $m_1 = m_2 \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{L}{2} \hat{x}$. Se as massas são iguais, o CM fica no meio delas, pois, por simetria, aí está o centro da distribuição de massa.
2. $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \vec{r}_{CM} \rightarrow \vec{0}$. Se a massa na origem é muito maior, o CM vai para a origem.
3. $m_1 \ll m_2 \Rightarrow \vec{r}_{CM} \rightarrow L \hat{x}$. Se a massa na extremidade $x=L$ é muito maior, o CM vai para essa extremidade.

Não temos o objetivo de calcular aqui a posição do CM de vários corpos. Hoje em dia essa tarefa pode ser realizada facilmente utilizando-se programas de computadores dedicados, como o AUTOCAD. Veremos mais adiante, no capítulo sobre equilíbrio estático, que é possível também se determinar experimentalmente a posição do CM de um corpo de forma arbitrária. Mesmo assim, um bom engenheiro, por exemplo, sempre deve conhecer o conceito e ser capaz de calcular ou mesmo estimar a posição do CM de corpos de formas mais simples.

O exemplo do haltere dado acima evidencia as propriedades básicas do CM: a) se há um eixo/plano de simetria no corpo (um eixo/plano que divide o corpo em duas metades iguais), o CM fica sobre esse eixo/plano de simetria; b) o CM sempre fica mais próximo de onde tem mais massa. Veremos que, para diversos aspectos (mas não todos), tudo funciona como se toda a massa do corpo estivesse concentrada no centro de massa. De fato, para o próprio cálculo da posição do CM de um corpo formado por várias partes diferentes, podemos considerar que a massa de cada parte está toda concentrada no CM dessa parte (princípio da decomposição), reduzindo o problema a um conjunto de partículas.

Considere o exemplo de uma placa retangular de lados L e $2L$ formada pela união de duas placas quadradas de mesmo tamanho e mesma espessura, uma feita de ferro e outra feita de alumínio. A Figura 4.17 ilustra essa idéia. Vamos calcular a posição do CM dessa placa. O CM de cada placa quadrada está no centro da placa, pois há dois (pelo menos) eixos de simetria que se cruzam no centro da placa quadrada. Portanto, podemos pensar que cada placa quadrada é uma partícula no centro dessa placa: a placa de ferro uma partícula de massa m_F e a placa de alumínio uma partícula de massa m_A .

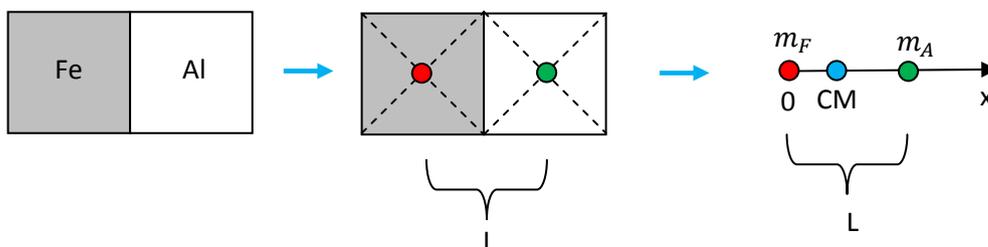


Figura 4.17: Uma placa retangular formada pela união de duas placas quadradas de lado L , uma de ferro e outra de alumínio. O CM de cada placa quadrada está no centro da placa (por simetria). O CM da placa retangular (bolinha azul) está mais próximo do centro da placa de ferro, porque o ferro é mais denso que o alumínio.

Assim, a placa retangular possui uma distribuição de massa equivalente a um haltere: duas partículas unidas por uma haste hipotética de comprimento L e de massa desprezível. Já discutimos esse exemplo anteriormente e, portanto, adotando o eixo x mostrado na figura, com origem no centro da placa de ferro:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_A}{m_A + m_F} L \hat{x}$$

Como o ferro é mais denso que o alumínio ($\rho_F \cong 7,9 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_A \cong 2,7 \text{ g/cm}^3$) esperamos que o CM da placa retangular esteja mais próximo do centro da placa quadrada feita de ferro. De fato:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_A}{m_A + m_F} L \hat{x} = \frac{\rho_A L^2}{\rho_A L^2 + \rho_F L^2} L \hat{x} = \frac{\rho_A}{\rho_A + \rho_F} L \hat{x} \cong \frac{2,7}{2,7 + 7,9} L \hat{x} \cong 0,25 L \hat{x}$$

Para $L = 1 \text{ m}$, por exemplo, o CM da placa estará 25 cm à direita do centro da placa de ferro.

É interessante frisar que o centro de massa é um ponto no espaço e, portanto, não precisa ter massa no centro de massa. Objetos com formas esquisitas, curvas e vazadas, como uma ferradura, um bumerangue ou uma banqueta, por exemplo, têm seus centros de massa em um ponto exterior a eles, onde não há massa, conforme ilustrado na Figura 4.18 abaixo.

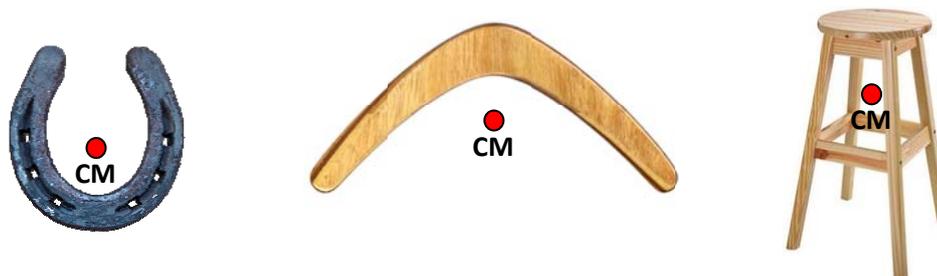


Figura 4.18: Três exemplos de corpos cujos centros de massa estão em pontos externos, onde não há de fato nenhuma massa: ferradura, bumerangue e banqueta. O CM de cada corpo está na bolinha vermelha, que representa um simples ponto no espaço.

Vamos partir agora para o estudo das propriedades do movimento do centro de massa. Começemos derivando a posição do CM em relação ao tempo:

$$M \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \Rightarrow M \vec{V}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i$$

Sendo \vec{V}_i a velocidade da partícula i e \vec{V}_{CM} a velocidade do CM. Note que a expressão $M \vec{V}_{CM}$ é a expressão do momento linear de uma partícula, uma partícula localizada no CM e de massa M . Além disso, o momento linear do sistema é a soma dos momentos lineares de cada partícula, ou seja:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P}$$

Portanto, concluímos que:

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM}$$

Ou seja, o momento linear de um sistema de partículas (um corpo qualquer) de massa M é igual ao momento linear de uma partícula apenas, uma partícula virtual de massa M localizada no CM desse sistema. Dito de outra forma: o momento linear de um corpo está, para todos os efeitos, concentrado em uma partícula virtual de massa M localizada em seu CM.

Derivando essa última equação em relação ao tempo obtemos:

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{R}_{EXT} = M \vec{a}_{CM}$$

Essa última igualdade:

$$\vec{R}_{EXT} = M \vec{a}_{CM}$$

é exatamente a segunda lei de Newton aplicada a uma partícula de massa M localizada no CM do sistema. Conclusão: o CM de um sistema de partículas (um corpo qualquer) de massa M se move com se houvesse nele uma partícula de massa M , submetida a todas as forças externas que atuam no sistema. Essa propriedade dá um outro sentido ao conceito de partícula. Ela diz que todo corpo de massa M possui um ponto associado a ele que se comporta exatamente como se houvesse nele uma partícula de massa M submetida às mesmas forças externas que atuam no corpo. As forças externas que atuam no corpo atuam equivalentemente nessa partícula virtual e definem o movimento desse ponto. Esse ponto é o CM do corpo. Se pretendemos estudar o movimento de um corpo, portanto, podemos começar estudando o movimento do CM desse corpo, afinal, onde o corpo vai o CM dele vai atrás.

Considere o seguinte exemplo simples: Uma ferradura de massa M é lançada para cima, com uma velocidade oblíqua em relação ao piso horizontal. Queremos saber onde a ferradura vai cair. Poderíamos simplesmente desprezar o tamanho da ferradura, considerar que ela é uma partícula de massa M , localizada em uma posição arbitrária próxima à ferradura, e aplicar a segunda lei de Newton para essa partícula hipotética:

$$\vec{R} = M \vec{a}$$

Mas, agora podemos ter uma visão diferente e mais precisa desse problema. Podemos nos concentrar apenas no movimento do CM da ferradura, afinal onde a ferradura cair, o CM dela vai cair também. Podemos acompanhar o movimento do CM da ferradura analisando o movimento de uma partícula (virtual) com a massa da ferradura, localizada no CM da ferradura e submetida às forças externas que atuam nela. Se desprezarmos o atrito com o ar, a única força externa que atua na ferradura durante seu movimento no espaço é o peso da ferradura. Portanto, o CM dessa ferradura se moverá de acordo com a seguinte equação:

$$\vec{R}_{EXT} = M\vec{g} = M\vec{a}_{CM} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \vec{g}$$

Concluindo: o CM da ferradura descreve uma parábola no espaço, que já sabemos calcular, conforme vimos no capítulo de cinemática. A Figura 4.19 que segue ilustra como seria um movimento da ferradura, supondo (para simplificar) que o plano da ferradura coincide com o plano da velocidade inicial da ferradura. Nesse caso a ferradura se move nesse plano, que é o plano da órbita parabólica do CM. Os outros pontos/partículas que compõem a ferradura rodopiam em torno do CM, de uma forma que não pretendemos analisar aqui.

O que fica evidente na Figura 4.19 é que se pensarmos a ferradura como uma partícula de massa M localizada no ponto P mostrado (bolinha azul), um ponto na extremidade esquerda da ferradura, nossa descrição do movimento da ferradura, representado pelo movimento desse ponto, cometerá o erro de considerar que:

$$\vec{R}_{EXT} = M\vec{g} = M\vec{a}_P \Rightarrow \vec{a}_P = \vec{g}$$

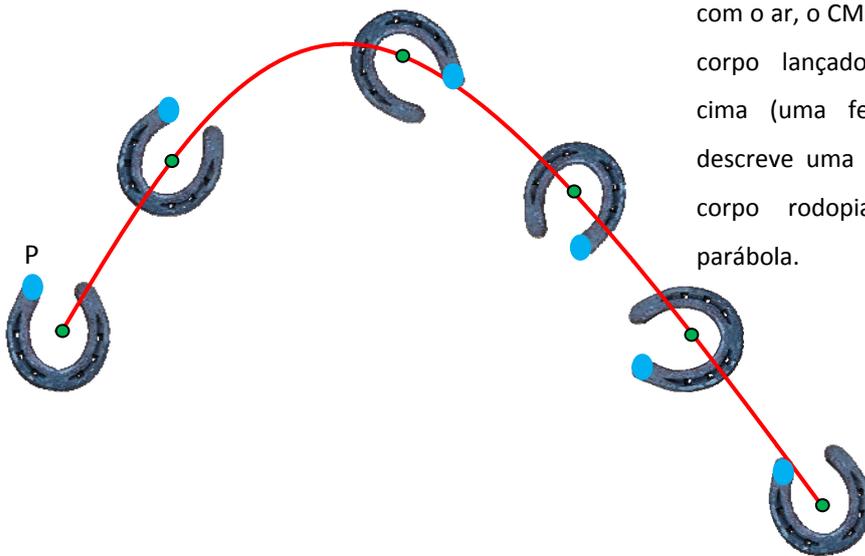
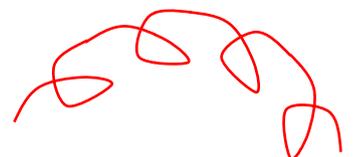


Figura 4.19: Na ausência de atrito com o ar, o CM (bolinha verde) de um corpo lançado obliquamente para cima (uma ferradura nesse caso) descreve uma parábola, enquanto o corpo rodopia em torno dessa parábola.

Essa equação não é verdadeira, pois podemos ver que o ponto P tem uma trajetória bem diferente de uma parábola. A trajetória de P parece mais uma mola de caderno amassada contra o plano do papel (uma espiral no plano). Algo como esboçado na Figura ao lado. Fica claro então que a trajetória de P não é determinada apenas pelas forças externas que atuam na ferradura, ela é determinada também pelas forças internas, que atuam dentro da ferradura, forças de coesão, por exemplo. Alguns exemplos de trajetórias esquisitas de pontos P de um martelo em queda livre podem ser vistos na Ref. *How to determine the centre of mass of bodies from image*



modelling, Marco A. Dias et al, *Physics Education* **51** (2016) 025001. Nessa referência podemos ver que à medida que P se aproxima do CM do martelo, a trajetória de queda livre de P se aproxima de uma parábola.

Se vamos descrever o movimento de um corpo através de um modelo de partícula, então devemos escolher $P=CM$, ou seja, localizar a partícula (virtual) no CM do corpo.

Como um segundo exemplo, considere uma granada de massa M que é lançada obliquamente para cima. Suponha que em algum instante da queda a granada exploda, se dividindo em centenas de fragmentos. A explosão é um processo regido por forças internas. Portanto, para o CM da granada, tanto antes, quanto durante, quanto depois da explosão vale:

$$\vec{R}_{EXT} = M\vec{g} = M\vec{a}_{CM} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \vec{g}$$

Logo, o CM da granada descreve uma parábola no espaço. Caso você calcule o CM de todos os fragmentos da granada depositados no chão, vai ver que esse CM está no mesmo lugar que ele estaria se a granada não tivesse explodido. A Figura 4.20 ilustra essa idéia.

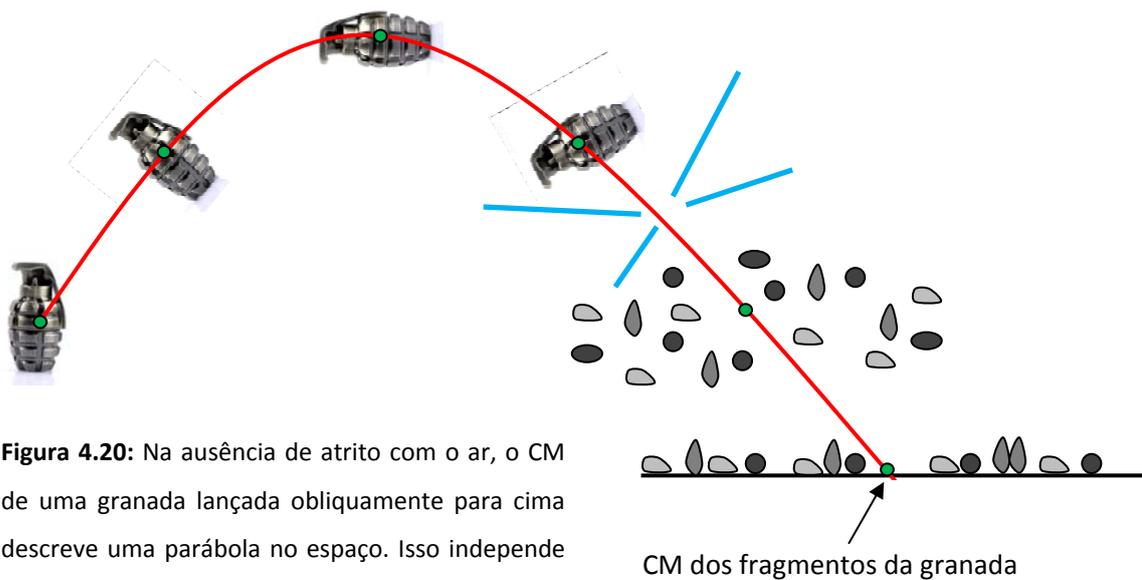


Figura 4.20: Na ausência de atrito com o ar, o CM de uma granada lançada obliquamente para cima descreve uma parábola no espaço. Isso independe da granada explodir ou não, pois a explosão é um processo regido por forças internas ao sistema (a granada ou os fragmentos da granada).

No caso do planeta Terra, por exemplo, que é basicamente uma esfera, seu CM está no centro dessa esfera. Se não houvesse forças externas atuando na Terra esse CM viajaria em MRU eternamente, com a Terra girando em torno dele. Mas, há várias forças externas na Terra, as principais sendo a força do Sol e a força da Lua. Assim, o CM da Terra se move de acordo com:

$$M_T \vec{a}_{CM}^{(T)} = \vec{F}_{S/T} + \vec{F}_{L/T}$$

sendo, M_T a massa da Terra, $\vec{F}_{S/T}$ a força do Sol na Terra e $\vec{F}_{L/T}$ a força da Lua na Terra. Como consequência dessas forças o CM da Terra descreve uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos, acrescida de uma pequena oscilação em torno dessa elipse devida à influência da Lua.

Se pensarmos apenas no sistema Terra+Lua, como a massa da Terra é cerca de 80 vezes a massa da Lua (M_L), segue que o CM desse sistema fica dentro da Terra. Se o sistema Terra+Lua fosse livre de forças externas, esse CM se moveria em MRU eternamente, enquanto que a Terra e a Lua girariam em torno dele, como um gigantesco haltere. Nesse sentido, está correto se dizer que a Lua gira em torno da Terra, do nosso ponto de vista, os habitantes no referencial da Terra. Mas, de fato, um observador mais neutro, ou seja, um observador que estivesse fora da Lua e da Terra, observando esse sistema do espaço, veria que a Lua e a Terra giram simultaneamente em torno do CM do sistema Terra+Lua. Mas, como esse CM está dentro da Terra, mesmo esse observador externo teria a impressão de que a Lua gira em torno da Terra, apesar de que para ele isso não seria estritamente verdade. Esse observador externo perceberia que a Terra se move, acompanhando o giro da Lua. A Figura 4.21 (fora de escala) ilustra essa ideia. A Lua (círculo menor) girando em torno da Terra (círculo maior). Na primeira figura a Lua vai da posição L_1 para a posição L_2 em sua órbita (aproximadamente) circular em torno do centro da Terra, enquanto a Terra permanece em sua posição fixa $T_1=T_2$.

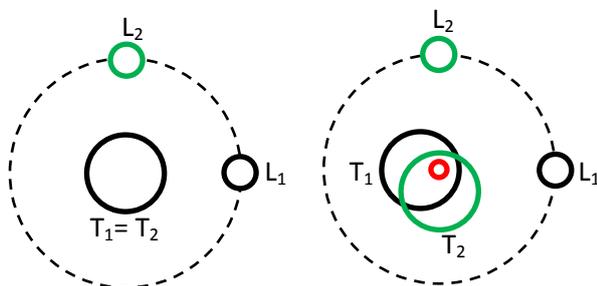


Figura 4.21: Um observador na Terra (círculo mais central) vê a Lua (círculo pequeno) orbitando a Terra, passando pelas posições L_1 e L_2 . Para um observador externo, isso só seria verdade se a Terra tivesse massa infinita. De fato, um observador externo vê que a Lua e a Terra giram em torno do CM do sistema Terra+Lua (círculo vermelho), cada uma em sua órbita aproximadamente circular. Enquanto a Lua vai de L_1 a L_2 , a Terra vai de T_1 a T_2 .

Essa é a visão que tem um observador na Terra, para o qual ela está parada. Isso só seria observado por um observador externo se o CM do sistema Terra+Lua estivesse no centro da Terra, ou seja, se a massa da Terra fosse infinitamente maior que a massa da Lua.

A figura da direita ilustra o movimento visto por um observador externo (fora da Terra e da Lua), que estivesse em repouso em relação ao CM do sistema Terra+Lua. O pequeno círculo central (em vermelho) representa o CM do sistema Terra+Lua, que está dentro da Terra, mas fora do centro, e parado (para esse observador). A Lua tem uma órbita circular em torno do CM e a Terra também. Quando a Lua vai de L_1 para L_2 , a Terra vai de T_1 para T_2 . Esse haltere gigantesco rodopia no espaço.

Há forças externas no sistema Terra+Lua, e as principais são as forças que o Sol faz na Terra e na Lua. Levando isso em conta, obtemos a equação para o movimento do CM do sistema Terra+Lua:

$$(M_T + M_L) \vec{a}_{CM}^{(T+L)} = \vec{F}_{S/T} + \vec{F}_{S/L}$$

Segue que o CM do sistema Terra+Lua descreve basicamente uma elipse com o Sol em um dos focos, enquanto a Terra e a Lua rodopiam em torno desse CM.

No caso do sistema solar, o CM desse sistema está sempre próximo do Sol e muitas vezes dentro dele, pois o Sol acumula a maior parte da massa do sistema solar. Os planetas não orbitam o centro do Sol, eles orbitam o CM do sistema solar, assim como o Sol. Se o sistema solar fosse livre de forças externas, esse CM se moveria em MRU eternamente, enquanto que o Sol, os planetas, as luas, os asteróides e os cometas girariam em torno dele. Há forças externas no sistema solar, principalmente a força de gravidade que vem do centro da nossa galáxia. Há evidências experimentais de que no centro da Via Láctea existe um buraco negro com uma massa milhões de vezes maior que a massa do Sol. Esse buraco negro atrai o sistema solar e faz com que ele tenha uma órbita aproximadamente circular ao redor do centro da Via Láctea. A equação para o movimento do CM do sistema solar seria então:

$$M_{SS} \vec{a}_{CM}^{(SS)} = \vec{F}_{BN/SS}$$

sendo M_{SS} a massa do sistema solar e $\vec{F}_{BN/SS}$ a força gravitacional resultante que o buraco negro (BN) no centro da galáxia faz no sistema solar (SS). O tempo que o sistema solar demora para dar uma volta completa nessa órbita é chamado de “ano galáctico”, cuja duração é próxima de 200 milhões de anos.

Com relação à nossa galáxia, que contém cerca de 300 bilhões de estrelas, seu CM deve estar em seu centro geométrico, onde tudo indica que se localiza um buraco negro, um corpo de massa gigantesca. Como se move o CM de nossa galáxia? Com certeza a Via Láctea possui outras galáxias em sua vizinhança e essas se atraem mutuamente, devido à gravidade. Mas, uma das galáxias mais próxima da nossa, Andrômeda, está a cerca de 2,5 milhões de anos luz de distância. Isso significa que a luz que ela emite, viajando com a velocidade incrível de 300.000 km/s, demora 2,5 milhões de anos para chegar à nossa galáxia. Por isso, a gravidade entre as galáxias deve ser muito pequena. Mas enfim, na hipótese de haver forças externas atuando na Via Láctea, seu CM se move de acordo com:

$$M_{VL} \vec{a}_{CM}^{(VL)} = \vec{F}_{??/VL}$$

sendo M_{VL} a massa da Via Láctea e $\vec{F}_{??/VL}$ a força resultante que outras coisas lá fora (??) fazem na nossa galáxia. Não sabemos exatamente o que há lá fora, mas o fato é que nossa galáxia está se movendo, e tudo indica que ela se move em rota de colisão com a galáxia Andrômeda, pois ambas se aproximam com uma velocidade de cerca de 100 km/s. Dada a distância incrível entre as duas galáxias, mesmo com essa velocidade

de aproximação, somente daqui a cerca de 4 bilhões de anos poderá ocorrer uma colisão. Por isso não precisamos nos preocupar, ainda.

Antes de concluirmos, vale ressaltar que a eventual conservação do momento linear de um sistema de partículas tem consequência sobre o movimento do CM desse sistema. De fato, como $\vec{P} = M \vec{V}_{CM}$, segue que:

$$\vec{P} = \text{constante} \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \text{constante} \text{ (ou } \vec{a}_{CM} = \vec{0} \text{)}$$

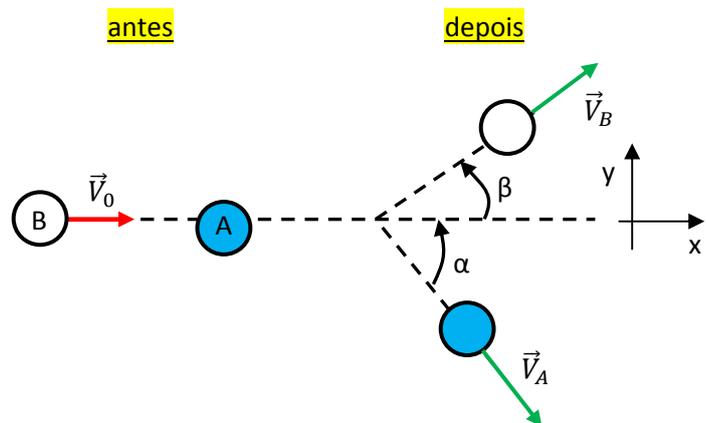
Portanto, se um dado processo conserva o momento linear, significa que a velocidade do CM não muda durante esse processo. Por exemplo, se antes do processo (em que $\vec{R}_{EXT} = \vec{0}$) o CM estava em repouso, ele vai continuar em repouso durante esse processo. Esse seria o caso de uma estrela isolada no espaço que em um dado instante sofresse uma explosão, se fragmentando em vários pedaços. Se para um observador externo o CM de estrela estava parado antes da explosão, ele vai continuar no mesmo lugar depois da explosão. Os fragmentos vão se afastar do CM da estrela, cada um para um lado. Para o CM da estrela, é como se nada tivesse acontecido. Vamos dar exemplos de aplicação dessas idéias nos exercícios resolvidos.

4.5 Exercícios resolvidos

ER 4.1) Em um jogo de sinuca, a bola branca (B) colide com a bola azul (A) que estava inicialmente parada (ambas de massa M). A velocidade inicial da bola branca é V_0 . A colisão não é exatamente frontal e após a colisão ocorre um espalhamento, como mostrado na figura (visão de cima). Despreze os atritos nas bolas.

Dados: M , V_0 , α e β .

a) Calcule os módulos das velocidades das duas bolas logo após a colisão.



Vamos considerar o sistema A+B. As forças externas que atuam nesse sistema são os pesos das bolas e as forças normais nas bolas, produzidas pela superfície da mesa onde elas deslizam/rolam. Essas forças se cancelam mutuamente. Assim sendo, vamos assumir a conservação do momento linear desse sistema. Utilizando o referencial xy da figura podemos escrever:

$$\vec{p}_A^{(A)} = \vec{0}$$

$$\vec{p}_B^{(A)} = M \vec{V}_0 = M V_0 \hat{x}$$

$$\vec{p}_A^{(D)} = M \vec{V}_A = M V_A \cos(\alpha) \hat{x} - M V_A \sin(\alpha) \hat{y}$$

$$\vec{p}_B^{(D)} = M \vec{V}_B = M V_B \cos(\beta) \hat{x} + M V_B \sin(\beta) \hat{y}$$

((A)=imediatamente antes da colisão e (D)=imediatamente depois da colisão).

Note, o momento linear da bola branca variou:

$$\Delta \vec{p}_B = \vec{p}_B^{(D)} - \vec{p}_B^{(A)} = [M V_B \cos(\beta) - M V_0] \hat{x} + M V_B \sin(\beta) \hat{y}$$

Por quê? Porque a força que a bola azul faz na bola branca é uma força externa para o sistema formado apenas pela bola branca.

O mesmo vale para a bola azul:

$$\Delta \vec{p}_A = \vec{p}_A^{(D)} - \vec{p}_A^{(A)} = M V_A \cos(\alpha) \hat{x} - M V_A \sin(\alpha) \hat{y}$$

Por quê? Porque a força que a bola branca faz na bola azul é uma força externa para o sistema formado apenas pela bola azul.

Quando consideramos o sistema A+B, essas forças e seus impulsos se cancelam e o momento linear do sistema A+B se conserva:

$$\vec{P}^{(A)} = \vec{p}_A^{(A)} + \vec{p}_B^{(A)} = \vec{P}^{(D)} = \vec{p}_A^{(D)} + \vec{p}_B^{(D)}$$

Logo:

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}^{(D)} - \vec{P}^{(A)} = \Delta \vec{p}_A + \Delta \vec{p}_B = \vec{0}$$

Portanto, obtemos as equações:

$$\text{Em } x: V_B \cos(\beta) - V_0 + V_A \cos(\alpha) = 0$$

$$\text{Em } y: V_B \sin(\beta) - V_A \sin(\alpha) = 0$$

Devemos resolver essas equações para determinar V_A e V_B . Obtemos:

$$V_A = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)} V_0 = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} V_0$$

$$V_B = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} V_0$$

b) Calcule a variação na energia cinética do sistema de duas bolas:

$$K^{(A)} = M \frac{V_0^2}{2} \qquad K^{(D)} = M \frac{V_A^2}{2} + M \frac{V_B^2}{2} = M \frac{V_0^2}{2} \left\{ \frac{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \right\}$$

Portanto:

$$\Delta K = K^{(D)} - K^{(A)} = M \frac{V_0^2}{2} \left\{ \frac{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} - 1 \right\}$$

c) Mostre que para o caso $\alpha + \beta = 90^\circ$ a colisão é elástica e vice-versa.

Para $\alpha + \beta = 90^\circ$ vale: $\alpha = 90^\circ - \beta$ e $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(90^\circ - \beta) = \text{cos}(\beta)$. Logo:

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{sen}^2(\beta) = \text{cos}^2(\beta) + \text{sen}^2(\beta) = 1$$

Além disso, $\text{sen}(\alpha + \beta) = 1$. Portanto:

$$\Delta K = M \frac{V_0^2}{2} \left\{ \frac{1}{1} - 1 \right\} = 0$$

Da mesma forma, se a colisão é elástica, vale:

$$\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2(\alpha) + \text{sen}^2(\beta)}{\text{sen}^2(\alpha + \beta)} = 1$$

Portanto:

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{sen}^2(\beta) = \text{sen}^2(\alpha + \beta) = [\text{sen}(\alpha) \text{cos}(\beta) + \text{sen}(\beta) \text{cos}(\alpha)]^2$$

Segue que:

$$\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta)$$

Logo:

$$\tan(\alpha) = \cotan(\beta) = \tan(90^\circ - \beta) \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta$$

Se você fizer uma busca na internet pelas palavras chave “90 rule pool” vai encontrar vários vídeos mostrando que essa propriedade, chamada de “regra dos 90°” no jargão da sinuca, é observada na prática em tacadas de sinuca. Isso mostra que as colisões de bolas de sinuca estão bem próximas de serem colisões elásticas (apesar de não serem de fato elásticas).

d) Discuta o movimento do centro de massa do sistema A+B antes e depois da colisão.

Antes da colisão, a velocidade do CM do sistema de duas bolas era dada por:

$$\vec{V}_{CM}^{(A)} = \frac{M V_0 \hat{x} + \vec{0}}{M + M} = \frac{V_0}{2} \hat{x}$$

O CM se aproximava da bola azul com metade da velocidade da bola branca. Isso porque as duas bolas possuem a mesma massa e por isso o CM tem que estar sempre no ponto médio entre as bolas.

Após a colisão a velocidade do CM se torna:

$$\vec{V}_{CM}^{(D)} = \frac{M \vec{V}_A + M \vec{V}_B}{M + M} = \frac{\vec{P}^{(D)}}{M + M} = \frac{\vec{P}^{(A)}}{M + M} = \frac{V_0}{2} \hat{x}$$

Usamos acima a conservação do momento linear: $\vec{P}^{(A)} = \vec{P}^{(D)}$.

Vemos então que após a colisão o CM continua seu movimento, como se nada tivesse acontecido. Esse resultado já era esperado, pois sabemos que para o sistema A+B:

$$\vec{P} = (M + M)\vec{V}_{CM}$$

Logo, a conservação (constância) de \vec{P} equivale à conservação (constância) de \vec{V}_{CM} .

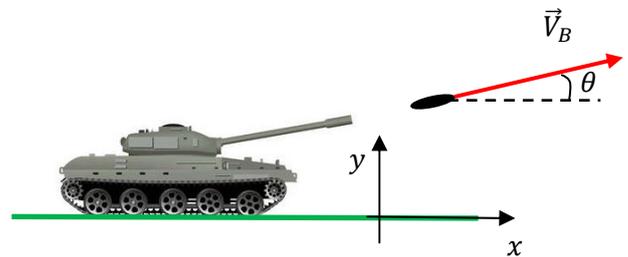
Analogamente, sabemos que para o sistema A+B:

$$(M + M)\vec{a}_{CM} = \vec{R}_{EXT}$$

Portanto, como não há resultante de forças externas atuando nas bolas durante a colisão:

$$\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \text{constante} \Rightarrow \vec{V}_{CM}^{(D)} = \vec{V}_{CM}^{(A)}$$

ER 4.2) Um tanque de guerra de massa M que estava inicialmente parado atira uma bala de canhão de massa m em uma direção oblíqua, com velocidade de módulo V_B , conforme a Figura ao lado. Suponha que o tanque não esteja engrenado e nem com freios acionados, de tal forma que ele pode ser mover livremente na horizontal. O tanque está apoiado em uma superfície horizontal rígida (que impede que ele se mova na vertical, ou seja, que ele afunde no chão).



Dados: M , m , V_B , θ e g .

a) Calcule a velocidade do tanque logo após o tiro.

Considere o sistema tanque+bala. Antes do tiro ($t = t_i$) tudo estava parado e o momento linear desse sistema era nulo. Logo após o tiro ($t = t_f$) o momento linear da bala é:

$$\vec{p}_B(t_f) = m V_B \cos(\theta) \hat{x} + m V_B \sin(\theta) \hat{y}$$

Definimos o momento linear final do tanque, logo após o tiro, por:

$$\vec{p}_T(t_f) = M \vec{V}_T$$

Então, o momento linear final do sistema tanque+bala é:

$$\vec{P}(t_f) = \vec{p}_T(t_f) + \vec{p}_B(t_f) = M \vec{V}_T + m V_B \cos(\theta) \hat{x} + m V_B \sin(\theta) \hat{y}$$

Um erro comum nesse tipo de problema é considerar que o vetor momento linear do sistema tanque+bala se conserva durante o tiro e que, portanto:

$$\vec{P}(t_f) = \vec{P}(t_i) \Rightarrow M \vec{V}_T + m V_B \cos(\theta) \hat{x} + m V_B \sin(\theta) \hat{y} = \vec{0}$$

De onde concluiríamos que a velocidade final do tanque seria:

$$\vec{V}_T = -\frac{m}{M} V_B \cos(\theta) \hat{x} - \frac{m}{M} V_B \sin(\theta) \hat{y}$$

Note então que o tanque se moveria para a esquerda e para baixo na vertical. O movimento do tanque na vertical para baixo pressupõe um piso deformável, que permite que o tanque afunde nele livremente, pelo menos por alguns instantes, até parar. Sendo o piso onde o tanque está apoiado rígido, que é nossa hipótese aqui, ele não permitiria que o tanque adquirisse uma velocidade vertical para baixo, graças à ação da força normal, que empurra o tanque para cima. Logo, o tanque se moveria apenas para a esquerda.

Portanto, partimos do pressuposto de que o piso rígido vai produzir um impulso sobre o tanque, impedindo seu movimento vertical. Quanto ao movimento horizontal do tanque, podemos apelar para a conservação do momento linear (em x), direção em que não atuam forças externas no sistema tanque+bala. Resumindo, já podemos partir da hipótese de que o tanque só se move em x:

$$\vec{p}_T(t_f) = M \vec{V}_T = M V_T \hat{x}$$

A conservação do momento linear em x leva a:

$$P_x(t_f) = P_x(t_i) \Rightarrow M V_T + m V_B \cos(\theta) = 0$$

Logo:

$$V_T = -\frac{m}{M} V_B \cos(\theta)$$

Finalmente:

$$\vec{V}_T = -\frac{m}{M} V_B \cos(\theta) \hat{x}$$

O tanque se move apenas para a esquerda, com essa velocidade. Um tanque muito pesado recuará lentamente após o tiro.

Durante o tiro, o momento linear em y sofre uma variação, devido à ação do piso rígido:

$$\Delta P_y = P_y(t_f) - P_y(t_i) = m V_B \sin(\theta)$$

Note que é uma variação positiva, ou seja, apontando na vertical para cima. O tanque é empurrado para cima.

Sabemos que, do teorema do impulso-momento linear:

$$\vec{P}(t_f) - \vec{P}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_{EXT} dt = \vec{J}_{\vec{R}_{EXT}}(t_i, t_f)$$

Logo, nesse caso:

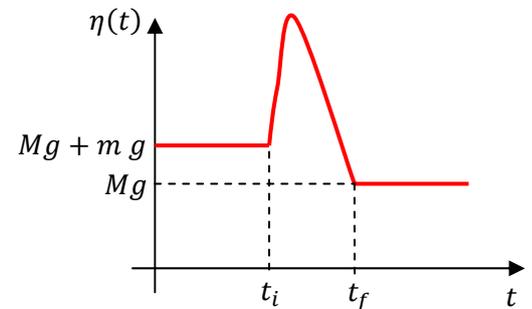
$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_{EXT} dt = m V_B \sin(\theta) \hat{y}$$

De onde concluímos que durante o tiro atuou no sistema uma resultante vertical para cima, que produziu um impulso vertical e variou o momento linear vertical do sistema.

As forças verticais no sistema tanque+bala são os pesos e a normal do piso no tanque:

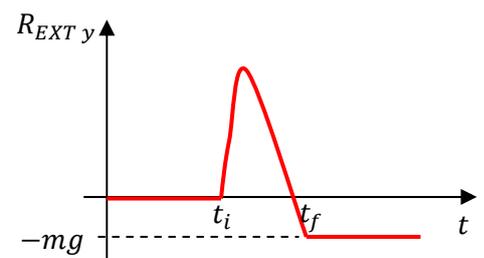
$$R_{EXT\ y}(t) = \eta(t) - Mg - m g$$

A força normal é dependente do tempo, e durante o tiro deve ter um comportamento do tipo pulso rápido e intenso, que segura o tanque, e impede que ele afunde no chão. A Figura abaixo ilustra qualitativamente como seria o comportamento da função $\eta(t)$ em função do tempo t . Antes do tiro tudo está parado e a normal está equilibrando o peso do tanque e o peso da bala ($\eta = Mg + m g$). Durante o tiro o tanque é empurrado contra o piso (pela bala, que foi empurrada para cima, de acordo com a terceira lei de Newton) e o piso responde (novamente ação e reação) empurrando o tanque para cima. Daí a origem do pulso em $\eta(t)$. Após o tiro apenas o tanque está em contato com o piso, e a normal volta a equilibrar o peso do tanque apenas ($\eta = Mg$). Para fazer o gráfico da força resultante $R_{EXT\ y}$, basta subtrair do gráfico de $\eta(t)$ o peso do sistema, já que:



$$R_{EXT\ y} = \eta(t) - Mg - m g$$

Obtemos o gráfico ao lado. Novamente, antes do tiro a resultante vertical era nula. Durante o tiro há um pulso para cima, que acelera o sistema para cima (nesse caso somente a bala). Logo após o tiro sobra somente o peso da bala, que está no ar, enquanto que o peso do tanque está anulado pela normal do piso. O sinal negativo em $-m g$ diz apenas que a resultante é para baixo. Logo após o tiro a bala vai se mover em queda livre, enquanto o tanque recua para a esquerda com velocidade constante.



Na prática não existe um piso rígido, todo piso admite um nível de deformação. Assim sendo, observaríamos que o tanque afundaria um pouco no piso durante o tiro. Haveria por alguns instantes uma componente vertical para baixo na velocidade do tanque. A resultante $R_{EXT\ y}$ iria anulando essa velocidade, até que o tanque estacionasse em uma certa profundidade. Mesmo assim o momento linear do sistema não se conservaria na direção y . Ele só se conservaria se não houvesse piso, ou seja, se o tanque estivesse flutuando no espaço. Como não pretendemos abordar esse piso não-rígido, preferimos supor o caso mais simples em que o piso é rígido.

b) Discuta o movimento do CM do sistema tanque+bala.

A equação que governa o movimento do CM desse sistema é:

$$(M + m)\vec{a}_{CM} = \vec{R}_{EXT}$$

Antes do tiro o CM estava em repouso, pois o tanque e a bala estavam em repouso. Não há forças externas atuando no sistema ao longo do eixo x, portanto, o CM continua parado na horizontal, antes, durante e depois do tiro. O CM vai se mover apenas na vertical. De fato, podemos usar o gráfico de $R_{EXT,y}$ mostrado acima para analisar o movimento do CM ao longo de y. Antes do tiro $R_{EXT,y} = 0$ e o CM está em repouso. Durante o tiro, entre os instantes t_i e t_f , há uma resultante para cima, e o CM é lançado para cima. Logo após o tiro a velocidade do CM é dada por:

$$\vec{P}(t_f) - \vec{P}(t_i) = (M + m)\vec{V}_{CM}(t_f) - (M + m)\vec{V}_{CM}(t_i) = \vec{J}_{\vec{R}_{EXT}}(t_i, t_f) = m V_B \text{sen}(\theta) \hat{y}$$

Logo, como $\vec{V}_{CM}(t_i) = \vec{0}$, segue que:

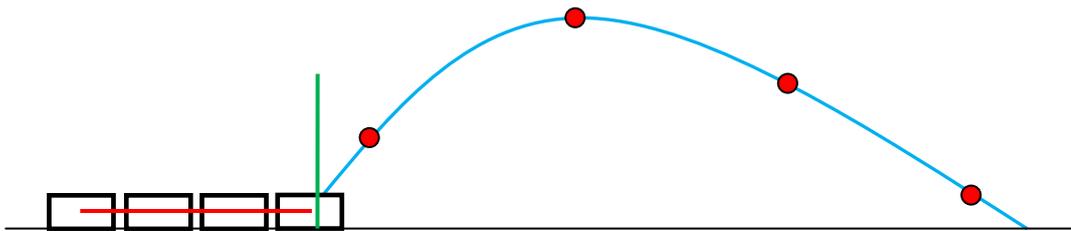
$$\vec{V}_{CM}(t_f) = \frac{m}{m + M} V_B \text{sen}(\theta) \hat{y}$$

Após o tiro vale $R_{EXT,y} = -m g$ e, portanto, o CM passa a cair com aceleração:

$$(M + m)\vec{a}_{CM} = -m g \hat{y} \Rightarrow \vec{a}_{CM} = -\frac{m}{m + M} g \hat{y}$$

Note então que o CM não cai em queda livre, se fosse o caso valeria $\vec{a}_{CM} = \vec{g}$.

Enquanto a bala sobe e desce, o CM do sistema tanque+bala sobe e desce, mas, com velocidade inicial e com aceleração diferentes da bala. A Figura abaixo ilustra essa idéia.



O tanque é representado por um retângulo. Ele segue uma trajetória de recuo horizontal para a esquerda (linha vermelha). A bala é representada por uma bolinha vermelha. Ela segue a trajetória parabólica até cair no chão (linha azul). O CM está sempre entre o tanque e a bala e segue uma trajetória vertical (linha verde), subindo enquanto a bala sobe e descendo enquanto a bala desce.

c) Calcule a altura máxima atingida pelo CM do sistema tanque+bala.

Vamos calcular essa altura de duas maneiras diferentes. Para simplificar vamos desprezar a altura do tanque e usar o eixo y já definido anteriormente.

1. Como sabemos que o CM atinge a altura máxima $y_{CM\ MAX}$ ao mesmo tempo em que a bala atinge sua altura máxima $y_{B\ MAX}$, segue que, de acordo com a definição de posição do CM:

$$y_{CM\ MAX} = \frac{M y_T + m y_{B\ MAX}}{M + m} = \frac{M \cdot 0 + m y_{B\ MAX}}{M + m}$$

(estamos desprezando a altura do tanque, ou seja, $y_T = 0$).

Na direção y a bala é lançada para cima com a velocidade:

$$V_B(t_f) = V_B \text{sen}(\theta)$$

E a partir daí ela passa a cair com a aceleração da gravidade: $a_{B\ y} = -g$. Então:

$$y_{B\ MAX} = \frac{V_B^2}{2g} \text{sen}^2(\theta)$$

Portanto, nesse instante o CM tem que estar na altura:

$$y_{CM\ MAX} = \frac{m}{m + M} \frac{V_B^2}{2g} \text{sen}^2(\theta)$$

2. Podemos obter esse mesmo resultado usando as equações da cinemática para o MRUV do CM:

O CM é lançado com a velocidade vertical dada por:

$$\vec{V}_{CM}(t_f) = \frac{m}{m + M} V_B \text{sen}(\theta) \hat{y} = V_{CM\ 0} \hat{y}$$

e passa a cair com aceleração:

$$\vec{a}_{CM} = -\frac{m}{m + M} g \hat{y}$$

Portanto, ele para de subir no instante t_1 dado por:

$$V_{CM}(t) = V_{CM\ 0} - a_{CM} t \Rightarrow 0 = V_{CM\ 0} - a_{CM} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{V_{CM\ 0}}{a_{CM}}$$

Note que:

$$t_1 = \frac{V_{CM\ 0}}{a_{CM}} = \frac{V_B \text{sen}(\theta)}{g}$$

que é o mesmo instante em que a bala atinge sua altura máxima, conforme o item anterior.

Nesse instante, o CM terá percorrido a distância:

$$y_{CM}(t_1) = y_{CM\ 0} + V_{CM\ 0} t_1 - \frac{a_{CM}}{2} t_1^2 = \frac{V_{CM\ 0}^2}{2 a_{CM}}$$

Portanto:

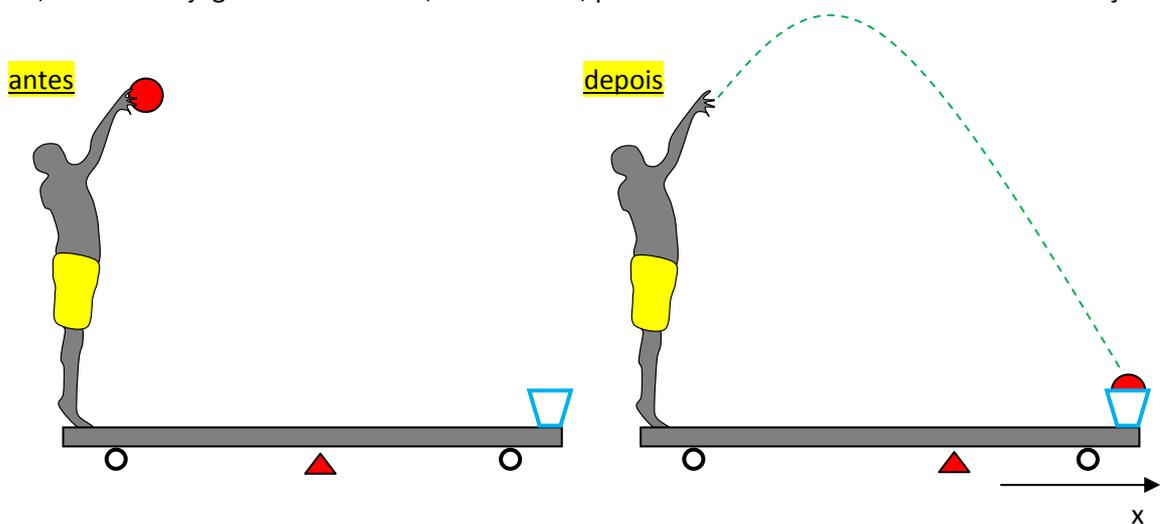
$$y_{CM\ MAX} = y_{CM}(t_1) = \frac{1}{2g} \frac{m + M}{m} \left(\frac{m}{m + M} V_B \text{sen}(\theta) \right)^2 = \frac{m}{m + M} \frac{V_B^2}{2g} \text{sen}^2(\theta)$$

ER 4.3) Um jogador de basquete de massa M_J está parado na extremidade esquerda de um skate longo de massa M_S e comprimento L , que pode se mover livremente na horizontal. O jogador está com uma bola de massa m nas mãos e em um dado instante ele lança essa bola que cai em uma cesta fixada na extremidade direita do skate. A figura que segue ilustra a situação.

Dados: M_J , M_S , m e L .

Calcule a distância que o skate se desloca para a esquerda durante o voo da bola.

Vamos chamar de x o eixo horizontal, conforme a Figura. À medida que a bola viaja no espaço, em sua trajetória parabólica, o skate (juntamente com o jogador) viaja para a esquerda. Isso porque o momento linear na direção x , do sistema jogador+skate+bola, se conserva, pois o skate se move livremente nessa direção.



Portanto, em x vale:

$$P_x^{(A)} = 0 = P_x^{(D)} = M_J V_{Jx} + M_S V_{Sx} + m V_{Bx}$$

A notação acima é (A) de antes e (D) de depois. Se integrarmos essa equação no tempo, desde t_i (antes) até t_f (depois), obtemos:

$$0 = M_J \Delta x_J + M_S \Delta x_S + m \Delta x_B$$

Sendo Δx a variação da posição de cada corpo na direção x . Note, como a posição x do CM desse sistema de três corpos é dada por:

$$x_{CM} = \frac{M_J x_J + M_S x_S + m x_B}{M_J + M_S + m}$$

Vemos que a equação que deduzimos acima está dizendo simplesmente que:

$$\Delta x_{CM} = 0$$

Ou seja, nesse processo de lançamento da bola, o CM do sistema (jogador+skate+bola) não sai do lugar (em x). Poderíamos ter deduzido isso desde o princípio, pois sabemos que:

$$P_x^{(A)} = 0 = (M_J + M_S + m)V_{CMx} = P_x^{(D)} \Rightarrow V_{CMx} = 0$$

Ou seja, se o CM do sistema estava parado antes do lançamento da bola e o momento linear do sistema se conserva em x, então o CM continuará parado no mesmo lugar, durante todo o vôo da bola. Essa mesma conclusão pode ser tirada da segunda lei:

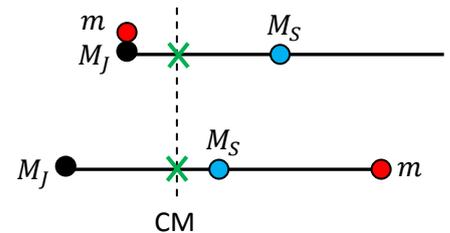
$$R_{EXTx} = 0 = (M_J + M_S + m)a_{CMx} \Rightarrow a_{CMx} = 0$$

Resumindo, queremos calcular Δx_S e isso será feito através da equação:

$$0 = M_J \Delta x_J + M_S \Delta x_S + m \Delta x_B$$

Conforme vimos, essa equação é consequência da conservação do momento linear em x do sistema jogador+skate+bola.

Para resolver a última equação acima usaremos a Figura ao lado, em que cada corpo é representado por uma partícula localizada no seu centro de massa. O CM do skate (bola azul) fica no meio do skate. A posição em x do CM do sistema é marcada com um X verde (a posição desse CM foi arbitrada entre as massas). Note que o CM do sistema fica parado, enquanto a bola (bolinha vermelha) vai de uma ponta a outra do skate.



Vemos nessa figura que, antes do lançamento da bola ($t = t_i$) vale:

$$x_S = x_J + \frac{L}{2} \qquad x_S = x_B + \frac{L}{2}$$

Logo depois do lançamento ($t = t_f$) vale:

$$x_S = x_J + \frac{L}{2} \qquad x_S = x_B - \frac{L}{2}$$

Subtraindo o antes do depois obtemos:

$$\Delta x_S = \Delta x_J \qquad \Delta x_S = \Delta x_B - L$$

A primeira equação diz apenas que, como a pessoa se move juntamente com o skate, ambos terão o mesmo deslocamento. Substituindo essas equações na equação principal obtemos:

$$0 = M_J \Delta x_J + M_S \Delta x_S + m \Delta x_B \Rightarrow 0 = M_J \Delta x_S + M_S \Delta x_S + m(\Delta x_S + L)$$

Portanto:

$$\Delta x_S = - \frac{m}{m + M_J + M_S} L$$

O sinal negativo indica apenas que o skate se move para a esquerda, ou seja, sua coordenada x diminui com o lançamento da bola.

ER 4.4) Um bolinha de massa m bate e gruda na superfície de um skate de massa M que estava inicialmente parado em uma superfície horizontal rígida. O skate pode deslizar livremente nessa superfície. A bolinha chega ao skate com velocidade dada por (ver figura ao lado):

$$\vec{V}_0 = a \hat{x} - b \hat{y}$$

Sendo a e b constantes positivas.

Dados: m, M, a, b e g .

a) Calcule a velocidade final do skate.

Trata-se de uma colisão completamente inelástica. Ao final, o skate e a bolinha estarão se movendo juntos, apenas em x (o piso é rígido). A conservação do momento linear em x , do sistema bolinha+skate leva a:

$$P_x^{(A)} = m a = P_x^{(D)} = (M + m)V_F$$

Portanto:

$$\vec{V}_F = \frac{m}{m + M} a \hat{x}$$

b) Calcule o impulso da força resultante externa no sistema bolinha+skate durante a colisão.

Do teorema do impulso-momento linear:

$$\vec{J}_{EXT}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}_{EXT} dt = \vec{P}(t_f) - \vec{P}(t_i)$$

A variação no momento linear do sistema foi:

$$\vec{P}(t_f) - \vec{P}(t_i) = (m + M)\vec{V}_F - m\vec{V}_0 = m a \hat{x} - m(a \hat{x} - b \hat{y}) = m b \hat{y}$$

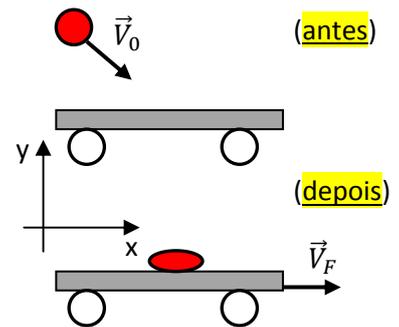
Como já sabíamos, o momento linear do sistema só varia na direção y . Portanto:

$$\vec{J}_{EXT}(t_i, t_f) = m b \hat{y}$$

Durante a colisão o sistema recebeu um impulso vertical para cima, caso contrário o skate sairia afundando indefinidamente no chão. Esse impulso para cima foi, portanto, produzido pelo chão, no skate, quando o skate foi pressionado para baixo pela bolinha.

c) Supondo que a colisão bolinha/skate teve uma duração Δt , calcule a força normal média que o chão fez no skate durante a colisão.

A força média é dada por:



$$\vec{F}_{MED} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \vec{F}(t) dt$$

Apenas para o caso em que \vec{F} é a força resultante externa podemos apelar para o teorema do impulso-momento linear e obter:

$$\vec{R}_{EXT MED} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \vec{R}_{EXT}(t) dt = \Delta \vec{P} \Rightarrow \vec{R}_{EXT MED} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

Portanto, no caso da colisão bolinha/skate só interessa a direção y e obtemos:

$$R_{EXT MED y} = \frac{m b}{\Delta t}$$

Durante a colisão a força resultante vertical (y) no sistema vai ser dada por:

$$R_{EXT y} = \eta(t) - M g - m g$$

Sendo $\eta(t)$ a normal que o piso faz no skate, que é uma função variável no tempo. Portanto:

$$R_{EXT MED y} = \eta_{MED} - M g - m g$$

Note que o valor médio de uma constante (os pesos) é a própria constante.

Igualando as equações para $R_{EXT MED y}$ obtemos finalmente:

$$\eta_{MED} = \frac{m b}{\Delta t} + M g + m g$$

Note que durante a colisão a normal supera a soma dos pesos, para produzir no sistema bolinha+skate uma resultante e um impulso para cima. Durante a colisão a bolinha empurra o skate para baixo, o skate empurra o chão para baixo e o chão empurra o skate para cima com $\eta(t)$.

d) Discuta o movimento do CM do sistema bolinha + skate.

Antes da colisão o CM desse sistema estava se movendo com a velocidade:

$$\vec{V}_{CM}^{(A)} = \frac{m \vec{V}_0 + M \vec{0}}{m + M} = \frac{m}{m + M} (a \hat{x} - b \hat{y})$$

O CM estava se movendo na mesma direção da bolinha de massa, mas com velocidade menor. O CM estava caindo obliquamente para a direita.

Após a colisão a velocidade do CM passa a ser:

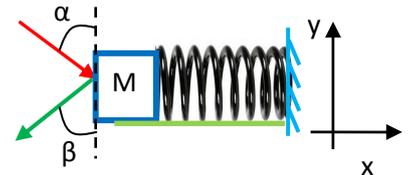
$$\vec{V}_{CM}^{(D)} = \frac{m \vec{V}_F + M \vec{V}_F}{m + M} = \vec{V}_F = \frac{m}{m + M} a \hat{x}$$

O CM passa a se mover na horizontal apenas, com a mesma velocidade horizontal que havia antes da colisão. Isso porque:

$$R_{EXT\ x} = 0 = (m + M)a_{CMx} \Rightarrow a_{CMx} = 0$$

O CM do sistema só acelera na direção vertical, por causa da ação do chão sobre o skate. Na horizontal o movimento do CM é insensível à colisão.

ER 4.5) Uma bala de revólver de massa m ricocheteia em um bloco de massa M que está atado à extremidade livre de uma mola, conforme a figura ao lado. O módulo da velocidade da bala antes da colisão é A e após a colisão é B . A mola é ideal de constante elástica k e está inicialmente relaxada. O bloco desliza sem atrito na superfície horizontal rígida (eixo x).



Dados: m , M , A , B , α , β e k .

a) Calcule a compressão máxima da mola.

Em resumo a bala vai bater no bloco e transferir momento linear para ele. Em seguida o bloco vai comprimindo a mola até parar, que é quando ocorre a compressão máxima da mola.

Vamos começar analisando a colisão bala/bloco. Na direção horizontal (x) o momento linear do sistema bala+bloco é conservado, pois o bloco se move sem atrito e a mola está relaxada no pequeno lapso de tempo da colisão. Portanto, usando o referencial na figura:

$$P_x^{(A)} = P_x^{(D)} \Rightarrow m A \sin(\alpha) = M V - m B \sin(\beta)$$

(A) significa antes da colisão: bloco parado e bala chegando (seta vermelha).

(D) significa depois da colisão: bloco indo com velocidade V em x e bala voltando (seta verde).

Portanto:

$$V = \frac{m}{M} (A \sin(\alpha) + B \sin(\beta))$$

Agora, após a colisão, podemos apelar para a conservação da energia mecânica do sistema bloco+mola, enquanto a mola comprime. Na compressão máxima o bloco estará parado e a mola comprimida de δ . Portanto:

$$E^{(A)} = E^{(D)} \Rightarrow M \frac{V^2}{2} + 0 = 0 + \frac{k}{2} \delta^2$$

(A) significa antes de comprimir a mola, bloco com velocidade V .

(D) significa depois de comprimir ao máximo a mola, bloco parado momentaneamente.

Concluindo:

$$\delta = \sqrt{\frac{M}{k}} V = \sqrt{\frac{M}{k}} \frac{m}{M} (A \sin(\alpha) + B \sin(\beta))$$

b) Discuta o que ocorre na colisão na direção vertical.

Na direção y o momento linear do sistema bala+bloco não se conserva, por causa da presença do piso rígido, que aplica uma força normal no bloco. De fato, somente a bala se move em y e a variação de seu momento linear é:

$$\Delta P_y = -B \cos(\beta) - (-A \cos(\alpha)) = A \cos(\alpha) - B \cos(\beta)$$

Essa variação de momento linear está associada a um impulso de força resultante externa, uma força externa vertical atuando no sistema bala+bloco. Essa força resultante é, como no exercício anterior:

$$R_{EXT\ y} = \eta(t) - M g - m g$$

Durante a colisão a força normal no bloco supera a soma dos pesos e produz uma resultante e um impulso para cima no sistema bala+bloco.

ER 4.6) Uma haste rígida de comprimento L e massa M está apoiada verticalmente em um piso rígido horizontal sem atrito. A partir de um certo instante a haste passa a cair sozinha. Faça um desenho da posição da haste caída no piso, em relação à posição inicial da haste. Justifique.

Na Figura ao lado mostramos as posições da haste em alguns instantes durante a queda, desde a posição inicial vertical (haste preta) até a posição final horizontal (haste azul). O que é característico dessa figura é o fato do centro da haste (marcado com uma bolinha) cair ao longo de uma mesma linha vertical. A explicação para isso está no movimento do CM da haste durante a queda.

De fato, o CM da haste se move de acordo com a equação:

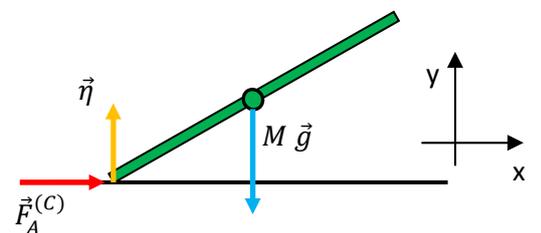
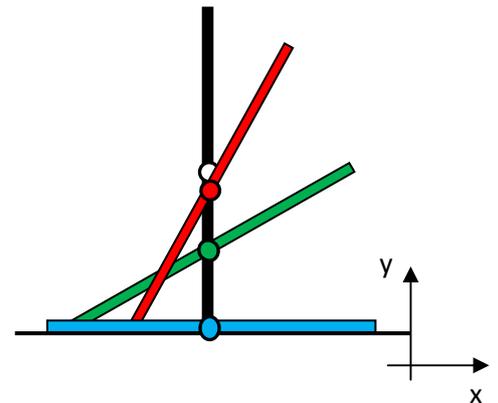
$$M \vec{a}_{CM} = \vec{R}_{EXT} = M \vec{g} + \vec{\eta} + \vec{F}_A^{(C)}$$

Incluimos nessa equação uma força de atrito (cinético), para discutir seu papel. As forças estão mostradas na Figura ao lado.

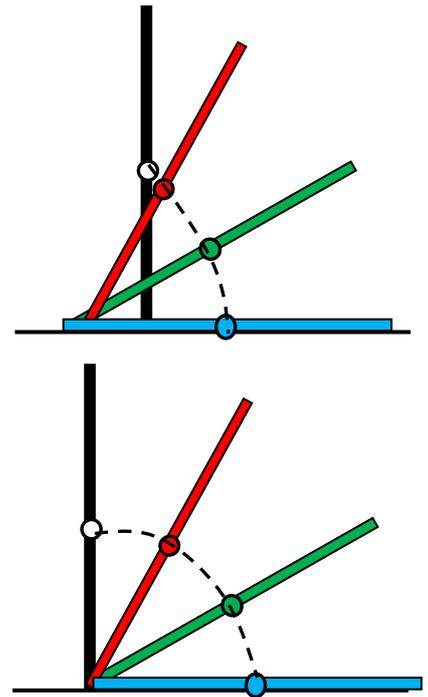
Decompondo a equação de acordo com o referencial da figura obtemos:

$$M a_{CM\ y} = -Mg + \eta \quad \text{e} \quad M a_{CM\ x} = F_A^{(C)}$$

Consideraremos que inicialmente o CM estava em repouso.

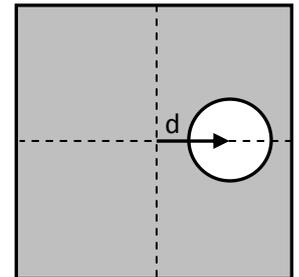


A equação em y diz como o CM vai cair na vertical. Note que, para que isso aconteça, a normal deve ter magnitude menor que o peso durante a queda. Isso produzirá uma resultante de forças para baixo e uma aceleração do CM para baixo. A equação em x diz que o CM vai ser acelerado para a direita pela força de atrito, ou seja, na presença do atrito o centro da haste avançaria para a direita. Na figura ao lado ilustramos essa situação, em que a extremidade da haste em contato com o piso desliza para a esquerda sob influência do atrito cinético.



Caso não houvesse deslizamento da extremidade da haste em contato com o piso, o atrito seria estático e as posições da haste seriam como as mostradas na Figura ao lado, em que o avanço do CM ao longo de x é $L/2$. Estamos considerando aqui o caso em que não há atrito, o que nos leva a concluir que o CM vai continuar em repouso na direção x , ou seja, a haste terá que cair como mostramos na nossa primeira Figura.

ER 4.7) Uma placa originalmente quadrada de lado L e massa M recebe um furo circular de raio R , conforme a figura ao lado. Calcule a posição do CM da placa furada.



Dados: L , M , R e d (distância do centro da placa ao centro do furo).

Primeiramente adotamos um referencial, já que posição é um conceito relativo. Os eixos x e y estão mostrados na Figura que segue, a origem está no centro da placa. Podemos ver pela simetria da placa furada que o CM dessa placa está sobre o eixo x , ou seja:

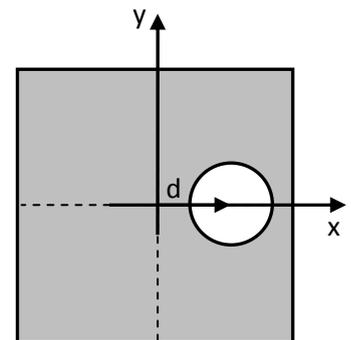
$$y_{CM}^{(PF)} = 0$$

Portanto, resta calcular o valor de $x_{CM}^{(PF)}$ (PF = placa furada).

Vamos usar a ideia de que a placa original (PO) é igual à soma da placa furada (PF) com um disco (D) de raio R e massa m . Esse disco foi removido, para dar origem ao furo. Dada a simetria da placa quadrada, sabemos que o CM da placa original está na origem, ou seja:

$$x_{CM}^{(PO)} = 0$$

O CM do disco está em $x_{CM}^{(D)} = d$. Portanto, o problema se reduz ao de um haltere formado por duas partículas, uma de massa m em $x_{CM}^{(D)}$ e outra de massa $M-m$ em $x_{CM}^{(PF)}$. A figura que segue ilustra essa ideia. Note que $x_{CM}^{(PF)} < 0$ (a metade da esquerda da placa furada tem mais massa que a metade da direita).

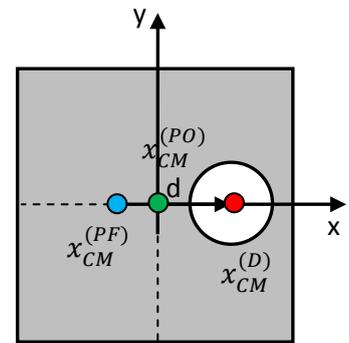


Portanto:

$$x_{CM}^{(PO)} = \frac{m x_{CM}^{(D)} + (M - m)x_{CM}^{(PF)}}{m + M - m} = 0$$

Logo, o CM da placa furada está em:

$$x_{CM}^{(PF)} = \frac{M x_{CM}^{(PO)} + (-m)x_{CM}^{(D)}}{M + (-m)}$$



Esse resultado permite uma interpretação interessante: a placa furada pode ser pensada como a soma da placa original (de massa M) com um disco de massa negativa ($-m$). Um disco de massa negativa ($-m$) com centro em $x=d$ superposto à placa original é equivalente a um buraco circular de massa nula com centro em $x=d$ (a massa negativa do disco cancela com a massa positiva da placa original nessa região).

Finalmente:

$$x_{CM}^{(PF)} = \frac{M \cdot 0 + (-m)d}{M + (-m)} = -\frac{m}{M - m} d$$

Se ρ é a densidade de massa do material que compõe a placa, então, sabemos que:

$$M = \rho L^2 \quad \text{e} \quad m = \rho \pi R^2$$

Concluindo:

$$x_{CM}^{(PF)} = -\frac{\pi R^2}{L^2 - \pi R^2} d$$

Note que se $d = 0$, ou seja, se o furo for feito no centro da placa original, então $x_{CM}^{(PF)} = 0$, já que a simetria não é alterada pela presença do furo. Analogamente, se $L \rightarrow \infty$, então novamente $x_{CM}^{(PF)} = 0$ pois o furo se tornará insignificante (se mantivermos R finito).

4.6 Exercícios propostos

EP 4.1) Estime o momento linear de um automóvel viajando a 100 km/h.

EP 4.2) Uma bola de sinuca de massa 200 g que estava inicialmente em repouso recebe uma tacada. O taco imprime na bola uma força horizontal de módulo constante $F = 3$ N por um intervalo de tempo de 1 s. Desprezando o atrito bola/piso, calcule o módulo da velocidade da bola logo após a tacada.

EP 4.3) Uma explosão faz com que um corpo isolado de massa M , que estava inicialmente em repouso, se quebre em três pedaços que são lançados ao espaço. O pedaço 1, de massa M_1 , é lançado com velocidade $\vec{V}_1 = A \hat{x} - B \hat{y}$. O pedaço 2, de massa M_2 , é lançado com velocidade $\vec{V}_2 = -C \hat{x} + D \hat{y}$. a) Calcule a velocidade (vetor) do pedaço 3. b) Calcule a velocidade do CM dos três pedaços após a quebra.

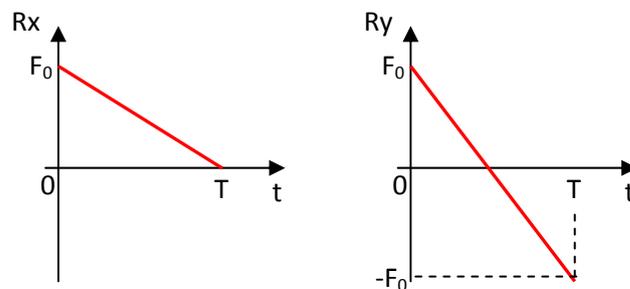
EP 4.4) Uma partícula de massa M_1 que estava viajando com velocidade de módulo V_0 (no sentido positivo de x) colide com outra partícula de massa M_2 que estava viajando no sentido oposto também com velocidade de módulo V_0 . Supondo que a colisão seja unidimensional e elástica, calcule as velocidades finais das duas partículas logo após a colisão.

EP 4.5) Uma bola de massa m bate em uma parede e sofre um impulso dado por $\vec{J}_P = A \hat{x} - B \hat{y}$. A velocidade com que a bola chega na parede é $\vec{V}_0 = a \hat{x} + b \hat{y}$. Calcule a velocidade da bola logo após a colisão.

EP 4.6) Uma partícula que estava viajando com velocidade de módulo V_0 (no sentido positivo de x) colide com outra partícula de mesma massa que estava viajando no sentido oposto também com velocidade de módulo V_0 . Suponha que a colisão seja unidimensional e inelástica. A razão entre a energia cinética final e a energia cinética inicial é r , com $r < 1$. a) Calcule as velocidades finais das duas partículas logo após a colisão. b) Calcule a velocidade do CM das duas partículas antes e depois da colisão.

EP 4.7) Dois asteróides, de massas M_1 e M_2 , estão isolados no espaço vazio, um orbitando o outro, sob efeito da gravidade mútua. Em um dado instante o asteróide 1 está na posição $\vec{r}_1 = A \hat{x} - B \hat{y}$ e o asteróide 2 está na posição $\vec{r}_2 = C \hat{x} + D \hat{y}$, posições medidas em relação a um referencial fixo no espaço. Em um instante posterior o asteróide 1 passa para a posição $\vec{r}'_1 = E \hat{x} + F \hat{y}$. Calcule \vec{r}'_2 , supondo que o CM do sistema de dois asteróides esteja estático.

EP 4.8) Uma partícula de massa M que estava inicialmente em repouso é submetida, a partir de $t=0$, a uma força externa resultante cujas componentes x e y variam no tempo de acordo com os gráficos abaixo.



F_0 e T são constantes positivas. Calcule o vetor velocidade da partícula no instante T .

EP 4.9) Uma bolinha de massa de modelar, de massa M , cai verticalmente de um prédio de altura H , partindo do repouso. A bolinha bate no chão e para. a) Calcule o módulo da força média vertical que o chão faz na bolinha durante o impacto. Suponha que o tempo de duração do impacto seja T . b) Esboce um gráfico da força média versus o tempo de impacto T . Identifique nesse gráfico as regiões correspondentes a chãos duros (concreto) e chãos moles (areia).

EP 4.10) Uma bola de sinuca 1 (de massa M) colide com outra bola 2 (de massa M) que estava inicialmente em repouso, encostada na lateral da mesa. A bola 1 chega com velocidade $V_0 \hat{x}$, bate na bola 2 e sai com

velocidade $-A_1 \hat{x} - A_2 \hat{y}$. A bola 2 sai com velocidade $-B_1 \hat{x} + B_2 \hat{y}$. Suponha que a colisão 1+2+mesa dure um tempo T . a) Calcule a força média que a lateral da mesa fez na bola 2. b) Calcule a força média que a bola 2 fez na bola 1. c) Calcule velocidade do CM do sistema de duas bolas antes e depois da colisão.

EP 4.11) Uma pessoa de massa M estava em repouso em pé sobre um skate de massa m . O skate está apoiado em uma superfície horizontal rígida. Em um dado instante a pessoa salta do skate com velocidade $\vec{V}_p = A \hat{x} + B \hat{y}$ (x é uma direção horizontal e y a direção vertical). a) Calcule a velocidade de recuo do skate, logo após a pessoa saltar (suponha que o skate não pule do chão). b) Calcule a velocidade do CM do sistema pessoa+skate antes e depois do salto.

EP 4.12) Uma projétil de massa M é lançado para cima na vertical (eixo y) com velocidade de módulo V_0 . Ele se move em queda livre. a) Calcule o impulso do peso do projétil durante o tempo de subida. b) Calcule o impulso do peso do projétil durante o tempo de descida. c) use o teorema do impulso momento linear para calcular o vetor velocidade do projétil quando ele estiver na iminência de tocar o piso.

EP 4.13) Uma pessoa de massa 70 kg pula de um muro de 3 metros de altura. Ao tocar o solo verticalmente a pessoa amortece a queda dobrando os joelhos por um tempo de 3 s. Calcule a força média (normal) que o solo fez na pessoa.

EP 4.14) Considere uma placa quadrada de lado L e espessura h que tem uma densidade de massa (por volume) não uniforme dada por:

$$\rho(x, y) = k x^n y^m$$

com $k > 0$, $n, m \geq 0$ constantes. Considere que os eixos x e y são paralelos aos lados da placa com origem em um vértice ($x, y \in [0, L]$) a) Calcule a massa da placa. b) Calcule a posição do CM da placa. c) Verifique o caso $n = m = 0$.

4.7 Respostas dos exercícios propostos

EP 4.1) 30.000 kg m/s

EP 4.2) 15 m/s

EP 4.3) a) $\frac{M_2 C - M_1 A}{M - M_1 - M_2} \hat{x} + \frac{M_1 B - M_2 D}{M - M_1 - M_2} \hat{y}$ b) $\vec{0}$

EP 4.4) $V_1 = \frac{1-3\alpha}{1+\alpha} V_0$ e $V_2 = \frac{3-\alpha}{1+\alpha} V_0$ com $\alpha \equiv M_2/M_1$

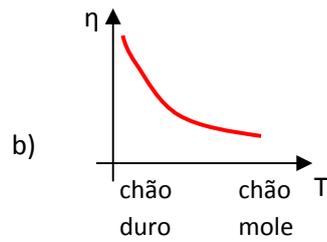
EP 4.5) $\left(a + \frac{A}{m}\right) \hat{x} + \left(b - \frac{B}{m}\right) \hat{y}$

EP 4.6) a) $V_1 = -\sqrt{r} V_0$ e $V_2 = \sqrt{r} V_0$ b) $\vec{0}$ e $\vec{0}$

EP 4.7) $\left(C + (M_1/M_2)(A - E)\right) \hat{x} + \left(D - (M_1/M_2)(B + F)\right) \hat{y}$

EP 4.8) $\frac{F_0 T}{2M} \hat{x}$

EP 4.9) a) $Mg + \frac{M\sqrt{2gH}}{T}$



EP 4.10) a) $\frac{M}{T}\{-(B_1 + A_1 + V_0)\hat{x} + (B_2 - A_2)\hat{y}\}$ **b)** $\frac{M}{T}\{-(A_1 + V_0)\hat{x} - A_2\hat{y}\}$ **c)** $(V_0/2)\hat{x}$ e

$\frac{1}{2}\{-(B_1 + A_1)\hat{x} + (B_2 - A_2)\hat{y}\}$

EP 4.11) a) $-(M/m)A\hat{x}$ **b)** $\vec{0}$ e $M/(M+m)B\hat{y}$

EP 4.12) a) $-MV_0\hat{y}$ **b)** $-MV_0\hat{y}$ **c)** $M\vec{V}_f - MV_0\hat{y} = -2MV_0\hat{y}$

EP 4.13) 864,9 N

EP 4.14) a) $kh \frac{L^{n+m+2}}{(n+1)(m+1)}$ **b)** $x_{CM} = \frac{n+1}{n+2}L$, $y_{CM} = \frac{m+1}{m+2}L$ **c)** khL^2 e $x_{CM} = y_{CM} = L/2$

5

Rotação de corpos rígidos



5.1 Introdução

Até agora reunimos várias ferramentas para estudar o movimento de um corpo pontual. Esse corpo pontual pode ser pensado como uma simples aproximação em que desprezamos completamente o tamanho do corpo real cujo movimento estamos estudando, ou, tendo em vista o conceito de centro de massa, pode ser pensado como uma partícula virtual localizada no centro de massa desse corpo real. Preferimos a segunda interpretação, pois ela não pressupõe nenhuma aproximação, trata-se da análise exata do movimento de um ponto especial, o CM, de um corpo qualquer.

Nesse capítulo estudaremos o movimento de outros pontos, além do CM, desse corpo real, que possui um tamanho e uma forma definidos. Isso porque estaremos interessados em estudar como a orientação espacial desse corpo muda no tempo, enquanto ele se move. Mudança de orientação no espaço é o que chamamos de rotação. Ficaremos restritos ao estudo do movimento de corpos rígidos: corpos que não mudam de forma e nem de tamanho enquanto se movem no espaço (não admitem deformações). Trata-se de uma idealização, pois todos os corpos reais admitem deformações. Mas, a aproximação de corpo rígido é bastante razoável para a análise do movimento de muitos corpos e as vantagens computacionais que ganhamos com essa hipótese justificam perfeitamente sua adoção.

O teorema de Chasles (Michel Chasles) nos permite dizer que: o movimento (**M**) mais geral de um corpo rígido é a composição de uma translação (**T**) e de uma rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa (**R_{CM}**). Simbolicamente: $\mathbf{M} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_{\text{CM}}$.

O planeta Terra, por exemplo, é basicamente uma esfera rígida viajando no vácuo (a Terra não é de fato esférica e nem rígida, o achatamento nos pólos e as marés estão aí para confirmar isso, mas trata-se de uma aproximação razoável, dependendo do contexto). Ao mesmo tempo em que a Terra dá uma volta em sua

órbita elíptica em torno do Sol (movimento de translação \mathbf{T}), a Terra gira em torno de um eixo que passa por seus pólos geográficos norte e sul (movimento de rotação \mathbf{R}_{CM}). É a esse tipo de composição/combinção de movimentos que o teorema de Chasles se refere.

Antes de começarmos a estudar o movimento de rotação, vamos definir o movimento de translação, que é exatamente um movimento que se caracteriza pela ausência de rotação. Veremos que já temos todas as ferramentas para estudar a translação dos corpos. De fato, apesar de quase não termos mencionado a palavra “translação” nos capítulos anteriores, tudo que fizemos até agora pode ser encarado como o estudo da translação dos corpos rígidos.

5.2 Movimento de translação

O movimento de translação de um corpo é aquele em que todos os pontos do corpo compartilham o mesmo movimento. Todos os pontos sofrem os mesmos deslocamentos, possuem a mesma velocidade e a mesma aceleração. De forma mais rigorosa, a translação pode ser definida por:

Suponha um corpo de massa M composto de N partículas. Se esse corpo está em translação, então, para a partícula i , em qualquer instante t , vale:

$$\vec{V}_i(t) = \vec{V}(t) \text{ qualquer que seja } i \text{ e qualquer que seja } t.$$

$\vec{V}(t)$ é a velocidade comum de todas as partículas. Todas as partículas se movem juntas.

Não há necessariamente nenhuma partícula no centro de massa do corpo, mas podemos mostrar que \vec{V} é a velocidade do centro de massa desse corpo. De fato (omitindo a dependência em t):

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{V} = \frac{\vec{V}}{M} \sum_{i=1}^N m_i = \vec{V}$$

Portanto, podemos definir novamente translação como o movimento em que vale (para todo instante t):

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} \text{ qualquer que seja } i$$

Concluindo, estudar o movimento de translação de um corpo é estudar o movimento do CM desse corpo. Todas as outras partículas do corpo fazem o que o CM faz. Portanto, podemos dizer que já temos as ferramentas para estudar o movimento de translação, são as ferramentas que se aplicam ao estudo do movimento do CM, basicamente:

$$\vec{R}_{EXT} = M \vec{a}_{CM}$$

Essa equação fornece o movimento do CM do corpo de massa M e, portanto, de todos os pontos do corpo. Logo, faz sentido se dizer, para um corpo em translação, que \vec{V}_{CM} é a velocidade do corpo e que \vec{a}_{CM} é a aceleração do corpo, que é o que fizemos, explicitamente ou implicitamente, até agora.

A Figura 5.1 abaixo ilustra um possível movimento de translação de uma raquete de tênis. São mostradas as trajetórias de três pontos: o CM da raquete, marcado com uma bolinha vermelha – trajetória vermelha; um ponto na extremidade do cabo da raquete - curva verde - e um ponto na lateral direita da raquete – curva azul. As três trajetórias são iguais, apenas deslocadas no espaço, pois na translação todos os pontos se movem da mesma forma: mesmos deslocamentos, mesmas velocidades e mesmas acelerações. Fica evidente nessa figura a principal característica do movimento de translação, o corpo mantém a mesma orientação no espaço, ou seja, o corpo não sofre nenhuma rotação. A translação é o movimento com ausência de rotação.

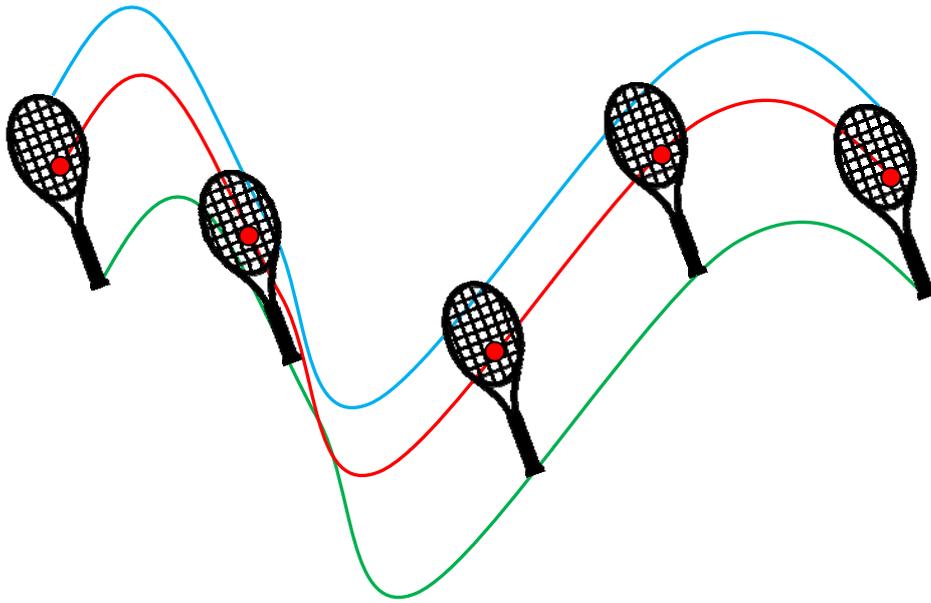


Figura 5.1: Um movimento de translação de uma raquete de tênis, no plano da página. Todos os pontos da raquete executam o mesmo movimento: eles possuem trajetórias iguais.

De fato, se não vale o vínculo:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} \text{ qualquer que seja } i,$$

característico da translação, então um corpo rígido sofrerá uma rotação. A Figura 5.2 ilustra essa idéia com uma raquete de tênis. Na primeira figura repete-se a idéia da translação, a extremidade do cabo da raquete se move da mesma quantidade que o CM. Na segunda figura a extremidade do cabo se move mais rapidamente que o CM, daí a raquete gira no espaço.

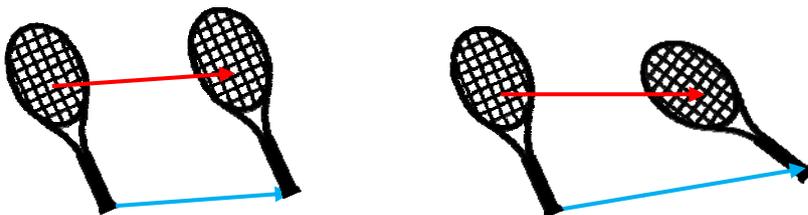


Figura 5.2: Comparação entre um movimento de translação e um movimento que contém uma rotação, que ocorre quando as partículas do corpo não possuem velocidades iguais.

Como seria então o movimento do planeta Terra se ele descrevesse no espaço apenas o movimento de translação em torno do Sol? Seria como mostrado na Figura 5.3 abaixo. A Terra manteria sua orientação no espaço e as coisas seriam muito diferentes de como são de fato. Por exemplo, durante metade do ano seria dia continuamente em um lado da Terra, voltado para o Sol, e em seguida haveria metade do ano de noite contínua. Na verdade, os dias e noites se sucedem a cada 24 horas. Isso porque, além desse movimento de translação em torno do Sol, a Terra muda continuamente sua orientação no espaço, pois ela possui um movimento de rotação em torno de um eixo que passa pelos seus pólos geográficos norte e sul. Essa rotação está ilustrada na Figura 5.4.

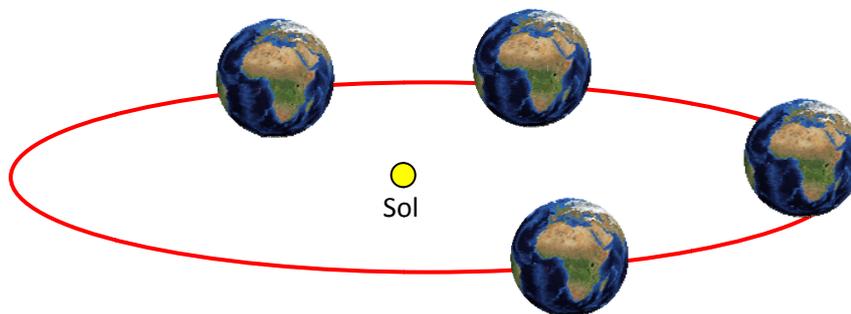


Figura 5.3: Ilustração das posições da Terra em sua órbita em torno do Sol em quatro instantes diferentes, supondo que esse movimento é somente uma translação. A orientação da Terra não muda (a África está sempre de frente para a página). A escala foi ajustada arbitrariamente.

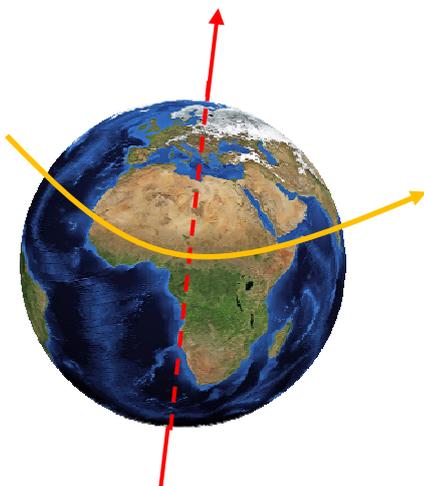


Figura 5.4: Ilustração do movimento de rotação da Terra em torno do eixo (em vermelho) que passa por seus pólos. Essa rotação, que demora cerca de 24 horas para completar uma revolução, dá origem à sucessão de dias e noites. A seta curva (laranja) é um recurso gráfico usado apenas para dar uma idéia de rotação, ela não representa de fato nenhuma grandeza física.

Estudar o movimento de translação da Terra em torno do Sol é estudar o movimento de uma partícula localizada no centro da Terra, com a massa da Terra e submetida à força que o Sol faz na Terra (que é a força externa principal que atua na Terra).

O que vamos fazer no início desse capítulo é deixar de lado o movimento de translação e estudar o movimento de rotação apenas. Depois, poderemos superpor movimentos de translação e rotação, para

discutir movimentos mais complexos. Por enquanto vamos assumir então a rotação de um corpo rígido qualquer em torno de um eixo fixo qualquer no espaço, um eixo que não passa necessariamente pelo CM desse corpo.

5.3 Movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo

Considere o corpo rígido ilustrado na Figura 5.5. A seta curva é um recurso gráfico usado apenas para dar uma idéia de rotação, ela não representa de fato nenhuma grandeza física.

Se esse corpo está em movimento de rotação em torno do eixo em vermelho, então qualquer ponto do corpo possui uma órbita circular em um plano ortogonal a esse eixo e com centro sobre esse eixo (com exceção apenas dos pontos que estão sobre o próprio eixo, se houver. No caso da Figura 5.5 não há). Na Figura 5.5 são ilustradas duas órbitas em verde e azul de dois pontos quaisquer do corpo. As órbitas são círculos em planos paralelos entre si, ortogonais ao eixo de rotação e com centros sobre esse mesmo eixo. Enquanto o corpo gira, o eixo permanece fixo no mesmo lugar e na mesma direção. Essa definição do movimento de rotação já define o que chamamos de eixo de rotação: o lugar dos centros das órbitas circulares de todos os pontos do corpo. Em um movimento mais geral esse eixo de rotação pode mudar ao longo do tempo, girando e se deslocando no espaço.

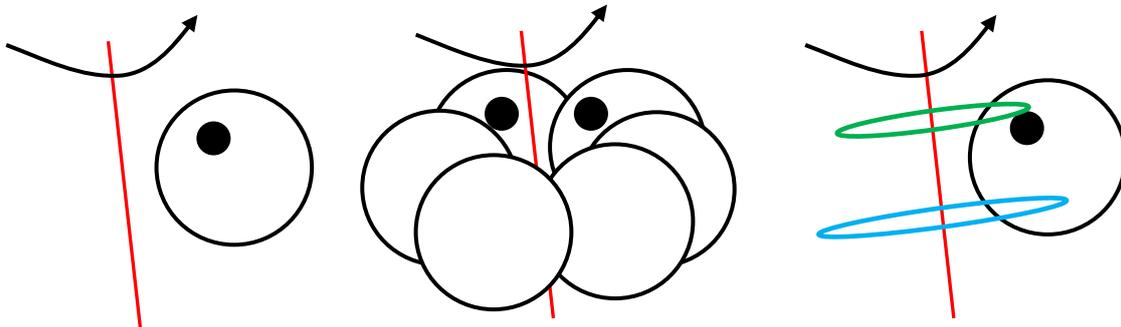


Figura 5.5: Um corpo rígido (uma bola) girando em torno de um eixo fixo (eixo vermelho). As órbitas circulares (verde e azul) de dois pontos quaisquer do corpo. A figura do meio ilustra melhor o movimento, pois mostra o corpo em vários instantes, mas a primeira figura, com a seta curva, simplifica a idéia.

No caso do planeta Terra, por exemplo, o eixo de rotação basicamente translada no espaço, em volta do Sol. Inicialmente vamos admitir, para simplificar, que o eixo de rotação está fixo no espaço, ele não sai do lugar e nem muda sua orientação. Esse é o caso, por exemplo, do eixo de rotação da hélice de um ventilador de teto, que seria um eixo vertical passando pelo centro da hélice.

Para estudar o movimento de rotação começaremos pela cinemática, que caracteriza esse movimento, e depois nos dedicaremos à dinâmica, que trata das causas da rotação.

5.3.1 Cinemática da rotação de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo

Mover-se é mudar de posição. No caso da rotação, é mudar de orientação no espaço. Como podemos fazer para representar a posição de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo? Por exemplo, para uma partícula que se move ao longo de uma reta (movimento unidimensional), basta uma coordenada x para representar a posição dessa partícula no espaço. Se especifico o eixo x , fixo a origem e digo que a partícula está em $x=3$ m, todos saberão localizar a partícula no espaço. Queremos definir algo análogo para a rotação. Queremos uma grandeza que seja capaz de diferenciar a posição A da posição B da raquete mostrada na Figura 5.6. Para simplificar, desenhamos nessa figura a raquete no plano da página e o eixo de rotação ortogonal a esse plano (passando pelo ponto vermelho).

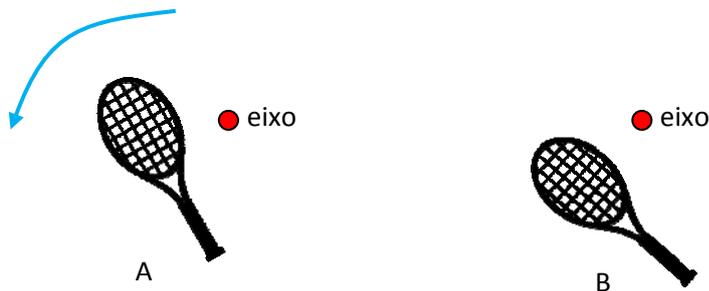


Figura 5.6: Uma raquete no plano da página girando no sentido anti-horário em torno de um eixo ortogonal ao plano da página (furando a página no ponto vermelho). Posições A e B da raquete em instantes diferentes.

Não é difícil notar que apenas um ângulo, um ângulo de rotação, digamos θ , é suficiente para especificar completamente a posição de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo. Para definir esse ângulo θ , imagine uma reta fixa no espaço, em um plano ortogonal ao eixo de rotação (o plano do papel no caso) e uma outra reta nesse mesmo plano, mas fixa no corpo que gira. As duas retas passando pelo eixo de rotação. Enquanto o corpo gira, uma reta gira e a outra fica parada. Chamando de θ o ângulo entre essas duas retas, definido, por convenção, como sendo positivo no sentido anti-horário, θ é a grandeza que especifica completamente a posição do corpo que gira. A Figura 5.7 ilustra a idéia para a raquete de tênis da Figura 5.6.

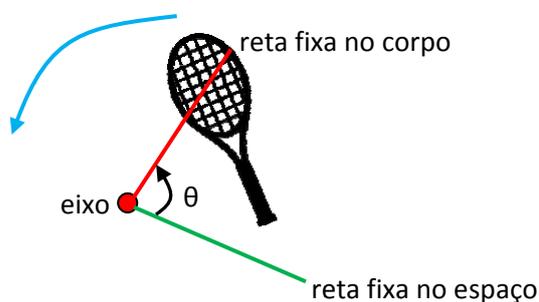


Figura 5.7: Procedimento para definir a variável θ que especifica a posição de um corpo que gira em torno de um eixo fixo (ortogonal ao plano da página, passando pelo ponto vermelho). A reta verde está fixa no espaço e a reta vermelha gira com o corpo. θ é o ângulo entre essas duas retas (positivo no sentido anti-horário, por convenção).

Na Figura 5.8 mostramos como a variável θ especifica a posição da raquete em alguns instantes do seu movimento, tomando como referência as retas verde (fixa) e vermelha (girando com o corpo). A posição da raquete no instante $t = 0$ vale θ_0 .

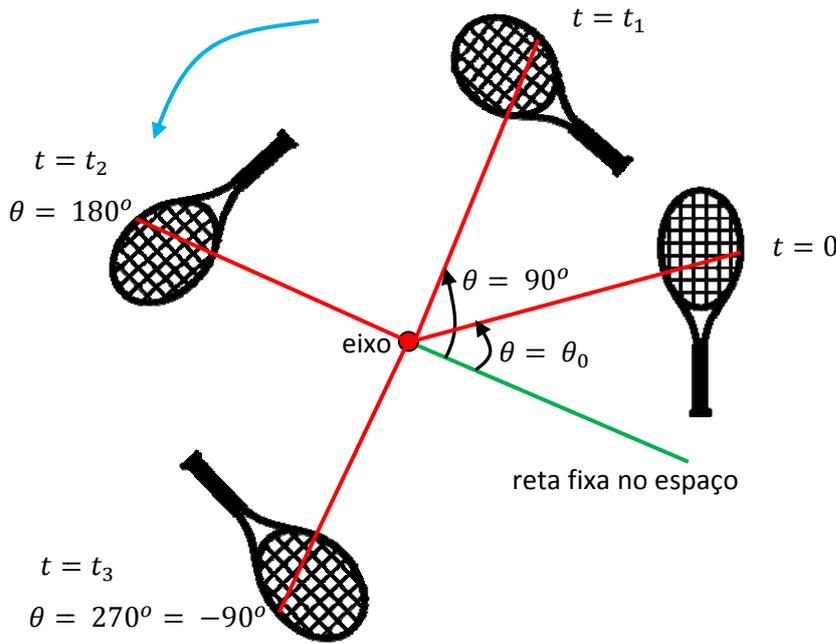


Figura 5.8: Rotação de uma raquete em torno de um eixo ortogonal à página. No instante $t = 0$ a raquete está na posição $\theta = \theta_0$ e à medida que o tempo passa o valor de θ vai aumentando. São mostrados 4 instantes escolhidos por conveniência. A reta verde fica fixa no espaço enquanto a reta vermelha fica fixa no corpo e gira junto com ele.

A variável θ desempenha o mesmo papel que uma variável x no caso de uma partícula que se move em linha reta, ao longo do eixo x . Dado x , sabemos o ponto que a partícula ocupa no espaço e, analogamente, dado θ , sabemos a orientação do corpo no espaço.

Concluindo: a equação horária $\theta(t)$ especifica a posição de um corpo que gira em torno de um eixo fixo em função do tempo t . Para definir o ângulo θ escolhemos duas retas arbitrárias, conforme já discutimos anteriormente, e θ é o ângulo entre essas duas retas. Geralmente expressamos o ângulo θ em radianos (preferencialmente) ou em graus.

Um corpo que gira pode girar rapidamente ou lentamente e a grandeza que mede essa rapidez é a velocidade angular ω , definida através da Figura 5.9. Consideramos o corpo (uma vassoura) em dois instantes diferentes, separados por um incremento Δt . Nesse intervalo de tempo a posição do corpo muda de $\Delta\theta$. A taxa de variação da posição, ou simplesmente velocidade angular é definida por:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\theta(t)$$

Já havíamos definido essa velocidade quando estudamos o movimento circular de uma partícula. A unidade natural de ω é o radiano por segundo, abreviado por rad/s. Mas, podemos imaginar outras unidades, como graus/segundo ou rotações por minuto (rpm). Uma velocidade $\omega = 2\pi$ rad/s, por exemplo, significa a mesma coisa que $\omega = 360$ graus/segundo (já que 2π radianos = 360 graus) ou ainda $\omega = 60$ rpm (já que 2π radianos por segundo correspondem a 1 rotação por segundo ou 60 rotações a cada 60 segundos, 60 rotações por minuto = 60 rpm).

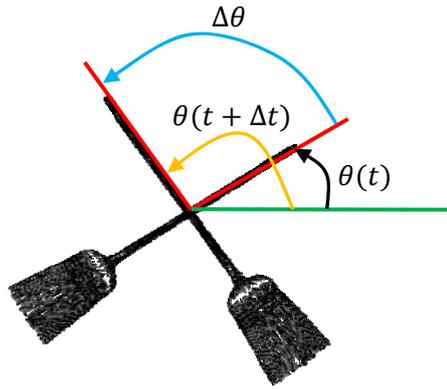


Figura 5.9: Rotação de uma vassoura em torno de um eixo fixo ortogonal ao plano da página e que passa pelo centro do cabo da vassoura. Se considerarmos um intervalo de tempo Δt , a posição da vassoura varia de $\Delta\theta$. Eixo verde parado e eixo vermelho girando junto com a vassoura.

A velocidade de rotação da Terra, por exemplo, é de uma rotação completa por dia, ou seja, $\omega_T = 2\pi$ rad/dia ou $\omega_T = 2\pi \text{ rad}/24 \text{ h} = \pi/12 \text{ rad/h} = 15^\circ/\text{hora}$. A cada hora, a Terra gira 15° em torno de si mesma, mais especificamente, em torno de um eixo que passa por seus pólos geográficos. Por causa dessa rotação vemos o Sol nascer (no leste) e se pôr (no oeste) ao longo do dia. Vemos o Sol girar em torno da Terra.

A velocidade angular de um corpo pode aumentar, diminuir ou se manter constante. A grandeza que mede a taxa de variação da velocidade angular é a aceleração angular α definida por:

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt} \omega(t)$$

No caso da Terra, por exemplo, sabemos que sua velocidade angular diminui lentamente com o passar do tempo, ou seja, o movimento de rotação da Terra é um movimento acelerado (ou, mais especificamente, retardado). A unidade natural de α é o (rad/s)/s, ou seja, rad/s^2 . Uma aceleração angular constante $\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$, por exemplo, significa que a velocidade angular $\omega(t)$ está variando de 2 rad/s a cada segundo. Se em $t=0$ a velocidade era $\omega(t=0) = \omega_0$, em $t=1 \text{ s}$ a velocidade será $\omega(t=1) = \omega_0 \pm 2$ e assim por diante. Os sinais \pm permitem descrever um movimento em que ω aumenta (aceleração paralela) ou diminui (aceleração antiparalela) com o tempo.

A cinemática de rotação de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo consiste então nas três funções horárias: posição $\theta(t)$, velocidade angular $\omega(t)$ e aceleração angular $\alpha(t)$, que desempenham papéis similares às funções $x(t)$, $V(t)$ e $a(t)$ para uma partícula se deslocando ao longo de um eixo x .

Assim como o eixo x do movimento de uma partícula é arbitrário, o eixo de rotação de um corpo rígido também é. Assim sendo, dizer que um corpo está girando com $\omega = 10 \text{ rad/s}$ não especifica totalmente sua rotação, pois não informa em torno de qual eixo ele gira. Não informa também seu sentido de rotação (horário ou anti-horário, por exemplo). Grandezas que carregam informação sobre direção e sentido são grandezas vetoriais. Daí vem a idéia de definir o vetor velocidade angular, para especificar melhor o movimento de rotação.

O vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ de um corpo é definido através das três propriedades:

1. Módulo: $|\vec{\omega}| = \omega = \left| \frac{d}{dt} \theta(t) \right|$; a unidade natural é o rad/s.
2. Direção: é a direção do eixo de rotação: x, y, z ou qualquer nome de eixo. Um vetor unitário $(\hat{x}, \hat{y}, \dots)$ vai especificar essa direção, como usualmente.
3. Sentido: é dado pela regra da mão direita: com o polegar da mão direita alinhado na direção do eixo de rotação e fazendo um movimento de giro com os outros dedos dessa mão, no mesmo sentido do giro do corpo, o sentido do polegar é o sentido de $\vec{\omega}$.

A Figura 5.10 ilustra essa idéia. Considere que a bola branca com uma pinta preta esteja girando com $\omega = 10$ rad/s. A idéia na figura é que se o corpo mostrado estiver girando com $\omega = 10$ rad/s em torno do eixo x com o sentido indicado pela seta curva em torno desse eixo, então seu vetor velocidade angular será dado por $\vec{\omega} = -10 \hat{x}$. O sinal negativo indica apenas que o vetor $\vec{\omega}$ está oposto ao eixo que chamamos, arbitrariamente, de x , pois o polegar da mão direita está oposto ao eixo x , de acordo com a regra da mão direita.

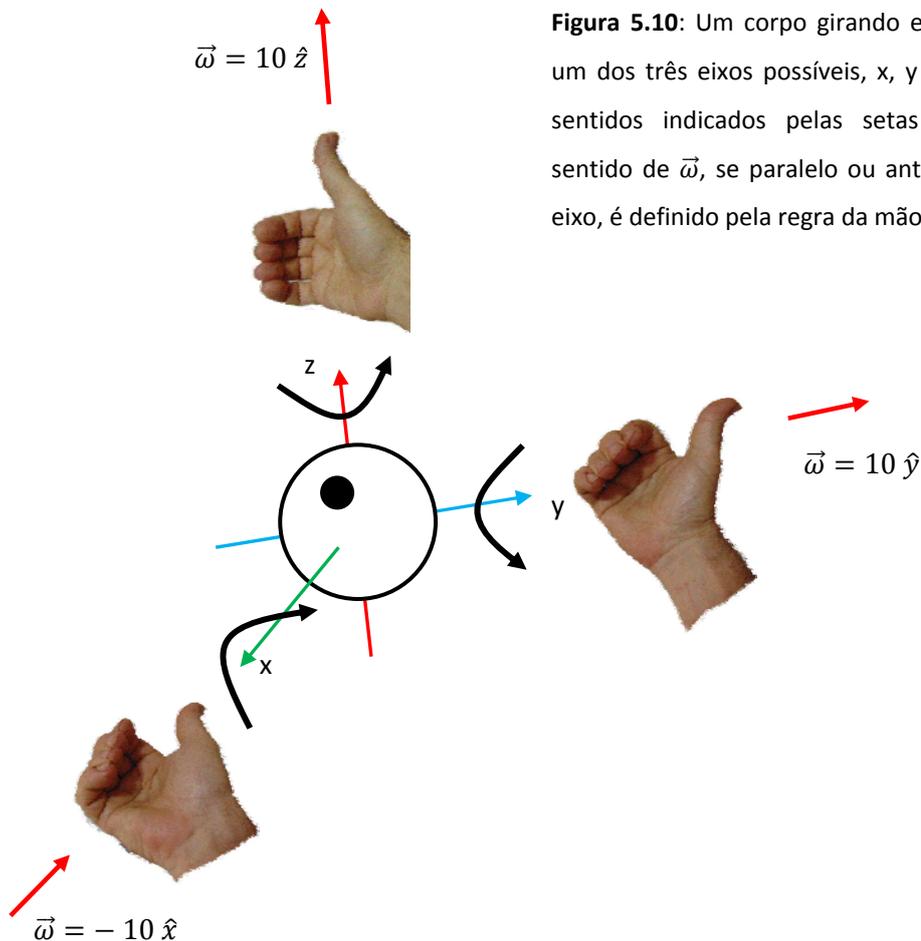


Figura 5.10: Um corpo girando em torno de um dos três eixos possíveis, x, y e z com os sentidos indicados pelas setas curvas. O sentido de $\vec{\omega}$, se paralelo ou antiparalelo ao eixo, é definido pela regra da mão direita.

No caso da vassoura mostrada na Figura 5.9, que reproduzimos novamente na Figura 5.11 que segue, um giro no sentido anti-horário levará a um vetor $\vec{\omega}$ apontando para fora da página, enquanto que um giro no

sentido horário levará a um vetor $\vec{\omega}$ apontando para dentro da página. Se chamarmos de z um eixo ortogonal à página apontando para fora da página, podemos dizer que:

$$\vec{\omega} = \frac{d}{dt}\theta(t) \hat{z}$$

De tal forma que, se $\theta(t)$ estiver aumentando no tempo (sentido anti-horário), derivada positiva, então $\vec{\omega}$ estará paralelo ao eixo z e no caso contrário, se $\theta(t)$ estiver diminuindo no tempo (sentido horário), derivada negativa, então $\vec{\omega}$ estará anti-paralelo ao eixo z. Note, não existe uma velocidade $\vec{\omega}$ positiva ou negativa à priori. O sinal de $\vec{\omega}$ só está definido após a escolha de um referencial, ou seja, após a escolha do sentido do eixo de rotação.

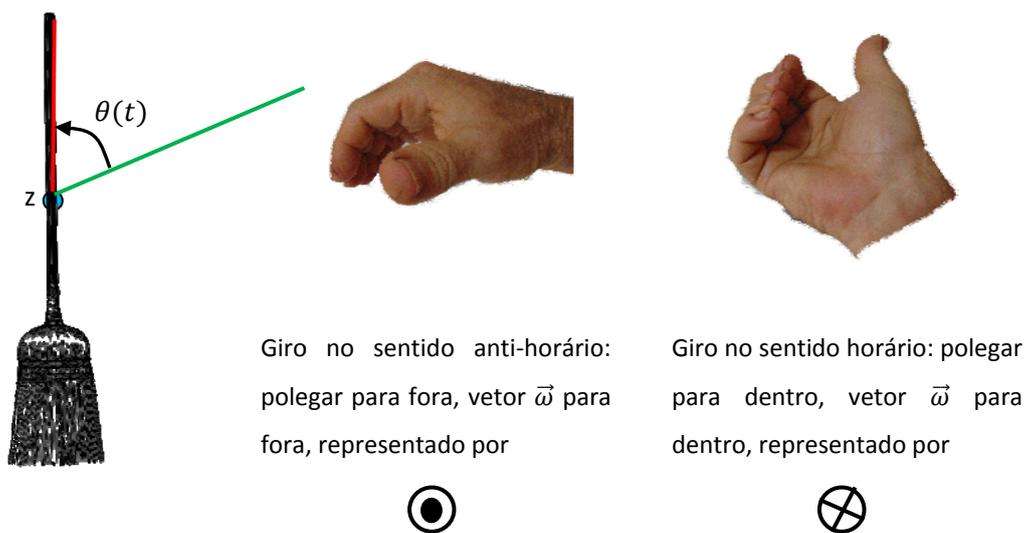


Figura 5.11: Rotação de uma vassoura em torno de um eixo z ortogonal e saindo do plano da página (furando a página na bolinha azul), passando pelo centro do cabo da vassoura: sentido horário: $\vec{\omega}$ está para dentro da página; sentido anti-horário: $\vec{\omega}$ está para fora da página.

No caso do planeta Terra, por exemplo, se chamarmos de x um eixo que vai do sul para o norte através dos dois pólos geográficos, então $\vec{\omega}_T = 2\pi \hat{x}$ rad/dia, conforme a Figura 5.12. A Terra mergulha no sentido do leste, por isso o Sol nasce no leste.

Enfatizamos então que, como sempre, não existe uma velocidade $\vec{\omega}$ positiva ou negativa, tudo depende do referencial. Um dado sentido, definido pela regra da mão direita, pode ser positivo ou negativo, dependendo da orientação do eixo de rotação, que é arbitrária.

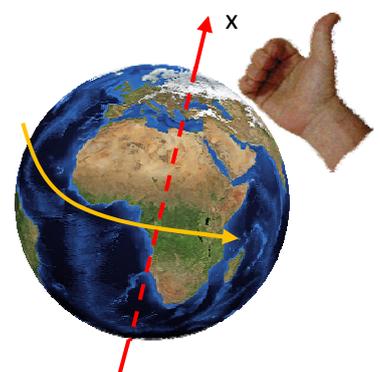


Figura 5.12: eixo e sentido de rotação da Terra.

Estando a velocidade angular $\vec{\omega}$ ao longo de x , por exemplo, então o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ também estará ao longo de x , pois a velocidade angular só pode variar ao longo desse eixo, que está fixo (por hipótese). Em geral, a direção de $\vec{\alpha}$ é a mesma direção de $\vec{\omega}$, dado que o eixo de rotação está fixo. Quanto ao sinal da aceleração $\vec{\alpha}$, segue a mesma idéia da aceleração linear \vec{a} : se $\vec{\omega}$ estiver aumentando no tempo (movimento acelerado), então $\vec{\alpha}$ é paralelo a $\vec{\omega}$ e tem, portanto, o mesmo sinal de $\vec{\omega}$. Caso contrário, se $\vec{\omega}$ estiver diminuindo no tempo (movimento retardado), então $\vec{\alpha}$ é anti-paralelo a $\vec{\omega}$ e tem, portanto, o sinal oposto ao de $\vec{\omega}$. No caso da Terra mostrada na Figura 5.12, por exemplo, $\vec{\omega}_T$ está paralelo ao eixo x , enquanto que $\vec{\alpha}_T$ está antiparalelo a esse eixo, pois a taxa de rotação da Terra está diminuindo lentamente no tempo. Essa aceleração angular da Terra é consequência das deformações (marés) que a Lua produz na Terra (um efeito dissipativo) e, para nossa sorte, é muito pequena. Daqui a alguns milhões de anos o dia não durará mais 24 h, ele vai durar um tempo maior. Enfim, se chamássemos de Δ o valor em módulo (positivo e muito pequeno) dessa aceleração, então, com o referencial mostrado na Figura 5.12 valeria:

$$\vec{\alpha}_T = -\Delta \hat{x}$$

Resumindo, se x é o eixo fixo de rotação, então:

$$\vec{\omega} = \omega(t) \hat{x}$$

e

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega(t)}{dt} \hat{x}$$

Se $d\omega(t)/dt$ tem o mesmo sinal de $\omega(t)$, implica que $\vec{\alpha}$ é paralelo à $\vec{\omega}$, caso contrário, se $d\omega(t)/dt$ tem o sinal contrário ao de $\omega(t)$, implica que $\vec{\alpha}$ é antiparalelo à $\vec{\omega}$.

Com isso concluímos a discussão sobre as grandezas que constituem a cinemática de rotação em torno de um eixo fixo: $\theta(t)$, $\vec{\omega}(t)$ e $\vec{\alpha}(t)$.

Como exemplo de movimento de rotação acelerado, imagine a hélice de um ventilador de teto, que está inicialmente girando em um dado sentido (ver Figura 5.13), com velocidade angular constante $\omega_0 = 210$ rad/s (aproximadamente 2.000 rpm). Vamos supor que esse sentido de giro corresponda a soprar o ar para baixo (ventilação). No instante $t=0$ uma pessoa vira a chave do ventilador, mudando-a para o modo exaustão, que corresponde a soprar o ar para cima.

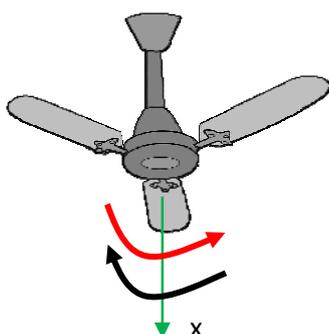


Figura 5.13: Rotação de uma hélice de ventilador de teto. Chamamos de x o eixo de rotação da hélice, vertical apontando para baixo. Note que, de acordo com a regra da mão direita, a rotação em vermelho corresponde a uma velocidade $\vec{\omega}$ ao longo de $-x$, enquanto que a rotação em preto corresponde a uma velocidade $\vec{\omega}$ ao longo de $+x$.

Ao virar a chave, a hélice adquire uma aceleração angular constante, digamos, $\alpha = 10 \text{ rad/s}^2$. Essa aceleração deverá fazer a hélice inicialmente frear, até parar, e depois acelerar girando no sentido contrário ao sentido inicial. Tendo isso em vista, vamos descrever o movimento subsequente da hélice, após $t=0$.

Primeiramente vamos deduzir como se comportam as funções horárias $\theta(t)$ e $\omega(t)$ para o caso em que $\alpha(t) = \alpha$, uma constante. Sabemos que:

$$\alpha(t) = \alpha = \frac{d}{dt}\omega(t) \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

A velocidade angular varia linearmente no tempo (note a similaridade com $V(t) = V_0 + a t$).

Portanto:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = \frac{d}{dt}\theta(t) \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

A posição angular do corpo varia quadraticamente no tempo (note a similaridade com $x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{a}{2} t^2$).

De acordo com a Figura 5.13, vamos admitir que a ventilação corresponda à rotação com sentido em preto. Então, com o eixo x especificado:

$$\vec{\omega}_0 = 210 \hat{x} \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \vec{\alpha} = -10 \hat{x} \text{ rad/s}^2.$$

Portanto:

$$\vec{\omega}(t) = (210 - 10 t) \hat{x} \text{ rad/s}$$

Vemos que após 1 segundo da chave acionada, a velocidade da hélice passará para 200 rad/s, e assim por diante. A hélice está freando. No instante $t=21 \text{ s}$ a hélice vai parar momentaneamente e a partir daí sua velocidade se tornará negativa. Por exemplo, em $t=22 \text{ s}$, a velocidade será:

$$\vec{\omega}(t = 22) = -10 \hat{x} \text{ rad/s}$$

Isso significa que o sentido da rotação reverteu, ou seja, a hélice passou a girar no sentido marcado em vermelho na Figura 5.13. Esse sentido corresponderia à exaustão. Após $t=21 \text{ s}$ a hélice passará a acelerar sua rotação nesse sentido.

Quanto à posição angular da hélice, ela satisfaz:

$$\theta(t) = \theta_0 + 210 t - \frac{10}{2} t^2 \text{ rad}$$

θ_0 é a posição inicial da hélice, que não podemos saber qual é, a não ser que os eixos fixo no espaço e fixo no corpo sejam especificados. Não vamos fazer isso agora. Fato é que, após 2 segundos da chave virada, a hélice vai ter girado de um ângulo:

$$\Delta\theta = \theta(t = 2) - \theta_0 = 210(2) - \frac{10}{2} 4 = 400 \text{ rad}$$

Como uma rotação completa da hélice corresponde a $\Delta\theta = 2\pi \cong 6,28 \text{ rad}$, então, após 2 segundos da chave virada, a hélice vai ter dado

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{400}{2\pi} \cong \frac{400}{6,28} \cong 64$$

voltas completas em torno de seu eixo de rotação (x).

Enquanto um corpo gira, cada ponto desse corpo descreve uma órbita circular (com exceção dos pontos sobre o eixo de rotação, se houver). Já estudamos o movimento circular e podemos concluir que para um ponto P do corpo, que está a uma distância r do eixo (r é o raio de giração do ponto P), vale:

1. Sua órbita é um círculo de raio r , com centro sobre o eixo de rotação. Dizemos que r é o raio de giração do ponto P.
2. Sua velocidade (linear) é tangente a esse círculo e de magnitude $V(t) = \omega(t) r$.
3. Sua aceleração centrípeta é $a_{cent}(t) = \omega^2(t) r = V^2(t)/r$.
4. Sua aceleração tangencial é:

$$a_{tan} = \frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\omega(t) r = \alpha(t) r$$

A Figura 5.14 ilustra essas grandezas para um ponto P de um paralelepípedo que gira em torno do eixo x.

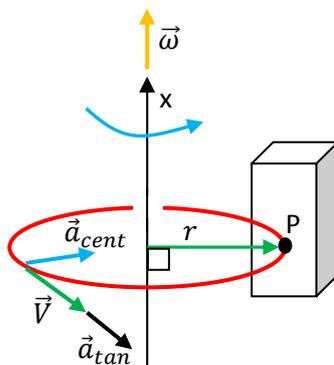


Figura 5.14: Rotação de um paralelepípedo em torno de um eixo x. Um ponto P qualquer desse corpo descreve uma órbita circular de raio r , que é o raio de giração do ponto P (a distância de P ao eixo x). A velocidade angular do corpo é um vetor ao longo de x. As grandezas velocidade (linear), aceleração centrípeta e aceleração tangencial do ponto P têm as direções usuais do movimento circular.

Note que todos os pontos do corpo possuem a mesma velocidade angular em torno do eixo de rotação, ou seja, $\vec{\omega}$ é de fato uma propriedade do corpo em rotação. Eles possuem também a mesma aceleração angular $\vec{\alpha}$ e $\vec{\alpha}$ é também uma propriedade do corpo que gira. Se assim não fosse, se, por exemplo, um ponto P_1 do corpo girasse com velocidade angular diferente de outro ponto P_2 , então o corpo sofreria uma deformação (uma torção), o que contradiria a hipótese de rigidez que estamos assumindo aqui (para simplificar). Já quanto às grandezas lineares, elas são propriedade de cada ponto P e não uma propriedade do corpo que gira. Cada ponto possui um raio de giração, uma velocidade (linear), uma aceleração centrípeta e

uma aceleração tangencial. Quem define os valores particulares dessas grandezas (além de $\vec{\omega}$ e \vec{a}) é o raio de giração do ponto (a distância do ponto ao eixo de rotação).

Tomemos como primeiro exemplo o planeta Terra. Todas as pessoas que estão agora sobre a superfície da Terra possuem uma órbita circular em torno do eixo de rotação da Terra. Todas as pessoas demoram 24 horas para dar uma volta completa em torno desse eixo e, portanto, possuem $\omega_T = 2\pi/24$ rad/h. Não importa se essa pessoa está no Equador ou na Noruega, todos dizem que o dia dura 24 h. A pessoa no Equador possui um raio de giração que é essencialmente o raio da Terra, cerca de 6.400 km. Essa pessoa então percorre sua órbita circular com velocidade linear:

$$V_{EQ} = \omega_T R_T = \frac{\pi}{12} \times 6.400 \cong 1.680 \text{ km/h}$$

Em uma hora, essa pessoa percorre um arco de círculo de cerca de mil e setecentos quilômetros de comprimento. A pessoa na Noruega, por sua vez, está próxima ao pólo norte e, portanto, próxima ao eixo de rotação da Terra. Seu raio de giração é muito menor que R_T e sua velocidade linear é muito menor que a velocidade linear de uma pessoa no Equador.

Considere um exemplo de acoplamento entre duas polias através de uma correia em V, como mostrado na Figura 5.15.

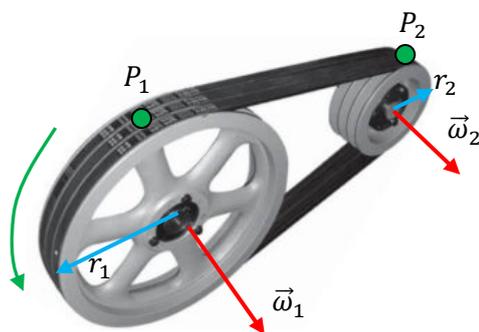


Figura 5.15: Duas polias de raios diferentes acopladas por uma correia em V.

A polia 1 (maior) possui velocidade angular $\vec{\omega}_1$ ao longo de seu eixo e a polia 2 possui velocidade angular $\vec{\omega}_2$ ao longo de seu eixo (os dois eixos paralelos entre si). Uma correia flexível abraça as periferias das duas polias, acoplando seus movimentos de rotação. O ponto P_1 é um ponto na periferia da polia 1, que tem raio r_1 . O ponto P_2 é um ponto na periferia da polia 2, que tem raio r_2 . Note que, por estarem nas periferias das polias, estes pontos estão também em contato com a correia. Se a correia não desliza nas polias, isso cria um vínculo entre seus movimentos, pois se o ponto P_1 avança de um comprimento (de arco) L , é porque a correia avançou também esse comprimento e, portanto, o ponto P_2 terá que avançar também de um arco de comprimento L . Concluindo, as velocidades (lineares) de P_1 e P_2 devem ser iguais:

$$V(P_1) = V(P_2) \Rightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1$$

Conclusão, a polia menor vai girar mais rapidamente que a polia maior, mas ambas terão a mesma velocidade (linear) periférica. Esse é o vínculo criado por uma polia não deslizante. Um vínculo análogo é criado por engrenagens (mas as velocidades angulares são opostas nesse caso).

Como último exemplo, podemos mencionar o processo de centrifugação, como o que faz a máquina de lavar roupas. Suponha que uma calça jeans esteja girando com velocidade angular de módulo ω dentro do tambor de uma máquina de lavar roupas. Uma gota de água de massa m aderida ao tecido da calça possui essa mesma velocidade angular. Seja r o raio de giração dessa gota (a distância da gota ao eixo de rotação do tambor): ela percorre um círculo de raio r em torno do eixo de rotação do tambor. A aceleração centrípeta dessa gota é dada por:

$$a_{cent} = \omega^2 r$$

Vemos que quanto mais rapidamente o tambor gira, maior deve ser a aceleração centrípeta da gota de água, se ela “pretende” permanecer em sua órbita circular. Mas, já sabemos que quem produz aceleração é força. De fato, da segunda lei de Newton:

$$R_{cent} = m a_{cent} = m \omega^2 r$$

Portanto, quanto maior a velocidade ω do tambor, maior deve ser a força resultante (R_{cent}) sobre a gota de água, para que ela continue em sua órbita circular, aderida à calça. Qual a origem dessa força? A força principal que atua na gota de água é uma força de adesão entre a água e o tecido da calça (e também entre diferentes moléculas de água), uma força de origem elétrica (podemos desprezar o peso da gota). O aumento da velocidade ω de centrifugação vai exigindo maior aceleração centrípeta e maior força de adesão água/tecido/água. Mas, essa força possui um limite. Existe uma velocidade limite, acima da qual o valor da força de adesão exigido se torna impossível de ser realizado e a gota de água se destaca do tecido molhado e sai de sua órbita circular. A gota sai pela tangente ao círculo e é expulsa do tecido. Nesse processo, em que a velocidade ω é crescente, as gotas de água no tecido vão sendo ejetadas continuamente, até que só reste ao final um pouco de água, a água mais aderida ao tecido, que somente velocidades impraticáveis seriam capazes de arrancar. Após essa centrifugação, é melhor colocar a calça para secar no varal.

A centrifugação também é usada em laboratórios (de química) para acelerar o processo de sedimentação em uma solução. Com isso, as partículas sólidas do soluto são separadas do solvente. O princípio básico de funcionamento está contido na expressão de R_{cent} acima. Enquanto a ampola contendo a solução é girada com alta velocidade angular ω , as partículas do soluto são forçadas a descrever órbitas circulares de raio r . Para isso é necessário haver em cada partícula uma força resultante centrípeta com magnitude suficiente, ou seja: $m \omega^2 r$. Essa força será produzida pela ação da própria solução ou pelas paredes da ampola (força de contato). Partículas de massa maior precisam de mais força e são as primeiras a buscar essa força e encontrá-la apenas quando finalmente tocam o fundo da ampola girante. Elas vão

sedimentando no fundo da ampola, onde finalmente encontram uma R_{cent} suficiente para que descrevam suas órbitas circulares dentro da ampola.

5.3.2 Energia cinética de rotação e momento de inércia

A energia cinética de uma partícula é a capacidade que a partícula tem de realizar trabalho (aplicar força e deslocar) devido ao simples fato de estar se movendo. Um corpo girando é um aglomerado de partículas em movimento (em órbitas circulares) e possui, ele mesmo, uma energia cinética. A energia cinética de rotação de um corpo é a capacidade que ele tem de realizar trabalho pelo simples fato de estar girando. Essa energia cinética de rotação é simplesmente a soma das energias cinéticas de todas as partículas que compõem o corpo que gira.

Antes de calcular a energia cinética de rotação vamos considerar um caso mais simples, o da energia cinética de um corpo em movimento de translação. Considere um corpo formado por N partículas de tal forma que:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} \text{ para todo } i=1\dots N.$$

que é a condição que define o movimento de translação desse sistema de N partículas. A energia cinética desse corpo é:

$$K_{trans} = \sum_{i=1}^N K_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{V_{CM}^2}{2} = \frac{V_{CM}^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i = M \frac{V_{CM}^2}{2}$$

Vemos que a energia cinética de um corpo em translação é igual à energia cinética de uma partícula localizada no centro de massa do corpo, concentrando toda a massa desse corpo. Esse resultado corrobora a idéia, que já vimos, de que estudar o movimento de translação de um corpo de massa M é equivalente a estudar o movimento de uma partícula (virtual) de massa M localizada no CM desse corpo.

Para o caso de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo obtemos:

$$K_{rot} = \sum_{i=1}^N K_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{(\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

A grandeza definida pelo somatório é uma característica do sistema que gira (corpo+eixo) e recebe o nome de momento de inércia, representado pelo símbolo I . Portanto:

$$K_{rot} = I \frac{\omega^2}{2}$$

Note a similaridade entre as expressões de K_{rot} e K_{trans} . No lugar de V_{CM} , ω e no lugar de M , I . Dessa similaridade podemos entender o nome “momento de inércia”: o termo “momento” se refere ao fato de que I

é o segundo momento da distribuição de massa. De fato, o momento de ordem zero, $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^0 = M$, é a massa e o primeiro momento, $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^1 = M \vec{r}_{CM}$, é a posição do centro de massa multiplicado pela massa. O termo “inércia” se refere ao fato de que I desempenha na energia cinética de rotação o mesmo papel que M (a massa, que é uma medida da inércia) desempenha na energia cinética de translação. I é a inércia de rotação. Veremos uma confirmação dessa idéia quando estudarmos a dinâmica de rotação.

Por enquanto devemos entender que:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

diferentemente da massa, não é uma propriedade de um corpo. I depende dos raios de giração das partículas e esses raios dependem também do eixo de rotação e não apenas do corpo. A unidade de momento de inércia é o produto quilograma vezes metro ao quadrado (kg m^2). Por exemplo, uma bola de sinuca tem um momento de inércia $I \cong 0,000043 \text{ kg m}^2$ ou, equivalentemente, $I \cong 430 \text{ g cm}^2$ (para giros em torno de um eixo que passa pelo CM da bola).

Considere um exemplo simples, de um haltere formado por duas partículas de massa m unidas por uma haste leve de comprimento L , conforme a Figura 5.16 abaixo.

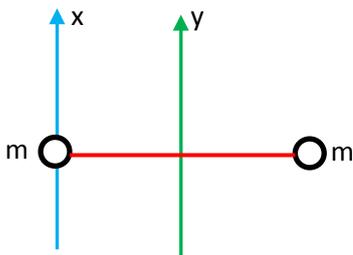


Figura 5.16: Um haltere formado por duas partículas de massa m unidas por uma haste leve de comprimento L (linha vermelha). x e y são dois eixos possíveis para a rotação do haltere.

Qual o momento de inércia I desse haltere? Não há resposta para essa pergunta, pois o momento de inércia de um corpo depende do eixo de rotação em torno do qual ele está, por hipótese, girando. Não especificamos ainda o eixo de rotação desse haltere e há infinitos eixos possíveis. Há, portanto, infinitos valores possíveis para o momento de inércia I .

Considere então que esse altere esteja girando em torno do eixo x (azul). Segue que:

$$I_x = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = m \cdot 0^2 + m L^2 = m L^2$$

Considere agora que esse mesmo altere esteja girando em torno do eixo central y (verde). Então:

$$I_y = m \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = m \frac{L^2}{2}$$

Vemos que se o haltere girar em torno do eixo y seu momento de inércia será metade do momento de inércia para giros em torno do eixo x . Se esse haltere estiver girando com velocidade angular ω , então, sua energia cinética será:

$$\text{Se estiver girando em torno de } x: K_{rot}^{(x)} = I_x \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2} mL^2 \omega^2$$

$$\text{Se estiver girando em torno de } y: K_{rot}^{(y)} = I_y \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{4} mL^2 \omega^2$$

Conclusão: $K_{rot}^{(y)}$ é metade de $K_{rot}^{(x)}$. Note que no caso de giro em torno de x só há uma partícula se movendo, com velocidade $V = \omega L$. No caso do giro em torno de y , as duas partículas se movem, mas com velocidades menores, $V = \omega L/2$. Daí vem a queda no valor da energia cinética do haltere. O momento de inércia reflete essa mudança na distribuição de massa, em relação ao eixo. Não faz sentido, portanto, em se falar no “momento de inércia do haltere”. Somente o momento de inércia do haltere em relação a um eixo específico de rotação está bem definido.

Na tabela 5.1 da próxima página especificamos o momento de inércia de alguns corpos de formas simples, como hastes e esferas. Os eixos de rotação estão representados por linhas vermelhas. Não é nosso interesse aqui calcular o momento de inércia desse ou daquele corpo. Não há também necessidade do estudante memorizar os vários momentos de inércia apresentados na tabela. A ideia é que o estudante saiba usar o conceito de momento de inércia na solução de problemas de mecânica, acessando a tabela quando necessário. Nosso foco aqui é entender o papel que o momento de inércia desempenha no movimento de rotação.

Podemos usar os dados da tabela 5.1 para calcular o momento de inércia de corpos mais complicados. Considere o exemplo da roda de bicicleta mostrada na Figura 5.17, girando em torno de seu eixo natural, ortogonal à página e passando pelo centro da roda. Obviamente não vamos calcular o valor exato do momento de inércia dessa roda, isso seria impraticável. Se quiséssemos mesmo obter esse momento de inércia, seria mais fácil medi-lo diretamente, através, por exemplo, do período de oscilação de um pêndulo físico construído com essa roda. O que vamos calcular aqui é o momento de inércia de um modelo simplificado para essa roda, composto de um aro fino (casca cilíndrica) de raio R e massa M e 3 raios, que são hastes finas/delgadas de massa m e comprimento $L=R$, conforme a figura ao lado. Note que são hastes finas com eixo de rotação passando por uma extremidade.



Portanto:

$$I_{roda} = \sum_{i \in roda} m_i r_i^2 = \sum_{i \in aro} m_i r_i^2 + 3 \sum_{i \in raio} m_i r_i^2$$

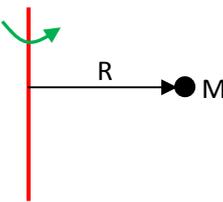
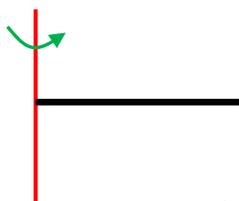
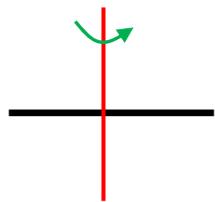
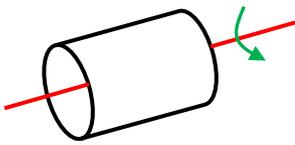
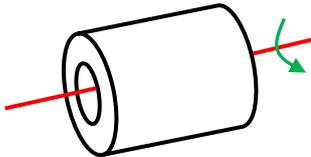
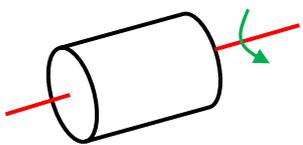
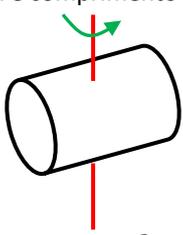
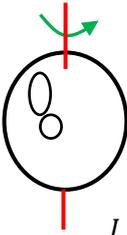
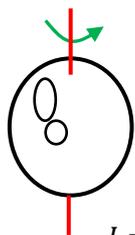
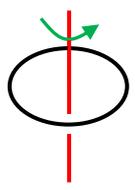
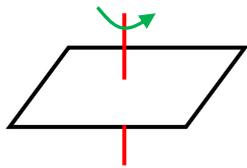
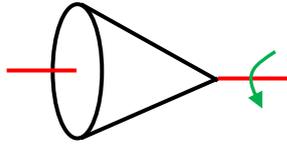
<p>Partícula de massa M</p>  $I = M R^2$	<p>Haste fina de massa M e comprimento L</p>  $I = M \frac{L^2}{3}$	<p>Haste fina de massa M e comprimento L</p>  $I = M \frac{L^2}{12}$
<p>Casca cilíndrica de massa M, raio R e comprimento L</p>  $I = M R^2$ <p>* independente de L</p>	<p>Cilindro ôco de massa M, raios r, R e comprimento L</p>  $I = \frac{M}{2} (R^2 + r^2)$ <p>* independente de L</p>	<p>Cilindro maciço de massa M, raio R e comprimento L</p>  $I = M \frac{R^2}{2}$ <p>* independente de L</p>
<p>Cilindro maciço de massa M, raio R e comprimento L</p>  $I = M \frac{R^2}{4} + M \frac{L^2}{12}$	<p>Esfera maciça de massa M e raio R</p>  $I = \frac{2}{5} M R^2$ <p>* bola de sinuca</p>	<p>Casca esférica de massa M e raio R</p>  $I = \frac{2}{3} M R^2$ <p>* bola de pingue-pongue</p>
<p>Anel fino (aro) de massa M e raio R</p>  $I = M \frac{R^2}{2}$	<p>Placa retangular fina de lados a, b e massa M</p>  $I = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$	<p>Cone maciço de altura L, raio R e massa M</p>  $I = \frac{3}{10} M R^2$ <p>* independente de L</p>

Tabela 5.1: Momentos de inércia de alguns corpos simples, girando em torno dos eixos representados por linhas vermelhas. Todos os corpos possuem distribuições de massa uniformes.



Figura 5.17: Uma roda de bicicleta e o tanque de uma máquina de lavar roupa.

Usando a tabela 5.1 obtemos:

$$I_{\text{roda}} = M R^2 + 3 \left(m \frac{R^2}{3} \right) = (M + m) R^2$$

Um segundo exemplo: um tanque de uma máquina de lavar roupa (ver Figura 5.17), que é essencialmente uma casca cilíndrica lateral de massa M , raio R e altura h e uma tampa no fundo, que é um disco fino de massa m e raio R (trata-se basicamente de um balde cilíndrico). Esse tanque gira em torno de um eixo vertical coaxial ao cilindro (seta verde na figura). Note que o disco é um cilindro maciço de comprimento $L=0$. Segue que:

$$I_{\text{tanque}} = \sum_{i \in \text{tanque}} m_i r_i^2 = \sum_{i \in \text{casca}} m_i r_i^2 + \sum_{i \in \text{disco}} m_i r_i^2$$

Usando a tabela 5.1:

$$I_{\text{tanque}} = M R^2 + m \frac{R^2}{2} = \left(M + \frac{m}{2} \right) R^2$$

Vemos que a tabela 5.1 nos permite determinar, sem muito trabalho, o momento de inércia de vários corpos mais elaborados. Se quisermos estender mais a aplicação dessa tabela, podemos utilizar o teorema dos eixos paralelos, que apenas enunciaremos aqui, sem demonstração. A idéia do teorema é simples. Considere que você conheça o momento de inércia de um corpo de massa M que gira em torno de um eixo específico que passa pelo CM desse corpo. Chamaremos esse momento de inércia de I_{CM} . Mas, o corpo não está de fato girando em torno desse eixo, ele está girando em torno de um eixo E que é paralelo ao eixo que passa pelo CM, para o qual você conhece o momento de inércia I_{CM} . Seja D a distância entre esses dois eixos. Então, o momento de inércia para esse corpo girando em torno do eixo E é:

$$I_E = I_{CM} + M D^2$$

A Figura 5.18 que segue ilustra a situação em que o teorema se aplica (eixo E em verde).

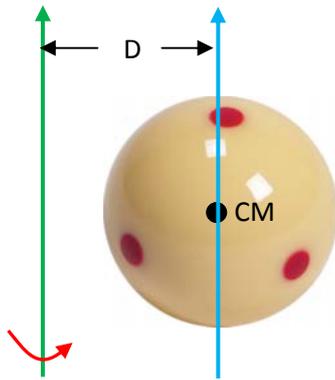


Figura 5.18: Um corpo rígido qualquer de massa M está girando em torno do eixo verde. Conhecemos o momento de inércia I_{CM} desse corpo para giros em torno do eixo azul, que é um eixo que passa pelo CM do corpo e paralelo ao eixo verde. Então, o teorema dos eixos paralelos permite calcular o momento de inércia para giros em torno do eixo verde. Basta acrescentar o termo $M D^2$ a I_{CM} .

Note que $M D^2$ é exatamente o momento de inércia de uma partícula virtual localizada no CM do corpo, concentrando toda a massa do corpo, e girando em torno do eixo E.

Por exemplo, se o corpo na Figura 5.18 é uma bola de sinuca de raio R e massa M (uma esfera maciça), então seu momento de inércia para rotações em torno do eixo verde é:

$$I_E = I_{CM} + M D^2 = \frac{2}{5} M R^2 + M D^2$$

Como segundo exemplo, considere a Figura 5.19.

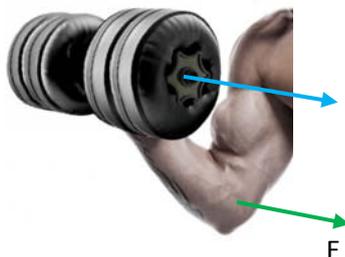


Figura 5.19: Uma pessoa faz exercícios para o braço girando um haltere em torno de um eixo E que passa pelo cotovelo (eixo verde). O eixo azul passa pelo CM do haltere. Os dois eixos são paralelos entre si.

Ao fazer exercícios para o braço, uma pessoa gira um haltere de massa M em torno de um eixo fixo E que passa pelo cotovelo desse braço (eixo verde na figura). Se D é o comprimento do antebraço dessa pessoa, então:

$$I_E = I_{CM} + M D^2$$

I_{CM} é o momento de inércia desse haltere para giros em torno do eixo azul mostrado na figura.

Para calcular I_{CM} podemos considerar um modelo de haltere: cada um dos dois discos (pesos) laterais é um cilindro maciço de massa M_d e raio R . A barra que conecta os dois discos é um cilindro maciço de massa m e raio r . Então:

$$I_{CM} = I_{\text{barra}} + 2 I_{\text{disco}}$$

Usando a tabela 5.1 obtemos:

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m r^2 + 2 \left(\frac{1}{2} M_d R^2 \right)$$

Portanto, usando que a massa (total) do haltere é $M = m + 2 M_d$, obtemos:

$$I_E = \frac{1}{2} m r^2 + M_d R^2 + (m + 2 M_d) D^2$$

5.3.3 Dinâmica da rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo

Nesta seção deduziremos a lei da dinâmica de rotação, análoga à lei da dinâmica de uma partícula (ou, equivalentemente, da dinâmica de translação), que é a segunda lei de Newton:

$$\vec{R}_{EXT} = M \vec{a}_{CM}$$

Pretendemos obter uma equação do tipo:

$$? = ? \vec{\alpha}$$

com a aceleração angular $\vec{\alpha}$ no lugar da aceleração (linear) \vec{a}_{CM} . As interrogações indicam as grandezas que não sabemos ainda quais serão. De fato, a expressão da energia cinética de rotação já nos sugeriu que quem ocupa o lugar da massa é o momento de inércia. Daí, podemos supor que obteremos uma equação do tipo:

$$? = I \vec{\alpha}$$

A idéia dessa equação é que, se você quiser, por exemplo, tirar um corpo de momento de inércia I do repouso e colocá-lo para girar (como quando você abre uma porta), vai ter que aplicar nele a grandeza incógnita "?". Ao aplicar "?" no corpo ele vai sair do repouso, vai adquirir uma aceleração angular $\vec{\alpha}$, que não dependerá somente de "?" mas também do momento de inércia do corpo. Quanto maior o momento de inércia, menor a aceleração obtida (mesmo papel da massa na translação).

A pergunta que fica é: quem desempenha o papel da força na dinâmica de rotação? Seria a própria força? Valeria a igualdade "?" = \vec{F} , ou seja:

$$\vec{F} = I \vec{\alpha}$$

(obviamente as dimensões das grandezas acima não casam, mas não queremos nos preocupar com isso agora). Se você já tentou remover um parafuso usando uma chave de boca vai perceber logo que esse não é o caso. Considere a Figura 5.20, que mostra uma chave de boca tentando girar a porca de um parafuso.

Note que a porca do parafuso é um corpo rígido que, para ser desparafusada, deve girar em torno de um eixo coaxial ao parafuso (seta preta na figura, eixo z).

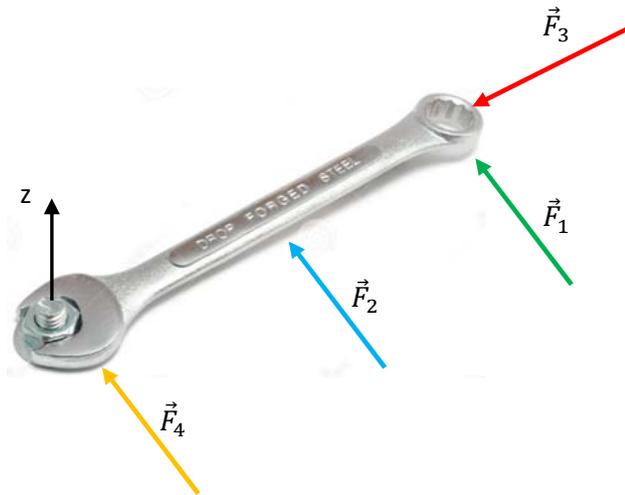


Figura 5.20: Uma chave de boca tenta girar a porca de um parafuso em torno do eixo (z) representado pela seta preta. Quatro forças são representadas pelas setas coloridas.

A experiência mostra que forças como as representadas pelas setas vermelha (\vec{F}_3) e laranja (\vec{F}_4) são inúteis. Por maiores que sejam essas forças, uma paralela ao braço da chave e outra incidente próxima/alinhada ao parafuso, elas nunca vão conseguir imprimir uma aceleração \vec{a} nessa porca. A experiência mostra também que forças como as representadas pelas setas verde (\vec{F}_1) e azul (\vec{F}_2) são capazes de girar a porca do parafuso, mas a verde é mais efetiva que a azul (produz uma \vec{a} maior, ou exige menor força). Esse exemplo simples mostra que \vec{a} não tem como causa a força e, por isso, a equação $\vec{F} = I \vec{a}$ está descartada. Obviamente, não dá para remover a porca sem aplicar força na chave, mas não é somente força. A grandeza incógnita "?" envolve força e também posição de aplicação da força (que é o que mais diferencia as forças representadas pelas setas amarela, azul e verde na Figura acima).

Essa grandeza incógnita, que é a causa de \vec{a} , é o torque. A toda força podemos associar um torque, que não depende somente da força, mas também do eixo de rotação (uma propriedade também do momento de inércia). Representaremos então o torque ao longo do eixo z da força \vec{F} por $\tau_{\vec{F}z}$ (note, $\tau_{\vec{F}z}$ não é o torque da componente z de \vec{F} , $\tau_{\vec{F}z}$ é a componente z do torque de \vec{F}). Essa grandeza deve ser tal que, se calculada para as forças representadas pelas setas vermelha e laranja na Figura 5.20 (\vec{F}_3 e \vec{F}_4) deve dar zero (porque $\vec{a} = \vec{0}$ nesses casos). Se calculada para a força representada pela seta verde, deve dar um valor maior do que para a força representada pela seta azul. Vale a pena registrar que o torque de uma força é uma grandeza vetorial e, portanto, possui sempre três componentes, digamos x, y e z. Mas, no contexto que estamos discutindo aqui, de um eixo fixo, que chamaremos preferencialmente de z, só nos interessa a componente z desse vetor torque. Por isso, nos limitaremos ao cálculo dessa componente $\tau_{\vec{F}z}$ do torque $\vec{\tau}_{\vec{F}}$.

A propriedade mais marcante do torque de uma força, responsável, talvez, pela maior complexidade da dinâmica de rotação quando comparada à dinâmica de translação/partícula, pode ser enunciada assim:

$$\text{Para uma força } \vec{F} \text{ paralela ao eixo z } (\vec{F} = F \hat{z}), \tau_{\vec{F}z} = 0.$$

Em outras palavras: uma força ao longo do eixo z não produz torque ao longo desse eixo. Analogamente:

O torque de uma força é ortogonal à própria força.

Trata-se de uma diferença marcante do torque quando comparado à força, pois, forças ao longo de z produzem aceleração exatamente ao longo de z : a aceleração \vec{a} é paralela a sua causa \vec{F} ($\vec{F} = M \vec{a}$). Em contraste, forças ao longo de z produzem torques, e acelerações angulares, no plano xy (que é o plano ortogonal ao eixo z).

Essa pode parecer uma propriedade estranha do torque, mas, se pensarmos bem, no dia-a-dia já nos habituamos a essa idéia. Considere a tarefa de abrir ou fechar uma porta. Uma porta é basicamente uma placa retangular que pode girar livremente em torno de um eixo vertical (z) que passa pelas dobradiças. Abrir ou fechar a porta é, portanto, fazer com que ela adquira uma aceleração \vec{a} ao longo desse eixo ($\vec{a} = \alpha \hat{z}$). Para isso, devemos aplicar na porta um torque ao longo de z , um torque vertical. Considere então as forças mostradas na Figura 5.21.

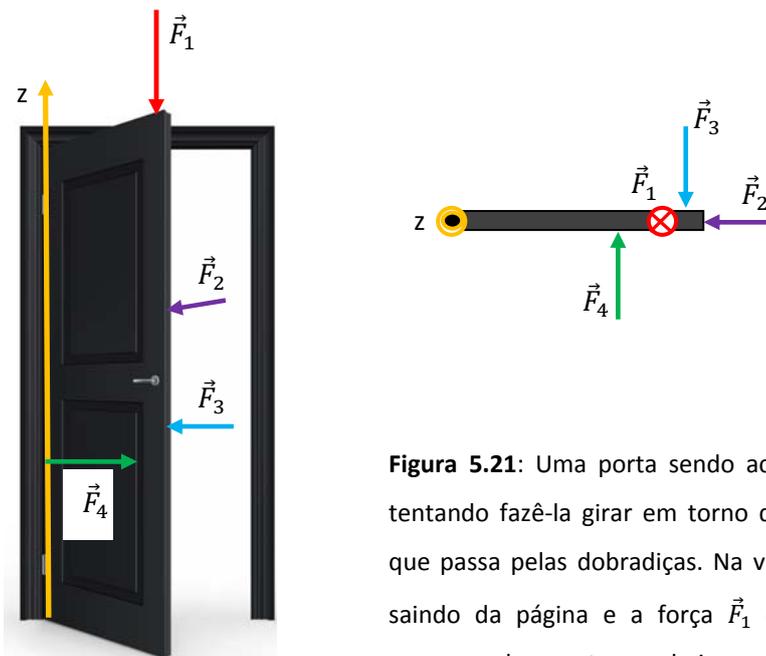


Figura 5.21: Uma porta sendo acionada por quatro forças, tentando fazê-la girar em torno do eixo z , um eixo vertical que passa pelas dobradiças. Na visão de cima o eixo z está saindo da página e a força \vec{F}_1 está entrando na página, empurrando a porta para baixo.

A força \vec{F}_1 é inútil para girar a porta. Essa seria a força que uma pessoa pendurada na porta faria. Por mais pesada que seja essa pessoa, ela não vai fazer a porta girar em torno do eixo z , porque \vec{F}_1 está ao longo do eixo z e não produz torque ao longo desse eixo. Note que esse é o caso do próprio peso da porta, que é uma força vertical na porta. O peso de uma porta não é capaz de abrir ou fechar uma porta, a não ser que o eixo de rotação dessa porta não esteja na vertical. Portas mal instaladas podem sofrer desse defeito: abrem e fecham sozinhas, sob ação de seu próprio peso. Para girar uma porta devemos aplicar forças horizontais.

Forças horizontais produzem torques verticais, porque o torque de uma força é ortogonal à própria força. Esse é o caso, por exemplo, de \vec{F}_2 , \vec{F}_3 ou \vec{F}_4 . Mas, a força \vec{F}_2 , apesar de ser horizontal, não é capaz de girar a porta. Ela está paralela à largura da porta. Para entender esse fato, só falta definir o torque ao longo do eixo z de uma força qualquer.

Para começar temos essa simplificação no formalismo: para calcular o torque ao longo do eixo z de uma força, só precisamos considerar as componentes dessa força no plano ortogonal ao eixo z, o plano xy (porque a componente z da força está descartada, pela propriedade que mencionamos acima). Considere então a força mostrada na Figura 5.22, uma força no plano da página (plano xy) e o eixo z ortogonal a esse plano (saindo da página).

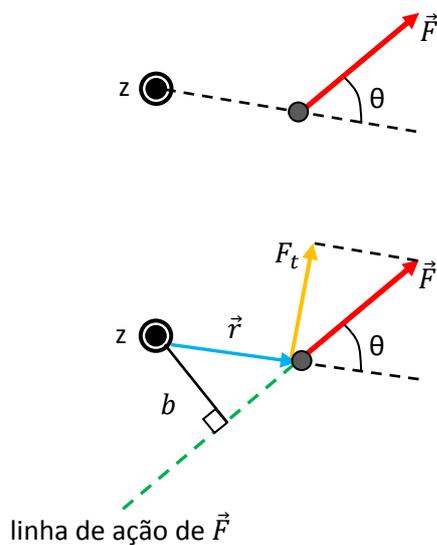


Figura 5.22: Uma força \vec{F} no plano da página e um eixo z saindo ortogonalmente da página. Podemos imaginar uma partícula (bolinha cinza) sofrendo essa força. Na segunda figura, a linha de ação de \vec{F} é a linha verde tracejada. \vec{r} é a posição de aplicação da força (em relação ao eixo z) e θ é o ângulo entre \vec{F} e \vec{r} . b é o braço de alavanca de \vec{F} e F_t é a componente tangencial da força. Todos os vetores e todas as linhas estão no plano da página (plano xy).

Com base nessa figura, a magnitude do torque de \vec{F} ao longo do eixo z é dada por três expressões equivalentes:

$$|\tau_{\vec{F}z}| = F b \quad \text{ou} \quad |\tau_{\vec{F}z}| = F r \sin(\theta) \quad \text{ou} \quad |\tau_{\vec{F}z}| = r F_t$$

Primeiramente definimos a linha de ação de \vec{F} , que é simplesmente uma reta paralela e ao longo da força \vec{F} (linha verde tracejada). A distância do eixo de rotação z à linha de ação é b , o braço de alavanca da força \vec{F} . Note que a reta que define b corta a linha de ação ortogonalmente. Vemos na figura que $b = r \sin(\theta)$. Daí vem a segunda expressão do módulo do torque, sendo r o raio do ponto de aplicação da força (o raio de giração da partícula que está sofrendo \vec{F}). A força \vec{F} , por sua vez, pode ser decomposta em uma componente radial e uma componente tangencial (ortogonal ao raio). A componente tangencial é representada pela seta laranja e é dada por $F_t = F \sin(\theta)$. Daí vem a terceira expressão do torque.

A unidade de torque é dada pelo produto newton vezes metro (N m). Uma força de módulo $F = 10$ N com braço de alavanca $b = 2$ m, por exemplo, vai produzir um torque de magnitude $\tau = 20$ N m.

Agora entendemos que, para que uma força \vec{F} produza torque ao longo de um eixo z , ela deve primeiramente não ser uma força ao longo de z , ou seja, ela deve estar contida no plano xy (mesmo que ela tenha uma componente z , esta é inútil para o cálculo de $\tau_{\vec{F}_z}$). Além disso, ela deve ter braço de alavanca, ou, equivalentemente, componente tangencial. Caso contrário, o torque é nulo.

Podemos voltar agora na Figura 5.20, que repetimos abaixo na Figura 5.23, para entender por que algumas forças são capazes de retirar a porca do parafuso e outras não. Note que as forças \vec{F}_3 e \vec{F}_4 nunca vão conseguir retirar a porca, pois suas linhas de ação passam pelo eixo z de rotação da porca. Essas forças, portanto, não possuem braço de alavanca (não possuem componente tangencial também, pois uma coisa está ligada à outra). Já as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são capazes de girar a porca do parafuso, pois possuem torque ao longo do seu eixo. A força \vec{F}_1 é mais efetiva, pois possui um braço de alavanca b_1 maior.

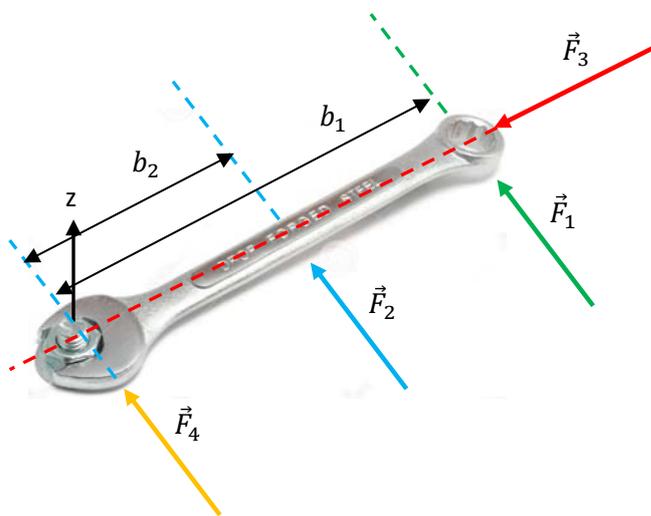


Figura 5.23: Quatro forças tentam retirar a porca de um parafuso através de uma chave de boca. Somente \vec{F}_1 e \vec{F}_2 têm chance, porque produzem torque ao longo do eixo z .

Agora podemos entender também por que a força \vec{F}_2 na Figura 5.21 não é capaz de abrir ou fechar a porta, apesar de ser uma força horizontal. Ela não possui braço de alavanca em relação ao eixo de rotação da porta. Daí não produz torque ao longo desse eixo.

O torque de uma força é um vetor e como tal possui módulo, direção e sentido. Já definimos a magnitude do torque ao longo do eixo z de uma força qualquer, falta ainda definir o sentido desse torque (o sinal), se ele está paralelo ou antiparalelo a esse eixo z . Para isso aplicamos a regra da mão direita: o sentido do torque de uma força é o mesmo sentido do polegar da mão direita alinhado com o eixo z , quando os outros dedos dessa mão fazem um movimento de giro no sentido da força. A Figura 5.24 ilustra essa idéia.

Vale ressaltar que não existe um torque positivo ou negativo à priori. O sinal do torque só está definido quando fixamos um referencial arbitrário (eixo z de rotação) e comparamos o sentido da seta do torque (sentido do polegar direito), definido pela regra da mão direita, com o sentido do eixo z .

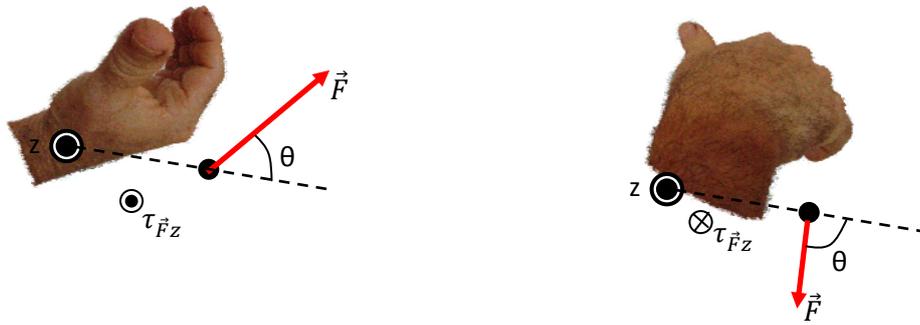


Figura 5.24: Regra da mão direita para definir o sentido do torque $\tau_{\vec{F}z}$ de uma força \vec{F} . O eixo z está para fora da página. No primeiro caso os dedos da mão direita giram no sentido anti-horário e o polegar sobre o eixo z aponta para fora da página. O torque de \vec{F} está, portanto, paralelo ao eixo z (torque positivo nesse referencial). No segundo caso os dedos da mão direita giram no sentido horário e o polegar sobre o eixo z aponta para dentro da página. O torque de \vec{F} está, portanto, antiparalelo ao eixo z (torque negativo nesse referencial). As setas dos torques (bolinhas com ponto e cruz) foram deslocadas de cima do eixo z apenas para tornar a figura mais clara.

Todas as propriedades do torque de uma força que enunciamos aqui podem ser resumidas na relação vetorial:

$$\vec{\tau}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

sendo \times o símbolo para a operação de produto vetorial entre dois vetores (\vec{r} e \vec{F} nesse caso). Se você já conhece essa operação, lá da álgebra vetorial, vai reconhecer logo a validade (ou pelo menos a razoabilidade) dessa igualdade. Caso contrário, fica aqui o registro, de que o torque de uma força \vec{F} é fruto de um produto vetorial. Não usaremos essa expressão nas aplicações da teoria que faremos aqui, afinal, estamos interessados apenas na componente z do vetor torque. Mas, para realizar demonstrações de teoremas e identidades envolvendo a grandeza torque, a expressão $\vec{\tau}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$ é mais adequada, pois torna essas demonstrações mais diretas e compactas.

Voltando à Figura 5.22, consideremos que uma partícula de massa m esteja sofrendo a força \vec{F} e que essa partícula esteja girando em uma órbita circular de raio r em torno do eixo z (ou seja, consideremos que essa partícula faça parte de um corpo rígido que gira em torno do eixo z). Vale então:

$$\tau_{\vec{F}z} = r F_t$$

Havendo várias outras forças atuando na partícula, podemos somar os torques de todas as forças para obter o torque resultante na partícula (ao longo de z):

$$\sum_{\vec{F}} \tau_{\vec{F}z} = \tau_{Rz} = r R_t$$

sendo τ_{Rz} o torque resultante na partícula (ao longo de z) e R_t a força resultante tangencial na partícula. Usando a segunda lei de Newton para uma partícula ($\vec{R} = m \vec{a} \Rightarrow R_t = m a_t$) obtemos:

$$\tau_{Rz} = r R_t = r (m a_t) = r (m r \alpha) = m r^2 \alpha = I \alpha$$

Concluindo:

$$\tau_{Rz} = I \alpha$$

Essa lei deve ser comparada à segunda lei de Newton para uma partícula: $\vec{R} = m \vec{a}$. Vemos, portanto, que assim como a força é a causa da aceleração \vec{a} , o torque é o responsável pela aceleração α . Além disso, o que desempenha o papel da massa m na rotação é o momento de inércia I . Por essa analogia, podemos chamar a lei acima de “segunda lei de Newton da rotação”.

Para chegarmos ao contexto dos corpos rígidos girando em torno de um eixo fixo falta apenas considerar que a partícula acima é a partícula i de um corpo que contém N partículas e que gira em torno do eixo z . Assim:

$$\tau_{Rzi} = m_i r_i^2 \alpha$$

Note que apenas a aceleração α não tem o subíndice i , pois para um corpo rígido todas as partículas devem ter a mesma velocidade angular e a mesma aceleração angular. Somando sobre todas as partículas obtemos:

$$\sum_{i=1}^N \tau_{Rzi} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \alpha = I \alpha$$

Por outro lado, apelando para a terceira lei de Newton (ação e reação, na forma forte, ou seja, assumindo forças centrais), somos levados a concluir que o torque da força que a partícula i faz na partícula k é oposto ao torque da força que a partícula k faz na partícula i . Por isso os torques das forças internas (i em k e k em i) se cancelam mutuamente e no somatório dos toques só restam os torques das forças externas ao sistema. Concluindo, obtemos para um corpo rígido:

$$\tau_{REXTz} = I \alpha$$

τ_{REXTz} é o torque resultante das forças externas ao longo do eixo fixo de rotação z . Note que τ_{REXTz} não é o torque da força resultante $\tau_{\vec{R}z}$ (o torque da soma das forças), é o torque resultante τ_{Rz} (a soma dos torques das forças). Para uma partícula é verdade que $\tau_{Rz} = \tau_{\vec{R}z}$, mas para um corpo rígido não.

Essa é a segunda lei de Newton da rotação para um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo (z). Note que trata-se de uma equação escalar, pois a notação vetorial é dispensável nesse caso. Mas, se quisermos, podemos fazer:

$$\tau_{REXTz} \hat{z} = I \alpha \hat{z} \Rightarrow \vec{\tau}_{REXTz} = I \vec{\alpha}$$

Preferimos trabalhar com a equação escalar, já subentendendo que tudo se dá ao longo do eixo fixo z de rotação do corpo rígido. Essa lei é análoga à segunda lei de Newton para o movimento do CM de um corpo rígido: $\vec{R}_{EXT} = m \vec{a}_{CM}$ e por isso vamos chamá-la de segunda lei de Newton da rotação.

Já podemos começar a aplicar essas idéias na análise de problemas de corpos girantes. Basicamente, tudo começa com um diagrama de forças, como já nos habituamos a fazer desde quando começamos o estudo da dinâmica de uma partícula. A diferença essencial aqui é que o torque de uma força depende de onde ela é aplicada no corpo. Sendo assim, a liberdade que tínhamos nos diagramas de forças de partículas (ou de corpos em translação), liberdade de desenhar as forças em qualquer lugar, deve ser usada com mais cuidado aqui. Não podemos modificar à vontade os braços de alavanca das forças, pois isso modificará seus torques e levará a equações erradas para a rotação. Assim sendo, é essencial que nos diagramas de força desenhemos as forças onde elas atuam. Obviamente há ainda uma liberdade: podemos deslocar (deslizar) as forças, por conveniência, desde que não alteremos seus braços de alavanca em relação ao eixo z de rotação. Podemos deslizar as setas das forças (se desejarmos, para efeito de simplificação) ao longo de suas linhas de ação. Quanto ao peso do corpo, trata-se de uma força distribuída, ou seja, que não possui uma posição específica de aplicação. Vamos mostrar mais adiante que podemos e devemos supor, para efeito de torque, que o peso de um corpo atua em seu centro de massa. Tendo em vista tudo que já vimos sobre o centro de massa, essa propriedade não parece muito surpreendente (centro de massa = centro do peso). Usaremos então essa propriedade desde já.

Como exemplo de aplicação do que vimos até aqui, considere uma polia submetida a duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 transmitidas por uma corda que abraça a polia (corda não mostrada), conforme a Figura 5.25.

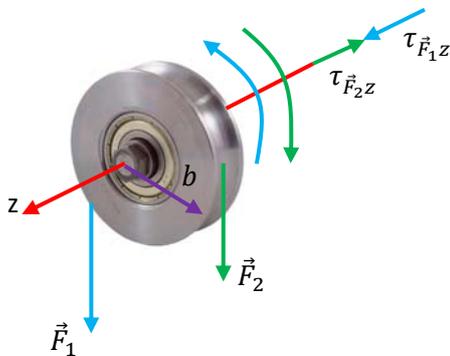
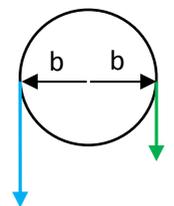


Figura 5.25: As duas pontas de uma corda que passa por uma polia são puxadas por forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 . Essas forças são transmitidas para a polia (por forças de atrito estático). O eixo z é o eixo de rotação da polia. A polia é um disco maciço de massa M e raio b.

O diagrama de forças na Figura 5.25 não mostra o peso da polia e nem as forças que o suporte (eixo de metal) faz na polia. Essas forças não possuem braço de alavanca, pois suas linhas de ação passam pelo eixo z de rotação. Estamos desprezando o atrito no eixo da polia. Vemos que os braços de alavanca das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 são ambos iguais ao raio b da polia (figura ao lado, eixo z saindo ortogonalmente da página).



Portanto, usando a regra da mão direita para definir os sentidos dos torques, obtemos o seguinte torque resultante ao longo do eixo z da polia:

$$\tau_{REXTz} = F_1 b - F_2 b$$

Note que são dois torques de sentidos opostos.

Sendo a polia basicamente um disco (cilindro maciço) de massa M e raio b obtemos:

$$\tau_{REXTz} = I \alpha \Rightarrow F_1 b - F_2 b = \frac{M b^2}{2} \alpha$$

Portanto, essa polia vai girar em torno de seu eixo z com aceleração:

$$\alpha = 2 \frac{F_1 - F_2}{M b}$$

No caso $F_1 > F_2$ a aceleração será positiva, ou seja, estará paralela ao eixo z . Portanto a polia ganhará velocidade angular ω nesse sentido. Aplicando a regra da mão-direita que define o sentido de ω , concluímos que nesse caso a polia, partindo do repouso, vai girar com o sentido dado pela seta curva azul na Figura 5.25. Uma aceleração α ao longo do sentido positivo de z vai fazer com que a polia ganhe velocidade ω nesse sentido (ou freie, se já houver uma ω no sentido negativo de z). No caso oposto, $F_1 < F_2$ a aceleração será negativa, ou seja, estará antiparalela ao eixo z . Portanto a polia ganhará velocidade angular ω nesse sentido (ou freará, se já houver uma ω no sentido positivo de z). A regra da mão-direita para o sentido de ω diz que nesse caso a polia, partindo do repouso, vai girar com o sentido dado pela seta curva verde na Figura 5.25. Se $F_1 = F_2$ a aceleração será nula, ou seja, a polia manterá sua velocidade de rotação. Se ela estiver em repouso, vai continuar em repouso. Se ela já estiver girando, vai continuar girando com a mesma ω . Note que nessa situação não vale sempre a igualdade $F_1 = F_2$, que chamamos de “propriedade da corda leve e livre” no capítulo 2, ou seja, que as forças nas duas pontas de uma corda (que abraça a polia) possuem módulos iguais. A magnitude da força em uma ponta da corda (que abraça a polia) é diferente da magnitude da força na outra ponta. A propriedade $F_1 = F_2$ só vale se a corda estiver livre e no caso que estamos discutindo aqui isso não é verdade porque levamos em conta a massa da polia. Se desprezássemos a massa da polia, a própria equação

$$F_1 b - F_2 b = \frac{M b^2}{2} \alpha$$

mostra que, para $M = 0$, valeria $F_1 = F_2$. É exatamente a diferença entre F_1 e F_2 que produz o torque resultante necessário para vencer a inércia rotacional da polia e acelerar (modificar) sua rotação.

Outro exemplo: considere o sistema de arranque de uma roçadeira à gasolina (máquina de cortar grama e mato). Para dar partida no motor, deve-se puxar o cordão de arranque com força, fazendo girar uma polia acoplada ao eixo do motor. A Figura 5.26 ilustra essa idéia. Considere que o operador aplique uma força \vec{F} na extremidade do cordão de arranque, que está enrolado em torno de uma polia, que é um disco de raio A . Chamamos o eixo de rotação da polia, para fora da página, de z . Suponha que haja a flexibilidade de variar o ângulo θ entre a direção do cordão (que é a direção de \vec{F}) e a direção da tangente à polia (linha tracejada preta).

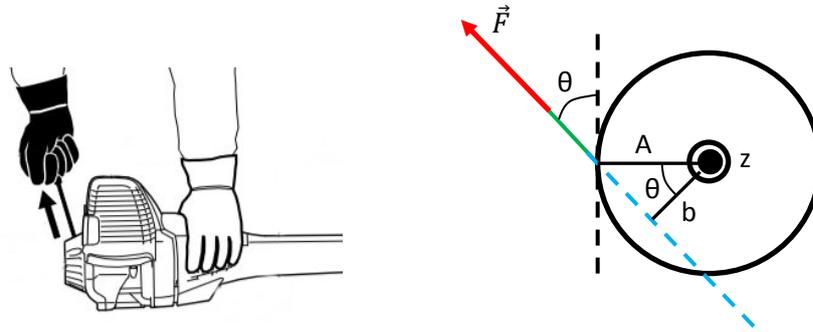


Figura 5.26: Para dar partida em um motor à gasolina de uma roçadeira o operador deve aplicar um torque no eixo do motor (eixo z para fora da página), dando início à sua rotação.

Note que θ também é o ângulo entre o raio A que passa pelo ponto de aplicação da força e o braço de alavanca b da força (a linha de ação de \vec{F} é a linha tracejada azul). Portanto, o torque da força que o operador faz na polia tem magnitude:

$$|\tau_{\vec{F}z}| = F b = F A \cos(\theta)$$

(equivalentemente, a força tangencial é $F \cos(\theta)$).

A regra da mão direita diz que esse torque está para dentro da página e, portanto, considerando que adotamos um eixo z para fora da página, segue que:

$$\tau_{\vec{F}z} = -F A \cos(\theta)$$

A figura que segue ilustra o uso da regra da mão direita nesse caso. O polegar aponta para dentro da página.

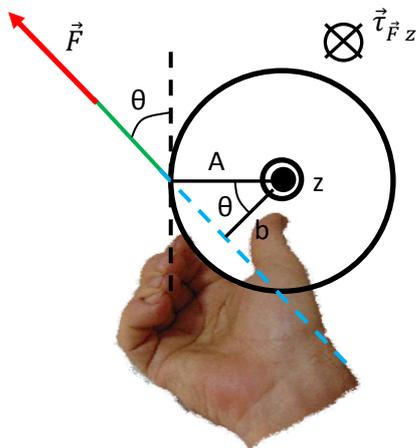


Figura 5.27: Para a força \vec{F} mostrada na figura o torque ao longo do eixo z aponta para dentro da página (polegar para dentro) e, portanto, é negativo no referencial adotado (eixo z para fora da página). A seta do torque (bolinha com cruz) foi deslocada do eixo z para tornar a figura mais clara.

Note que o melhor que o operador pode fazer é ajustar o cordão para $\theta = 0$, pois nesse caso $\cos(\theta) = 1$ e o torque é máximo, para uma mesma força F e um mesmo raio de polia A . Nesse ângulo o braço de alavanca de \vec{F} é máximo, $b = A$, ou, equivalentemente, a força tangencial é máxima, $F_t = F$. Em uma máquina roçadeira real não há liberdade no ajuste de θ , pois o cordão é guiado e forçado a abraçar a polia fixando o valor $\theta = 0$.

5.4 Movimento combinado de rotação e translação

Os movimentos mais complexos que observamos na natureza e nas máquinas são combinações de translação (**T**) e rotação (**R**). O planeta Terra, por exemplo, executa simultaneamente um movimento de translação em uma trajetória elíptica em torno do Sol e um movimento de rotação em torno de um eixo que passa por seus pólos geográficos. Esse eixo não é um eixo fixo, pelo contrário, ele descreve uma elipse em torno do Sol, mas mantendo sua orientação fixa no espaço (ele se desloca paralelamente a ele mesmo). De fato, a orientação do eixo de rotação da Terra oscila levemente no espaço, devido ao fato da Terra não ser exatamente esférica, mas sim achatada nos pólos. Esse movimento oscilatório do eixo de rotação é chamado de precessão. Na aproximação em que a Terra é uma esfera rígida essa oscilação não ocorre.

Podemos ilustrar o movimento da Terra supondo, em um modelo simplificado, que a Terra possui uma órbita circular em torno de um eixo z que passa pelo centro do Sol (o que não está muito longe da realidade, tendo em vista que a excentricidade da órbita elíptica da Terra é muito baixa) e que o eixo z' de rotação da Terra em torno de si mesma é ortogonal ao plano dessa órbita (plano da eclíptica). De fato, esse eixo está inclinado de cerca de 23° em relação à direção ortogonal a esse plano. Essa inclinação do eixo de rotação da Terra dá origem às estações do ano.

Considere então a Figura 5.28 (fora de escala), que ilustra a órbita circular da Terra (curva vermelha) em torno do Sol, em uma visão “de cima”. A Terra é representada por um círculo com um risco radial, para indicar sua orientação no espaço e o Sol é representado por uma bolinha laranja no centro da órbita circular. O período orbital é o tempo que o CM da Terra leva para dar uma volta completa nesse círculo, $T_O = 365$ dias (velocidade angular $\omega_O = 360/365$ graus/dia = $2\pi/365 \cong 0,017$ rad/dia). O período de rotação é o tempo que a Terra leva para dar uma volta completa em torno de seu eixo de rotação z' , $T_R = 1$ dia (velocidade angular $\omega_R = 360/1$ graus/dia = $2\pi \cong 6,28$ rad/dia).

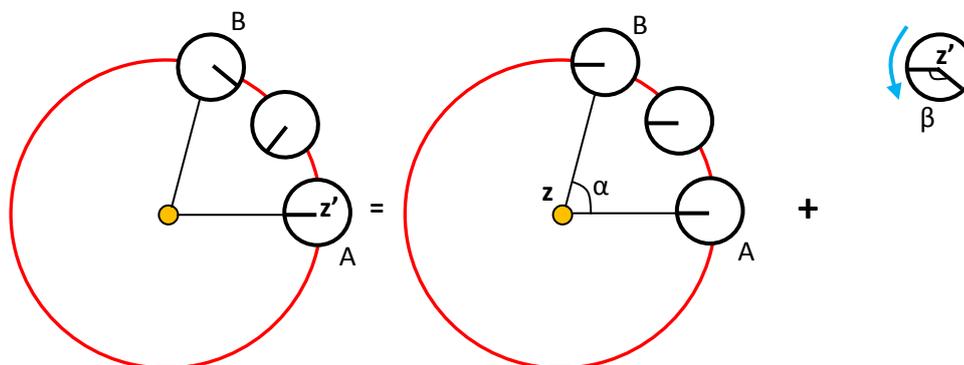


Figura 5.28: O movimento da Terra no espaço é basicamente a superposição (soma) de uma translação ao longo de um círculo centrado no eixo z que passa pelo Sol com uma rotação em torno de um eixo z' que passa pelos pólos terrestres (pelo CM da Terra). Essa é a ideia do teorema de Chasles. Nesse modelo simplificado, os dois eixos de rotação estão ortogonais ao plano da página, que é o plano da órbita da Terra em torno do Sol (curva vermelha).

Ilustramos na Figura 5.28 um intervalo de tempo Δt em que a Terra vai da posição A para a posição B em sua órbita, ao mesmo tempo em que sua orientação muda no espaço. O raio da Terra ao Sol gira um ângulo α ($\alpha = \omega_o \Delta t$), enquanto que a orientação da Terra gira de um ângulo β ($\beta = \omega_R \Delta t$). O teorema de Chasles diz que podemos decompor esse movimento em translação+rotação em torno de um eixo que passa pelo CM (eixo z' , ortogonal ao plano da página): primeiro levamos a Terra de A para B, girando-a de um ângulo α em torno do eixo z (ortogonal ao plano da página), sem alterar sua orientação no espaço. Essa é a translação da Terra. Note, esse movimento de A até B não é uma rotação da Terra, pois a orientação da Terra não está mudando, por hipótese. Agora vamos acrescentar/superpor uma rotação ao movimento da Terra. Estando então a Terra em B, giramos sua orientação de um ângulo β , em torno do eixo z' , no sentido anti-horário. Essa é a rotação da Terra. O resultado final, da superposição desses dois movimentos, translação (\mathbf{T}) e rotação (\mathbf{R}) é o movimento (\mathbf{M}) real da Terra (nesse modelo) nesse intervalo de tempo Δt , ou seja: $\mathbf{M} = \mathbf{T} + \mathbf{R}$.

Essa decomposição de um movimento mais complexo não é a única. Se quisermos, podemos decompor o movimento da Terra de outras formas. Mas, a decomposição em translação + rotação em torno de um eixo pelo CM é mais intuitiva e mais adequada para aplicação dos formalismos da translação e da rotação que já estudamos. Apenas para ilustrar, mostramos na Figura 5.29 a decomposição do movimento da Terra em uma superposição de duas rotações (nesse mesmo modelo simplificado para o movimento da Terra).

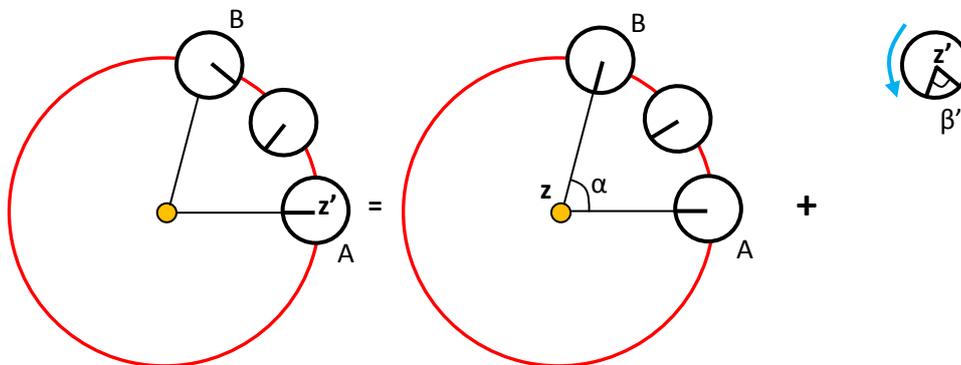


Figura 5.29: O movimento da Terra no espaço pensado como a superposição de duas rotações: em torno do eixo z que passa pelo Sol e em torno de um eixo z' que passa pelos pólos terrestres (pelo CM da Terra).

Primeiro fazemos uma rotação da Terra de um ângulo α em torno do eixo z , levando-a da posição A para a posição B. Note que esse movimento não é uma translação, pois a orientação da Terra mudou. Trata-se aqui de uma rotação da Terra em torno do eixo z (\mathbf{R}_z). Depois fazemos uma rotação de um ângulo β' em torno do eixo z' ($\mathbf{R}_{z'}$). O resultado final é o movimento total da Terra nesse intervalo de tempo ($\mathbf{M} = \mathbf{R}_z + \mathbf{R}_{z'}$). Note o inconveniente dessa representação do movimento da Terra. A Terra girou de um ângulo β' em torno do eixo que passa por seus pólos. Portanto, essa rotação não é o movimento que costumamos chamar de rotação da Terra, uma rotação com período de 24 h. Trata-se de outra rotação. Não há nada de errado com ela, mas não

nos referimos a essa rotação quando falamos usualmente da rotação da Terra. Falamos sim da rotação representada na Figura 5.28.

De fato, na primeira representação do movimento da Terra, a Terra gira de um ângulo $\beta = \omega_R \Delta t$ em torno do eixo que passa pelo CM, com $\omega_R = 360$ graus/dia. Já na segunda representação, em termos de duas rotações, como já houve uma rotação de $\alpha = \omega_O \Delta t$ com $\omega_O = 360/365$ graus/dia, então β' deve ser tal que:

$$\beta' = \beta - \alpha$$

Portanto, a velocidade angular da segunda rotação associada ao giro do ângulo β' deve ser tal que:

$$\omega'_R \Delta t = \omega_R \Delta t - \omega_O \Delta t$$

ou seja:

$$\omega'_R = \omega_R - \omega_O = \frac{364}{365} 360 \text{ rad/dia}$$

Deixaremos de lado essas várias possibilidades de decomposição de um movimento e ficaremos aqui com a ideia expressa na Figura 5.28, de que todo movimento (\mathbf{M}) pode ser decomposto em uma translação (\mathbf{T}) + uma rotação em torno de um eixo pelo CM (\mathbf{R}_{CM}). Esquemáticamente: $\mathbf{M} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_{CM}$. Um movimento de translação puro é o caso em que a rotação é nula ($\mathbf{M} = \mathbf{T} + 0$). Um movimento de rotação em torno de um eixo fixo que passa pelo CM é o caso em que a translação é nula ($\mathbf{M} = 0 + \mathbf{R}_{CM}$). Qualquer outro movimento, em que o CM se move no espaço e a orientação do corpo muda pode ser decomposto em $\mathbf{M} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_{CM}$ com $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{R}_{CM} \neq \mathbf{0}$. Isso vale mesmo para uma rotação pura em torno de um eixo que não passa pelo CM, como na figura 5.29: $\mathbf{R}_{\text{NÃO CM}} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_{CM}$.

Para esse tipo de movimento combinado as duas energias cinéticas, de translação e de rotação, se combinam, para juntas formarem a energia cinética do corpo, ou seja, se $\mathbf{M} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_{CM}$, então:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

sendo ω a velocidade de rotação do corpo em torno de um eixo que passa pelo CM e I o momento de inércia do corpo em relação a esse eixo.

A Terra, por exemplo, é basicamente uma esfera maciça de massa $M_T \cong 6 \times 10^{24}$ kg e raio $R_T \cong 6.400$ km, orbitando o Sol com velocidade orbital $V_{CM} \cong 30$ km/s (velocidade do CM da Terra em relação ao Sol). Portanto:

$$K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M_T V_{CM}^2 \cong 2,7 \times 10^{33} \text{ J}$$

A velocidade de rotação da Terra (em torno do eixo que passa por seus pólos geográficos) é:

$$\omega = 2 \pi \text{ rad/dia} = 2 \pi / 24 \text{ rad/h} = 2 \pi / 86.400 \text{ rad/s}$$

Portanto:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M_T R_T^2 \right) \omega^2 \cong 2,6 \times 10^{29} \text{ J}$$

Como K_{rot} é muito menor que K_{trans} , nesse caso vale $K \cong K_{\text{trans}}$.

Nesses movimentos combinados, o CM se move de acordo com a segunda lei de Newton (que é a equação que descreve a translação):

$$\vec{R}_{EXT} = M \vec{a}_{CM}$$

Quanto à lei da dinâmica de rotação, $\tau_{REXTz} = I \alpha$, ela não vale para todos os movimentos de rotação, pois foi deduzida no contexto de eixo de rotação fixo. Mas, é possível mostrar (voltaremos a esse ponto quando estudarmos o momento angular) que essa lei vale para casos como o do planeta Terra (suposta esférica e rígida), em que o eixo de rotação:

1. Se move paralelamente a ele mesmo (não muda de direção).
2. É um eixo de simetria do corpo, ou seja, um eixo tal que tomando diâmetros centrados nesse eixo, toda partícula tem uma “gêmea” diametralmente oposta. Note que, nesse caso, esse eixo de simetria é um eixo que passa pelo CM do corpo.

Portanto, para a rotação do planeta Terra em torno do eixo z que passa pelos pólos podemos escrever:

$$\tau_{REXTz} = I \alpha$$

As forças externas principais que atuam na Terra são a força produzida pelo Sol e a força produzida pela Lua. Se a Terra fosse de fato uma esfera perfeita, essas forças atuariam no centro da Terra e, portanto, não produziram torque ao longo do seu eixo de rotação. Nesse caso valeria $\alpha = 0$ e a velocidade de rotação da Terra seria constante. Mas, a Terra está longe de ser uma esfera perfeita, principalmente pelas deformações produzidas pela sua própria rotação e pela presença da Lua (marés) e por isso a força Lua/Terra atua fora do eixo de rotação da Terra e acaba por produzir um torque ao longo desse eixo, dando origem a uma aceleração oposta à velocidade, que vai freando lentamente a rotação da Terra.

Um movimento comum que combina translação e rotação é o movimento de rolamento de um cilindro (como os pneus de um carro rolando no asfalto) ou esfera (como uma bola de sinuca ou boliche que rola em uma superfície rígida). Quando um cilindro ou uma esfera rolam em uma superfície, mantendo fixa a direção do eixo z de rotação (eixo pelo CM), valem simultaneamente:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\vec{R}_{EXT} = M \vec{a}_{CM}$$

$$\tau_{REXTz} = I \alpha \quad (\text{eixo z pelo CM})$$

A Figura 5.30 abaixo ilustra um pneu de carro que está, por hipótese, rolando em uma superfície horizontal. Todos os pontos do pneu avançam para a direita, juntamente com o CM do pneu, ao mesmo tempo em que giram no sentido horário em torno de um eixo central, ortogonal ao plano da página. O ponto P (amarelo) é um ponto na periferia do pneu, periferia que está sempre em contato com o piso, por hipótese.

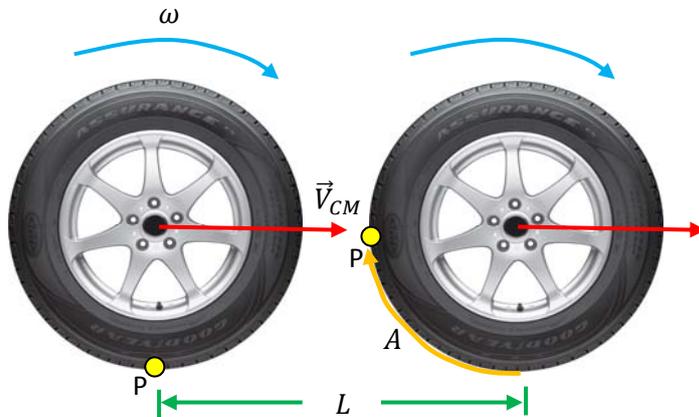


Figura 5.30: Um pneu rola em uma superfície horizontal. Enquanto o centro do pneu (CM) vai para a direita com velocidade \vec{v}_{CM} , os outros pontos do pneu acompanham o CM e ao mesmo tempo giram com velocidade angular ω em torno de um eixo z ortogonal ao plano da página que passa por esse centro.

Se considerarmos um intervalo de tempo Δt , o CM do pneu, que viaja com velocidade \vec{v}_{CM} , vai se deslocar uma distância L na horizontal. Por outro lado, nesse mesmo intervalo de tempo, um ponto P (marcado em amarelo) na periferia do pneu, que está girando em torno de um eixo que passa pelo CM com velocidade angular ω , vai percorrer um arco de circunferência de comprimento A (seta curva laranja). O teorema de Chasles aplicado a esse movimento nos permite dizer que o rolamento do pneu é uma composição de uma translação (**T**), em que todos os pontos do pneu viajam com velocidade \vec{v}_{CM} e são deslocados de L para a direita em um tempo Δt , superposta a uma rotação em torno de um eixo (ortogonal ao plano da página) que passa pelo centro do pneu (\mathbf{R}_{CM}), em que todos os pontos do pneu descrevem arcos de círculos em torno desse eixo com velocidade angular ω (o ponto P, em particular, descreve um arco de comprimento A no tempo Δt).

A Figura 5.31 ilustra a mesma ideia da Figura 5.30, de uma forma esquemática: $\mathbf{M} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_{CM}$. Primeiro transladamos o pneu de uma distância L (nesse movimento a orientação do pneu não muda). Depois giramos o pneu em torno de um eixo z que passa pelo CM do pneu de um ângulo $\Delta\theta$ (nesse movimento o eixo de rotação permanece fixo). O resultado final da composição desses dois movimentos é o rolamento do pneu.

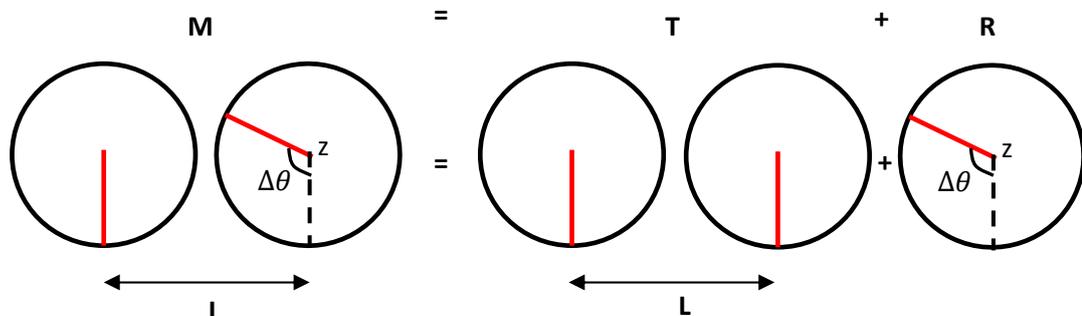


Figura 5.31: Um rolamento (**M**) é a superposição de uma translação (**T**) com uma rotação (\mathbf{R}_{CM}) em torno de um eixo z que passa pelo CM (ortogonal ao plano da página).

Podemos considerar dois casos extremos:

1. O pneu está derrapando no piso, sem girar. Nesse caso vale $A = 0$ (porque $\Delta\theta = \omega \Delta t = 0$) e $L = V_{CM} \Delta t \neq 0$. Isso ocorre quando um motorista pisa no freio bruscamente, em uma pista escorregadia. Trata-se de um simples movimento de translação do pneu ($\mathbf{M} = \mathbf{T} + \mathbf{0}$).
2. O pneu está patinando no mesmo lugar. Nesse caso vale $L = 0$ (porque $V_{CM} = 0$) e $A \neq 0$. Isso ocorre quando um motorista arranca com o carro bruscamente, em uma pista escorregadia. Trata-se de um simples movimento de rotação do pneu em torno de um eixo fixo que passa pelo CM ($\mathbf{M} = \mathbf{0} + \mathbf{R}_{CM}$).

Qualquer coisa no meio desses extremos pode ser considerada um rolamento do pneu. Um caso especial é o do rolamento sem deslizamento (RSD), em que não ocorre nenhum resquício de derrapagem ou de patinação. Esse seria o caso de um pneu rolando em uma pista que não escorrega. Na Figura 5.30, é fácil notar que para o RSD vale:

$$L = A$$

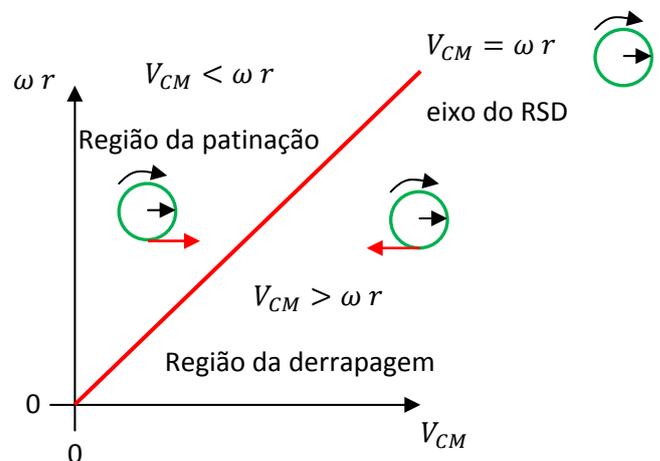
$$\text{Segue que: } L = V_{CM} \Delta t = A = r \Delta\theta = r \omega \Delta t$$

sendo $\Delta\theta$ o ângulo varrido pelo raio r do pneu no intervalo de tempo Δt . Portanto, para o RSD vale o vínculo entre translação e rotação:

$$V_{CM} = \omega r$$

Além desse vínculo entre as velocidades, o RSD se caracteriza pelo fato de ser idealmente um movimento sem dissipação de energia mecânica, pois não há atuação de força de atrito cinético nesse caso. O atrito cinético atua em todos os movimentos de rolamento, menos no RSD. Se houver atrito no RSD, ele será atrito estático, que não produz dissipação de energia mecânica (aumento de energias internas, por exemplo). Finalmente, o vínculo entre as velocidades ($V_{CM} = \omega r$) leva ao vínculo entre as acelerações: $a_{CM} = \alpha r$.

Considerando então as duas velocidades V_{CM} e ωr para um cilindro (ou esfera) de raio r , que rola em uma superfície horizontal para a direita, podemos fazer o gráfico ao lado. O eixo horizontal $\omega r = 0$ corresponde ao cilindro somente com translação, ou seja, derrapando sem girar. O eixo vertical $V_{CM} = 0$ corresponde ao cilindro girando no mesmo lugar, ou seja, patinando sem sair do lugar. A reta vermelha (de inclinação = 1), que divide o gráfico em duas metades iguais, é a reta $V_{CM} = \omega r$, que corresponde exatamente ao rolamento sem deslizamento (RSD). Abaixo dessa reta está a região



com excesso de translação ($V_{CM} > \omega r$, ou $L > A$), que chamamos de região de derrapagem, quando a força de atrito cinético (seta vermelha) estará apontando para a esquerda. Isso porque os pontos do cilindro que estão em contato com o chão vão para a direita por causa de V_{CM} e, ao mesmo tempo para a esquerda, por causa de ωr . Mas, como $V_{CM} > \omega r$, acaba que esses pontos deslizam no piso para a direita e daí a força de atrito cinético estará para a esquerda. Acima dessa reta vermelha está a região com excesso de rotação ($V_{CM} < \omega r$ ou $L < A$), que chamamos de região de patinação, quando a força de atrito cinético estará apontando para a direita. Isso porque os pontos do cilindro que estão em contato com o chão vão para a direita por causa de V_{CM} e, ao mesmo tempo para a esquerda, por causa de ωr . Mas, como $V_{CM} < \omega r$, acaba que esses pontos deslizam no piso para a esquerda e daí a força de atrito cinético estará para a direita. Agora você pode entender porque no RSD, nesse caso, não há atrito cinético no cilindro. Os pontos do cilindro que estão em contato com o chão vão para a direita por causa de V_{CM} e, ao mesmo tempo para a esquerda, por causa de ωr . Mas, como $V_{CM} = \omega r$ (ou $L = A$), acaba que esses pontos não deslizam no piso e daí não há força de atrito cinético. Se houver atrito no RSD, ele será estático. A existência de atrito estático no RSD vai depender da situação. Existem casos em que há atrito e outros casos em que não há.

Considere o exemplo de uma bola de sinuca que rola sem deslizar na superfície horizontal de uma mesa. A Figura 5.32 ilustra o diagrama de forças dessa bola. Ninguém, por hipótese, puxa ou empurra a bola, a bola rola solta após uma colisão com outra bola.

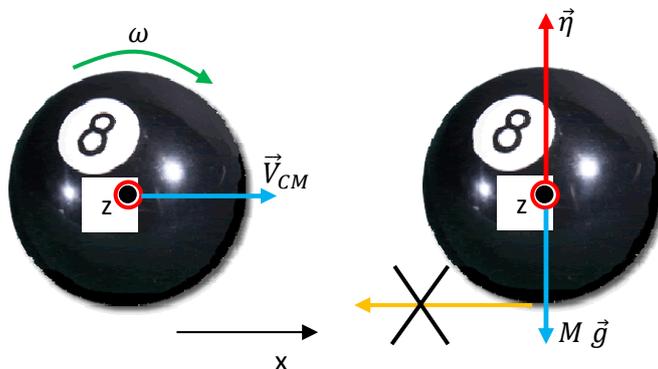


Figura 5.32: Uma bola de sinuca de massa M e raio r rola solta para a direita sem deslizar (RSD) em uma mesa horizontal.

Poderíamos ser tentados a representar no diagrama de forças dessa bola uma força de atrito estático $\vec{F}_A^{(E)}$, como a seta laranja mostrada na figura. Mas note, havendo essa força, haveria uma aceleração do CM da bola ao longo de x , dada por:

$$-F_A^{(E)} = M a_{CM}$$

e a velocidade V_{CM} diminuiria, pois a bola estaria freando (aceleração antiparalela). Da mesma forma, considerando o eixo z que passa pelo CM da bola (eixo saindo da página ortogonalmente), a força de atrito produziria um toque ao longo desse eixo, um torque para dentro da página. Note que $\vec{\omega}$ também está para

dentro da página (sentido horário) e, portanto, ω vai aumentar com o tempo, pois a rotação está acelerada (torque e aceleração paralelos à $\vec{\omega}$). Note a contradição: se a bola está em RSD, então deve valer o vínculo:

$$V_{CM} = \omega r$$

Como pode V_{CM} diminuir ao mesmo tempo em que ω aumenta? Se o vínculo do RSD vale, então ou V_{CM} e ω aumentam juntos, diminuem juntos, ou se mantêm constantes juntos. Qualquer outra coisa é absurda. Note que inverter o sentido do atrito não vai resolver. Portanto, para uma bola rolando solta sem deslizar em uma superfície horizontal não haveria nenhuma força de atrito na bola.

Trata-se obviamente de uma situação idealizada. Na prática, se você der uma tacada leve em uma bola de sinuca vai ver que ela rola sem deslizar até parar. Essa dissipação de energia não está associada a um atrito estático (o que seria absurdo) e nem a um atrito cinético, pois a bola não está deslizando. Há uma dissipação de energia no RSD associada ao processo de deformação do corpo que rola e da superfície onde esse corpo rola. Se você já tentou andar em uma bicicleta ou motocicleta com um pneu murcho vai entender logo que um pneu murcho se deforma muito e oferece uma grande oposição ao rolamento. Pneus bem cheios se deformam pouco e rolam com maior facilidade. Da mesma forma, andar de bicicleta na areia é muito mais difícil do que andar no concreto duro. Essa oposição ao rolamento devido às deformações, que sempre existem, é chamada de “atrito de rolamento”. Fato é que em geral é muito mais fácil rolar um objeto do que arrastá-lo, porque o atrito de rolamento é em geral muito menor que o atrito cinético. Esse fato da vida justifica a invenção da roda e seu uso disseminado no transporte de cargas. No caso da Figura 5.32 estamos desprezando o atrito de rolamento na bola de sinuca (porque a bola e o piso são bastante rígidos). Nesse sentido, não haveria nenhum atrito na bola, se ela estivesse rolando em RSD. Em uma mesa de sinuca real, o tecido que cobre a mesa se deforma quando a bola se apóia e rola nele. A bola, por sua vez, é bastante rígida e praticamente não se deforma. O atrito de rolamento na bola vem da deformação da superfície macia da mesa. Se a mesa fosse rígida e lisa, a bola rolaria livre por muito tempo antes de parar, que é basicamente o que acontece com uma bola de boliche. No que segue, não vamos levar em conta esse atrito de rolamento, na hipótese de que ele é sempre pequeno e desprezível.

Seria diferente se a bola estivesse rolando sem deslizar em uma superfície inclinada, como na Figura 5.33 que segue. Nesse caso há um atrito estático apontando para cima, pois a bola tem uma tendência de deslizar para baixo. Isso é verdade se a bola estiver subindo ou descendo o plano inclinado sem deslizar.

De fato, se não desenhamos nenhuma força de atrito, por hipótese, vemos que há uma resultante $M g \sin(\theta)$ ao longo de x , que vai fazer com que V_{CM} aumente com o passar do tempo. Por outro lado, não haveria torques ao longo do eixo z que passa pelo CM da bola, pois o peso e a normal não possuem braço de alavanca em relação a esse eixo. Sendo assim, a velocidade angular ω ao longo de z se manteria constante, enquanto a bola cai, o que contradiz a hipótese de RSD, que pressupõe a validade permanente do vínculo:

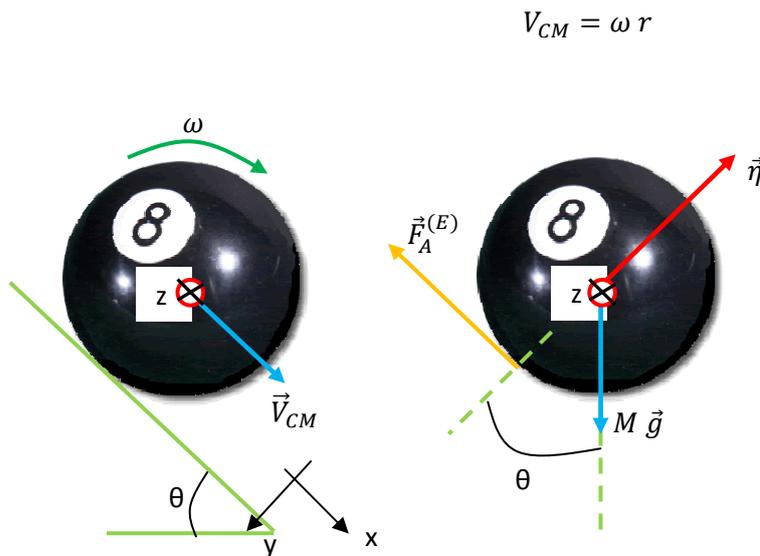


Figura 5.33: Uma bola de sinuca de massa M e raio r rolando (RSD) para baixo em um plano inclinado. As forças que atuam na bola são o peso, a normal e a força de atrito estático. Note que adotamos, por conveniência, um eixo z pelo CM da bola apontando para dentro da página.

Somos obrigados a concluir que falta no digrama de forças uma força de atrito. Somente uma força de atrito apontando para cima vai produzir uma velocidade ω crescente, pois ela produzirá um torque para dentro da página, paralelo ao vetor $\vec{\omega}$.

Note que nada impede que uma bola role para baixo de um plano inclinado sem atrito, ela só não pode fazer isso sem deslizar. Para que a bola role sem deslizar, nesse caso, é necessária a presença de atrito estático. Se houver óleo derramado na superfície do plano inclinado, pode ser que seja impossível uma bola de sinuca descer rolando esse plano sem deslizar.

Concluindo: para a bola descendo o plano inclinado, a velocidade $\vec{\omega}$ está para dentro da página (sentido $+z$), que é o mesmo sentido do torque da força $\vec{F}_A^{(E)}$ que aponta para cima. Portanto, a aceleração $\vec{\alpha}$ também estará para dentro da página e a velocidade de rotação da bola aumentará com o tempo (aceleração paralela). Da mesma forma, haverá uma resultante de forças e uma aceleração \vec{a}_{CM} para baixo, que aumentará a velocidade \vec{V}_{CM} . Levando isso em conta, adotamos um referencial padrão com o eixo x para baixo, que é o sentido da aceleração \vec{a}_{CM} . Por esse mesmo critério, adotamos um eixo z para dentro da página, que é o sentido da aceleração $\vec{\alpha}$. Note que para um referencial xyz direito o eixo y vai ficar apontando para dentro do plano inclinado (no sentido de $-\vec{\eta}$).

Das leis da dinâmica (translação + rotação) segue que:

$$\text{No eixo } x: M g \sin(\theta) - F_A^{(E)} = M a_{CM}$$

$$\text{No eixo } y: -\eta + M g \cos(\theta) = 0$$

$$\text{No eixo } z: F_A^{(E)} r = I \alpha$$

$$\text{Vale ainda o vínculo do RSD: } a_{CM} = \alpha r$$

Portanto, a bola vai descer com a seguinte aceleração de CM:

$$M g \operatorname{sen}(\theta) - F_A^{(E)} = M g \operatorname{sen}(\theta) - \frac{I \alpha}{r} = M a_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{M g \operatorname{sen}(\theta)}{M + I/r^2}$$

Uma bola de sinuca é uma esfera maciça e, portanto: $I = \frac{2}{5} M r^2$.

Logo:

$$a_{CM} = \frac{g \operatorname{sen}(\theta)}{1 + 2/5} = \frac{5}{7} g \operatorname{sen}(\theta)$$

Sendo a aceleração constante, a velocidade do CM da bola vai seguir a equação horária (MRUV):

$$V_{CM}(t) = V_{CM0} + \frac{5}{7} g \operatorname{sen}(\theta) t$$

Da mesma forma, como $\alpha = a_{CM}/r$, a velocidade angular da bola vai variar de acordo com:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{5}{7} \frac{g}{r} \operatorname{sen}(\theta) t$$

Tendo em vista a aceleração do CM que obtivemos, a equação para a posição x_{CM} do CM da bola ao longo do plano inclinado é (supondo que ela parta do repouso, $V_{CM0} = 0$):

$$x_{CM}(t) = x_{CM0} + \frac{1}{2} \frac{5}{7} g \operatorname{sen}(\theta) t^2$$

Portanto, ao descer uma altura H , o CM da bola terá percorrido uma distância $\Delta x = H/\operatorname{sen}(\theta)$. O tempo necessário para isso ocorrer será dado pela equação:

$$x_{CM}(t) - x_{CM0} = \frac{H}{\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{1}{2} \frac{5}{7} g \operatorname{sen}(\theta) t^2$$

Logo:

$$t = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \sqrt{\frac{14 H}{5 g}}$$

Nesse instante as velocidades valem:

$$V_{CM}(t) = V_{CM0} + \frac{5}{7} g \operatorname{sen}(\theta) t = 0 + \frac{5}{7} g \sqrt{\frac{14 H}{5 g}} = \sqrt{\frac{10}{7} g H}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{5}{7} \frac{g}{r} \operatorname{sen}(\theta) t = 0 + \frac{5}{7} \frac{g}{r} \sqrt{\frac{14 H}{5 g}} = \sqrt{\frac{10 g H}{7 r^2}}$$

Poderíamos obter essas velocidades apelando para a conservação da energia mecânica da bola. A presença do atrito estático não altera o fato de que a energia mecânica da bola se conserva na descida. O

atrito estático não realiza trabalho, não diminui a energia mecânica da bola. De fato, se considerarmos que a bola partiu do repouso e caiu uma altura H , o teorema do trabalho energia diz que suas velocidades V_{CM} e ω serão tais que:

$$E(i) = E(f) \Rightarrow 0 + 0 + M g H = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + 0$$

Levando em conta o vínculo do RSD, $V_{CM} = \omega r$, obtemos:

$$M g H = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{V_{CM}}{r} \right)^2$$

Logo, após descer uma altura H , o CM da bola estará com a velocidade:

$$V_{CM} = \sqrt{\frac{2 M g H}{M + I/r^2}}$$

Ou seja:

$$V_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7} g H}$$

Após essa descida a bola estará girando em torno de seu eixo com uma velocidade:

$$\omega = \frac{V_{CM}}{r} = \sqrt{\frac{10}{7} \frac{g H}{r^2}}$$

O que demonstra a coerência entre as diferentes abordagens do mesmo problema.

Para nos aventurarmos um pouco para fora do contexto do RSD, vamos considerar uma bola de sinuca que acabou de receber uma tacada em uma posição central, como ilustrado na Figura 5.33 abaixo. Vamos analisar o movimento da bola logo após a tacada.

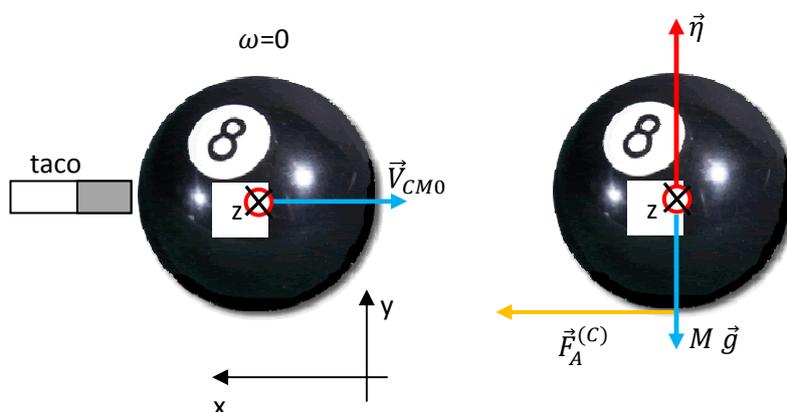


Figura 5.33: Uma bola de sinuca de massa M e raio r acabou de receber uma tacada central. Logo após a tacada, a bola vai sair deslizando para a direita, freando e adquirindo rotação.

Note que a força que o taco aplica na bola, um pulso de força aplicado na altura do centro da bola, não possui torque ao longo do eixo z da bola e por isso não imprime rotação nela. Essa força do taco apenas

empurra a bola para frente, imprimindo nela uma velocidade inicial de CM, \vec{V}_{CM0} . Devido a esse “excesso de translação” ($V_{CM} > \omega r = 0$), logo após a tacada, a bola vai sair deslizando na mesa e sofrendo uma força de atrito cinético para a esquerda. Essa força de atrito desempenha três papéis: ela freia a translação; ela produz rotação na bola, devido ao seu torque ao longo de z , e ela diminui a energia cinética da bola (dissipa energia mecânica).

As equações da dinâmica (translação + rotação) dizem que (μ_C é o coeficiente de atrito cinético entre a bola e a superfície da mesa):

$$\text{Ao longo de } x: F_A^{(C)} = M a_{CM} \Rightarrow \mu_C \eta = M a_{CM}$$

$$\text{Ao longo de } y: \eta - M g = 0$$

$$\text{Ao longo de } z: F_A^{(C)} r = I \alpha \Rightarrow \mu_C \eta r = I \alpha$$

Note que não levamos em conta a força que o taco faz na bola porque estamos analisando o movimento da bola após a tacada, quando ela começa a se mover com a condição inicial $V_{CM} = V_{CM0}$ e $\omega = \omega_0 = 0$.

Portanto, o CM freia com a aceleração de módulo:

$$a_{CM} = \mu_C g$$

A rotação, por sua vez, acelera com a aceleração (note que $I = (2/5) M r^2$):

$$\alpha = \frac{\mu_C M g r}{I} = \frac{5}{2} \frac{\mu_C g}{r}$$

Podemos ver que não vale o vínculo $a_{CM} = \alpha r$, pois a bola não está em RSD.

Sendo as acelerações constantes, as equações horárias das velocidades ($V_{CM}(0) = V_{CM0}$ e $\omega(0) = 0$) são (note os sinais, $V_{CM}(t)$ diminui no tempo e $\omega(t)$ aumenta):

$$V_{CM}(t) = V_{CM0} - \mu_C g t$$

$$\omega(t) = \frac{5}{2} \frac{\mu_C g}{r} t$$

V_{CM} vai diminuindo e ω vai aumentando com o passar do tempo e fatalmente vai existir um instante t^* em que o vínculo do RSD, $V_{CM} = \omega r$, vai valer. Nesse instante a força de atrito cinético desaparece (pois o deslizamento da bola cessa), o CM da bola para de frear e a rotação da bola para de aumentar. Daí em diante a situação é como aquela da Figura 5.31, a bola passa a rolar solta eternamente, sem deslizar (estamos desprezando o atrito de rolamento). Esse instante t^* é tal que:

$$V_{CM}(t^*) = \omega(t^*) r \Rightarrow V_{CM0} - \mu_C g t^* = \frac{5}{2} \mu_C g t^*$$

Logo:

$$t^* = \frac{2}{7} \frac{V_{CM0}}{\mu_C g}$$

Nesse instante, as velocidades serão:

$$V_{CM}(t^*) = V_{CM0} - \mu_C g t^* = \frac{5}{7} V_{CM0}$$

$$\omega(t^*) = \frac{5}{2} \frac{\mu_C g}{r} t^* = \frac{5}{7} \frac{V_{CM0}}{r}$$

A energia cinética, que logo após a tacada valia:

$$K_0 = \frac{1}{2} M V_{CM0}^2$$

vai passar a valer no instante t^* em que inicia o RSD:

$$K(t^*) = \frac{1}{2} M V_{CM}^2(t^*) + \frac{1}{2} I \omega^2(t^*)$$

ou seja:

$$K(t^*) = \frac{5}{7} K_0$$

A perda de energia cinética da bola está associada ao trabalho do atrito cinético, que converte energia mecânica em outras formas de energia (energia interna da bola e da superfície). Após iniciado o RSD ($t > t^*$) a energia cinética da bola fica constante.

Podemos calcular o trabalho do atrito cinético e confirmar essa ideia. Note que:

$$\Delta K = \frac{5}{7} K_0 - K_0 = -\frac{2}{7} K_0$$

Queremos mostrar que:

$$\Delta K = W_{\vec{F}_A^{(C)}}(0 \rightarrow t^*)$$

que é o que diz o teorema do trabalho-energia cinética.

Usando a mesma ideia esboçada na Figura 5.30, vamos chamar de L a distância que a bola percorreu ao longo de x , dentro do intervalo de tempo de $t = 0$ até $t = t^*$, ou seja:

$$L = x(t^*) = V_{CM0} t^* - \frac{1}{2} \mu_C g (t^*)^2 = \frac{2}{7} \frac{6}{7} \frac{V_{CM0}^2}{\mu_C g}$$

Aqui poderíamos cometer o erro de calcular o trabalho do atrito através de:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(0 \rightarrow t^*) = -\mu_C M g L = \frac{12}{7} \left(-\frac{2}{7} K_0 \right)$$

Nesse cálculo (equivocado), levamos em conta que a bola se deslocou de uma distância L sob ação de uma força de atrito constante. Notamos claramente que obtivemos o resultado errado, por um fator $12/7$.

O erro nesse raciocínio está em considerar que o ponto de contato da bola com o piso (que está sofrendo a força de atrito cinético) percorreu apenas uma distância L , no tempo t^* . De fato, enquanto a bola avança de L ao longo de x , ela gira em torno de z e o ponto de contato da bola com o piso percorre um arco de comprimento A , tal que:

$$A = \theta(t^*) r = \frac{1}{2} \alpha (t^*)^2 r = \frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{\mu_C g}{r} (t^*)^2 r = \frac{5}{4} \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{V_{CM0}^2}{\mu_C g}$$

Portanto, enquanto o ponto de contato da bola com o piso avança de L para a direita, ele retorna A para a esquerda, ou seja, o trabalho do atrito cinético no tempo t^* foi:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(0 \rightarrow t^*) = -\mu_C M g (L - A)$$

Com base nessa expressão podemos entender melhor por que o trabalho do atrito estático é nulo. De fato, para o caso específico do RSD, vale $L = A$ e, portanto:

$$W_{\vec{F}_A^{(E)}}(i \rightarrow f) = -F_A^{(E)} (L - A) = 0$$

O atrito estático não realiza trabalho porque, enquanto o ponto de contato da bola com o piso avança de L para a direita, ele retorna $A=L$ para a esquerda, ou seja, o atrito estático atua em um ponto que está parado de fato. Se não há deslocamento, mesmo na presença de força, não há trabalho.

Voltando para o caso da bola que desliza, obtemos finalmente:

$$W_{\vec{F}_A^{(C)}}(0 \rightarrow t^*) = -\mu_C M g (L - A) = -\mu_C M g \left(3 - \frac{5}{4}\right) \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{V_{CM0}^2}{\mu_C g} = -\frac{2}{7} K_0$$

O gráfico na Figura 5.34 ilustra o comportamento das velocidades $V_{CM}(t)$ e $\omega(t)r$ em função do tempo t , logo após a tacada.

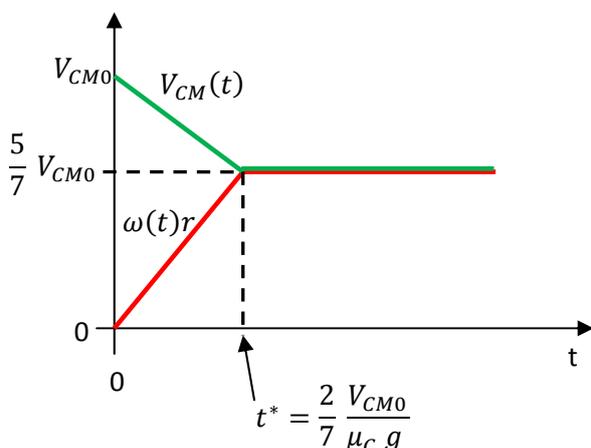


Figura 5.34: Comportamento das velocidades $V_{CM}(t)$ e $\omega(t)r$ em função do tempo t para uma bola que acabou de receber uma tacada com excesso de translação. Após um lapso de tempo o RSD vai ser estabelecido e as velocidades estabilizam, porque o atrito cinético desaparece.

Poderíamos imaginar aqui diversas tacadas diferentes na sinuca. Por exemplo, se o taco bater na bola em um ponto mais alto, pode imprimir na bola um “excesso de rotação” ($V_{CM0} < \omega_0 r$). Com isso, logo após a tacada o sentido da força de atrito cinético inverterá, estará para frente, e empurrará a bola para frente, aumentando sua velocidade V_{CM} . Ao mesmo tempo, o torque do atrito vai frear a rotação ω . Após um lapso de tempo o RSD vai se estabelecer, como no exemplo que discutimos acima.

Esse exemplo mostra a importância do rolamento sem deslizamento. Ele é o movimento final, assintótico, de um rolamento qualquer (livre, sem ninguém para empurrar ou puxar) em uma superfície horizontal, com excesso inicial de translação ou de rotação.

5.5 Momento angular

A tabela 5.2 que segue resume o paralelo que estabelecemos entre as grandezas associadas ao movimento de translação (ou de partícula) e o movimento de rotação.

Completamos o final da tabela com um sinal de interrogação indicando uma grandeza que desempenharia na rotação um papel similar ao desempenhado pelo momento linear na translação. Pretendemos desvendar essa interrogação nessa seção. As equações que escrevemos para a grandeza incógnita “ $?_z$ ” foram apenas sugeridas através da analogia entre os dois formalismos. Pretendemos verificar aqui se essa analogia se verifica mesmo ou não.

Grandeza	Translação	Rotação
Posição	$\vec{r}(t)$	$\theta(t)$
Velocidade	$\vec{V}(t)$	$\vec{\omega}(t)$
Aceleração	$\vec{a}(t)$	$\vec{\alpha}(t)$
Inércia	M	I
Energia cinética	$K = M V^2/2$	$K = I \omega^2/2$
Causa/ação	Força \vec{F}	Torque $\vec{\tau}$
Lei da dinâmica	$\vec{R} = M \vec{a}$	$\tau_{REXTz} = I \alpha$
Momento	$\vec{p} = M \vec{V}$	$?_z = I \omega$
Lei do momento	$\vec{R}_{EXT} = d\vec{p}/dt$	$\tau_{REXTz} = d?_z/dt$

Tabela 5.2: Paralelo entre os formalismos de translação e rotação em torno de um eixo fixo (z). Quanto ao final da tabela, fica a pergunta sobre a grandeza na rotação que desempenha um papel similar ao momento linear.

Vimos que o conceito de momento linear mostra de maneira mais evidente seu poder de solução naqueles problemas de mecânica que envolvem forças internas desconhecidas, como no caso das colisões. Nesses problemas apelamos frequentemente para a conservação do momento linear, ao desprezarmos as forças externas no sistema. Haveria então uma grandeza análoga que seria conservada na ausência de torques externos em um sistema? Se houver, essa é a grandeza incógnita que estamos procurando.

Consideremos então um exemplo de colisão, em que um atirador atira uma bala de massa m , com velocidade inicial horizontal \vec{V}_0 no centro de uma porta. A porta é uma placa rígida fina retangular, de massa M , altura H e largura A . Ela pode girar livremente em torno de um eixo fixo vertical (z) que passa pelas dobradiças. Após ser atingida pela bala, a porta gira em torno de seu eixo vertical (z). A pergunta que queremos responder é: qual a velocidade angular ω da porta logo após a colisão com a bala? A Figura 5.35 ilustra a situação.

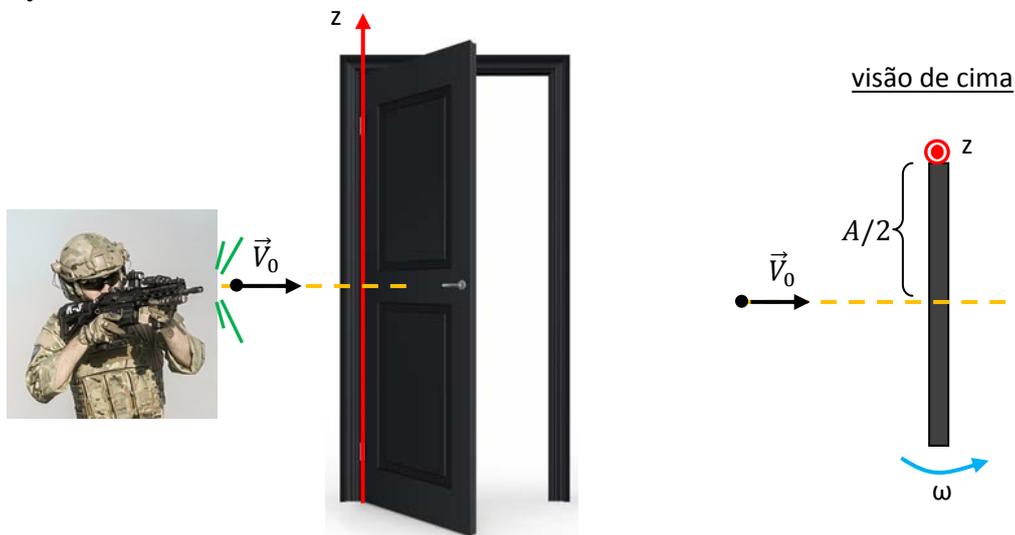


Figura 5.35: Um atirador dá um tiro no centro de uma porta. Logo após o impacto da bala (bolinha preta), a porta passa a girar com velocidade angular ω em torno de seu eixo de rotação vertical (z). Na visão de cima a porta gira no sentido anti-horário.

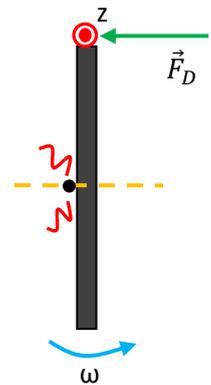
Percebemos que, ao enfrentar esse problema, muitos estudantes optam por estratégias equivocadas ou infrutíferas, como, por exemplo:

1. Já que a pergunta se refere à porta, poderíamos nos concentrar nela, que é um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo. Se conhecêssemos a força que a bala faz na porta durante o impacto poderíamos apelar para a lei $\tau_{REXTz} = I \alpha$ e tentar obter ω a partir daí. Mas, não temos chance de conhecer essa força.
2. Poderíamos apelar para a conservação da energia cinética do sistema bala+porta. A energia cinética inicial da bala é redistribuída entre a bala e a energia cinética de rotação da porta. Mas, não foi dito

que a colisão bala/porta é elástica. De fato, uma colisão entre corpos macroscópicos nunca é elástica e no caso da colisão bala/porta isso seria uma aproximação grosseira.

3. Poderíamos apelar para a conservação do momento linear do sistema bala+porta, afinal, para um sistema livre de forças externas essa grandeza se conserva. Mas, certamente atuam forças externas na porta no momento em que ela recebe o impacto da bala, caso contrário seu eixo de rotação não permaneceria fixo. De fato, esse é o papel das dobradiças, fixar o eixo de rotação da porta oferecendo a mínima oposição à rotação da porta. Portanto, durante o impacto bala/porta atuam forças externas intensas na porta (ou no sistema bala+porta), que seguram o eixo da porta, não permitindo que ele seja projetado para frente pelo impacto da bala. Essas forças desconhecidas variam, de forma imprevisível, o momento linear do sistema bala+porta.

Concluindo, vemos que as ferramentas que temos se esgotaram e não conseguimos calcular a velocidade ω . Investigando mais um pouco vemos que nesse sistema bala+porta atuam forças externas durante a colisão, mas não atuam torques externos ao longo do eixo z de rotação da porta. De fato, as forças que as dobradiças fazem na porta durante a colisão atuam no eixo z de rotação da porta e, portanto, não possuem braço de alavanca. A Figura ao lado ilustra uma dessas forças \vec{F}_D produzidas pelas dobradiças atuando no eixo da porta, segurando e fixando esse eixo enquanto a bala (bolinha preta) impacta o centro da porta. \vec{F}_D não possui torque ao longo do eixo z de rotação da porta. Logo, podemos ver essa colisão como um processo em que o sistema bala+porta está livre de torques externos ao longo de z (as outras forças externas no sistema, peso da bala e peso da porta, são verticais e nunca produziram torque ao longo de z , que é um eixo vertical. Os atritos nas dobradiças e o arraste da porta com o ar são desprezados durante a colisão). Havendo uma grandeza análoga ao momento linear, mas que se conserva na ausência de torques externos e não de forças externas, essa grandeza será a ferramenta que precisamos para calcular a velocidade ω . Tal grandeza existe e é chamada de “momento angular”.



5.5.1 Momento angular de uma partícula

O momento angular que estamos procurando é uma grandeza vetorial, que deve ser constante (conservada) na ausência de torques. Partindo da segunda lei de Newton para uma partícula de massa m , identificamos rapidamente qual deve ser a função que chamaremos de momento angular de uma partícula. De fato, fazendo o produto vetorial “ $\vec{r} \times$ ” dos dois lados da segunda lei de Newton para uma partícula de massa m obtemos:

$$\vec{R} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times m \vec{a} = \vec{r} \times \frac{d}{dt} m \vec{v}$$

sendo \vec{r} a posição da partícula, que está sofrendo a força resultante \vec{R} . Identificamos facilmente que o lado esquerdo dessa equação é o torque da força \vec{R} , $\vec{\tau}_{\vec{R}}$. Quanto ao lado direito, segue que:

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt} m \vec{V} = \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p})$$

(usamos que $\vec{V} \times \vec{p} = \vec{V} \times m\vec{V} = \vec{0}$, pois são dois vetores paralelos entre si). Resumindo:

$$\vec{\tau}_{\vec{R}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p})$$

Com essa igualdade, acabamos de descobrir que a grandeza $\vec{r} \times \vec{p}$ será conservada no caso da ausência de torques na partícula, pois:

$$\vec{\tau}_{\vec{R}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{p} = \text{constante}$$

Portanto, chamaremos essa grandeza de “momento angular” da partícula, representado pelo símbolo \vec{L} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

A unidade de momento angular é o produto $\text{kg m}^2/\text{s}$.

Para generalizar esse conceito para um sistema de partículas, basta considerarmos várias partículas e somar sobre elas. Suponha então um sistema de N partículas. O momento angular \vec{L} desse sistema é a soma dos \vec{L}_i de todas as partículas:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$$

Analogamente, o torque resultante (que não é a mesma coisa que o torque da força resultante) sobre esse sistema é:

$$\vec{\tau}_R = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i$$

Aqui acontece uma simplificação, que não é novidade para nós. O torque na partícula i pode ser separado em torque das forças internas (devido às forças que as partículas j fazem na partícula i) e torque das forças externas (devido às forças que a vizinhança externa ao sistema faz na partícula i). Apelando para a terceira lei de Newton (na forma forte, forças internas centrais), podemos mostrar que os torques das forças internas se cancelam mutuamente e, portanto:

$$\vec{\tau}_R = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{REXT}$$

Da lei de evolução para o momento angular de uma partícula, segue que o momento angular de um sistema de partículas evolui no tempo de acordo com a lei:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau}_{REXT}$$

Em particular, para a componente z do momento angular vale essa mesma lei, mas na forma escalar mais simples:

$$\frac{d}{dt} L_z = \tau_{REXTz}$$

Essa é a lei fundamental do momento angular \vec{L} e, analogamente para sua componente z , L_z . Vemos que, para um sistema livre de torques externos ao longo de z , o momento angular L_z se conserva.

Como aconteceu quando definimos o torque de uma força, estaremos interessados aqui somente na componente z do momento angular, sendo z o eixo de rotação da partícula ou do corpo rígido. Portanto, por analogia com:

$$\vec{\tau}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau_{\vec{F}z} = F b$$

sendo b o braço de alavanca da força \vec{F} (ou da projeção de \vec{F} no plano xy), segue que:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L_z = p b = m V b$$

sendo b o braço de alavanca do momento linear \vec{p} , ou da velocidade \vec{V} (ou da projeção de \vec{V} no plano xy). Ocorre aqui então uma simplificação, como aconteceu no caso do torque, qual seja: para calcular a componente z do momento angular de uma partícula, só precisamos levar em conta a velocidade da partícula no plano ortogonal ao eixo z , o plano xy . Dito de outra forma: a velocidade V_z de uma partícula não contribui para a componente z do momento angular dessa partícula. A Figura 5.36 que segue ilustra uma partícula que se move no plano da página (plano xy) com velocidade \vec{V} . O braço de alavanca de \vec{V} é definido como o braço de alavanca de uma força qualquer, apenas trocando a força pela velocidade.

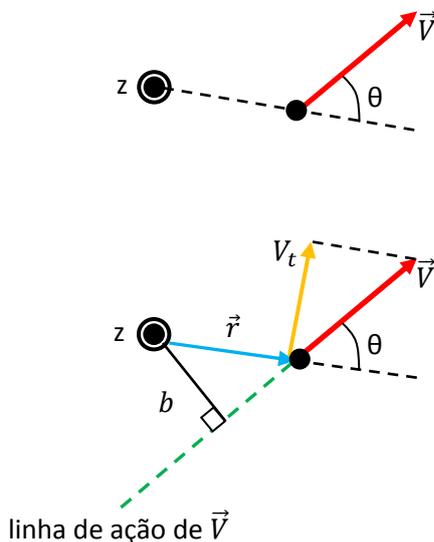


Figura 5.36: Uma partícula com velocidade \vec{V} no plano da página e um eixo z saindo ortogonalmente da página. Na segunda figura, a linha de ação de \vec{V} é a linha verde tracejada. \vec{r} é a posição da partícula (em relação ao eixo z) e θ é o ângulo entre \vec{V} e \vec{r} . b é o braço de alavanca de \vec{V} e V_t é a componente tangencial da velocidade.

Na Figura definimos a linha de ação de \vec{V} . A distância do eixo z a essa linha de ação é o braço b de \vec{V} .

Com base nessa figura, a magnitude do momento angular da partícula ao longo do eixo z é dada por três expressões (note a analogia com o torque, trocando F por mV):

$$|L_z| = m V b \quad \text{ou} \quad |L_z| = m V r \sin(\theta) \quad \text{ou} \quad |L_z| = m r V_t$$

que são equivalentes entre si porque $b = r \sin(\theta)$ e $V_t = V \sin(\theta)$.

Falta ainda definir o sentido de L_z , se ele está paralelo ou antiparalelo ao eixo z. Para isso aplicamos a regra da mão direita, analogamente ao que fizemos com o torque: o sentido de L_z é o mesmo sentido do polegar da mão direita alinhado com o eixo z, quando os outros dedos dessa mão fazem um movimento de giro no sentido da velocidade, ou do momento linear, da partícula. A Figura 5.37 ilustra essa idéia. Note que é uma regra análoga a que define o sentido do torque, apenas mudando \vec{F} por \vec{V} .

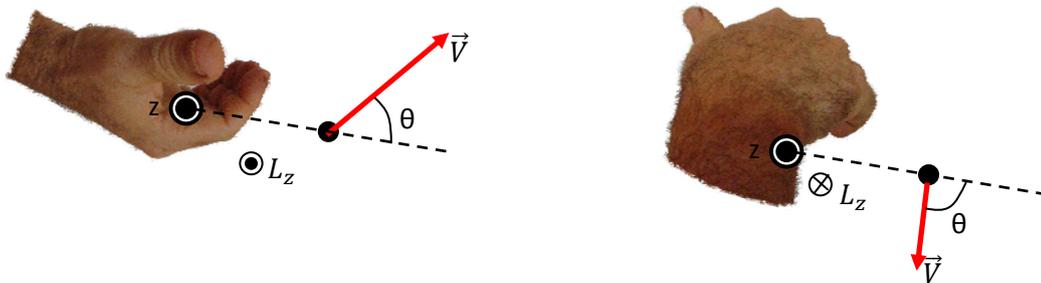


Figura 5.37: Regra da mão direita para definir o sentido do momento angular L_z de uma partícula que se move no plano xy. O eixo z está para fora da página. No primeiro caso os dedos da mão direita giram no sentido anti-horário e o polegar sobre o eixo z aponta para fora da página. O momento angular L_z está, portanto, paralelo ao eixo z (L_z positivo nesse referencial). No segundo caso os dedos da mão direita giram no sentido horário e o polegar sobre o eixo z aponta para dentro da página. L_z está, portanto, antiparalelo ao eixo z (L_z negativo nesse referencial). As setas de L_z (bolinhas com ponto e cruz) foram deslocadas de cima do eixo z apenas para tornar a figura mais clara.

Considerando que o sistema de partículas é um corpo rígido, podemos deduzir uma expressão simples para a componente z do momento angular desse corpo. A idéia básica é que, para esse corpo, qualquer partícula i possui órbita circular de raio r_i com velocidade angular ω e, portanto, velocidade linear $V_i = \omega r_i$. O momento angular L_z desse sistema é a soma dos L_{iz} de todas as partículas:

$$L_z = \sum_{i=1}^N L_{iz}$$

Note que, sendo $L_{iz} = m_i r_i V_{it} = m_i r_i (\omega r_i) = m_i r_i^2 \omega$, segue que:

$$L_z = \sum_{i=1}^N L_{iz} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \omega = I \omega$$

Note a analogia entre essa expressão da componente z do momento angular e a expressão $\vec{p} = m \vec{V}$ do momento linear (I no lugar de m e ω no lugar de \vec{V}).

Agora que sabemos avaliar o momento angular ao longo do eixo z de uma partícula ou de um corpo rígido qualquer, podemos voltar ao sistema mostrado na Figura 5.35, em que um atirador atira uma bala de massa m (uma partícula), com velocidade inicial horizontal \vec{V}_0 no centro de uma porta (um corpo rígido). A porta é uma placa fina retangular, de massa M , altura H e largura A . Ela pode girar livremente em torno de um eixo fixo z vertical que passa pelas dobradiças. A pergunta que queremos responder é: qual a velocidade angular ω da porta logo após a colisão com a bala?

Considerando o sistema bala+porta, vemos que durante a colisão há torques internos no sistema: na bala (devido à força que a porta faz na bala, que freia a bala) e na porta (devido à força que a bala faz na porta, que empurra a porta). Esses torques internos não alteram o momento angular L_z do sistema bala+porta. Há forças externas no sistema (mesmo desprezando os atritos nas dobradiças e o arraste do ar), que são os pesos da bala e da porta e as forças que fixam a porta nas dobradiças. Quanto aos pesos, estão ao longo de z (eixo vertical) e, portanto, não produzem torque ao longo de z. Quanto às forças nas dobradiças, não possuem braço de alavanca, quaisquer que sejam suas direções. Portanto, podemos apelar para a conservação do momento angular L_z do sistema bala+porta. Para facilitar as coisas repetimos a Figura 5.35 abaixo (Figura 5.38), apenas na visão de cima (plano xy), que é a que interessa para o cálculo de L_z . Na figura mostramos o imediatamente antes (A) e o imediatamente depois (D) da colisão, considerando ainda três possibilidades: i) a bala fica incrustada na porta; ii) a bala atravessa a porta e iii) a bala rebate na porta. Vamos calcular a velocidade de rotação da porta em cada um desses casos.

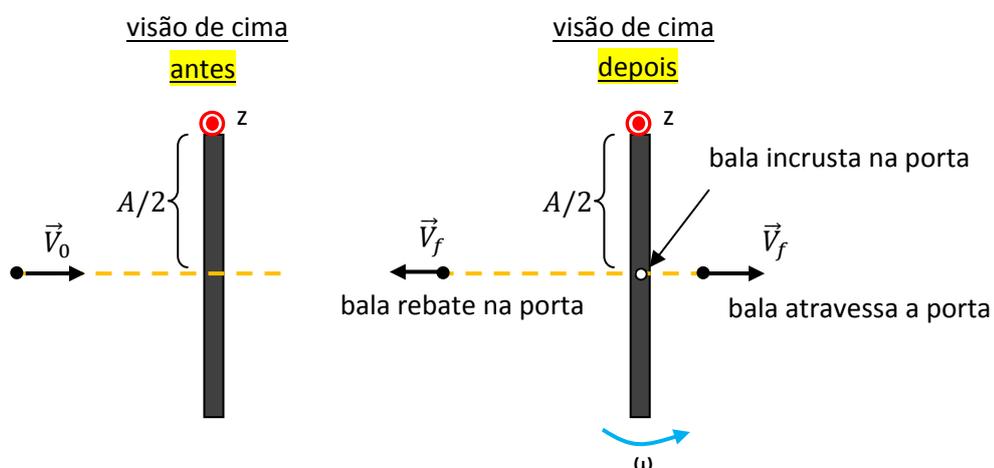


Figura 5.38: Uma bala de revólver (bolinha preta) colide com uma porta (visão de cima). Depois da colisão a bala pode ficar incrustada na porta (colisão completamente inelástica), atravessar a porta ou rebater na porta.

Na figura acima vemos logo que ((A)=antes):

$$L_z^{(A)} = m V_0 \frac{A}{2}$$

pois a porta está inicialmente parada (o braço de alavanca de \vec{V}_0 é $A/2$).

Após a colisão consideramos três casos ((D)=depois):

1. A bala fica incrustada na porta. Nesse caso, a bala se move com a velocidade linear no meio da porta, que é $V_f = \omega A/2$ (note que $b = A/2$). Portanto:

$$L_z^{(D)} = m V_f \frac{A}{2} + I \omega = m \left(\frac{A}{2} \omega \right) \frac{A}{2} + I \omega$$

sendo I o momento de inércia da porta. O momento de inércia da porta é o mesmo de uma haste fina com eixo passando pela extremidade (a porta pode ser pensada como um monte de hastes finas coladas umas nas outras, formando uma placa), ou seja:

$$I = \frac{1}{3} M A^2$$

Portanto, a conservação do momento angular do sistema leva a:

$$L_z^{(A)} = L_z^{(D)} \Rightarrow m V_0 \frac{A}{2} = m \omega \frac{A^2}{4} + \frac{1}{3} M A^2 \omega$$

Logo:

$$\omega = \frac{m}{\frac{m}{2} + \frac{1}{3}M} \frac{V_0}{A}$$

Podemos pensar também que a porta e a bala incrustada nela forma um corpo só de momento de inércia dado por:

$$I = \frac{1}{3} M A^2 + m \left(\frac{A}{2} \right)^2$$

e, portanto:

$$L_z^{(A)} = L_z^{(D)} \Rightarrow m V_0 \frac{A}{2} = I \omega = \left[\frac{1}{3} M A^2 + m \left(\frac{A}{2} \right)^2 \right] \omega$$

2. A bala atravessa a porta e sai do outro lado com velocidade \vec{V}_f . Nesse caso (note que $b = A/2$):

$$L_z^{(D)} = m V_f \frac{A}{2} + I \omega$$

A diferença em relação ao caso anterior é que agora a velocidade V_f é um parâmetro independente do problema, pois a bala não se move juntamente com a porta.

Portanto, a conservação do momento angular do sistema leva a:

$$L_z^{(A)} = L_z^{(D)} \Rightarrow m V_0 \frac{A}{2} = m \frac{A}{2} V_f + \frac{1}{3} M A^2 \omega$$

Logo:

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{m}{M} \frac{(V_0 - V_f)}{A}$$

Note que se valer $V_f = V_0$, significa que a bala não interagiu com a porta, pois seu movimento não alterou em nada durante a colisão. Nesse caso, a porta continuaria parada. Seria o caso se a porta fosse feita de uma folha fina de papel, por exemplo.

3. A bala rebate na porta e volta ao longo da mesma linha com velocidade \vec{V}_f . Nesse caso (note que ainda $b = A/2$):

$$L_z^{(D)} = -m \frac{A}{2} V_f + I \omega$$

Perceba que o sinal do momento angular final da bala se inverteu, pois agora ele está para dentro da página, oposto ao eixo z.

Portanto, a conservação do momento angular do sistema leva a:

$$L_z^{(A)} = L_z^{(D)} \Rightarrow m V_0 \frac{A}{2} = -m \frac{A}{2} V_f + \frac{1}{3} M A^2 \omega$$

Logo:

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{m}{M} \frac{(V_0 + V_f)}{A}$$

Note agora que quanto maior a velocidade V_f de rebatimento, maior vai ser a velocidade de rotação adquirida pela porta.

Mostramos que para um corpo rígido girando em torno do eixo z vale $L_z = I \omega$, sendo ω o módulo da velocidade angular do corpo ao longo do eixo z e I o momento de inércia em relação a esse mesmo eixo. Quanto às componentes L_x e L_y do momento angular, nós não vamos calcular, porque não precisaremos delas aqui.

Nesse caso específico de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo de rotação, que chamamos de z, usamos a segunda lei de Newton de uma partícula para mostrar a “segunda lei de Newton da rotação”:

$$\tau_{REXTz} = I \alpha$$

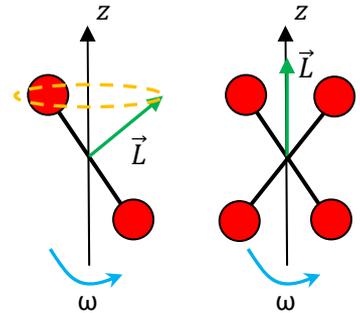
Podemos mostrar que essa lei é consequência da lei do momento angular:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau}_{REXT}$$

De fato, tomando a componente z dessa equação (notando que I é uma constante para um corpo rígido):

$$\frac{d}{dt} L_z = \frac{d}{dt} (I \omega) = I \frac{d}{dt} \omega = I \alpha = \tau_{REXTz}$$

Mesmo que não tenhamos calculado aqui as componentes L_x e L_y , elas são em geral não nulas. Somente no caso em que o eixo z é um eixo de simetria do corpo (um eixo para o qual, tomando diâmetros centrados nele, toda partícula possui uma “gêmea” diametralmente oposta), é possível mostrar que $L_x = L_y = 0$ e, portanto: $\vec{L} = I \omega \hat{z}$ (basicamente, se z é um eixo de simetria do corpo, então, para toda partícula de massa m_i , raio de giração r_i e velocidade tangencial V_{it} , existe outra partícula “gêmea” (diametralmente oposta) de massa m_i , raio de giração r_i e velocidade tangencial $-V_{it}$. Daí segue que $L_x = L_y = 0$). A Figura ao lado ilustra (à esquerda) um corpo (na forma de um haltere) não simétrico girando em torno do eixo z . Note que o momento angular \vec{L} desse corpo não está ao longo de z , ou seja, L_x e L_y são não nulos. Nessa mesma Figura mostramos (à direita) um corpo simétrico (dois halteres unidos em X) girando em torno do eixo z . Nesse caso o momento angular \vec{L} está ao longo de z , ou seja, L_x e L_y são nulos e, portanto, $\vec{L} = I \omega \hat{z}$. Note que o corpo não-balanceado (não simétrico) requer um torque externo oscilante para manter esse momento angular girando em torno do eixo z (mesmo no caso de ω constante). Com base nesse exemplo podemos entender porque um pneu não-balanceado transmite vibração para o corpo do automóvel (ação e reação: o corpo do automóvel produz na roda/pneu desbalanceado um torque oscilatório e sofre a reação). Para balancear um pneu devemos restabelecer a simetria de sua distribuição de massa. Isso é feito geralmente através do acréscimo de pequenas peças de chumbo ao conjunto da roda, colocadas em posições estratégicas. O exemplo do haltere na figura acima mostra que para balancear um pneu não basta que seu CM esteja sobre o eixo de rotação, ou seja, que para cada massa do lado direito do CM exista uma massa igual do lado esquerdo e assim por diante. Isso ocorre para o haltere mostrado na Figura acima. No entanto, ele não é “dinamicamente” balanceado, ou seja, seu momento angular não está ao longo do eixo de rotação. O exemplo dos dois halteres cruzados representa um corpo simétrico (com CM sobre o eixo z) e também dinamicamente balanceado, ou seja, com $\vec{L} = I \omega \hat{z}$. Por analogia, o haltere único representaria um pneu não-balanceado, que vibra ao girar, enquanto que o conjunto de dois halteres representa um pneu balanceado, que gira suavemente.



Já estudamos um movimento que se encaixa nesse caso de corpos simétricos, o de rolamento de um cilindro ou esfera, em que esse corpo gira em torno de seu eixo z de simetria. Nesses casos segue que $\vec{L} = I \omega \hat{z}$ (pois $L_x = L_y = 0$) e que, como já havíamos assumido anteriormente, a lei

$$\tau_{REXTz} = I \alpha$$

continua valendo.

Comparando então as duas leis fundamentais da dinâmica de rotação que estudamos:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau}_{REXT} \quad \text{e} \quad \tau_{REXTz} = I \alpha$$

fica claro que a lei do momento angular é mais geral, se aplica para qualquer sistema de partículas, desde uma simples nuvem de gás até uma galáxia. A definição de \vec{L} envolve as velocidades das partículas e essas velocidades podem ser medidas em relação a qualquer referencial inercial ou mesmo no referencial do centro de massa do sistema, que é, em geral, um referencial acelerado. Já quanto à segunda lei ($\tau_{REXTz} = I \alpha$), ela só se aplica no contexto de um corpo rígido, ou seja, um sistema em que todas as partículas possuem a mesma velocidade angular ω e mesma aceleração angular α . Este corpo rígido pode estar girando em torno de um eixo fixo ou em um movimento mais geral, em que o eixo de rotação não está necessariamente fixo, mas é um eixo de simetria de direção constante no espaço (um eixo que se desloca paralelamente a ele mesmo), como no caso do rolamento de um cilindro ou esfera.

Como exemplo de movimento mais geral, em que a segunda lei de Newton da rotação ($\tau_{REXTz} = I \alpha$) não vale, mas a lei do momento angular vale (ela vale sempre), considere um corpo girante que realiza um movimento complexo, de mudança de forma. Por exemplo, uma nuvem de gás que se contrai devido à atração mútua entre suas moléculas constituintes ou uma estrela que explode devido à repulsão mútua entre suas partes. A Figura 5.39 ilustra essa idéia. Um corpo livre de torques externos está girando em torno de um eixo vertical, flutuando no espaço vazio. Um processo interno nesse corpo leva a uma mudança de forma, da forma A para a forma B.

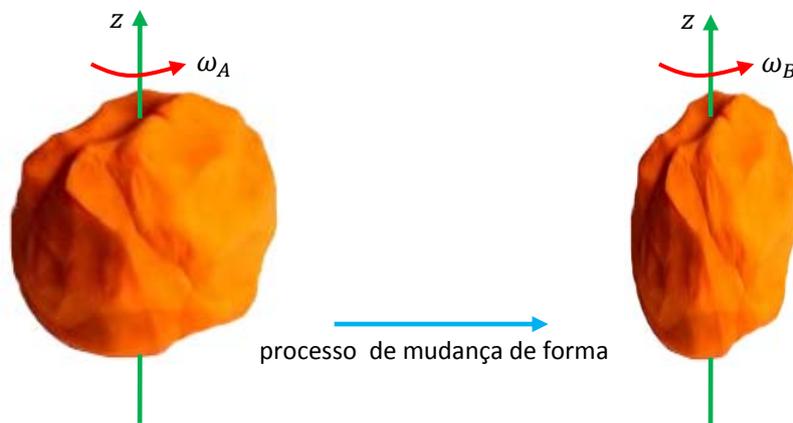


Figura 5.39: Um corpo girante que tinha uma forma (rígida) inicial A sofre um processo (em que a rigidez deixa de valer) e muda para a forma final (rígida) B (uma contração).

Vamos supor que esse corpo tinha uma velocidade angular ω_A de rotação ao longo do eixo z , e um momento angular $L_z^{(A)}$ ao longo desse eixo. Na ausência de torques externos ao longo de z , o momento angular L_z se conserva nesse processo de mudança de forma, ou seja:

$$L_z^{(A)} = L_z^{(B)}$$

Havendo duas formas (rígidas) bem definidas antes e depois da transformação, podemos usar que $L_z = I \omega$ e, portanto:

$$I_A \omega_A = I_B \omega_B$$

ou seja:

$$\omega_B = \frac{I_A}{I_B} \omega_A$$

Vemos que nesse processo a velocidade angular do corpo muda conforme muda seu momento de inércia em relação ao eixo z . Se o corpo se contrai em torno do eixo z , $I_B < I_A$, segue que ele passa a girar mais rapidamente. Caso contrário, se o corpo se expande em torno do eixo z , $I_B > I_A$, segue que ele passa a girar mais lentamente. Note que esse é um movimento que não segue a lei $\tau_{REXTz} = I \alpha$, pois estamos supondo que $\tau_{REXTz} = 0$ e mesmo assim o corpo está mudando sua velocidade ω , ou seja, adquirindo aceleração α . A explicação para isso está no fato de que a lei $\tau_{REXTz} = I \alpha$ só vale para corpos rígidos e o processo de mudança de forma que estamos considerando aqui está fora desse contexto. O contexto aqui é o da lei mais geral para o momento angular na ausência de torques externos:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau}_{REXT} = \vec{0}$$

Essa estratégia de expansão/contração do corpo para controle da velocidade ω é usada rotineiramente por pessoas que se dedicam à dança, à acrobacia ou à ginástica. Uma bailarina, por exemplo, pode rodopiar seu corpo em torno de um eixo vertical z e mudar sua velocidade ω sem depender de agentes externos. Ao fechar os braços, sua velocidade ω aumenta. Ao abrir os braços, sua velocidade ω diminui. Ninguém precisa ajudá-la a fazer isso, trata-se de um processo regido por forças e torques internos (e também pela energia interna da bailarina).

A conservação do momento angular nos permite entender porque no nosso sistema solar, por exemplo, todos os planetas e luas giram em torno de si mesmos e giram ao mesmo tempo em torno do Sol (o próprio Sol gira em torno dele mesmo). O momento angular resultante de todas essas rotações teve origem há bilhões de anos, quando havia no espaço apenas uma nuvem de gás. Essa nuvem de gás já possuía uma rotação, fruto do acaso, e, portanto, um momento angular. À medida que a nuvem foi se condensando, pelo efeito da gravidade, dando origem ao Sol e aos planetas e luas, o momento angular se conservou, tendo em vista o isolamento (espacial) desse sistema. As rotações que vemos hoje no Sol, nos planetas e nas Luas são aquelas compatíveis com a distribuição de massa final do sistema solar, tendo em vista a conservação do momento angular desse sistema.

Um raciocínio análogo se aplica a uma galáxia, em que bilhões de estrelas giram em torno de si mesmas e em torno de um centro comum, super-massivo.

A lei de conservação do momento angular se manifesta também na tecnologia. Um helicóptero, por exemplo, deve ser dotado de um motor auxiliar de cauda (ou algo equivalente) para impedir que a simples aceleração das hélices leve a uma rotação da cabine do helicóptero no sentido oposto. Na figura



ao lado podemos ver claramente esse motor/hélice de cauda. De fato, imagine o helicóptero com as hélices paradas. Então, o momento angular do helicóptero é inicialmente nulo. Se as hélices começam a girar no sentido horário (ou apenas aceleram seu giro), e não há torques externos no helicóptero (só há forças verticais), a cabine vai começar a girar no sentido anti-horário, de tal forma que:

$$L_z^{(helices)} + L_z^{(cabine)} = 0$$

sendo z um eixo vertical (eixo das hélices). Para evitar essa rotação da cabine, acrescenta-se o motor de cauda, que produz forças horizontais e, portanto, torque ao longo de z . Trata-se de um torque externo porque o motor de cauda empurra o ar e o ar (agente externo) empurra o helicóptero. Chamando de $\tau_z^{(cauda)}$ o torque produzido pelo ar empurrado pelo motor de cauda no conjunto cabine+hélices, ficamos com:

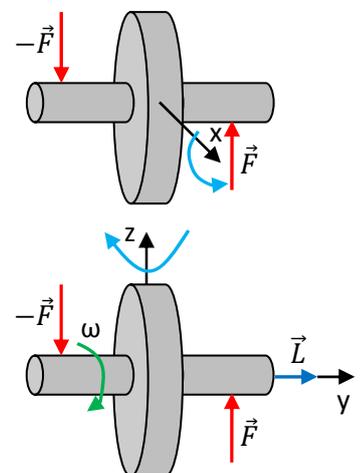
$$\frac{d}{dt} \left(L_z^{(helices)} + L_z^{(cabine)} \right) = \tau_z^{(cauda)}$$

Portanto, o motor de cauda permite um controle da rotação da cabine e sua independência da rotação das hélices. Se quisermos, por exemplo, manter a cabine sem rotação, basta fazer:

$$\frac{d}{dt} L_z^{(cabine)} = 0 = -\frac{d}{dt} L_z^{(helices)} + \tau_z^{(cauda)}$$

ou seja, basta ajustar a velocidade (e o torque) do motor de cauda à variação da velocidade (e do momento angular) das hélices. Quando isso não é feito, o helicóptero rodopia até cair.

Podemos usar o conceito de momento angular para entender o efeito giroscópico, um movimento surpreendente que um corpo que gira apresenta quando submetido a forças que atuam fora de seu CM. Considere o corpo na Figura ao lado, submetido a duas forças \vec{F} e $-\vec{F}$, de resultante nula. O corpo é simplesmente um disco que pode girar em torno de seu eixo central y , um corpo que poderíamos chamar de giroscópio (para simplificar, imagine que ele está flutuando solto no espaço vazio). Na primeira situação o corpo está inicialmente parado. Na segunda situação o corpo está inicialmente girando rapidamente com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \hat{y}$. O que há de surpreendente nesse experimento é que trata-se do mesmo cilindro, submetido às mesmas forças, e que apresenta



movimentos bem diferentes nos dois casos. Note que nos dois casos o cilindro está submetido a uma força resultante nula e a um torque resultante $\vec{\tau} = \tau \hat{x}$. A equação que governa o movimento do cilindro é:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \tau \hat{x}$$

Então, no primeiro caso vale $\vec{L}(0) = \vec{0}$ e após um intervalo infinitesimal de tempo Δt o cilindro terá adquirido o momento angular (note que $d\vec{L} = \tau \hat{x} dt$):

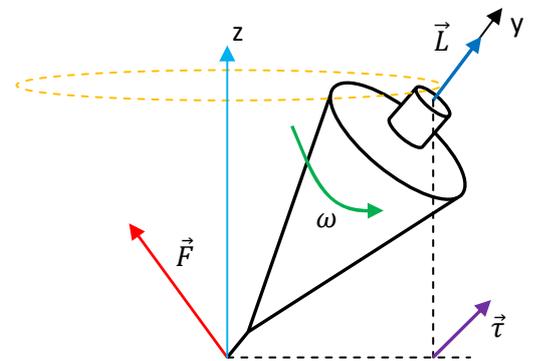
$$\vec{L}(0 + \Delta t) = \vec{L}(0) + \Delta\vec{L} = \tau \Delta t \hat{x}$$

ou seja, o cilindro começa a girar em torno do eixo x , no sentido anti-horário. Esse é o movimento esperado e ninguém vai se espantar quando ele ocorrer. O mais surpreendente é o segundo caso. Agora vale $\vec{L}(0) = I \omega \hat{y}$, sendo I o momento de inércia do disco (+eixo) e, portanto, após um tempo infinitesimal Δt vai valer:

$$\vec{L}(0 + \Delta t) = \vec{L}(0) + \Delta\vec{L} = I \omega \hat{y} + \tau \Delta t \hat{x}$$

Essa equação está dizendo que o disco vai girar em torno do eixo z , pois a seta azul na Figura (o vetor $\vec{L}(0)$) vai ganhar um incremento infinitesimal para fora da página, na direção x . Portanto, a seta de \vec{L} gira em torno do eixo z , com sua ponta saindo do plano da página, assim como o disco, cujo momento angular é \vec{L} . Esse é o efeito giroscópico e ele causa surpresa em quem acompanha esse experimento, pois nossa intuição insiste em acreditar que o movimento produzido no primeiro caso é a única e razoável possibilidade.

O efeito giroscópico nos permite entender o movimento de um pião, que é puxado para baixo pela ação de seu peso, mas não cai, ele continua girando “em pé”. A Figura ao lado ilustra um pião girando rapidamente com velocidade ω em torno de seu eixo (y). A única força fora do CM é a força \vec{F} que o piso faz na ponta do pião (normal+atrito). Supondo que o eixo do pião (y) esteja no plano da página, assim como \vec{F} , o torque $\vec{\tau}$ de \vec{F} (em relação ao CM) estaria para dentro da página, em um plano horizontal.



Portanto, a seta de \vec{L} , o momento angular do pião, não cai, pois recebe incremento horizontal, dado por $\vec{\tau} \Delta t$. O que ocorre é que a seta de \vec{L} gira em torno de um eixo vertical (z) que passa pelo ponto de apoio do pião no piso. O círculo tracejado amarelo (contido em um plano horizontal) ilustra o movimento que a extremidade superior do pião vai fazer, quando este é submetido ao torque $\vec{\tau}$ (note que o torque do peso é nulo, em um referencial com origem no CM do pião). Chamamos esse movimento de precessão. É o mesmo movimento que observamos no giroscópio discutido anteriormente. Estamos imaginando aqui, para simplificar, que a ponta do pião é bem aguda e que ela está fixa, fincada no piso. No mundo real essa ponta é sempre arredondada e ela

mesma descreve um círculo no piso, enquanto o pião precessiona. Enfim, com base nesse argumento, podemos dizer que o pião não cai porque, para ele cair, o vetor \vec{L} deveria descer, ou seja, ganhar uma componente vertical para baixo. Mas, se vale a lei:

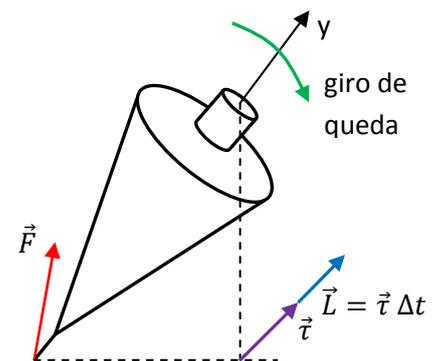
$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$$

e $\vec{\tau}$ é horizontal, segue que essa queda não pode ocorrer. Obviamente, enquanto os atritos/arrastes vão reduzindo o giro do pião, esse argumento vai perdendo validade e o pião vai caindo lentamente.

Note que se o pião não estiver girando ($\vec{L}(0) = \vec{0}$) a lei acima continua valendo, mas leva a:

$$\vec{L}(0 + \Delta t) = \vec{L}(0) + \Delta\vec{L} = \vec{\tau} \Delta t$$

ou seja, o pião cai, pois ele gira em torno do eixo de $\vec{\tau}$, um eixo horizontal. A Figura ao lado ilustra um pião sem giro (sem $\omega \hat{y}$) caindo. O torque de \vec{F} faz ele girar, ao mesmo tempo em que seu CM cai.



Essa argumentação para explicar o movimento de um pião em

termos do conceito de momento angular costuma deixar uma aura de mistério, pois trata-se de um conceito sofisticado. Não por acaso existem centenas de artigos e livros sobre o movimento de giroscópios e piões, cada um tentando dar uma contribuição original que torne a ideia mais simples e intuitiva. No entanto, parece que isso é impossível. Se você quiser se aventurar nessa seara pode começar pelos quatro volumes escritos por dois gigantes da física-matemática, Felix Klein e Arnold Sommerfeld (*The theory of the top*, vols. 1, 2, 3 e 4, Birkhauser (2008)).

Fato é que poderíamos, em princípio, discutir o movimento de um pião em termos da segunda lei de Newton aplicada para cada partícula i , de massa m_i , que compõe o pião, qual seja:

$$\vec{R}_i = m_i \vec{a}_i$$

sendo \vec{R}_i a força resultante (forças externas e forças internas) na partícula i e \vec{a}_i sua aceleração. São cerca de 10^{24} partículas e, portanto, 10^{24} equações vetoriais acopladas através das forças mútuas internas $\vec{F}_{i/j}$. As condições iniciais para os movimentos das partículas diferem nos casos do pião que não gira e do pião girando e as forças mútuas $\vec{F}_{i/j}$ também. Mesmo as forças externas são diferentes nos dois casos, com exceção do peso do pião. De fato, note que para o pião que gira o CM não cai na vertical, ou seja, a componente vertical de \vec{F} tem que anular o peso do pião. O CM descreve um círculo e, portanto, \vec{F} deve ter uma componente horizontal que aponta para o ponto de apoio do pião no piso (a Figura cima para o pião girando é compatível com essas idéias). Por outro lado, para o pião que não gira o CM cai e deve haver uma resultante de forças no

CM do pião para baixo, ou seja, a componente vertical de \vec{F} deve ser menor que o peso do pião. À medida que o pião cai seu CM avança um pouco na horizontal, e deve haver uma componente de \vec{F} nessa direção (a Figura cima para o pião que não gira é compatível com essas idéias). Enfim, se resolvêssemos esse sistema de 10^{24} equações vetoriais e calculássemos a trajetória de cada uma das partículas do pião chegaríamos às mesmas conclusões que chegamos aqui, utilizando um conceito mais sofisticado, de uma propriedade global desse sistema de partículas, seu momento angular dado por:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{10^{24}} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

É impossível resolver o sistema de 10^{24} equações advindas da segunda lei de Newton, mas o que o nosso resultado está mostrando é que as partículas do pião que gira interagem entre si de tal forma que produzem o movimento de precessão do pião. Uma partícula que cai faz força em outra partícula e joga ela para cima, com em uma espécie de malabarismo, e no final das contas o CM do pião não cai, ele apenas gira em precessão. Imagine então essa multidão de partículas interagindo entre si e forçando umas para baixo e outras para cima. O conceito de momento angular resume esse movimento complexo. Um pião girando não cai porque a lei da natureza que dita a evolução de \vec{L} não deixa.

5.6 Exercícios resolvidos

ER 5.1) Durante um motim o leme de um navio fica submetido às forças mostradas na figura ao lado, aplicadas pelas mãos dos amotinados. O peso do leme e as forças que sustentam o leme no seu eixo de rotação (eixo z para fora da página), não são mostradas, pois estão todas atuando no eixo do leme. Considere que cada raio do leme tem comprimento H, desde o eixo até sua extremidade.

Dados: \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_4 , H e θ .

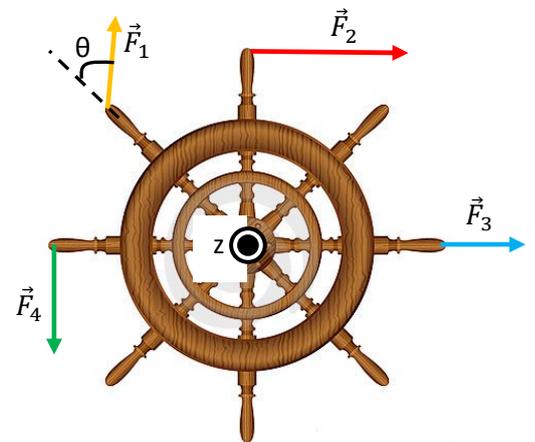
a) Calcule o torque resultante ao longo do eixo de rotação do leme.

O torque resultante é a soma dos torques de \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 e \vec{F}_4 . É fácil ver na figura que:

$$\tau_{\vec{F}_1 z} = -F_1 \sin(\theta) H \quad \text{pois } F_1 \sin(\theta) \text{ é a componente tangencial da força } \vec{F}_1.$$

$$\tau_{\vec{F}_2 z} = -F_2 H \quad \text{pois } \vec{F}_2 \text{ é puramente tangencial.}$$

$$\tau_{\vec{F}_3 z} = 0 \quad \text{pois } \vec{F}_3 \text{ é puramente radial.}$$



$$\tau_{4z} = F_4 H \text{ pois } \vec{F}_4 \text{ é puramente tangencial.}$$

Os sinais dos torques foram definidos pela regra da mão direita e pelo fato do eixo z estar para fora da página.

Portanto:

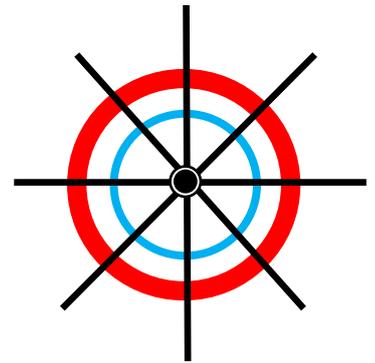
$$\tau_{Rz} = \tau_{\vec{F}_1z} + \tau_{\vec{F}_2z} + \tau_{\vec{F}_3z} + \tau_{\vec{F}_4z} = H(F_4 - F_2 - F_1 \text{sen}(\theta))$$

Note que esse torque não tem nada a ver com o torque da força resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$.

b) Faça uma estimativa da aceleração angular do leme.

A idéia de fazer apenas uma estimativa para α está no fato de que não conhecemos exatamente o momento de inércia do leme. Precisamos fazer um modelo simplificado do leme, para poder estimar seu momento de inércia. Considere então o modelo ao lado, em que supomos que o leme é composto de:

1. um aro fino (ou casca cilíndrica, em azul) de massa m_A e raio r_A : seu momento de inércia em relação ao eixo z é: $I_A = m_A r_A^2$.
2. Um cilindro ôco (em vermelho) de massa m_C e raios interno r_1 e externo r_2 : seu momento de inércia em relação ao eixo z é: $I_C = \frac{1}{2} m_C (r_1^2 + r_2^2)$.
3. 4 hastes finas iguais, cada uma de massa m_h e comprimento $2H$, girando em torno de seus centros: o momento de inércia de cada haste em relação ao eixo z é: $I_h = \frac{1}{12} m_h (2H)^2$.



Portanto, nossa estimativa para o momento de inércia do leme fica:

$$I = I_A + I_C + 4 I_h$$

Concluindo:

$$I = m_A r_A^2 + \frac{1}{2} m_C (r_1^2 + r_2^2) + 4 \frac{1}{12} m_h (2H)^2$$

A aceleração angular do leme ao longo de z seria então:

$$\alpha = \frac{\tau_{Rz}}{I} = \frac{H(F_4 - F_2 - F_1 \text{sen}(\theta))}{m_A r_A^2 + \frac{1}{2} m_C (r_1^2 + r_2^2) + \frac{4}{3} m_h H^2}$$

Se essa aceleração for positiva, significa que o vetor $\vec{\alpha}$ está para fora da página e de acordo com a regra da mão direita, o leme vai acelerar nesse instante mostrado na Figura no sentido anti-horário. Portanto, se o leme estiver girando inicialmente no sentido horário, ele vai passar a frear (aceleração oposta à velocidade). Caso contrário, se o leme estava em repouso ou já girando no sentido anti-horário, sua velocidade

vai passar a aumentar. Se a aceleração for negativa, significa que o vetor $\vec{\alpha}$ está para dentro da página e de acordo com a regra da mão direita, o leme vai acelerar no sentido horário.

ER 5.2) A hélice de um ventilador mostrada na figura está submetida ao torque do motor elétrico $\vec{\tau}_M$ para dentro da página e de módulo τ_M e às forças de arraste do ar nas pás conforme a figura. Essas forças de arraste dependem da velocidade de rotação ω da hélice. Quanto maior a velocidade, maior a força de arraste. Vamos supor que cada força de arraste tenha a magnitude dada por:

$$F_A = B \omega$$

sendo B um coeficiente de arraste da pá da hélice com o ar. Cada força de arraste é aplicada no meio da pá, a uma distância r do centro da hélice, ortogonalmente ao raio.

Dados: $\vec{\tau}_M$, τ_M , B e r .

Calcule a velocidade de rotação da hélice, supondo que ela esteja girando com velocidade constante.

Note que o torque do motor está para dentro da página, o que significa, de acordo com a regra da mão direita, que o motor está forçando a hélice a girar no sentido horário. Assumindo esse sentido de rotação, as forças de arraste têm o sentido mostrado na Figura, pois elas se opõem ao movimento das pás. Há, portanto, quatro torques ao longo do eixo de rotação da hélice, eixo z para fora da página: o torque do motor $\vec{\tau}_M$, que é negativo, pois está para dentro da página (por hipótese) e os três torques das forças de arraste, que são positivos, pois estão para fora da página. O torque resultante ao longo de z é:

$$\tau_{Rz} = \tau_{\vec{F}_{A1z}} + \tau_{\vec{F}_{A2z}} + \tau_{\vec{F}_{A3z}} + \tau_{Mz} = 3 B \omega r - \tau_M$$

Sabemos que a aceleração da hélice está determinada por esse torque pois:

$$\tau_{Rz} = I \alpha$$

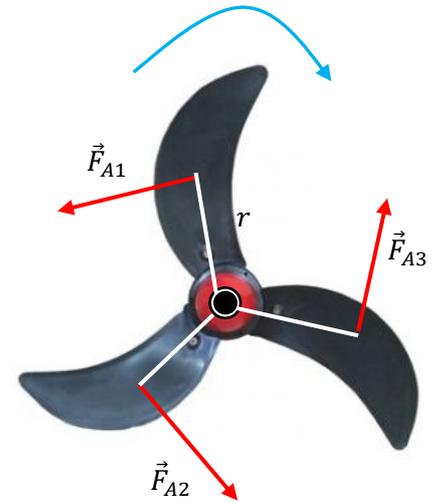
Sendo I o momento de inércia da hélice em relação ao eixo z pelo centro da hélice.

Supondo então que a hélice esteja girando com velocidade constante, segue que essa aceleração é nula, ou seja:

$$\alpha = \frac{\tau_{Rz}}{I} = \frac{3 B \omega r - \tau_M}{I} = 0$$

Portanto, a velocidade de rotação da hélice será:

$$\omega = \frac{\tau_M}{3 B r}$$



Note que o momento de inércia da hélice não foi dado e não é necessário para resolver o problema. Quanto maior a velocidade que o motor elétrico imprime na hélice, maior deve ser o torque aplicado no eixo da hélice. Maiores velocidades demandarão maior trabalho do motor e maior consumo de energia elétrica. Quanto maior o arraste com o ar (maior B), menor a velocidade de equilíbrio da hélice, para um mesmo torque do motor τ_M .

ER 5.3) Uma rã de massa m estava parada na extremidade de uma gangorra e em um dado instante ela salta com a velocidade mostrada na figura abaixo. A gangorra é basicamente uma haste de massa M e comprimento A que pode girar livremente em torno de um eixo (z para fora da página) que passa por seu centro. Despreze os atritos no eixo da gangorra.

Dados: m , M , A , V_0 e θ .

Calcule a velocidade de rotação ω que a gangorra vai adquirir logo após o salto da rã.

Note que logo após o salto a gangorra vai girar no sentido anti-horário, como indicado pela seta curva azul na figura. O vetor $\vec{\omega}$ estará para fora da página, ou seja, ao longo do eixo z positivo. Considerando o sistema rã+haste da

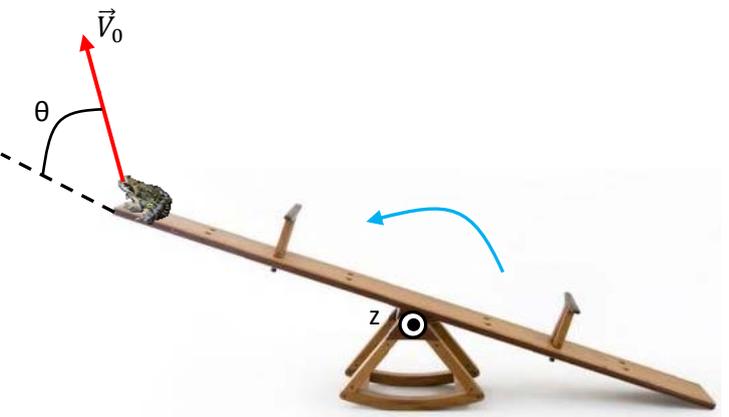
gangorra, as forças externas que atuam nesse sistema durante o salto da rã são os pesos, e as forças que fixam o eixo da haste da gangorra no lugar. As forças no eixo, incluindo aí o peso da haste, não produzem torque ao longo do eixo z , pois não têm braço de alavanca. O peso da rã tem torque ao longo de z , mas é desprezível porque o peso de uma rã é pequeno e porque o salto da rã é um evento muito rápido. Assim sendo, desprezando os torques externos ao longo de z , podemos apelar para a conservação do momento angular L_z do sistema rã+haste da gangorra, durante o curto intervalo de tempo do salto da rã. A rã será tratada como uma partícula. Note que seu momento angular logo após o salto é:

$$L_{rãz} = -m V_0 \sin(\theta) \frac{A}{2}$$

pois $V_0 \sin(\theta)$ é a velocidade tangencial da rã, ou $(A/2) \sin(\theta)$ é o braço de alavanca do momento linear $m V_0$ da rã. O sinal negativo indica que é um momento angular para dentro da página. Portanto, considerando que antes do salto tudo estava em repouso (A =antes, D =depois):

$$L_z^{(A)} = L_z^{(D)} \Rightarrow 0 + 0 = -m V_0 A \sin(\theta)/2 + I \omega$$

Concluindo:



$$\omega = \frac{m V_0 A \sin(\theta)}{2 I} = \frac{m V_0 A \sin(\theta)}{2 \frac{1}{12} M A^2}$$

Logo, a haste da gangorra vai girar com a velocidade angular:

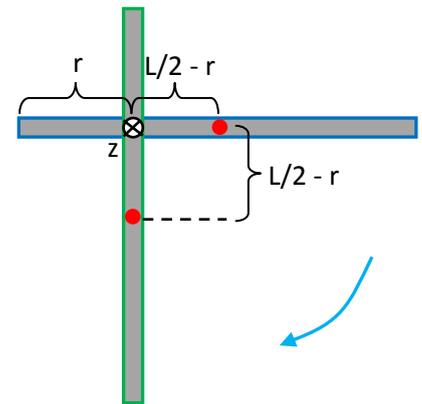
$$\vec{\omega} = 6 \frac{m}{M} \frac{V_0}{A} \sin(\theta) \hat{z}$$

Dependendo da razão m/M entre as massas, da velocidade e ângulo de salto V_0 e θ e do comprimento da haste A , a haste da gangorra vai girar mais ou menos rapidamente em torno de seu eixo.

ER 5.4) Uma haste fina de comprimento L e massa M pode girar livremente em torno de um eixo fixo (z para dentro da página) que passa fora de seu centro (ver Figura). A haste estava inicialmente em repouso na posição horizontal (em azul) e em um dado instante é solta e passa a cair.

Dados: M , L , r e g .

a) Calcule a velocidade angular da haste quando ela passar pela posição vertical (em verde).



Note que a haste vai passar pela vertical girando no sentido horário ($\vec{\omega}$ para dentro da página, ao longo do eixo z positivo) e que o eixo de rotação (z para dentro da página) está a uma distância $L/2 - r$ do centro de massa da haste (bolinha vermelha no centro da haste).

Nossa experiência mostra que alguns estudantes tentam abordar esse problema usando a lei de Newton da rotação ($\tau_{REXTz} = I \alpha$). Eles se esquecem que o torque do peso não é constante durante a queda da haste e que, portanto, eles teriam que resolver uma equação diferencial para a inclinação da haste $\theta(t)$. Trata-se da equação para o pêndulo físico, que está longe de ser simples. Outros estudantes apelam para a conservação do momento angular, sem perceber o absurdo dessa idéia, pois, se a haste está inicialmente parada, o momento angular antes da queda é nulo. Portanto, se ele se conservasse, o momento angular da haste na posição vertical teria que ser também nulo, ou seja, teria que valer $\omega = 0$. Esses estudantes se esquecem do torque do peso da haste durante a queda, que nesse caso é importante e faz com que a magnitude do momento angular da haste, ao longo de z , seja crescente com o tempo. Eles se esquecem também do bom-senso.

A idéia aqui é apelar para a conservação da energia mecânica da haste, pois não há atrito/arraste, por hipótese. A energia mecânica da haste quando ela estava parada na horizontal (energia potencial gravitacional) é igual à energia mecânica da haste quando ela passar pela posição vertical (cinética rotacional+potencial):

$$E^{(A)} = E^{(D)} \Rightarrow 0 + U_g(A) = \frac{1}{2} I \omega^2 + U_g(D)$$

Aqui temos a oportunidade de discutir sobre a energia potencial gravitacional de um sistema de partículas. Já sabemos que para uma partícula de massa m vale:

$$U_g = m g h$$

sendo h a altura da partícula em relação a uma referência arbitrária. Obviamente essa expressão não se aplica a um sistema de partículas, como a haste desse problema. Qual seria a altura da haste? Não faz o menor sentido se tentar atribuir uma única altura a um corpo extenso. Portanto, consideramos que para um sistema de N partículas e massa M vale:

$$U_g = \sum_{i=1}^N m_i g h_i$$

sendo m_i a massa e h_i a altura da partícula i . Só a gravidade g não possui o subíndice i , pois ela é a mesma para todas as partículas, por hipótese. Multiplicando e dividindo por M obtemos:

$$U_g = M g \sum_{i=1}^N \frac{m_i h_i}{M}$$

No somatório dessa expressão reconhecemos a posição h do centro de massa do sistema. Portanto:

$$U_g = M g h_{CM}$$

A energia potencial gravitacional de um sistema de partículas é igual à energia potencial de uma única partícula (virtual) localizada no CM do sistema e concentrando toda a massa do sistema. Essa é mais uma propriedade marcante do CM, dentre tantas outras que já vimos.

Da figura vemos que o CM da haste cai uma altura $L/2 - r$ quando a haste passa da posição horizontal para a vertical. Assim, tomando $h=0$ na posição mais baixa, com a haste na vertical, obtemos:

$$M g \left(\frac{L}{2} - r \right) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Para completar a solução, precisamos apenas do momento de inércia da haste. O teorema dos eixos paralelos diz que para um eixo E paralelo a outro eixo que passa pelo CM:

$$I_E = I_{CM} + M d^2$$

sendo d a distância entre os eixos e M a massa do corpo girante. No nosso caso vale:

$$d = L/2 - r \quad \text{e} \quad I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2$$

Portanto:

$$M g \left(\frac{L}{2} - r \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2} - r \right)^2 \right) \omega^2$$

Sem muita esperança de simplificação, segue que:

$$\omega = \frac{\sqrt{2 g \left(\frac{L}{2} - r \right)}}{\sqrt{\frac{1}{12} L^2 + \left(\frac{L}{2} - r \right)^2}}$$

Note que o resultado independe da massa da haste, como costuma acontecer nos movimentos produzidos pela gravidade. No caso $r = L/2$, obtemos $\omega = 0$ porque se o eixo z passasse pelo CM da haste ela não cairia de fato, ela permaneceria na posição inicial horizontal, que seria uma posição de equilíbrio indiferente.

b) Calcule o momento angular da haste ao longo de z quando ela estiver passando pela posição vertical.

O momento angular ao longo de z é $L_z = I \omega$.

Portanto:

$$L_z = \left\{ \frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2} - r \right)^2 \right\} \frac{\sqrt{2 g \left(\frac{L}{2} - r \right)}}{\sqrt{\frac{1}{12} L^2 + \left(\frac{L}{2} - r \right)^2}}$$

Simplificando:

$$L_z = M \sqrt{2 \left(\frac{1}{12} L^2 + \left(\frac{L}{2} - r \right)^2 \right)} \left(\frac{L}{2} - r \right) g$$

Esse momento angular foi criado graças ao torque do peso da haste pois:

$$\frac{d}{dt} L_z = \tau_{REXTz} = \tau_M \vec{g}_z$$

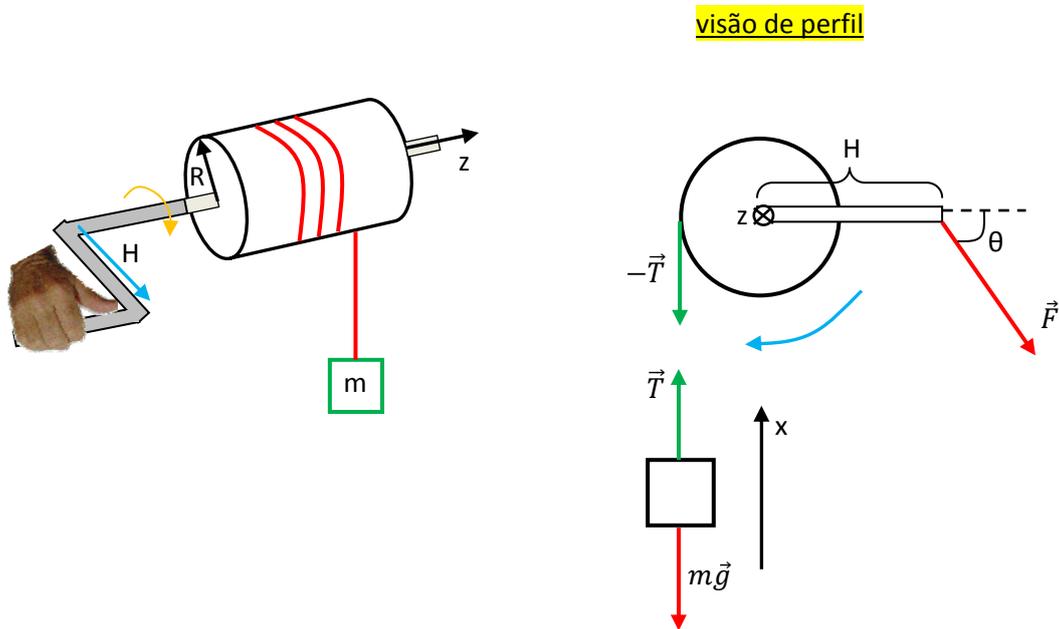
Essa equação acima é uma equação diferencial que não é simples de ser resolvida, pois $\tau_M \vec{g}_z$ não é constante, é uma função da posição/inclinação da haste. Trata-se da equação para um pêndulo físico, que veremos em um próximo capítulo.

ER 5.5) Uma pessoa puxa uma caixa de massa m para cima usando uma manivela que gira um cilindro maciço em torno do qual se enrola uma corda leve. A caixa está amarrada na extremidade livre da corda. As Figuras abaixo ilustram a situação, visão oblíqua e visão de perfil.

O cilindro maciço possui massa M e raio R . A manivela possui um braço de comprimento H . No instante mostrado na figura a pessoa está aplicando na manivela uma força \vec{F} conforme a Figura que segue, na visão de perfil.

Dados: m, M, R, H, θ e g .

Calcule a magnitude da força, F , que a pessoa deve aplicar na manivela para que, no instante mostrado na Figura, a caixa esteja subindo com aceleração de magnitude a .



A caixa descreve um movimento de translação vertical para cima. Note as forças na caixa: \vec{T} é a força que a corda tensionada transmite para a caixa. Adotamos um eixo x para cima, porque esse é o sentido da aceleração da caixa. A segunda lei de Newton diz que:

$$T - m g = m a$$

Para conhecer T devemos analisar a rotação do cilindro. A visão de perfil é mais apropriada para esse fim. Note que não são mostrados o peso do cilindro e as forças que sustentam ele nos mancais, pois essas forças não produzem torque ao longo do eixo z (para dentro da página). Adotamos um eixo z para dentro da página porque esse é o sentido da aceleração α do cilindro. Sendo o segmento de corda entre a caixa e o cilindro leve e livre, a força que a corda faz no cilindro é $-\vec{T}$. A segunda lei de Newton da rotação diz que:

$$F \text{ sen}(\theta) H - T R = I \alpha$$

Obtivemos duas equações, mas há três incógnitas: T , F e α (lembre-se que a é um parâmetro (dado) do problema).

A terceira equação que vai se juntar às outras duas que já temos vem do vínculo entre os movimentos do cilindro e da caixa. De fato, se a caixa sobe uma distância h , a corda se enrola de um comprimento h em torno da periferia do cilindro. Portanto, se a corda não derrapa/desliza, um ponto na periferia do cilindro deve se deslocar também de um comprimento de arco h . Logo, as velocidades (e acelerações) lineares da caixa e desse ponto na periferia do cilindro devem ser iguais em módulo. Segue que:

$$a = \alpha R$$

Da segunda equação obtemos então:

$$T = -\frac{I}{R^2} a + F \operatorname{sen}(\theta) \frac{H}{R}$$

Substituindo na primeira equação obtemos:

$$-\frac{I}{R^2} a + F \operatorname{sen}(\theta) \frac{H}{R} - m g = m a$$

Portanto:

$$F = \frac{m(g + a) + (I/R^2)a}{(H/R) \operatorname{sen}(\theta)}$$

Para um cilindro maciço com o eixo de rotação definido na Figura vale: $I = \frac{1}{2} M R^2$.

Concluindo:

$$F = \frac{m g + (m + M/2)a}{(H/R) \operatorname{sen}(\theta)}$$

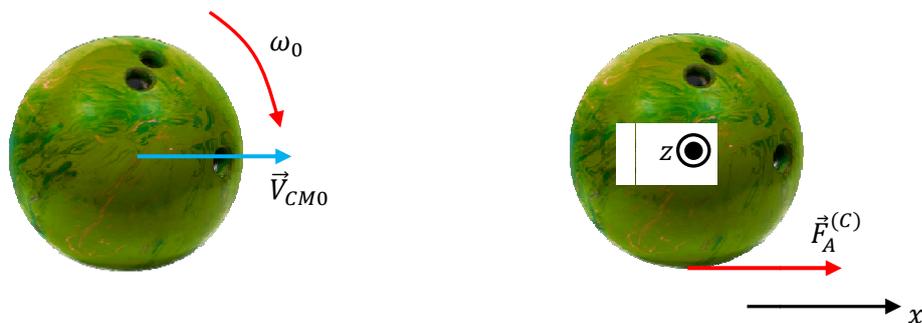
A menor força que deveria ser aplicada será aquela para $\theta = 90^\circ$, pois nesse caso vale o maior valor de $\operatorname{sen}(\theta)$ e o maior torque da pessoa.

ER 5.6) Uma bola de boliche de massa M e raio r é lançada rolando em uma superfície rígida horizontal com excesso de rotação ($\omega_0 r > V_{CM0}$). O coeficiente de atrito cinético entre a bola e o piso é μ_C .

Dados: M, r, ω_0, V_{CM0} e μ_C .

a) Calcule o tempo que demora para a bola assumir o rolamento sem deslizamento (RSD).

Note, a bola é lançada com velocidade do centro de massa inicial V_{CM0} e velocidade de rotação inicial em torno do eixo que passa pelo CM (eixo z) ω_0 . Havendo um excesso inicial de rotação ($\omega_0 r > V_{CM0}$), os pontos da bola que tocam o piso vão estar deslizando inicialmente para trás. Daí a força de atrito cinético estará apontando para frente, conforme a Figura abaixo. Essa força de atrito vai aumentar a velocidade do CM e frear a velocidade de rotação, até que o vínculo do RSD comece a valer. Nesse instante a força de atrito cinético desaparece e a bola assume velocidades constantes (desprezando o pequeno atrito de rolamento).



Na Figura acima adotamos então um eixo x para a direita, que é o sentido da aceleração \vec{a}_{CM} , e um eixo z que passa pelo CM da bola para fora da página, que é o sentido da aceleração $\vec{\alpha}$. De fato, a velocidade angular inicial da bola, $\vec{\omega}_0$, está para dentro da página, ao longo de -z, e a aceleração que freia essa velocidade estará para fora (+z), de acordo com o torque da força de atrito. Note que não mostramos as setas do peso e da força normal na bola, pois essas forças não produzem torque ao longo de z e não aceleram a bola em x. Elas não participam da dinâmica da bola.

Para o movimento de translação vale:

$$R_{EXTx} = M a_{CM} \Rightarrow F_A^{(C)} = \mu_C \eta = \mu_C M g = M a_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \mu_C g$$

Para o movimento de rotação vale:

$$\tau_{REXTz} = I \alpha \Rightarrow F_A^{(C)} r = I \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_C M g r}{I}$$

Sendo a bola de boliche uma esfera maciça (desprezando os três buracos para encaixe dos dedos):

$$I = \frac{2}{5} M r^2$$

Logo:

$$\alpha = \frac{5}{2} \mu_C \frac{g}{r}$$

Portanto, a velocidade do centro de massa vai crescer ao longo de x de acordo com:

$$V_{CM}(t) = V_{CM0} + \mu_C g t$$

Enquanto que a velocidade de rotação vai cair ao longo de z de acordo com:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{5}{2} \mu_C \frac{g}{r} t$$

Note que não vale (ainda) o vínculo do RSD: $V_{CM}(t) = \omega(t) r$.

O instante t^* em que o vínculo do RSD vai passar a valer é tal que:

$$V_{CM}(t^*) = V_{CM0} + \mu_C g t^* = \omega(t^*) r = \omega_0 r - \frac{5}{2} \mu_C g t^*$$

Concluindo:

$$t^* = \frac{\omega_0 r - V_{CM0}}{\left(1 + \frac{5}{2}\right) \mu_C g} = \frac{2}{7} \frac{\omega_0 r - V_{CM0}}{\mu_C g}$$

Note que se a bola já fosse lançada em RSD, então $\omega_0 r = V_{CM0}$ e $t^* = 0$. Se não houvesse atrito, $\mu_C = 0$, então $t^* \rightarrow \infty$, ou seja, o RSD nunca seria estabelecido, pois a dinâmica depende crucialmente do atrito.

b) Calcule as velocidades V_{CM} e ω logo após a bola assumir o RSD.

Basta calcular $V_{CM}(t)$ e $\omega(t)$ no instante t^* obtido acima. Obtemos:

$$V_{CM}(t^*) = V_{CM0} + \mu_c g \left(\frac{2}{7} \frac{\omega_0 r - V_{CM0}}{\mu_c g} \right) = \frac{5}{7} V_{CM0} + \frac{2}{7} \omega_0 r$$

$$\omega(t^*) = \omega_0 - \frac{5}{2} \mu_c \frac{g}{r} \left(\frac{2}{7} \frac{\omega_0 r - V_{CM0}}{\mu_c g} \right) = \frac{2}{7} \omega_0 + \frac{5}{7} \frac{V_{CM0}}{r}$$

Note que nesse instante (e daí para diante) vale o vínculo do RSD: $V_{CM}(t^*) = \omega(t^*) r$. Após t^* as velocidades ficam constantes, com esses valores calculados aqui.

ER 5.7) Uma roda de carroça é puxada pelo centro por uma força horizontal \vec{F} e rola sem deslizar para a direita em uma superfície horizontal. Suponha que a roda tenha raio r , massa M e momento de inércia I .

Dados: \vec{F} , r , M e I .

Calcule a força de atrito na roda.

Primeiramente vamos pensar se há atrito atuando na roda. Olhando a figura ao lado, onde não foi representada nenhuma força de atrito, vemos que há uma resultante de forças na roda, na horizontal para a direita (x). Portanto, da segunda lei de Newton:

$$R_{EXTx} = M a_{CM} \Rightarrow F = M a_{CM}$$

Vemos que a velocidade V_{CM} da roda vai aumentar para a direita.

Quanto aos torques ao longo do eixo pelo CM da roda (z ortogonal à página), vemos que é nulo, pois o peso, a normal e \vec{F} não possuem braço de alavanca em relação a esse eixo. Então, a segunda lei de Newton da rotação diz que:

$$\tau_{REXTz} = 0 = I \alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

Portanto, a velocidade de rotação ω da roda vai se manter constante.

Conclusão, temos aqui uma situação absurda, pois estamos supondo que a roda está rolando sem deslizar, ou seja, estamos supondo que valem os vínculos:

$$V_{CM} = \omega r \quad \text{e} \quad a_{CM} = \alpha r$$

No entanto, as equações acima mostram que, na ausência de atrito, nenhum desses vínculos pode valer. Fato é que no RSD, se V_{CM} aumenta (ou diminui), então ω também aumenta (diminui), e vice-versa. Se o CM acelera (ou freia), então a rotação também acelera (ou freia), e vice-versa.



Sem a força \vec{F} , a roda rolaria sem deslizar na ausência de atrito. O RSD não demandaria nenhum atrito nesse caso. A força \vec{F} cria uma tendência da roda deslizar para a direita, e não cria nenhuma tendência de rotação (chamamos isso de excesso de translação). Portanto, a força de atrito estático na roda vai se opor a essa tendência de deslizamento e apontar para a esquerda. Considere então a figura que segue. Adotamos um eixo x no sentido de \vec{a}_{CM} e um eixo z para dentro da página, que é o sentido de $\vec{\alpha}$. Ao longo de x vale:

$$F - F_A^{(E)} = M a_{CM}$$

Ao longo de z vale:

$$F_A^{(E)} r = I \alpha$$

Vale ainda o vínculo do RSD: $a_{CM} = \alpha r$

Portanto:

$$F - F_A^{(E)} = M a_{CM} = M \alpha r = M \frac{F_A^{(E)} r^2}{I}$$

Concluindo, a magnitude do atrito na roda é:

$$F_A^{(E)} = \frac{F}{1 + \frac{M r^2}{I}}$$

Quanto maior a força aplicada, mais atrito é necessário para que a roda mantenha-se sem deslizar no piso. Se $F = 0$, ou seja, se a roda não é puxada, então $F_A^{(E)} = 0$.

Sabemos que a força de atrito estático tem um limite, dado por:

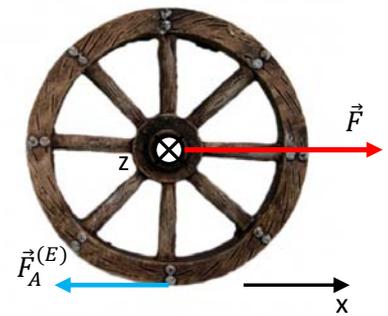
$$F_{A\ MAX}^{(E)} = \mu_E \eta = \mu_E M g$$

sendo μ_E o coeficiente de atrito estático entre a roda e o piso. Portanto, o maior valor de F (F_{MAX}) que poderia ser aplicado na roda sem que ela deslizesse é dado por:

$$F_{A\ MAX}^{(E)} = \mu_E M g = F_A^{(E)} = \frac{F_{MAX}}{1 + \frac{M r^2}{I}} \Rightarrow F_{MAX} = \left(1 + \frac{M r^2}{I}\right) \mu_E M g$$

Quanto mais pesada a roda (maior M) e mais atrito estático entre a roda e o piso (maior μ_E), mais podemos puxar a roda, fazendo-a rolar sem que ela deslize. Se definirmos a momento de inércia da roda como sendo $I = k M r^2$, sendo k um fator adimensional, que depende unicamente da forma da roda, obtemos a expressão simplificada:

$$F_{MAX} = (1 + k) \mu_E M g$$

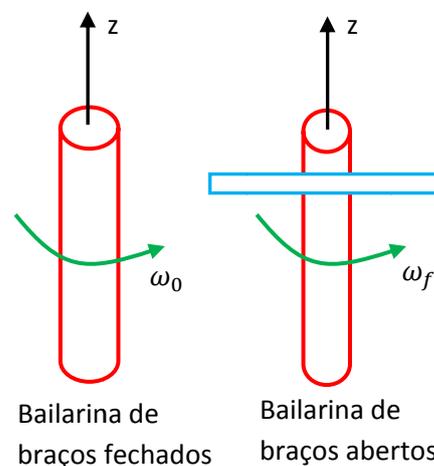


ER 5.8) Uma bailarina estava rodopiando em torno de um eixo vertical (z) com os braços fechados junto ao corpo. Em um dado instante essa bailarina abre os braços e sua velocidade de rotação diminui. Faça uma estimativa da razão ω_f/ω_0 entre as magnitudes das velocidades angulares da bailarina antes e depois dela fechar os braços.



A idéia de se fazer uma estimativa é que teremos que propor um modelo para o corpo da bailarina, e a resposta para nossa estimativa dependerá desse modelo. Quanto melhor o modelo, mais a estimativa para a razão ω_f/ω_0 vai se aproximar da realidade, ou seja, do que seria observado na prática. Pretendemos fazer aqui uma estimativa mais simples, pois não é nosso objetivo obter um resultado muito preciso. Na Figura que segue mostramos então nossa proposta de modelo para o corpo da bailarina. Quando de braços juntos ao corpo, a bailarina é um cilindro maciço de massa M e raio r .

Quando de braços abertos, a bailarina é composta de um cilindro maciço de massa $M-2m$ e raio $r-b$ (b é a espessura de um braço) e de uma haste fina de massa $2m$ (m é a massa de um braço) e comprimento $2B$ (B é o comprimento de um braço). Desprezando o atrito do ar e do piso (que uma hora vão fazer finalmente a bailarina parar de girar), a bailarina gira submetida apenas às forças peso e normal do piso, ambas verticais. Essas forças não produzem torque vertical. Segue que o momento angular da bailarina ao longo desse eixo vertical (z) se conserva nesse processo (rápido) de abrir os braços.



Portanto (“0”=imediatamente antes e “f” = imediatamente depois de abrir os braços):

$$I_f \omega_f = I_0 \omega_0$$

Ou seja:

$$\frac{\omega_f}{\omega_0} = \frac{I_0}{I_f}$$

Antes de abrir os braços vale o momento de inércia de um cilindro maciço de massa M e raio r (girando em torno de um eixo pelo CM):

$$I_0 = \frac{1}{2} M r^2$$

Após abrir os braços resta um cilindro maciço de massa $M - 2m$ e raio $r-b$ (girando em torno de um eixo pelo CM):

$$I_f = \frac{1}{2} (M - 2m) (r - b)^2$$

e ainda o momento de inércia de uma haste fina com eixo pelo centro:

$$I_h = \frac{1}{12} 2m (2B)^2$$

Logo:

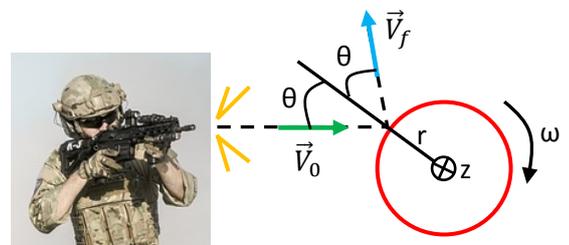
$$\frac{\omega_f}{\omega_0} = \frac{I_0}{I_f + I_h} = \frac{M r^2}{(M - 2m)(r - b)^2 + \frac{4}{3} m B^2}$$

Para uma bailarina de massa $M = 50$ kg, raio $r = 16$ cm, braços com $B = 53$ cm (30% da altura), $b = 4$ cm e $m = 2,5$ kg (5% de M), obtemos:

$$\frac{\omega_f}{\omega_0} \cong 0,81$$

Nesse modelo, ao abrir os braços, a bailarina faz sua velocidade angular cair para 81% do valor inicial.

ER 5.9) Um atirador atira na periferia de um cilindro maciço de massa M e raio r que pode girar livremente em torno de seu eixo fixo (z para dentro da página). A bala ricocheteia no cilindro e este adquire uma velocidade de rotação em torno de seu eixo. A bala, de massa m , chega com velocidade \vec{V}_0 e rebate com velocidade \vec{V}_f , conforme a figura.



Dados: M , r , m , θ , V_0 e V_f .

Calcule a velocidade ω de rotação do cilindro logo após o ricochete da bala, supondo que ele estava inicialmente em repouso.

A bala faz força (de contato) no cilindro e exerce um torque ao longo de z . O cilindro responde com uma força e um torque na bala, que desviam sua trajetória. Não conhecemos essas forças e torques, mas sabemos que são internos ao sistema bala+cilindro. As forças externas são o peso da bala (um peso minúsculo), o peso do cilindro, as forças que fixam o eixo do cilindro (todas sem braço de alavanca em relação a z) e os atritos (desprezíveis). Assim sendo, podemos apelar para a conservação do momento angular L_z do sistema bala+cilindro. Portanto:

$$L_z^{(A)} = L_z^{(D)} \Rightarrow m V_0 r \sin(\theta) = I \omega + m V_f r \sin(\theta)$$

Note que, de acordo com a regra da mão direita, todos os momentos angulares estão para dentro da página e são, portanto, positivos.

Para um cilindro maciço com o eixo z dado: $I = \frac{1}{2} M r^2$.

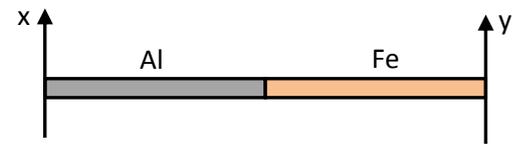
Segue que:

$$\omega = 2 \frac{m}{M} (V_0 - V_f) \frac{\text{sen}(\theta)}{r}$$

Note que, para $\theta=0$, a bala incidiria radialmente no cilindro, sem braço de alavanca, e o cilindro não adquiriria rotação. Da mesma forma, se $V_0 = V_f$, a bala não teria sido afetada pelo cilindro, e o cilindro não seria afetado pela bala (ou, o empurrão que a bala faria no cilindro na chegada seria igual em magnitude e oposto ao empurrão que a bala faria no cilindro na saída e este não adquiriria nenhuma rotação).

Equivalentemente, se $V_0 = V_f$ a energia cinética da bala se conserva, não restando possibilidade para o cilindro adquirir ele próprio uma energia cinética de rotação.

ER 5.10) Uma haste fina de comprimento $2L$ é formada pela emenda de duas hastes finas de comprimento L : uma haste de ferro, de massa M (laranja), e uma haste de alumínio de massa m (cinza). A Figura ao lado ilustra essa haste e dois eixos x e y , passando pelas extremidades da haste. Considere que essa haste esteja girando com velocidade ω em torno de uma de suas extremidades.



Dados: L , M , m e ω .

a) Suponha que a velocidade da haste seja $\vec{\omega} = \omega \hat{x}$, calcule a energia cinética de rotação da haste.

A energia cinética de rotação da haste é dada por:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

O que precisamos fazer então é calcular o momento de inércia da haste, que é dada por:

$$I = I_{Fe} + I_{Al}$$

Sendo I_k o momento de inércia da metade da haste feita de material k .

Note, se $\vec{\omega} = \omega \hat{x}$, a haste está girando em torno do eixo x . Então, a haste de alumínio é uma haste girando em torno de um eixo passando por sua extremidade, ou seja:

$$I_{Al} = \frac{1}{3} m L^2$$

A haste de ferro é uma haste girando em torno de um eixo (x) que está distante $L+L/2$ de seu CM. Portanto, de acordo com o teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia dessa haste é:

$$I_{Fe\ x} = I_{Fe\ CM} + M \left(3 \frac{L}{2}\right)^2$$

com:

$$I_{Fe\ CM} = \frac{1}{12} M L^2$$

Portanto:

$$I = \frac{1}{3} m L^2 + \frac{1}{12} M L^2 + \frac{9}{4} M L^2 = \frac{1}{3} m L^2 + \frac{7}{3} M L^2$$

A energia cinética da haste é:

$$K_{rot}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m L^2 + \frac{7}{3} M L^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{6} (m + 7M) L^2 \omega^2$$

b) Suponha que a velocidade da haste seja $\vec{\omega} = \omega \hat{y}$, calcule a energia cinética da haste.

Note, se $\vec{\omega} = \omega \hat{y}$, a haste está girando em torno do eixo y. Então, os papéis das hastes se invertem, em relação ao item (a) acima. Agora é a haste de ferro que está girando em torno de um eixo passando por sua extremidade, enquanto que a haste de alumínio é uma haste girando em torno de um eixo (y) que está distante L+L/2 de seu CM. Permutando então m por M na resposta do item (a) obtemos:

$$K_{rot}^{(2)} = \frac{1}{6} (M + 7m) L^2 \omega^2$$

A razão entre as energias cinéticas é:

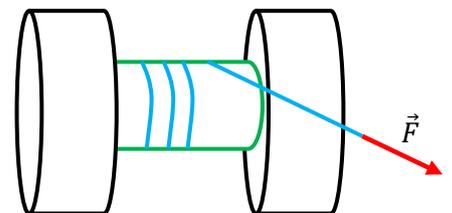
$$\frac{K_{rot}^{(1)}}{K_{rot}^{(2)}} = \frac{m + 7M}{M + 7m}$$

Consultando na internet vemos em uma tabela que as densidades desses materiais são: $\rho_{Al} \cong 2,7 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_{Fe} \cong 7,87 \text{ g/cm}^3$. Portanto, a razão entre as energias cinéticas é, aproximadamente:

$$\frac{K_{rot}^{(1)}}{K_{rot}^{(2)}} = \frac{\rho_{Al} + 7 \rho_{Fe}}{\rho_{Fe} + 7 \rho_{Al}} \cong \frac{57,79}{26,77} \cong 2,2$$

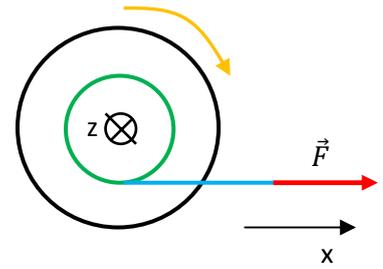
A configuração (a) tem praticamente o dobro de energia cinética da configuração (b), para uma mesma velocidade angular ω .

ER 5.11) Um rolo é formado por dois cilindros maciços de massa M e raio R unidos por um eixo que é um cilindro oco de massa m e raio r (um pedaço de cano). Um barbante é enrolado no eixo do rolo e sua extremidade é puxada por uma força horizontal de módulo F. O rolo, inicialmente em repouso, passa a, por hipótese, rolar sem deslizar no piso horizontal. A Figura ao lado ilustra essa ideia.

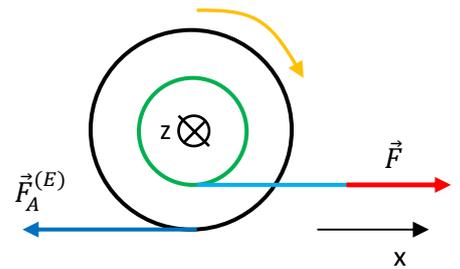


Dados: M, R, m, r e F.

a) Suponha que o barbante seja enrolado e puxado como na Figura ao lado (visão de perfil), calcule o módulo da força de atrito no rolo.



Já adotamos um eixo x no sentido que esperamos que o rolo acelere seu CM e um eixo z pelo CM no sentido em que esperamos que ele acelere sua rotação (para dentro da página), se ele vai rolar sem deslizar. Primeiramente vamos ver se há atrito no rolo. Obviamente a pergunta sobre se há atrito cinético não faz sentido, pois estamos supondo que o rolo está em RSD. A pergunta que cabe é se há atrito estático. A idéia já foi apresentada anteriormente. Se não houvesse atrito, dá para ver que a velocidade do CM iria aumentar para a direita, porque a resultante das forças em x seria simplesmente F . Ao mesmo tempo a velocidade $\vec{\omega}$ iria aumentar para fora, ao longo de $-z$ (sentido anti-horário de rotação), por causa do torque de \vec{F} ao longo desse eixo, que está para fora. Trata-se de uma situação absurda, pois $\vec{\omega}$ tem que aumentar no sentido oposto, para dentro (sentido horário), para ser compatível com o rolamento do rolo. Então tem que haver atrito estático, para ocorrer o RSD. A força de atrito vai estar para a direita ou para a esquerda? Vemos que \vec{F} cria no rolo uma tendência de deslizar para a direita e ao mesmo tempo, tenta girar o rolo no sentido anti-horário (como já discutimos), de tal forma que a superfície do rolo que toca o chão deslize para a direita. Portanto, se as duas tendências de deslizamento são para a direita, a força de atrito vai estar para esquerda, como mostrado na Figura ao lado. Em x , a segunda lei de Newton diz que:



$$F - F_A^{(E)} = (2M + m) a_{CM}$$

Em z , a segunda lei de Newton da rotação diz que:

$$F_A^{(E)} R - F r = I \alpha$$

Vale ainda o vínculo do RSD: $a_{CM} = \alpha R$, por hipótese.

Portanto, da segunda equação:

$$a_{CM} = \frac{R}{I} (F_A^{(E)} R - F r)$$

Substituindo na primeira equação:

$$F - F_A^{(E)} = (2M + m) \frac{R}{I} (F_A^{(E)} R - F r)$$

Logo:

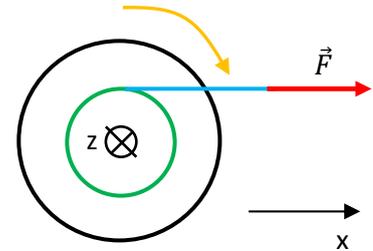
$$F_A^{(E)} = \left(\frac{I/R^2 + (r/R)(2M + m)}{I/R^2 + 2M + m} \right) F$$

O momento de inércia do rolo, que deveria ser substituído na expressão acima, é:

$$I = 2 \left(\frac{M R^2}{2} \right) + m r^2 = M R^2 + m r^2$$

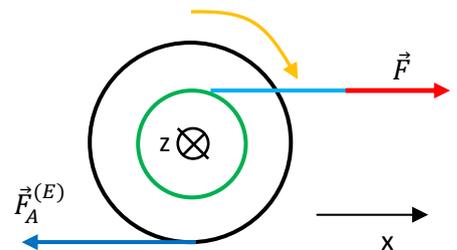
Note que se $F = 0$, então $F_A^{(E)} = 0$, ou seja, se o rolo estivesse rolando solto sem deslizar, sem ninguém puxando, não haveria atrito nenhum.

b) Suponha que o barbante seja enrolado e puxado como na Figura ao lado (visão de perfil), calcule o módulo da força de atrito no rolo.



Já adotamos um eixo x no sentido que esperamos que o rolo acelere seu CM e um eixo z pelo CM no sentido em que esperamos que ele acelere sua rotação (para dentro da página), se ele vai rolar sem deslizar.

Primeiramente vamos ver se há atrito estático no rolo. Se não houvesse atrito, dá para ver que a velocidade do CM iria aumentar para a direita, porque a resultante das forças em x seria simplesmente F . Ao mesmo tempo a velocidade $\vec{\omega}$ iria aumentar para dentro, ao longo de $+z$ (sentido horário de rotação), por causa do torque de \vec{F} ao longo desse eixo, que está para dentro. Tudo isso é compatível com o rolamento do rolo. Não há nada de evidente, como aconteceu no item (a), que indique que temos de supor um atrito no rolo. Ele pode rolar sem atrito, puxado dessa forma. Mas, veremos na solução que segue que esse é um caso particular, para um dado valor específico da razão r/R e das massas. Portanto, não temos nada que nos obrigue a supor que há atrito no rolo, mas vamos supor que ele existe e ver se ele pode/deve ser nulo ou não. Dessa forma, estamos admitindo soluções mais gerais do problema. A força de atrito vai estar para a direita ou para a esquerda? Vemos que \vec{F} cria no rolo uma tendência de deslizar para a direita e ao mesmo tempo, tenta girar o rolo no sentido horário, de tal forma que a superfície do rolo que toca o chão deslize para a esquerda. Portanto, há duas tendências opostas de deslizamento e novamente, ficamos em dúvida sobre o sentido do atrito. Nesses casos, quando há uma indefinição, o melhor que podemos fazer é arbitrar um sentido para o atrito. O sinal da resposta vai nos dizer se o sentido que arbitramos está correto ou não. Por exemplo, vamos admitir aqui um atrito para a esquerda, como fizemos no item (a). Daí vamos calcular $F_A^{(E)}$. Se $F_A^{(E)}$ for positivo, é porque o atrito está mesmo para a esquerda. Senão, se $F_A^{(E)}$ for negativo, é porque o atrito está para a direita. Se $F_A^{(E)} = 0$, então o rolo não precisa de atrito para rolar sem deslizar. Veremos que os três casos são possíveis.



Vamos usar então o digrama de forças e o referencial representados ao lado.

Em x , a segunda lei de Newton diz que:

$$F - F_A^{(E)} = (2M + m) a_{CM}$$

Em z , a segunda lei de Newton da rotação diz que:

$$F_A^{(E)} R + F r = I \alpha$$

Vale ainda o vínculo do RSD: $a_{CM} = \alpha R$.

Portanto, da segunda equação:

$$a_{CM} = \frac{R}{I} (F_A^{(E)} R + F r)$$

Substituindo na primeira equação:

$$F - F_A^{(E)} = (2M + m) \frac{R}{I} (F_A^{(E)} R + F r)$$

Logo:

$$F_A^{(E)} = \left(\frac{I/R^2 - (r/R)(2M + m)}{I/R^2 + 2M + m} \right) F$$

Note que agora podemos ter $F_A^{(E)} = 0$ mesmo com $F \neq 0$. De fato, há três possibilidades:

1. $I/R^2 - (r/R)(2M + m) > 0$, então $F_A^{(E)}$ está para a esquerda, como supusemos desde o início.
2. $I/R^2 - (r/R)(2M + m) < 0$, então $F_A^{(E)}$ está para a direita.
3. $I/R^2 - (r/R)(2M + m) = 0$, então $F_A^{(E)} = 0$.

Preferimos não substituir a expressão de I nas expressões acima, mas dá para ver que poderá haver algumas simplificações (não muitas).

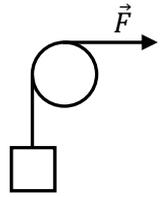
Se você fizer um experimento com um rolo como o mostrado aqui e puxar a ponta do barbante, vai ver que na situação (a) o barbante vai se enrolando no eixo e puxando sua mão para a esquerda, à medida que o rolo avança para a direita. No caso (b), o barbante vai se desenrolando e sua mão vai para a direita junto com o rolo. Ao puxar o rolo através do barbante, criamos nele tendências de deslizar no piso que competem entre si, abrindo possibilidade para o rolo rolar sem deslizar com atrito estático para frente, para trás, ou mesmo nulo.

5.7 Exercícios propostos

EP 5.1) O ponteiro dos minutos de um relógio é uma haste fina de massa $M = 1$ g e comprimento $L = 1$ cm. Calcule a energia cinética de rotação desse ponteiro (em joules).

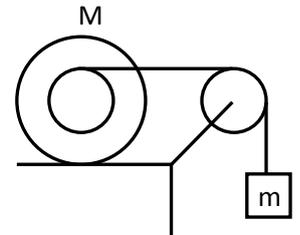
- EP 5.2)** O eixo do motor de um automóvel está girando com velocidade angular constante ω . Calcule quantas voltas completas em torno de si mesmo esse eixo dá em um tempo $\Delta t = 1$ h se: a) $\omega = 1000$ rpm b) $\omega = 30$ rad/s.
- EP 5.3)** Um automóvel está viajando com velocidade $V=100$ km/h, sem derrapagens. Calcule a velocidade de rotação (em rad/s) de um dos pneus em torno de seu eixo de rotação. Considere que o conjunto roda+pneu tem raio $R=30$ cm.
- EP 5.4)** Um cilindro de massa M e raio R tem momento de inércia (em relação a um eixo axial pelo CM) $I = k M R^2$, sendo k uma constante adimensional. Suponha que esse cilindro esteja rolando sem deslizar para baixo de um plano inclinado de um ângulo θ com a horizontal. Calcule a aceleração do CM desse cilindro.
- EP 5.5)** Uma estrela de forma esférica maciça, massa M e raio inicial R sofre um rápido colapso gravitacional e se contrai, passando a ter um raio menor R/k , sendo k uma constante adimensional maior que 1. Supondo que a estrela estava girando em torno de um eixo que passa por seus pólos com velocidade angular ω_0 , calcule a nova velocidade angular logo após o colapso.
- EP 5.6)** Uma torre que tem basicamente a forma de uma haste fina e rígida de massa M e comprimento H cai, partindo do repouso de sua posição inicial vertical. Ela cai girando em torno de seu ponto fixo de apoio no chão. Calcule a velocidade angular da torre (ao longo de um eixo que passa por esse ponto de apoio) no instante em que a torre vai tocar o chão horizontalmente. Despreze o arraste com o ar.
- EP 5.7)** Um automóvel é basicamente um bloco de massa M e quatro cilindros maciços, cada um de massa m e raio R . Se a energia cinética do automóvel é K , e os cilindros rolam sem deslizar, calcule sua velocidade V .
- EP 5.8)** Uma haste fina de comprimento L e massa M pode girar livremente em torno de um eixo que passa por sua extremidade. Um atirador dá um tiro no meio da haste. A bala, de massa m e velocidade V , incide ortogonalmente a uma distância D do eixo de rotação da haste. Calcule a velocidade angular da haste logo após o tiro, supondo que a haste estava inicialmente parada e que a bala ficou incrustada na haste.
- EP 5.9)** Um conjunto pneu+roda é basicamente um cilindro maciço de massa M e raio R que pode girar em torno do eixo central z . Suponha que esse conjunto pneu+roda esteja desbalanceado, o que implica que seu momento angular não está ao longo do eixo z . Suponha que quando ele está girando com velocidade angular ω ao longo de z seu momento angular seja $\vec{L} = I \omega \hat{z} + B [\sin(\omega t) \hat{x} + \cos(\omega t) \hat{y}]$, sendo I e B constantes positivas. Calcule o torque que esse conjunto pneu+roda produz no eixo que o sustenta. Esse torque faz o automóvel vibrar e pode ser eliminado através do balanceamento da roda, que se resume a fazer $B = 0$.

EP 5.10) Uma pessoa puxa a extremidade de uma corda leve com uma força horizontal de módulo F . A corda passa por uma polia, que é um disco maciço de massa m e raio R , e tem fixo na sua outra extremidade um bloco de massa M . Veja a figura ao lado. A polia gira sem atrito em torno de um eixo fixo central. Calcule a força F que deve ser aplicada para que: a) o bloco suba com aceleração vertical de módulo a . b) o bloco desça com aceleração vertical de módulo a . c) Calcule a maior aceleração possível de descida do bloco.

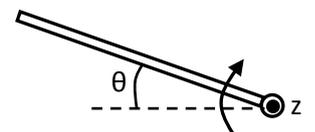


EP 5.11) Uma criança de massa m está em pé sobre um disco de raio R e massa M contido em um plano horizontal. O disco pode girar livremente em torno de um eixo (z) vertical que passa pelo seu centro. A criança e o disco estão inicialmente em repouso e a criança está próxima da periferia do disco (ou seja, no raio R). Em um dado instante a criança começa a correr sobre o disco, percorrendo um círculo de raio R . a) Se a criança correr com velocidade de módulo V (em relação à Terra), calcule a velocidade angular do disco. b) Calcule o ângulo que o disco gira no intervalo de tempo em que a criança dá uma volta completa no disco.

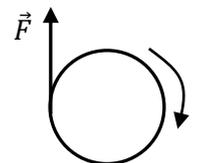
EP 5.12) Um rolo de massa M e momento de inércia H (em torno de um eixo central pelo CM) é formado por um disco de raio r colado a um disco de raio maior R . Uma corda leve é enrolada no disco menor e tem na outra extremidade pendurado um bloco de massa m . A polia tem massa desprezível. Supondo que o bloco está caindo, e o rolo rolando sem deslizar, calcule a aceleração do centro de massa do rolo. Dica: muita atenção para o vínculo entre as acelerações de CM do rolo e do bloco. Suponha que a força de atrito no rolo esteja oposta ao seu movimento.



EP 5.13) A cancela de uma garagem consiste em uma haste fina rígida de massa M e comprimento C que pode girar em torno de um eixo (z , orientado para fora da folha) que passa por uma de suas extremidades, conforma a figura ao lado. Considere que no instante mostrado na figura a cancela esteja girando no sentido horário (subindo) com aceleração angular de módulo α . Calcule o vetor torque que o motor está aplicando no eixo de giro da cancela.



EP 5.14) Um cilindro maciço de raio R e massa M tem uma corda leve enrolada em sua periferia, como um ioiô. A extremidade livre da corda é puxada para cima por uma força vertical, de tal forma que o CM do ioiô fique em repouso, enquanto ele gira no ar. Calcule a aceleração angular do ioiô. A corda não desliza na superfície do cilindro.



EP 5.15) Um volante consiste em um cilindro maciço de raio R e massa M . Esse volante está inicialmente girando em torno de um eixo fixo central com energia cinética K . Uma força de atrito de magnitude constante F é aplicada tangencialmente à periferia do cilindro. Calcule o tempo que o volante demora até parar.

EP 5.16) Uma bola de pingue-pongue de massa M e raio R é cuidadosamente colocada em um piso horizontal de tal forma que sua velocidade angular inicial seja ω_0 e sua velocidade de CM seja nula. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e o piso é μ_C . A bola começa a patinar no piso e inicia então um movimento de rolamento com deslizamento. a) Calcule o tempo que demora até que essa bola assuma o movimento de rolamento sem deslizamento. b) Calcule a energia mecânica dissipada nesse processo.

5.8 Respostas dos exercícios propostos

EP 5.1) $\cong 0,51 \times 10^{-13} \text{ J}$

EP 5.2) a) 60.000 b) $\cong 17.189$

EP 5.3) $\cong 92,6 \text{ rad/s}$

EP 5.4) $\frac{g \operatorname{sen}(\theta)}{1+k}$

EP 5.5) $k^2 \omega_0$

EP 5.6) $\sqrt{3 g / H}$

EP 5.7) $\sqrt{2 K / (M + 2m)}$

EP 5.8) $\frac{m D}{(1/3)M L^2 + m D^2} V$

EP 5.9) $-B \omega [\cos(\omega t) \hat{x} - \operatorname{sen}(\omega t) \hat{y}]$

EP 5.10) a) $Mg + \left(M + \frac{m}{2}\right) a$ b) $Mg - \left(M + \frac{m}{2}\right) a$ c) $\frac{M}{M + \frac{m}{2}} g$

EP 5.11) a) $\frac{2m}{MR} V$ b) $\frac{2\pi}{1 + \frac{M}{2m}}$

EP 5.12) $\frac{m R (r+R)}{m (r+R)^2 + M R^2 + H} g$. O vínculo entre as acelerações de CM é: $a_{ROLO} = a_{BLOCO} R / (R + r)$

EP 5.13) $- \left[Mg \frac{L}{2} \cos(\theta) + M \frac{C^2}{3} \alpha \right] \hat{z}$

EP 5.14) $2 \frac{g}{R}$

EP 5.15) $\frac{\sqrt{MK}}{F}$

EP 5.16) a) $\frac{2 \omega_0 R}{5 \mu_C g}$ b) $\frac{1}{5} M R^2 \omega_0^2$

6

Equilíbrio estático de corpos rígidos



Assim como zero é uma quantidade, o repouso é um movimento, o movimento nulo. Se pretendemos entender o movimento, devemos entender o repouso, como um caso particular.

Um corpo está em repouso, ou em equilíbrio estático, quando sua posição e orientação no espaço não mudam ao longo do tempo. Ele permanece lá no mesmo lugar, hoje e sempre. O interesse em entender o repouso dos corpos vem desde a antiguidade, quando a humanidade ergueu suas primeiras construções, e perdura até hoje, pois as construções mudaram, mas as leis do equilíbrio são as mesmas. As pedras do monumento de Stonehenge (Figura ao lado), das pirâmides do Egito e das cidades Incas no Peru, por exemplo, foram colocadas umas sobre as outras há centenas ou milhares de anos, e estão lá até hoje. Elas estão em equilíbrio estático, que é a condição que um corpo deve ter para se manter em repouso. Aristóteles, Arquimedes, Leonardo da Vinci, Galileu e outros gênios da humanidade deram sua contribuição para o entendimento da alavanca (uma máquina “amplificadora” de força, usada desde a antiguidade) e lançaram os conceitos básicos dessa ciência, a “estática”, que descreve/explica o repouso dos corpos.



Vamos discutir aqui o equilíbrio estático de corpos rígidos, ou seja, não vamos nos preocupar com possíveis deformações (mudanças de forma e tamanho) do corpo de interesse.

6.1 Condições para o equilíbrio estático

Considere um corpo rígido de massa M submetido a várias forças. Queremos que essas forças sejam tais que esse corpo, estando em repouso em $t=0$, continue em repouso para sempre. Já sabemos que todo movimento pode ser pensado como sendo uma superposição de translação e rotação em torno de um eixo que passa pelo CM do corpo, conforme o teorema de Chasles. Simbolicamente:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_{CM}$$

Portanto, para permanecer em repouso ($\mathbf{M}=\mathbf{0}$) esse corpo não pode adquirir translação ($\mathbf{T}=\mathbf{0}$) e nem rotação ($\mathbf{R}_{CM}=\mathbf{0}$) em torno de um eixo qualquer que passa pelo CM.

O movimento de translação é aquele em que todos os pontos do corpo se movem juntos com o centro de massa. Portanto, para que um corpo não translade ($\mathbf{T}=\mathbf{0}$) deve valer a condição:

$$\vec{R}_{EXT} = M \vec{a}_{CM} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_{EXT} = \vec{0}$$

As forças devem ser tais que produzem uma resultante nula. Isso garante que o CM do corpo permaneça em repouso, se ele estava em repouso em $t=0$.

Estando o CM em repouso, resta ainda a chance desse corpo girar em torno de um eixo que passa pelo CM. A Figura 6.1 ilustra essa idéia. Uma haste de comprimento L está inicialmente em repouso e é submetida a apenas duas forças opostas \vec{F} e $-\vec{F}$ (esqueça a gravidade, a haste está flutuando no espaço vazio). Note que vale:

$$\vec{R}_{EXT} = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$$

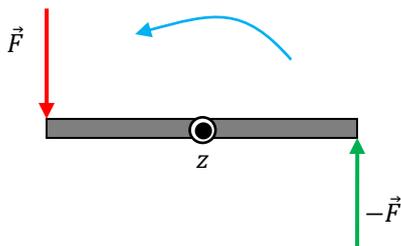


Figura 6.1: Um exemplo simples, um binário de forças, \vec{F} e $-\vec{F}$, que mostra que a condição $\vec{R}_{EXT} = \vec{0}$ não é suficiente para que um corpo permaneça imóvel.

Mas, já sabemos que esse corpo não vai permanecer em repouso, ele vai girar em torno de um eixo (z , para fora da página) que passa pelo CM, com aceleração angular α ao longo de z de magnitude dada por:

$$\tau_{REXTz} = F \frac{L}{2} + F \frac{L}{2} = F L = I \alpha$$

sendo I o momento de inércia da haste em relação ao eixo z pelo CM.

Para garantir que um corpo não gire em torno de nenhum eixo que passa pelo CM ($\mathbf{R}_{CM}=\mathbf{0}$), basta considerarmos um sistema de três eixos x , y e z ortogonais entre si, com origem no CM, e mostrar que o torque resultante nesse referencial é nulo, ou seja:

$$\vec{\tau}^{(CM)}_{REXT} = \vec{0}$$

A notação (CM) indica que o referencial tem origem no CM. Assim, se o corpo estava em repouso em $t=0$, vai continuar em repouso, sem girar, para sempre.

Resumindo, as duas condições necessárias e suficientes para o equilíbrio estático de um corpo rígido são (supondo que a condição inicial seja o repouso):

1. $\vec{R}_{EXT} = \vec{0}$: As forças devem ser tais que se anulam mutuamente ($\mathbf{T}=\mathbf{0}$).
2. $\vec{\tau}^{(CM)}_{EXT} = \vec{0}$: Os torques resultantes ao longo de quaisquer eixos x, y e z ortogonais entre si que passam pelo CM devem ser nulos ($\mathbf{R}_{CM}=\mathbf{0}$).

A condição 2 pode ser simplificada através do seguinte teorema: suponha um sistema de eixos x, y e z com origem no ponto "A", de tal forma que o torque resultante das forças nesse referencial é nulo:

$$\vec{\tau}^{(A)}_{EXT} = \vec{0}$$

Então, para qualquer outro sistema de eixos com origem em outro ponto B vale:

$$\vec{\tau}^{(B)}_{EXT} = \vec{0}$$

desde que $\vec{R}_{EXT} = \vec{0}$.

Resumidamente: $\mathbf{R}_B=\mathbf{0}$ se $\mathbf{R}_A=\mathbf{0}$, desde que $\vec{R}_{EXT} = \vec{0}$.

A demonstração desse teorema é muito simples: basicamente $\vec{\tau}^{(A)}_{\vec{F}} = \vec{r}_A \times \vec{F}$ e $\vec{\tau}^{(B)}_{\vec{F}} = \vec{r}_B \times \vec{F}$. Como $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{C}$, sendo \vec{C} uma constante independente de \vec{F} , segue a validade do teorema.

Portanto, podemos usar esse teorema para simplificar a segunda condição de equilíbrio, relaxando o vínculo de sempre termos que calcular o torque resultante em relação a eixos que passam pelo CM. Ao invés de impormos $\mathbf{R}_{CM}=\mathbf{0}$, podemos impor $\mathbf{R}_O=\mathbf{0}$, sendo "O" uma origem qualquer, não necessariamente uma origem no CM do corpo. Isso porque o teorema acima garante que se $\mathbf{R}_O=\mathbf{0}$ então $\mathbf{R}_{CM}=\mathbf{0}$ e vice-versa (desde que valha também $\vec{R}_{EXT} = \vec{0}$, que é o contexto aqui).

Concluindo, com essa simplificação/generalização, as condições de equilíbrio ficam:

1. $\vec{R}_{EXT} = \vec{0}$: As forças devem ser tais que se anulam mutuamente ($\mathbf{T}=\mathbf{0}$).
2. $\vec{\tau}^{(O)}_{EXT} = \vec{0}$: Os torques resultantes ao longo de eixos x, y e z (ortogonais entre si) com origem em qualquer ponto "O" devem ser nulos. O ponto "O" pode ser escolhido arbitrariamente, de acordo com a conveniência ($\mathbf{R}_O=\mathbf{0}$).

Um problema de equilíbrio consiste basicamente em determinar as forças que devem atuar em um corpo para que ele permaneça estático. Devemos construir o diagrama de forças para o corpo de interesse e impor as duas condições de equilíbrio, que, no caso mais geral, podem levar a um conjunto de seis equações algébricas para as componentes das forças. Há casos em que obtemos menos equações do que incógnitas a

serem determinadas. Esses são os casos de equilíbrio indeterminado, sobre os quais comentaremos brevemente mais adiante.

É importante ao fazer o diagrama de forças para um corpo cujo equilíbrio queremos estudar que essas sejam representadas em seus locais corretos de aplicação, para que seus torques estejam corretamente definidos. A única liberdade que temos (chamado de princípio da transmissibilidade), para o caso de um corpo rígido, é a de deslocar as forças ao longo de suas linhas de ação, pois esse deslocamento não altera os braços de alavanca e nem os torques das forças (poderia alterar as deformações do corpo, se ele fosse não-rígido). Para forças concentradas em regiões pequenas, consideramos basicamente que elas atuam em um determinado ponto do corpo. Por exemplo, a força exercida por um barbante fino ou por um apoio pontiagudo. Na prática as forças estão geralmente distribuídas em uma região do corpo. Por exemplo, a força que a lâmina de uma faca ou de uma tesoura faz em um corpo é, basicamente, distribuída ao longo de uma linha no corpo (a linha de apoio da lâmina afiada). As forças de atrito e normal atuam distribuídas em áreas de superfícies, que podem ser pequenas ou extensas. Se as superfícies/linhas de contato forem pequenas (quando comparadas com outras dimensões do sistema), como a ponta de uma haste, podemos considerar que essas forças atuam em um ponto de contato. Adotaremos essa simplificação ao longo desse texto. Superfícies ou linhas extensas de aplicação de forças podem exigir um pouco mais de esforço, como a determinação dos centróides dessas superfícies e linhas. Quanto ao peso, trata-se de uma força distribuída em todo o volume do corpo e a definição de seu “ponto de aplicação” dá origem ao conceito de centro de gravidade, que discutiremos em seguida.

Vale registrar que durante a construção das equações de equilíbrio o cálculo do torque de uma força pode ser simplificado através do teorema de Varignon, que afirma que o torque de \vec{F} ao longo de um eixo z é a soma dos torques ao longo de z das componentes de \vec{F} . Considere o exemplo da Figura 6.2 abaixo em que queremos calcular o torque da força \vec{F} (no plano do papel) ao longo do eixo z (ortogonal ao plano do papel, orientado para fora). As distâncias A e B e o ângulo θ foram dados.

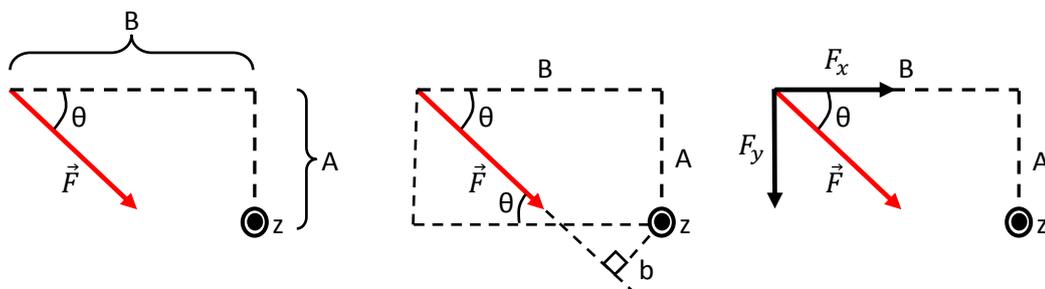


Figura 6.2: Ilustração do uso do teorema de Varignon para o cálculo de torque: o torque de uma força é a soma dos torques das componentes dessa força.

Há aqui duas opções:

i) podemos gastar um tempo calculando o braço de alavanca b de \vec{F} em relação ao eixo z :

$$b = B \sin(\theta) - A \cos(\theta)$$

e concluir que:

$$\tau_{\vec{F}z} = F b = F[B \sin(\theta) - A \cos(\theta)]$$

ou

ii) podemos apelar diretamente para o teorema de Varignon e escrever:

$$\tau_{\vec{F}z} = \tau_{F_x z} + \tau_{F_y z} = -F_x A + F_y B = -(F \cos(\theta)) A + (F \sin(\theta)) B$$

A segunda opção é mais simples e rápida, pois a avaliação dos braços de alavanca das componentes da força é imediata. Note que usamos a regra da mão direita para definir os sinais dos torques ao longo de z .

6.2 Centro de gravidade

Na Figura 6.3 abaixo tentamos passar a idéia de que o peso de um corpo é uma força distribuída em toda a extensão do corpo. Cada partícula que compõe o corpo, um próton, um nêutron ou um elétron, possui um peso minúsculo, que atua lá onde essa partícula está. O peso \vec{P} do corpo é a soma vetorial desse número imenso ($\cong 10^{24}$) de pesos minúsculos ($\cong 10^{-26}$ N).

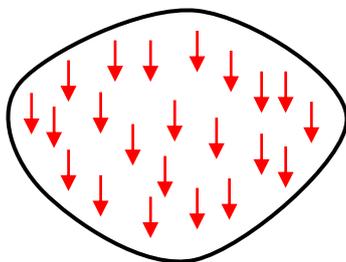


Figura 6.3: O peso de um corpo não é uma força localizada. É uma força distribuída em todo o volume do corpo. Cada setinha vermelha representa o peso minúsculo de um próton, nêutron ou elétron. Para um corpo macroscópico há um número incrível de setas, cerca de 10^{24} (o número de Avogadro).

Havendo então N partículas, cada uma de massa m_i , o peso do corpo é:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{g}_i$$

sendo \vec{g}_i a aceleração da gravidade no local onde está a partícula i . Note, estamos aqui considerando um caso geral, em que o corpo pode ter um tamanho arbitrário, de tal forma que as partículas que o compõem possam estar em lugares tão distantes uns dos outros que a aceleração da gravidade em uma partícula pode ser diferente da aceleração da gravidade em outra partícula. De fato, sabemos que a aceleração da gravidade diminui quando nos afastamos do centro da Terra (ela decai com o quadrado da distância ao centro da Terra, de acordo com a lei de Newton da gravitação). Portanto, a todo rigor, a aceleração da gravidade no topo de

um prédio de 100 andares é menor que a aceleração da gravidade no térreo desse prédio. Há ainda a variação na direção do vetor aceleração da gravidade. Por exemplo, a aceleração da gravidade no Japão é basicamente oposta/anticolinear à aceleração da gravidade no Brasil.

As condições de equilíbrio envolvem todas as forças e uma delas é o peso. A primeira condição envolve a soma das forças e, portanto, envolve apenas a resultante \vec{P} de todos os pesos das partículas que compõem o corpo de interesse. Essa resultante pode ser medida com uma balança. O problema está na segunda condição, sobre os torques, que vai envolver os braços de alavanca de cada um dos 10^{24} pesos. Para simplificar as equações, usaremos aqui a notação vetorial para o torque de uma força: $\vec{\tau}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$, sendo \vec{r} a posição de aplicação da força (em relação a uma origem arbitrária "O"). A Figura 6.4 abaixo ilustra essa idéia.

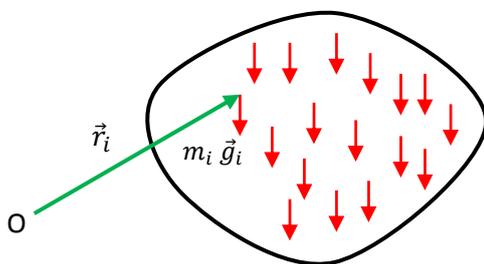


Figura 6.4: O peso de um corpo é uma força distribuída e o torque do peso envolve, portanto, uma soma sobre um número muito grande dos torques dos pesos minúsculos das partículas que compõem o corpo de interesse: $\vec{\tau}_{m_i \vec{g}_i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{g}_i$.

A condição de equilíbrio para o torque das forças vai envolver o torque dos N pesos, ou seja, o somatório:

$$\sum_{i=1}^N \vec{\tau}_{m_i \vec{g}_i} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{g}_i$$

A idéia do centro de gravidade está ilustrada na Figura 6.5 abaixo. Deve existir um ponto, o centro de gravidade (abreviado por CG), tal que, se representarmos a seta do peso \vec{P} nesse ponto, o torque do peso que obtemos é igual ao que obteríamos se calculássemos o somatório dos N torques definido na equação acima. Nesse sentido, o CG é o ponto no espaço que concentra o peso do corpo.

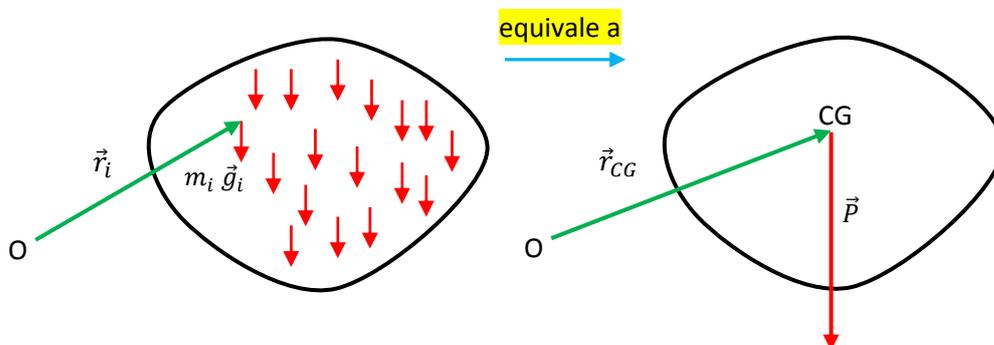


Figura 6.5: O centro de gravidade é um ponto no espaço que concentra o peso do corpo, preservando/reproduzindo o torque dos N pesos minúsculos.

Matematicamente, essa idéia é expressa pela igualdade, que define a posição \vec{r}_{CG} do CG de um corpo qualquer:

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{g}_i = \vec{r}_{CG} \times \vec{P}$$

Resumindo: ao não querer enfrentar o cálculo do somatório dos pesos minúsculos distribuídos ($\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{g}_i$), concentramos o peso total em um ponto apenas, o CG do corpo, de tal forma que obtemos o mesmo torque que o somatório forneceria. A questão que fica é: como calculamos a posição \vec{r}_{CG} do centro de gravidade de um corpo qualquer? Basta resolver a equação acima para \vec{r}_{CG} . Por exemplo, usando as propriedades do produto vetorial, podemos mostrar que a componente x da equação acima leva à seguinte equação escalar:

$$\sum_{i=1}^N m_i (y_i g_{iz} - z_i g_{iy}) = y_{CG} P_z - z_{CG} P_y$$

sendo P_z a componente z do peso do corpo e g_{iz} a componente z da aceleração da gravidade na posição da partícula i (analogamente para os outros termos). As componentes y e z da equação vetorial levam a equações escalares similares para x_{CG} , y_{CG} e z_{CG} . Ficamos então com um sistema de três equações e três incógnitas para a posição (x_{CG}, y_{CG}, z_{CG}) do CG.

Obviamente essa estratégia não vai trazer nenhuma vantagem no uso do conceito de centro de gravidade, pois nos obrigará, no final das contas, a calcular o somatório, cujo cálculo queremos evitar. Só resta então uma saída, para tornar o conceito de centro de gravidade útil: devemos simplificar nossas hipóteses. Por exemplo, a idéia de que cada partícula do corpo está submetida a uma gravidade própria \vec{g}_i é formalmente correta, mas trata-se de um exagero, quando consideramos o equilíbrio de corpos com dimensões práticas e realistas. É verdade que a aceleração da gravidade tem módulo e direção que dependem da posição no espaço, mas a variação em $\vec{g}(\vec{r})$ com a posição \vec{r} é muito pequena dentro de uma região limitada do espaço. Por exemplo, a cerca de 300 km de altura, que é a altura da órbita da Estação Espacial Internacional em torno da Terra, a aceleração da gravidade é aproximadamente $8,7 \text{ m/s}^2$, ou seja, cerca de 89% da aceleração da gravidade na superfície da Terra ($\cong 9,8 \text{ m/s}^2$). Discutiremos mais sobre a aceleração da gravidade capítulo 8.

Portanto, se formos considerar o equilíbrio de uma estrutura rígida de 300 km de altura, vamos ter que levar em conta a variação da aceleração da gravidade com a posição (variação em direção e magnitude). Na prática, uma estrutura desse tamanho não existe, a não ser que estejamos tratando de planetas e luas, que estão fora do contexto, pois não estão em equilíbrio estático. Segundo o site Wikipédia, o maior edifício que existe atualmente na Terra tem cerca de 800 metros de altura. Considerar a variação da aceleração da gravidade ao longo da estrutura desse prédio seria um exagero, um preciosismo matemático. Assim sendo, pensando nessas aplicações práticas da teoria que estamos desenvolvendo aqui, vamos abandonar a hipótese

de que cada partícula i está em uma gravidade \vec{g}_i diferente e assumiremos que $\vec{g}_i = \vec{g}$. Essa foi a mesma hipótese simplificadora que fizemos quando estudamos a queda livre dos corpos no capítulo 1. Com essa simplificação a equação para \vec{r}_{CG} fica:

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{g}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = \vec{r}_{CG} \times \vec{P}$$

Basicamente tiramos \vec{g} de dentro do somatório. Multiplicando e dividindo por M , a massa do corpo, ficamos finalmente com:

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{r}_i \right) \times M \vec{g} = \vec{r}_{CG} \times \vec{P}$$

Após um sentimento de *déjà vu*, reconhecemos no somatório a posição do centro de massa do corpo:

$$\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

o que leva à equação:

$$\vec{r}_{CM} \times \vec{P} = \vec{r}_{CG} \times \vec{P}$$

cujas soluções (fisicamente razoável) é:

$$\vec{r}_{CG} = \vec{r}_{CM}$$

Concluindo: para um corpo submetido a uma gravidade uniforme, o centro de gravidade coincide com o centro de massa. Essa conclusão justifica o que já vínhamos fazendo: representar no diagrama de forças a seta do peso no centro de massa do corpo, para efeito de cálculo de torque. Nesse capítulo continuaremos com essa prática.

É interessante frisar que a igualdade CG=CM é fruto de uma aproximação, basicamente a aproximação em que as dimensões do corpo de interesse são pequenas o bastante, ou de que a gravidade é uniforme o bastante (ou as duas coisas juntas) para que possamos desprezar a variação da aceleração da gravidade no interior desse corpo. A todo rigor, o CG não coincide com o CM. De fato, o CM de um corpo é uma propriedade intrínseca dele, enquanto que o CG depende das propriedades do campo gravitacional produzido por um segundo corpo (a Terra, por exemplo). O CM é o centro onde se concentra a massa, enquanto que o CG é o centro onde se concentra o peso. Apenas no caso em que a gravidade atua em toda a extensão do corpo igualmente ($\vec{g}_i = \vec{g}$), vale que o peso se concentra onde se concentra a massa ($\vec{r}_{CG} = \vec{r}_{CM}$).

A Figura 6.6 que segue ilustra a idéia de que para uma estrutura cilíndrica homogênea muito alta, uma torre, por exemplo, a massa da metade de cima é igual à massa da metade de baixo e, portanto, por simetria, o CM está no centro geométrico da estrutura. Mas, como a gravidade é mais intensa na metade de baixo do que na metade de cima, segue que o peso da metade de baixo é maior que o peso da metade de cima (mesmo

que as massas sejam iguais). Portanto, o CG é puxado para baixo do centro geométrico da estrutura, o CG vai para onde tem mais peso.

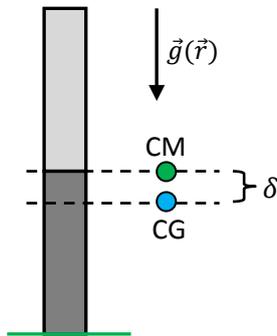


Figura 6.6: Para uma estrutura cilíndrica vertical muito alta, o CM não coincide com o CG, devido à variação da aceleração da gravidade com a altitude. Na prática, desprezamos o desnível δ entre o CM e o CG.

Daí concluímos que existe uma distância vertical δ entre o CM e o CG. O que faremos aqui é desprezar o valor de δ .

Com essa discussão terminamos de estabelecer a teoria básica da estática. Resumidamente, para determinar as magnitudes das forças que atuam em um corpo em equilíbrio estático devemos:

1. Desenhar o diagrama de forças para o corpo, cada força representada em seu lugar específico de aplicação (ou com sua linha de ação específica). O peso é representado no centro de massa do corpo, que coincide, por hipótese, com o centro de gravidade.
2. Construir as equações algébricas para as forças através das condições de equilíbrio:

$$\vec{R}_{EXT} = \vec{0} : \text{As forças devem ser tais que se anulam mutuamente.}$$

$$\vec{\tau}^{(O)}_{EXT} = \vec{0} : \text{Os torques resultantes ao longo de eixos x, y e z que passam por qualquer ponto "O" devem ser nulos. O ponto "O" pode ser escolhido de acordo com a conveniência.}$$

3. Resolvemos as equações e determinamos as magnitudes das forças.

Vale a pena lembrar que uma corda, ou cabo, ou barbante, flexível só pode puxar um corpo, nunca empurrar. A corda sempre puxa com uma força (que comumente chamamos de tensão) paralela a ela mesma. Para uma corda leve que não arrasta em nada (sem atrito estático) ao longo de sua extensão, a tensão é a mesma em todos seus pontos. Nos contatos entre corpos sem atrito entre eles, atuam apenas forças normais (repulsivas) às superfícies desses corpos.

Uma situação bastante comum, que pode ser discutida sem muita dificuldade, é a de um corpo que pode girar livremente em torno de um eixo que não passa pelo CG. Esse corpo é chamado de pêndulo físico, pois, se colocado em movimento, ele oscila como um pêndulo. Aqui vamos discutir o equilíbrio desse pêndulo.

A situação está ilustrada na Figura 6.7 abaixo. Note que só há duas forças atuando no corpo, o peso $\vec{P} = M \vec{g}$ e a força vertical de apoio/contato que o eixo de rotação (z) faz no corpo, que chamaremos de

normal $\vec{\eta}$. Na hipótese de que o corpo está em equilíbrio, o apoio no eixo não pode produzir no corpo uma força horizontal, porque não haveria outra força horizontal que a cancelasse, já que o peso é uma força vertical. Assim sendo, tomando “O” sobre o eixo de rotação, ou seja, tomando o eixo z dos torques coincidindo com o eixo de rotação, vemos que na Figura 6.7(a) o peso possui braço de alavanca b e, portanto, torque ao longo do eixo z.

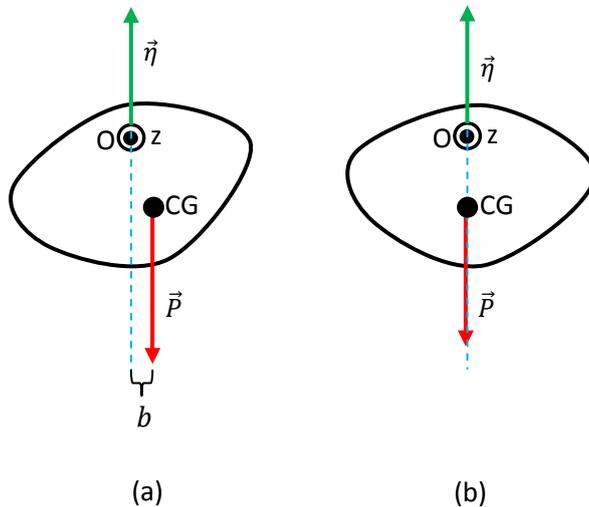


Figura 6.7: O CG (ou o CM) de um corpo que pode girar livremente em torno de um eixo fixo (z) vai ficar, obrigatoriamente, sobre a vertical que passa por esse eixo, supondo que o corpo esteja em equilíbrio. A posição (a), portanto, não pode ser uma posição de equilíbrio estático desse corpo. A posição (b) pode.

Sendo esse o único torque no corpo ao longo de z, só podemos concluir que ele deve ser nulo, para haver o equilíbrio. Isso só ocorrerá se o braço b de alavanca do peso for nulo, como na Figura 6.7(b). Conclusão: se um corpo que pode girar livremente (sem atrito) em torno de um eixo fixo está em equilíbrio, então o CG desse corpo está sobre a linha vertical que passa por esse eixo de giro.

Esse é o princípio de funcionamento de um prumo de pedreiro, usado para determinar experimentalmente a direção vertical. O prumo consiste em um barbante com um pequeno peso na ponta. Quando penduramos o peso pela outra ponta do barbante e aguardamos o equilíbrio se estabelecer, o barbante assume automaticamente a direção vertical.

Essa propriedade simples sugere um método experimental para se determinar a posição do CG, ou do CM, de um corpo qualquer. Basta pendurar esse corpo por um eixo arbitrário, aguardar o estabelecimento do equilíbrio e traçar no corpo a linha vertical que passa por esse eixo de rotação. Repetindo esse processo para um segundo eixo diferente do primeiro, o CG do corpo vai estar no ponto de cruzamento dessas duas linhas “verticais”. A idéia está ilustrada na Figura 6.8 que segue.

No caso de corpos grandes e pesados, como automóveis ou satélites, existem outros métodos estáticos experimentais de determinação da posição do CM, baseados nas propriedades de equilíbrio que estamos estudando aqui. No caso de objetos pequenos pode-se determinar a posição do CM analisando a

trajetória desse objeto em queda livre (você pode ver esse método no artigo: *How to determine the centre of mass of bodies from image modelling*, Marco A. Dias et al, Phys. Educ. 51 (2016) 025001).

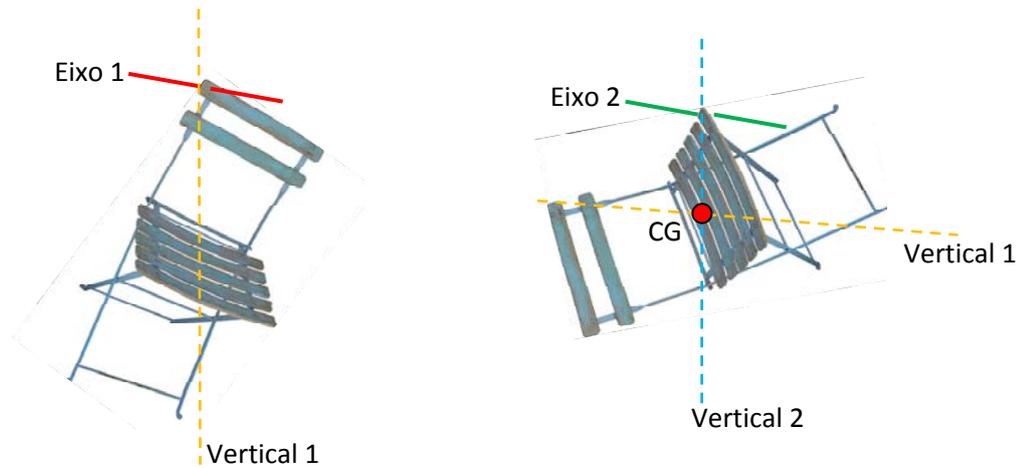


Figura 6.8: Podemos determinar experimentalmente a posição do CG (ou CM) de uma cadeira deixando-a girar livremente em torno de dois eixos arbitrários (vermelho e verde). Após o equilíbrio da cadeira, o CG vai estar sobre a vertical que passa pelo eixo de rotação. Portanto, o CG vai estar no cruzamento das verticais que passam por esses eixos (linhas tracejadas laranja e azul). As verticais podem ser determinadas por um fio de prumo fixado aos eixos de rotação.

A mesma idéia funciona para um corpo apoiado e equilibrado em uma ponta de agulha que toca o corpo no ponto A. A projeção vertical do CG desse corpo vai passar necessariamente pelo ponto A. A Figura 6.9 ilustra essa situação. Para um corpo em equilíbrio com dois pontos de apoio, a projeção vertical do CG deve cortar a linha reta que une esses dois pontos.

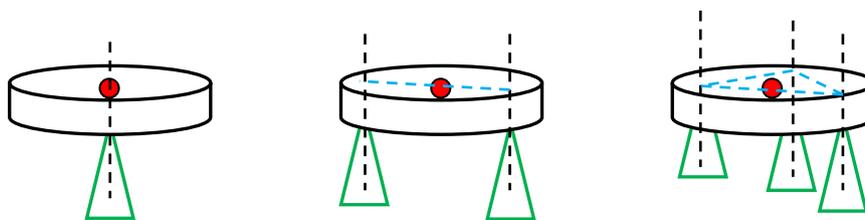


Figura 6.9: Para um corpo apoiado e equilibrado, a projeção vertical do CG vai passar por um dos pontos de apoio, ou pela a linha que une dois pontos de apoio, ou por dentro da região triangular delimitada por três pontos de apoio. Para N pontos de apoio, basta trocar o triângulo por um polígono de N vértices.

Analogamente, para três pontos de apoio, no equilíbrio a projeção vertical do CG deve passar dentro da região triangular cujos vértices são esses três pontos. Na Figura 6.9, o corpo, um disco no caso, está equilibrado em apoios pontiagudos (triângulos verdes). O CG do disco está indicado pela bolinha vermelha.

Essa idéia simples ilustrada na Figura 6.9 nos permite entender por que um corpo apoiado tomba. Um corpo apoiado tomba porque a projeção vertical de seu CG sai da região definida na Figura 6.9. Quando isso

ocorre o equilíbrio se torna impossível. Esse é o princípio de funcionamento de uma simples balança de pratos, como mostrado na Figura 6.10.

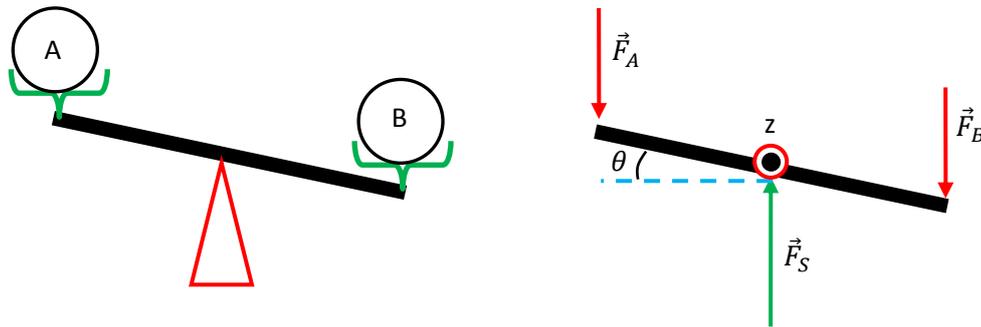


Figura 6.10: Uma balança de pratos em equilíbrio. Diagrama de forças da haste da balança.

A balança consiste essencialmente em uma haste que pode girar livremente (sem atrito) em torno de um eixo horizontal central (eixo z ortogonal ao plano da página na figura). Dois pratos transmitem para a haste forças verticais exercidas por dois corpos A e B, forças essas que, no equilíbrio, são iguais aos pesos desses dois corpos. Qualquer diferença nos pesos produz um desbalanço na haste, que gira até ser parada por apoios. No diagrama de forças da haste, o corpo A exerce uma força de contato \vec{F}_A (note que $\vec{F}_A = M_A \vec{g}$, pois estamos supondo que o corpo A está em equilíbrio, então, no corpo A vale $-\vec{F}_A + M_A \vec{g} = \vec{0}$, sendo $-\vec{F}_A$ a reação à \vec{F}_A), analogamente para o corpo B. O suporte central da haste exerce uma força \vec{F}_S . A força \vec{F}_S é vertical porque \vec{F}_A e \vec{F}_B também são. Se \vec{F}_S tivesse uma componente horizontal, não haveria como a resultante das forças na haste ser nula.

Supondo que a balança esteja em equilíbrio, a condição de torque resultante nulo na haste leva à equação (calculando, por conveniência, os torques ao longo de um eixo z que sai ortogonalmente da página, passando pelo ponto de apoio da haste):

$$F_A \frac{b}{2} \cos(\theta) - F_B \frac{b}{2} \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow F_A = F_B \Leftrightarrow M_A = M_B$$

sendo b o comprimento da haste e M_A e M_B as massas colocadas nos pratos. Note que o resultado independe do ângulo de inclinação θ , ou seja, se $M_A = M_B$, a balança permanecerá em equilíbrio qualquer que seja o valor de θ . Para as condições de equilíbrio, não há nada de especial no ângulo $\theta = 0$ (haste horizontal), apesar do senso comum sugerir o contrário (para $M_A = M_B$ o equilíbrio da haste é indiferente).

Note que a condição $M_A = M_B$ é exatamente a condição de que o CG do sistema formado pelas massas M_A e M_B , pela haste rígida e pelos pratos esteja sobre a vertical que passa pelo ponto de apoio da haste. Se valer $M_A > M_B$, por exemplo, o CG desse sistema estará à esquerda do ponto de apoio e o equilíbrio se tornará impossível. A haste vai girar no sentido anti-horário. Essas conclusões independem do ângulo θ .

Para que uma balança seja honesta, o apoio da haste deve estar exatamente em seu centro, a haste deve ser homogênea e girar sem atrito e os dois pratos devem ter massas iguais e estarem equidistantes do ponto de apoio. O restante fica por conta das leis do equilíbrio estático.

Um outro exemplo similar ao da balança está ilustrado na figura 6.11 abaixo. Considere uma haste rígida e homogênea de massa M e comprimento L . Essa haste está apoiada em dois pontos de apoio, A e B. O ponto A (B) está uma distância x (y) da extremidade esquerda da haste. Vamos discutir as condições sobre x e y que obtemos das condições de equilíbrio da haste. Na figura 6.11 vemos que o peso puxa a haste para baixo, no CG que fica no centro da haste (por simetria), e os apoios empurram a haste para cima, através das forças de apoio normais $\vec{\eta}_A$ e $\vec{\eta}_B$. Note que as forças estão todas no plano da página e, portanto, só há torques ortogonais a esse plano, ou seja, ao longo do eixo z que, por conveniência, posicionamos na extremidade esquerda da haste, apontando para fora da página.

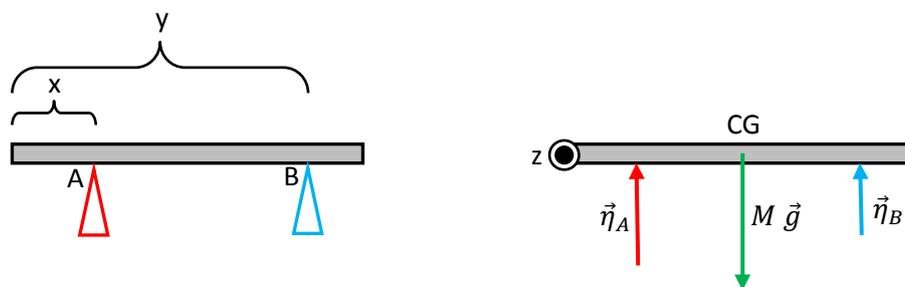


Figura 6.11: Uma haste horizontal está apoiada em equilíbrio em dois pontos A e B. No diagrama de forças o eixo z está na extremidade esquerda da haste, ortogonal ao plano da página, apontando para fora.

As condições de equilíbrio da haste levam às seguintes equações:

$$\text{Ao longo da vertical para cima: } \eta_A + \eta_B - M g = 0$$

$$\text{Ao longo do eixo } z: \eta_A x + \eta_B y - M g \frac{L}{2} = 0$$

cujas soluções para η_A e η_B são:

$$\eta_A = \frac{y - L/2}{y - x} M g$$

$$\eta_B = \frac{L/2 - x}{y - x} M g$$

Essas equações definem η_A e η_B se fixamos os valores de x e y . Mas, preferimos aqui analisar o que elas dizem sobre os próprios valores de x e y . Note que já estamos considerando de partida que $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ e $y \geq x$. A idéia básica é que essas soluções para η_A e η_B só fazem sentido se essas duas magnitudes forem positivas. Uma solução para η_A que fosse negativa, por exemplo, significaria que deveríamos inverter o sentido da força $\vec{\eta}_A$ no diagrama de forças, para garantir o equilíbrio da haste. Mas, é

impossível um simples apoio da haste em A produzir sobre a haste uma normal $\vec{\eta}_A$ para baixo. Isso só seria possível se existisse uma fixação da haste no ponto A, através de um prego ou parafuso, por exemplo. Não estamos considerando esses casos aqui. Portanto, estando a haste somente apoiada em A e B deve valer:

$$\eta_A = \frac{y - L/2}{y - x} M g \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{L}{2}$$

$$\eta_B = \frac{L/2 - x}{y - x} M g \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{L}{2}$$

Levando em conta que o CG da haste está em $L/2$, esses resultados expressam exatamente a idéia de que a haste só ficará em equilíbrio se esse CG estiver sempre em algum ponto entre os dois pontos de apoio A e B.

Resumindo:

$$x \leq \frac{L}{2} \leq y$$

Note alguns casos particulares interessantes:

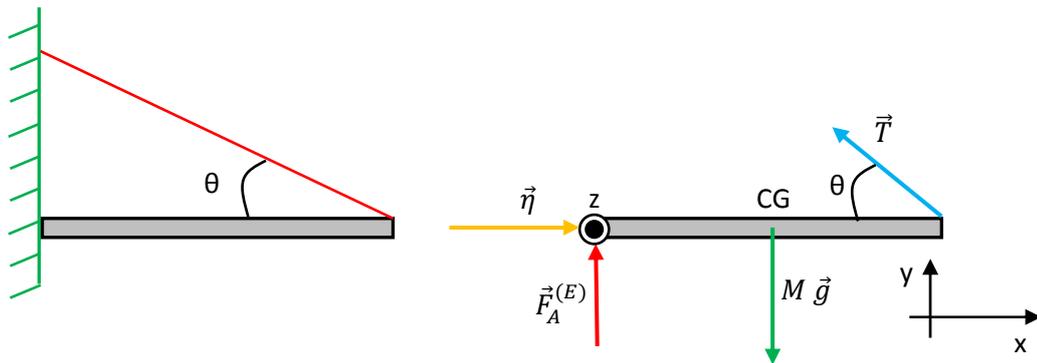
1. Se $x = \frac{L}{2}$, então o CG da haste está sobre o apoio A. Nesse caso, $\eta_B = 0$ para todo y , ou seja, o apoio B é totalmente dispensável. Onde quer que ele esteja, a haste não vai estar apoiada nele. Obviamente o peso da haste vai estar todo apoiado em A, pois $\eta_A = M g$.
2. Uma situação análoga vale se $y = \frac{L}{2}$, quando o CG está apoiado sobre B. Nesse caso, $\eta_A = 0$ para todo x , ou seja, o apoio A é totalmente dispensável. Onde quer que ele esteja, a haste não vai estar apoiada nele. O peso da haste vai estar todo apoiado em B, pois $\eta_B = M g$.
3. Analogamente, se fazemos $y = x$, ou seja, se a haste tiver de fato somente um ponto de apoio, então as soluções só fazem sentido se $y = x = L/2$.
4. Se os apoios estão colocados simetricamente em relação ao centro da haste, ou seja, se $x = \frac{L}{2} - \delta$ e $y = \frac{L}{2} + \delta$, então o peso da haste se divide igualmente entre os apoios: $\eta_A = \eta_B = M g/2$.

Suponha que adicionemos um terceiro apoio para a haste, em um ponto C entre A e B, a uma distância k da extremidade esquerda da haste. Nesse caso, haverá uma nova força vertical para cima, η_C e o sistema se torna indeterminado, pois, continuamos com duas equações, mas agora com três incógnitas: η_A , η_B e η_C (dados x , y e k). Não se trata do caso em que o sistema não possui solução, na verdade ele possui infinitas soluções (para x , y e k fixos) e as condições de equilíbrio apenas não são suficientes para definir uma única solução. Por exemplo, fixando x , y e k , existe uma solução com $\eta_C = 0$, que é a que obtivemos na nossa análise anterior. Se essa solução vai ocorrer na prática ou não vai depender de outras condições, além das fixadas pelo equilíbrio da haste. Por exemplo, poderia ocorrer na prática do material que compõe o apoio C ser muito mais macio e deformável que os materiais que compõem os apoios A e B. Nesse caso o peso da haste ficaria

apoiado quase todo em A e B e a condição $\eta_C = 0$ seria aproximadamente satisfeita, devido ao apoio fraco no ponto C. Vamos nos concentrar aqui em situações em que o equilíbrio é determinado, ou seja, em que as forças são definidas apenas pelas duas condições de equilíbrio: sobre as forças e sobre os torques.

6.2 Exercícios resolvidos

ER 6.1) Considere uma haste rígida e homogênea de massa M e comprimento L equilibrada na posição horizontal conforme a figura que segue. A extremidade direita da haste está amarrada a um barbante leve e inextensível enquanto que a extremidade esquerda da haste está apenas apoiada na parede, na presença de atrito estático. O coeficiente de atrito estático haste/parede é μ_E .



Dados: M , L , θ , μ_E e g .

Determine o maior valor do ângulo θ compatível com o equilíbrio da haste.

Se você realizar um experimento com essa montagem (usando uma régua como haste, por exemplo) vai observar que quando a inclinação θ é pequena, a haste permanece em equilíbrio facilmente. Se aumentamos θ , o equilíbrio vai ficando mais difícil, a haste às vezes teima em deslizar na parede e cair. Existe um ângulo θ máximo, acima do qual o equilíbrio se torna impossível, a haste sempre escorrega na parede e cai. Esse comportamento deve estar relacionado ao atrito estático máximo que a parede exerce na haste.

O diagrama de forças na haste está mostrado na figura acima. Basicamente: a Terra puxa a haste para baixo, em seu centro de gravidade; o barbante tensionado puxa a extremidade direita da haste, na direção do barbante (\vec{T}); a haste é pressionada contra a parede e a parede repele a haste ($\vec{\eta}$); a haste tende a deslizar para baixo no contato com a parede, deslizamento que é impedido pela força de atrito estático que a parede faz na haste ($\vec{F}_A^{(E)}$). Tomando um eixo z na extremidade esquerda da haste, apontando para fora da página e os eixos x e y mostrados, as condições de equilíbrio da haste geram as equações:

$$x: \eta - T \cos(\theta) = 0$$

$$y: F_A^{(E)} + T \sin(\theta) - M g = 0$$

$$z: M g \frac{L}{2} - T \sin(\theta)L = 0$$

Da última equação obtemos:

$$T = \frac{M g}{2 \operatorname{sen}(\theta)}$$

Da segunda equação segue que:

$$F_A^{(E)} = \frac{M g}{2}$$

A primeira equação mostra que:

$$\eta = \frac{M g}{2 \tan(\theta)}$$

Em princípio esta é a solução do problema, ou seja, os valores dos módulos das forças na haste, e ponto final. Mas, notamos que se aumentamos o valor de θ (note que $0 \leq \theta \leq 90^\circ$), a função $\tan(\theta)$ aumenta e a magnitude da normal diminui, ou seja, o contato da haste com a parede fica mais fraco. Sabemos que a força de atrito estático máxima depende desse grau de contato haste/parede e, portanto, o ângulo θ vai afetar a chance da haste deslizar na parede. Se a haste deslizar, o equilíbrio da haste termina. Resumindo, sabemos que para que não haja deslizamento da haste deve valer, além das condições de equilíbrio:

$$F_A^{(E)} \leq F_{AMAX}^{(E)} = \mu_E \eta$$

Portanto, a haste não desliza enquanto valer:

$$\frac{M g}{2} \leq \mu_E \frac{M g}{2 \tan(\theta)}$$

Ou seja:

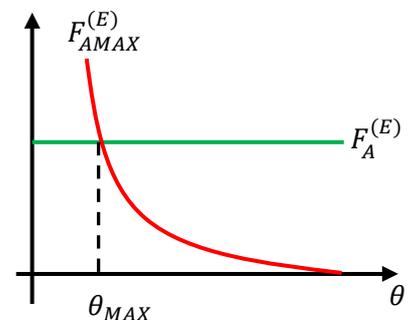
$$\tan(\theta) \leq \mu_E$$

Essa desigualdade fixa o maior ângulo θ que pode ser colocado no barbante, sem que a haste deslize na parede:

$$\tan(\theta_{MAX}) = \mu_E$$

Por exemplo, para um coeficiente de atrito $\mu_E = 0,8$, obtemos $\theta_{MAX} \cong 39^\circ$. Nesse caso, se fizermos essa montagem e fixarmos, por exemplo, $\theta = 50^\circ$, podemos ficar a vida toda tentando, mas nunca conseguiremos equilibrar a haste. Ele sempre vai escorregar na parede, pois não há atrito estático suficiente para produzir o equilíbrio da haste.

O gráfico ao lado ilustra o resultado que obtivemos aqui. A reta horizontal representa o gráfico de $F_A^{(E)} = \frac{M g}{2}$ em função do ângulo θ .

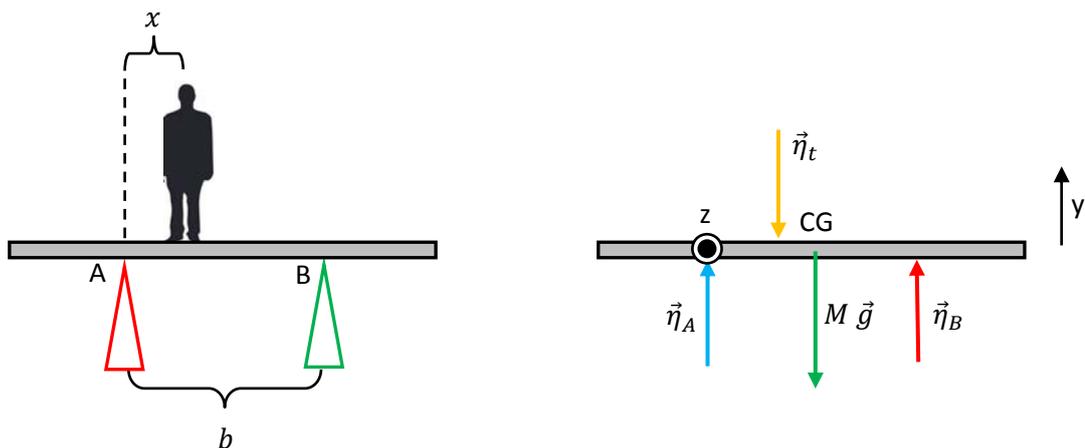


Qualquer que seja θ , o atrito necessário para o equilíbrio da haste é

igual à metade do peso da haste. A curva vermelha representa o gráfico da função $F_{AMAX}^{(E)} = \mu_E \frac{Mg}{2 \tan(\theta)}$ em função de θ . Trata-se de uma função monótona decrescente. Na região $\theta < \theta_{MAX}$ o atrito necessário ($F_A^{(E)}$) é menor do que o atrito máximo que pode ser produzido ($F_{AMAX}^{(E)}$), pois a curva verde está abaixo da curva vermelha, e o equilíbrio da haste é possível. Na região $\theta > \theta_{MAX}$ o atrito necessário ($F_A^{(E)}$) é maior do que o atrito máximo que pode ser produzido ($F_{AMAX}^{(E)}$), pois a curva verde está acima da curva vermelha, e o equilíbrio da haste é impossível. Em $\theta = \theta_{MAX}$ o equilíbrio é possível, pois $F_A^{(E)} = F_{AMAX}^{(E)}$, e a haste fica na iminência de deslizar na parede.

ER 6.2) Um trabalhador de massa m monta uma passarela composta de uma haste rígida e homogênea de massa M e comprimento L (uma tábua) apoiada em dois apoios A e B (cavaletes) dispostos simetricamente em relação ao centro da tábua. A tábua fica equilibrada na posição horizontal conforme a figura que segue. A intenção do trabalhador é poder circular livremente em cima da tábua (para pintar uma parede, por exemplo).

Dados: m, M, L, b e g .



Determine o maior valor da distância x que o trabalhador pode alcançar sem que a passarela tombe.

Temos que analisar o equilíbrio da tábua e a influência do parâmetro x sobre esse equilíbrio. O diagrama de forças na tábua está mostrado acima. Basicamente: a Terra puxa a tábua para baixo, os apoios A e B empurram a tábua para cima e o trabalhador empurra a tábua para baixo ($\vec{\eta}_t$). Note que se a pessoa estiver quieta sobre a tábua, podemos concluir, do diagrama de forças dela (não mostrado), que $\eta_t = m g$. Usando o referencial mostrado na figura, as condições de equilíbrio geram as equações:

$$y: \eta_A + \eta_B - m g - M g = 0$$

$$z: \eta_B b - m g x - M g \frac{b}{2} = 0$$

Portanto, obtemos as forças nos apoios:

$$\eta_B = \frac{Mg}{2} + m g \frac{x}{b}$$

$$\eta_A = \frac{Mg}{2} + m g \left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

Note que se o trabalhador se posicionar exatamente sobre o apoio A, ou seja, se $x = 0$, então:

$$\eta_A = \frac{Mg}{2} + m g$$

$$\eta_B = \frac{Mg}{2}$$

O que significa que o apoio A sustenta todo o peso do trabalhador e metade do peso da tábua, enquanto que o apoio B sustenta apenas metade do peso da tábua.

O caso oposto, em que o trabalhador se posiciona sobre o apoio B, ou seja, se $x = b$, leva a:

$$\eta_A = \frac{Mg}{2}$$

$$\eta_B = \frac{Mg}{2} + m g$$

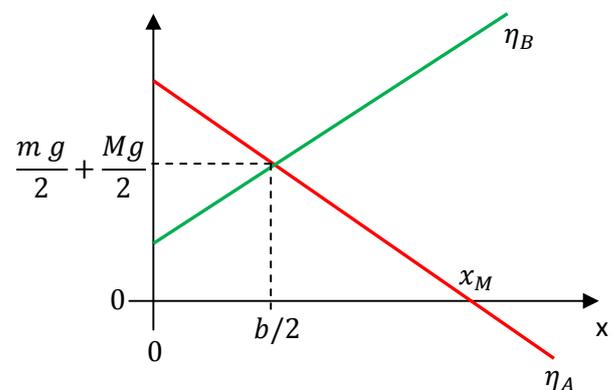
Agora o apoio A sustenta apenas metade do peso da tábua enquanto que o apoio B sustenta todo o peso do trabalhador e metade do peso da tábua.

Finalmente, se o trabalhador se posicionar no centro da tábua, $x = b/2$, obtemos:

$$\eta_A = \eta_B = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{2}$$

Significando que os apoios dividem igualmente entre eles a sustentação do peso do trabalhador e do peso da tábua (metade para cada apoio).

O gráfico ao lado esboça os comportamentos das normais η_A e η_B em função da distância x . São duas retas, uma de inclinação positiva (η_B) e outra de inclinação negativa (η_A), que se cruzam exatamente no ponto $x = b/2$. À medida que o trabalhador se desloca para a esquerda, vai apoiando seu peso mais no apoio B e menos no apoio A. A característica marcante nesse gráfico é a existência de um x_M para o qual a normal em A se anula e passa a assumir valores negativos. Isso significa que quando o trabalhador se posicionar em $x = x_M$ a tábua vai perder o contato com o apoio em A.



Para $x > x_M$ a tábua só permaneceria em equilíbrio se a normal em A se tornasse negativa, ou seja, se ela invertesse de sentido no nosso diagrama de forças. Obviamente isso é impossível para um simples apoio, o que nos leva a concluir que x_M é o valor máximo de x que o trabalhador pode alcançar, sem o risco de cair. Na prática, o trabalhador só poderia avançar além de $x = x_M$ se ele fixasse a tábua no apoio A, através de pregos ou parafusos.

Para determinar o valor de x_M basta fazer $x = x_M$ na expressão de η_A e igualar a zero. Obtemos:

$$\eta_A = \frac{Mg}{2} + mg \left(1 - \frac{x_M}{b}\right) = 0 \Rightarrow x_M = \left(1 + \frac{M}{2m}\right) b$$

Note que $x_M > b$, o que significa que o trabalhador pode avançar além do apoio B e sair da região entre os dois apoios.

Há outra maneira de resolver esse problema, sem o uso das condições de equilíbrio para as forças e torques. A idéia é aquela que já discutimos anteriormente: para um corpo em equilíbrio apoiado em dois apoios, o centro de gravidade do corpo tem que estar em algum lugar entre esses dois apoios. Considere então a figura que segue, que mostra o CG do sistema trabalhador+tábua, que está apoiado em A e B. O CG do trabalhador é indicado pela bolinha amarela. O CG da tábua é indicado pela bolinha azul. O CG do sistema trabalhador+tábua é indicado pela bolinha vermelha. Este está sempre em algum lugar entre o CG do trabalhador e o CG da tábua. Adotando um eixo y horizontal com origem no apoio A, obtemos que o CG do sistema trabalhador+tábua está na posição:

$$y_{CG} = y_{CM} = \frac{m x + M b/2}{m + M}$$

O trabalhador vai poder avançar até um ponto em que o CG do sistema que está apoiado (trabalhador+tábua) se posicione sobre o apoio B. Portanto, o trabalhador estará seguro enquanto valer:

$$y_{CG} \leq b$$

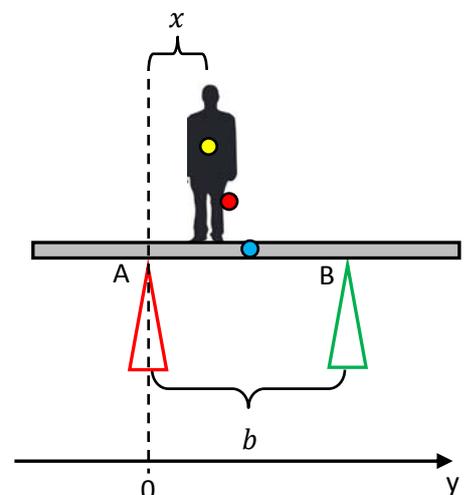
Ou seja:

$$\frac{m x + M b/2}{m + M} \leq b$$

Segue que:

$$x \leq x_M = \left(1 + \frac{M}{2m}\right) b$$

Obviamente a situação considerada aqui é simétrica, ou seja, haverá um valor máximo de x e também um valor mínimo, abaixo do qual a normal em B vai se tornar negativa e o equilíbrio vai se tornar impossível. Essa situação não está mostrada nos gráficos de η_A e η_B , mas poderia ser mostrada se estendêssemos os

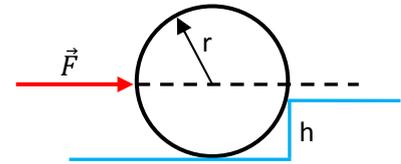


gráficos para a esquerda até que a reta verde (η_B) cortasse o eixo x. De fato, a menor distância que o trabalhador poderia chegar de qualquer uma das extremidades da tábua é:

$$d_{MIN} = b + \frac{L-b}{2} - x_M = \frac{L-b}{2} - \frac{M}{2m}b$$

Note que $r = (L-b)/2$ é a distância de um apoio até a extremidade mais próxima da haste.

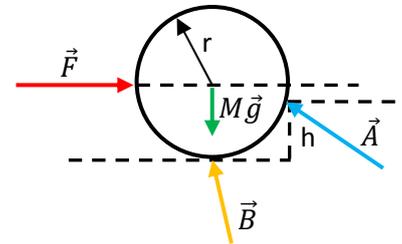
ER 6.3) Uma esfera rígida de massa M e raio r é empurrada contra um degrau de altura h por uma força horizontal de módulo F , conforme a figura ao lado. A linha de ação de \vec{F} passa pelo centro da esfera.



Dados: M , r , h e g .

Determine o valor de F que faz com que a esfera comece a subir o degrau.

A figura ao lado mostra o diagrama de forças na esfera: a Terra puxa a esfera para baixo; o piso horizontal faz na esfera uma força de contato \vec{B} (normal e atrito); a força \vec{F} pressiona a esfera contra a quina do degrau, que responde com uma força \vec{A} .



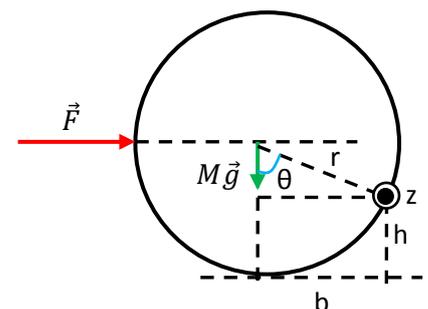
Na situação em que a esfera estaria começando a subir o degrau ela perderia contato com o piso horizontal, ou seja, $B = 0$. Vamos, portanto, desconsiderar a força \vec{B} nos nossos cálculos, o que leva a uma simplificação razoável. Consideraremos o caso em que a esfera está na iminência de subir o degrau, mas ainda em equilíbrio, na ausência da força \vec{B} . Note que nesse caso, como \vec{F} e $M\vec{g}$ têm linhas de ação que passam pelo centro da esfera, essa condição deverá valer também para a força \vec{A} , para que o torque resultante ao longo de um eixo ortogonal à página passando pelo centro da esfera seja nulo. A força \vec{A} será então uma força radial.

Nessa primeira solução ignoramos o fato de que \vec{A} é uma força radial. Simplesmente desaparecemos com \vec{A} da equação do torque adotando um eixo z passando pela posição de aplicação de \vec{A} (a quina do degrau).

A primeira condição de equilíbrio leva à equação (lembre-se que estamos desconsiderando a força \vec{B} , pois a esfera está na iminência de subir o degrau):

$$\vec{F} + \vec{A} + M\vec{g} = \vec{0}$$

Adotamos um eixo z exatamente na quina do degrau, apontando ortogonalmente para fora da página. A Figura ao lado mostra o diagrama de forças com as duas forças que sobraram, para efeito de cálculo de



torque. Ao longo de z , usando o ângulo θ definido na figura, obtemos a condição:

$$M g r \sin(\theta) - F r \cos(\theta) = 0$$

Sendo $b = r \sin(\theta)$ o braço de alavanca do peso e $r \cos(\theta)$ o braço de alavanca de \vec{F} . Portanto:

$$F = M g \tan(\theta)$$

O ângulo θ não foi fornecido na questão e por isso devemos avançar um pouco mais. O triângulo retângulo com vértice no centro da esfera mostra que:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{r-h} = \frac{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}}{r-h} = \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r-h}$$

Portanto, a força F que deixa a esfera na iminência de subir o degrau é:

$$F = M g \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r-h}$$

Essa força faz com que a esfera perca contato com o piso, mas ainda permaneça em equilíbrio, daí a idéia da “iminência” de subir o degrau. Depois disso, qualquer incremento no valor de F fará com que a esfera ganhe aceleração angular ao longo de z e suba o degrau. Note que para $h = 0$ obtemos $F = 0$, pois nesse caso não há degrau e qualquer força é capaz de mover a esfera. Em contraste, para $h = r$ obtemos $F \rightarrow \infty$, ou seja, nenhuma força (aplicada no ponto de aplicação de \vec{F}) é capaz de fazer a esfera girar e subir esse degrau.

Podemos apresentar outra solução para esse problema que já parte da condição de que \vec{A} é uma força radial. Note que essa condição vem da imposição de torque nulo ao longo de um eixo (z) que passa pelo centro da esfera. De fato, se chamarmos de α o ângulo que a força \vec{A} faz com a vertical, conforme a Figura ao lado, a imposição de torque nulo ao longo do eixo z pelo centro da esfera leva à equação (note que \vec{F} e o peso não possuem torque ao longo de z):

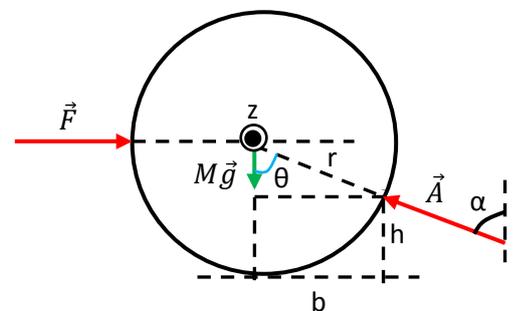
$$A \cos(\alpha) r \sin(\theta) - A \sin(\alpha) r \cos(\theta) = 0$$

Note que usamos o teorema de Varignon, calculando os torques das componentes $A \cos(\alpha)$ e $A \sin(\alpha)$ da força \vec{A} . Concluindo:

$$\cos(\alpha) \sin(\theta) - \sin(\alpha) \cos(\theta) = \sin(\theta - \alpha) = 0 \Rightarrow \theta - \alpha = 0 \Rightarrow \theta = \alpha$$

Portanto, \vec{A} é uma força radial.

Sendo \vec{A} radial, então, a condição de força resultante nula ao longo da horizontal leva a:



$$F - A \operatorname{sen}(\theta) = 0$$

Para a direção vertical obtemos:

$$A \cos(\theta) - M g = 0$$

Dividindo a primeira equação pela segunda obtemos novamente:

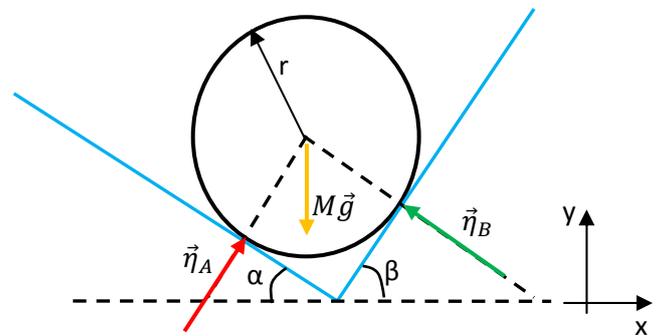
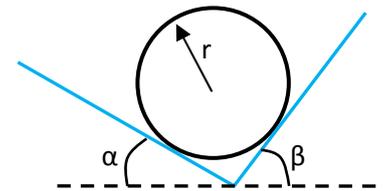
$$F = M g \tan(\theta)$$

ER 6.4) Uma esfera rígida de massa M e raio r está em equilíbrio imprensada em uma cunha formada por duas superfícies planas sem atrito, conforme a figura ao lado.

Dados: M , r , α , β e g .

Determine as magnitudes das forças que as superfícies fazem na esfera.

O diagrama de forças na esfera é mostrado ao lado. Note que não há forças tangenciais nas superfícies da esfera, pois não há atrito. As três forças concorrem para o centro da esfera e, portanto, não há torque resultante ao longo de um eixo z ortogonal ao plano da página que passa por esse centro. Quanto às forças, com o referencial mostrado na Figura obtemos:



$$x: \eta_A \cos(90 - \alpha) - \eta_B \cos(90 - \beta) = 0 \Rightarrow \eta_A \operatorname{sen}(\alpha) - \eta_B \operatorname{sen}(\beta) = 0$$

$$y: \eta_A \operatorname{sen}(90 - \alpha) + \eta_B \operatorname{sen}(90 - \beta) - M g = 0 \Rightarrow \eta_A \cos(\alpha) + \eta_B \cos(\beta) = M g$$

Portanto:

$$\eta_A \left[\cos(\alpha) + \cos(\beta) \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} \right] = M g \Rightarrow \eta_A (\operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha) + \cos(\beta) \operatorname{sen}(\alpha)) = M g \operatorname{sen}(\beta)$$

O que leva a:

$$\eta_A = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} M g$$

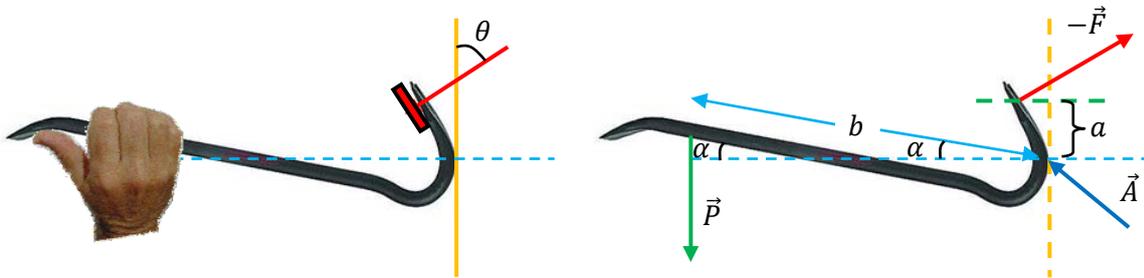
e ainda:

$$\eta_B = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} M g$$

ER 6.5) Uma pessoa está tentando arrancar um prego fincado na madeira usando um pé de cabra, conforme a Figura que segue. A pessoa aplica uma força vertical para baixo, de módulo P , e o pé de cabra aplica no prego

uma força de módulo F , conforme a Figura (no pé de cabra atua a reação a essa força). Além disso, o pé de cabra se apóia na parede de madeira. Despreze o peso do pé de cabra. Considere que para que o prego seja arrancado deva valer $F \geq F_{MIN}$, sendo F_{MIN} a força mínima capaz de retirar o prego da madeira. Calcule a força mínima que a pessoa deve aplicar no pé de cabra, para conseguir arrancar o prego.

Dados: F_{MIN} , a , b , α e θ .



As Figuras acima caracterizam a situação e definem o diagrama de forças para o pé de cabra (desprezando o peso dele). A pessoa puxa o pé de cabra com uma força \vec{P} . O prego é puxado com uma força \vec{F} , que responde com uma força $-\vec{F}$ no pé de cabra (ação e reação). O pé de cabra se apóia na parede de madeira, e sofre uma força de apoio \vec{A} (atrito estático + normal). Em princípio o pé de cabra está em equilíbrio estático, que vai terminar apenas quando o prego começar a ser arrancado da madeira. Isso vai ocorrer quando F atingir o valor F_{MIN} .

Aplicando a condição de equilíbrio para os torques ao longo de um eixo (z) ortogonal ao plano do papel (orientado para fora) e passando exatamente pelo ponto de apoio do pé de cabra na parede obtemos:

$$P b \cos(\alpha) - F \sin(\theta) a - F \cos(\theta) \frac{a}{\tan(\theta)} = 0$$

Para construir essa equação utilizamos a ideia de que $b \cos(\alpha)$ é o braço de alavanca de \vec{P} e que a componente horizontal de $-\vec{F}$ vale $F \sin(\theta)$ e tem braço de alavanca a , enquanto que a componente vertical $F \cos(\theta)$ tem braço de alavanca $a/\tan(\theta)$. Portanto, se o prego sofre uma força axial F é porque a pessoa aplica no pé de cabra uma força vertical dada por:

$$P = \frac{1}{\cos(\alpha)} \left[\sin(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\tan(\theta)} \right] \left(\frac{a}{b} \right) F = \frac{1}{\cos(\alpha) \sin(\theta)} \left(\frac{a}{b} \right) F$$

Note que o braço de alavanca de $-\vec{F}$ é $a/\sin(\theta)$. A força mínima que a pessoa deve aplicar para retirar o prego é, portanto:

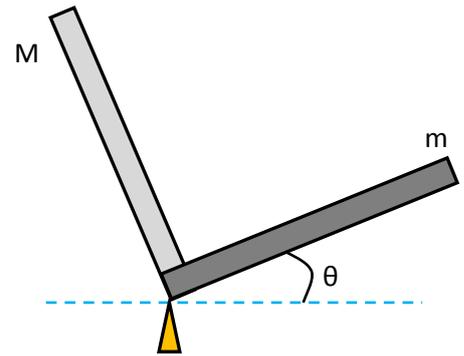
$$P_{MIN} = \frac{1}{\cos(\alpha) \sin(\theta)} \left(\frac{a}{b} \right) F_{MIN}$$

A pessoa seria beneficiada em seu esforço se $\alpha \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$ e $a/b \ll 1$ (pé de cabra longo).

ER 6.6) Uma haste em forma de L é composta da união de duas hastes retas de materiais diferentes, formando um ângulo de 90° entre si. Cada haste reta tem comprimento L , uma de massa M e outra de massa m . Após horas de tentativas, essa haste em L foi equilibrada em seu vértice, conforma a Figura ao lado.

Dados: M , m , L e g .

Calcule o ângulo θ .



A Figura que segue mostra o diagrama de forças na haste em L. Ao invés de representarmos o peso da haste em L, $(M + m)\vec{g}$ atuando no CG dessa haste (que nem sabemos onde está), representamos separadamente o peso de cada haste reta, localizados em seus centros de gravidade.

Considere um eixo z saindo ortogonalmente ao plano da página no vértice da haste em L (eixo não mostrado). O somatório dos torques ao longo desse eixo fornece a equação:

$$Mg \frac{L}{2} \cos(\alpha) - mg \frac{L}{2} \cos(\theta) = 0$$

Mas, $\alpha + \theta + 90 = 180 \Rightarrow \alpha = 90 - \theta$. Portanto:

$$Mg \frac{L}{2} \sin(\theta) - mg \frac{L}{2} \cos(\theta) = 0$$

Conclusão:

$$\tan(\theta) = \frac{m}{M}$$

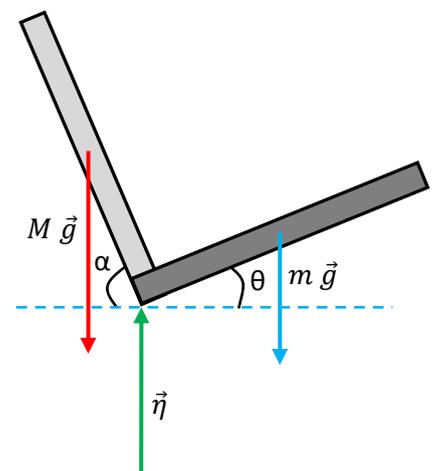
Note os casos particulares:

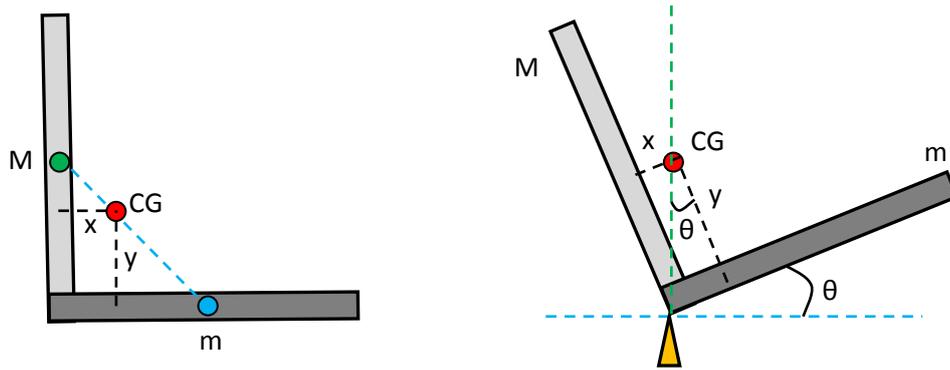
1. $m = M \Rightarrow \theta = 45^\circ$ (situação simétrica)
2. $m \gg M \Rightarrow \theta \rightarrow 90^\circ$ (haste com o lado reto de massa m em pé)
3. $M \gg m \Rightarrow \theta \rightarrow 0$ (haste com o lado reto de massa M em pé)

Podemos dar outra solução para esse problema olhando apenas para a posição do centro de gravidade da haste em L. Sabemos que para que essa haste fique em equilíbrio a projeção vertical de seu CG deve passar pelo ponto de apoio da haste no piso. A figura que segue mostra a posição (x, y) do CG da haste em L, supondo, apenas para ilustrar, que $M > m$. As distâncias x e y são dadas por:

$$x = \frac{M(0) + m(L/2)}{M + m} = \frac{m}{M + m} \frac{L}{2}$$

$$y = \frac{M(L/2) + m(0)}{M + m} = \frac{M}{M + m} \frac{L}{2}$$





Estando o CG da haste em L sobre a vertical que passa pelo ponto de apoio (linha verde), vemos na Figura acima que:

$$\tan(\theta) = \frac{x}{y} = \frac{m}{M}$$

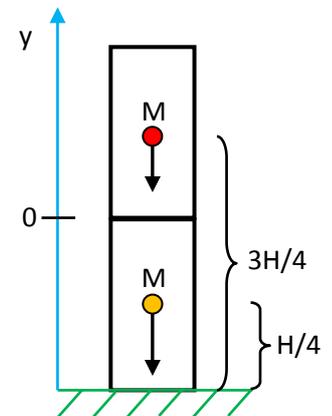
Para considerar um exemplo numérico, suponha que a haste de massa M seja feita de ferro e a haste de massa m de alumínio. Nesse caso:

$$\tan(\theta) = \frac{\rho_A L}{\rho_F L} = \frac{2,7}{7,87} \cong 0,34 \Rightarrow \theta \cong 19^\circ$$

sendo ρ a densidade de massa de cada material, ferro (F) e alumínio (A).

ER 6.7) Estime a distância vertical δ entre o CM e o CG de um prédio de altura H . Considere que o prédio é uma haste vertical de densidade uniforme.

Considere as duas metades do prédio, a metade superior e a metade inferior. Cada metade possui a mesma massa (M), pois a densidade de massa do prédio é uniforme, mas a metade de baixo possui mais peso que a metade de cima. Vamos considerar então duas partículas de massa M localizadas nos centros de massa das duas metades do prédio, conforme a Figura ao lado. A partícula que representa a metade superior do prédio está a uma altura $h_S = 3H/4$ do chão, enquanto que a partícula que representa a metade inferior está a uma altura $h_B = H/4$ do chão. Portanto, o peso da metade de cima será $P_S = M g(3H/4)$, sendo $g(3H/4)$ a aceleração da gravidade produzida pela Terra na altura $h_S = 3H/4$. Analogamente, o peso da metade de baixo é $P_B = M g(H/4)$. Para facilitar as contas, vamos adotar um referencial y com origem na metade do prédio.



O centro de massa do prédio está na posição:

$$y_{CM} = \frac{M(H/4) + M(-H/4)}{M + M} = 0$$

ou seja, como já esperávamos, o CM do prédio está no centro do prédio, por simetria.

O centro de gravidade do prédio está na posição:

$$y_{CG} = \frac{M g(h_S)(H/4) + M g(h_B)(-H/4)}{M g(h_S) + M g(h_B)} = \frac{g(h_S) - g(h_B)}{g(h_S) + g(h_B)} \frac{H}{4}$$

sendo as alturas dadas por $h_S = 3H/4$ e $h_B = H/4$. Essa definição para a posição do CG é inspirada na mesma ideia da posição do CM, como sendo a posição média da distribuição de pesos. Lá atrás definimos a posição do CG de forma diferente, em termos da “preservação do torque do peso”, conforme discutido no texto. A coincidência das duas definições não é óbvia, mas pode ser demonstrada no caso particular que estamos considerando aqui. Basicamente estamos assumindo uma simplificação em que a gravidade tem uma direção apenas no espaço, a direção vertical y , ou seja: $\vec{g} = -g(h)\hat{y}$, sendo h a altura em relação à superfície da Terra. Portanto, tomando $g_y = -g(r)$ e $g_x = g_z = 0$ na equação $\vec{r}_{CM} \times \vec{P} = \vec{r}_{CG} \times \vec{P}$ obtemos a equação acima para y_{CG} e ainda $x_{CG} = x_{CM}$ e $z_{CG} = z_{CM}$.

Note que como $g(h_S) < g(h_B)$, porque a magnitude da gravidade decai com a distância ao centro da Terra, então y_{CG} é negativo, ou seja, está abaixo de CM. A distância δ que estamos querendo calcular é:

$$\delta = y_{CM} - y_{CG} = \frac{g(h_B) - g(h_S)}{g(h_B) + g(h_S)} \frac{H}{4}$$

Note que se a gravidade fosse uniforme, $g(h_S) = g(h_B)$, então $y_{CG} = \delta = 0$.

Para calcular a aceleração da gravidade vamos usar a lei de Newton da gravitação, que estudaremos em detalhe mais adiante, mas que pode ser adiantada aqui. A aceleração da gravidade a uma altura h da superfície da Terra é dada por:

$$g(h) = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

sendo M_T e R_T a massa e o raio da Terra. Portanto, obtemos:

$$\delta = \frac{(R_T + h_S)^2 - (R_T + h_B)^2}{(R_T + h_S)^2 + (R_T + h_B)^2} \frac{H}{4}$$

lembrando que $h_S = 3H/4$ e $h_B = H/4$.

Vamos fazer uma estimativa numérica para o caso de um prédio com $H=800$ m de altura. Considerando que $R_T \cong 6.370$ km, obtemos:

$$\delta \cong 0,013 \text{ m}$$

ou $\delta \cong 13$ mm.

Podemos refinar essa estimativa considerando que o prédio é composto de quatro partes iguais empilhadas uma sobre a outra, cada uma de massa M (Figura que segue). Considerando uma partícula no CM de cada parte, obtemos:

$$\delta = \frac{3g(h_4) + g(h_3) - g(h_2) - 3g(h_1)H}{g(h_1) + g(h_2) + g(h_3) + g(h_4)} \frac{H}{8}$$

Com $h_1 = 7H/8$, $h_2 = 5H/8$, $h_3 = 3H/8$ e $h_4 = H/8$.

Para um prédio com $H=800$ m de altura obtemos uma estimativa um pouco maior para δ :

$$\delta \cong 0,017 \text{ m ou } 17 \text{ mm.}$$

Enfim, tomando o limite em que o prédio é composto de infinitas fatias de alturas infinitesimais dh obtemos:

$$y_{CG} = \frac{\int_0^H g(h)y \, dh}{\int_0^H g(h) \, dh}$$

com $y = h - H/2$.

Obtemos (lembrando que $\delta = -y_{CG}$):

$$\delta \cong 0,017 \text{ m ou } 17 \text{ mm.}$$

Com um pouco de boa vontade, podemos nos convencer de que essa estimativa justifica perfeitamente (ou pelo menos corrobora) a idéia de que $CG=CM$.

Note que se a gravidade fosse uniforme, independente da altura ($g(h) = g$), obteríamos sempre:

$$y_{CG} = \frac{\int_0^H g(h)y \, dh}{\int_0^H g(h) \, dh} = \frac{g \int_0^H y \, dh}{g \int_0^H dh} = \frac{\int_0^H (h - \frac{H}{2}) \, dh}{\int_0^H dh} = 0$$

O resultado analítico para y_{CG} , em função do raio da Terra e da altura do prédio é:

$$y_{CG} = R \left(1 + \frac{R}{H} \right) \ln \left(1 + \frac{H}{R} \right) - R - \frac{H}{2}$$

Note que para um prédio de altura pequena vale ($\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2$):

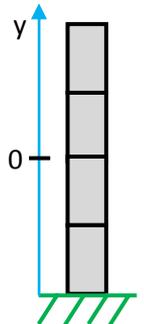
$$\ln \left(1 + \frac{H}{R} \right) = \frac{H}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{H}{R} \right)$$

e, portanto:

$$y_{CG} \rightarrow R \left(1 + \frac{R}{H} \right) \frac{H}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{H}{R} \right) - R - \frac{H}{2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{H}{R} \right) H \cong 0$$

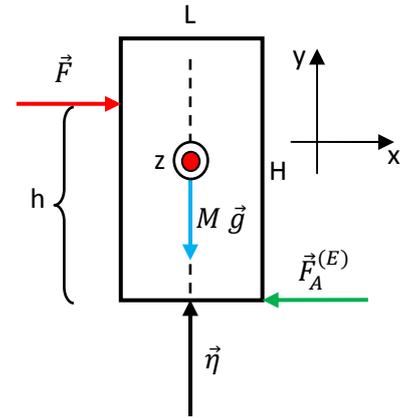
ER 6.8) Um bloco retangular de massa M , altura H e largura L está apoiado em uma superfície horizontal e sendo empurrado por uma força horizontal de módulo F . O bloco não desliza, porque há atrito estático bloco/piso suficiente para impedir que isso aconteça. A força horizontal é aplicada em uma altura h do chão, $0 < h < H$. Discuta o equilíbrio desse bloco.

Dados: M , H , L , h e g .



A figura ao lado ilustra uma tentativa de diagrama de forças no bloco (com $h > H/2$).

A Figura é uma “tentativa” porque veremos que a configuração de forças mostrada não é compatível com o equilíbrio do bloco. A questão central está na posição de aplicação da normal $\vec{\eta}$. A força normal é uma força distribuída (assim como o peso), atuando em toda a superfície inferior do bloco que toca o piso. No nosso diagrama acima nós desenhamos essa força no centro da superfície, sem muita justificativa. Mas note, tomando um eixo z no CM do bloco, vemos que \vec{F} produz um torque para dentro da página (negativo, portanto) e $\vec{F}_A^{(E)}$ também. A normal e o peso não tem torque nesse eixo. Conclusão, supondo que o bloco esteja em equilíbrio, a equação para os torques ao longo de z fica:

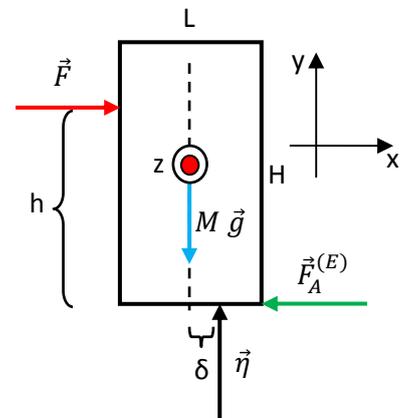


$$-F \left(h - \frac{H}{2} \right) - F_A^{(E)} \frac{H}{2} = 0$$

Note que ao longo de x vale $F_A^{(E)} = F$ e, portanto, a equação dos torques fica simplesmente:

$$-F h = 0$$

Essa equação não possui solução, pois F e h não são nulos. O que pode estar errado? Seria o equilíbrio desse bloco impossível? Se você fizer um experimento com uma caixa de leite longa vida apoiada na mesa vai ver que este é um equilíbrio perfeitamente possível. Conclusão: como não podemos tirar a seta do peso do lugar, só resta concluir que desenhamos a seta da normal no lugar errado. Se refizemos o diagrama deslocando a normal um pouco (δ) para a direita, como na Figura ao lado, vemos que o equilíbrio se torna possível, pois agora a equação para os torques fica:



$$-F \left(h - \frac{H}{2} \right) - F_A^{(E)} \frac{H}{2} + \eta \delta = 0$$

Ou seja:

$$-F h + \eta \delta = 0$$

Note, se $F = 0$, então $\delta = 0$, ou seja, se ninguém empurra a caixa, a normal fica no centro. Se vamos aumentando F , δ tem que ir aumentando, para manter a caixa parada. Conclusão: a força normal é distribuída, assim como o peso, mas podemos concentrá-la em um ponto apenas (uma espécie de CG, só que para a força normal), como fizemos com o peso. Esse ponto seria o ponto de aplicação da normal, assim como o CG é o ponto de aplicação do peso. Para um corpo homogêneo simplesmente apoiado em uma superfície

horizontal, o ponto de aplicação da normal fica no centro da superfície de contato, por simetria. Quando empurramos o corpo, deslocamos seu “ponto de apoio”, ou seja, deslocamos o centro de aplicação da normal.

Voltando à situação da questão, quando vamos aumentando F , a normal vai caminhando para a direita, porque o bloco vai se apoiando mais para a direita no piso. Usando que $\eta = M g$, obtemos:

$$\delta = \frac{F}{Mg} h$$

Se formos aumentando F , vai existir um momento em que a normal chega na quina direita do bloco, ou seja, $\delta = L/2$. A partir desse momento, se aumentarmos um pouco mais a força, o bloco tomba (ainda supondo que ele nunca desliza), pois a equação de equilíbrio dos torques não possui mais solução. A força que deixa o bloco na iminência de tombar é dada pela condição:

$$\delta = \frac{L}{2} = \frac{F}{Mg} h$$

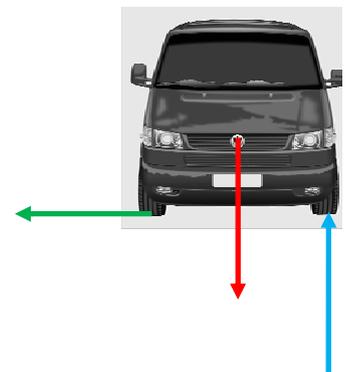
Segue que:

$$F = \frac{L}{2h} M g$$

Podemos notar que quanto mais largo (maior L) e quanto mais pesado (maior M) é o bloco, mais difícil é atingir a força de iminência de tombamento, ou seja, mais estável é o bloco. Por outro lado, quanto mais longe do piso a força é aplicada (maior h), menor a força requerida para tombar o bloco.

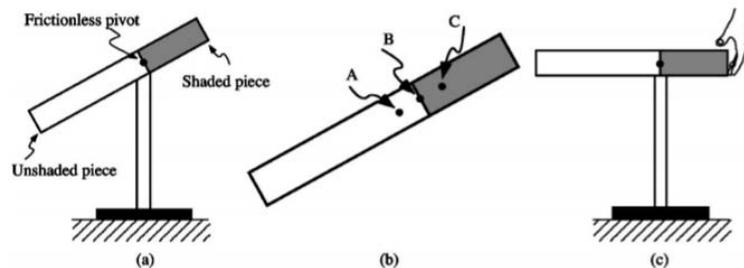
Essa discussão não se restringe ao caso $h > H/2$, como está sugerido nas figuras que fizemos. Ela vale para todo h com $H \geq h > 0$.

Um automóvel fazendo uma curva não é um corpo em equilíbrio (ele possui, no mínimo, aceleração centrípeta) e por isso não podemos aplicar a ele essa análise que fizemos nesse problema. Mas, o motivo porque um automóvel tomba em uma curva é similar ao que verificamos aqui. Quando um automóvel está fazendo uma curva, sem tombar, seu ponto de apoio no chão se desloca para fora da curva, produzindo um torque de força normal oposto ao torque do atrito estático nos pneus (a força de atrito está apontando para dentro da curva, uma força centrípeta). Na Figura ao lado mostramos um automóvel curvando para a esquerda (atrito em verde, peso em vermelho (no CG do automóvel) e normal em azul). Se a velocidade do automóvel vai aumentando, a força de atrito vai aumentando e o torque do atrito (em relação a um eixo pelo CG, torque para dentro da página) vai aumentando. O peso do automóvel não muda, e nem a magnitude da normal. Por isso, para aumentar o torque da normal (para fora da página), esta deve se deslocar para fora da curva nesse caso. Vai haver uma velocidade em que a normal atinge o limite do



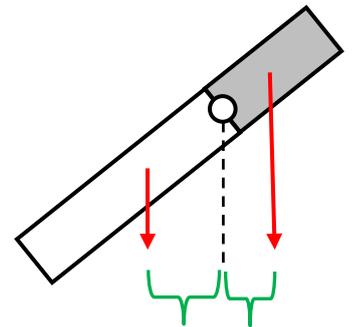
contato do automóvel no piso, que seriam os dois pneus do automóvel que estão localizados no lado de fora da curva. Se a velocidade aumenta mais um pouco, o torque do atrito aumenta e o torque da normal não pode aumentar mais. A partir daí o tombamento se torna inevitável. O automóvel tomba apoiado nos seus dois pneus localizados no lado externo da curva (torque resultante para dentro da página).

ER 6.9) Uma barra longa é composta da união de duas barras de tamanhos e massas diferentes, conforme a Figura abaixo (exercício retirado da Ref. *Student understanding of static equilibrium: predicting and accounting for balancing*, L. G. Ortiz et al, American Journal of Physics 73 (2005)). A Figura (a) mostra a barra longa em equilíbrio sustentada por um eixo horizontal sem atrito localizado na união entre as duas barras.



a) Qual porção da barra longa possui massa maior?

Na Figura ao lado mostramos os pesos de cada uma das barras (em seus CMs). No equilíbrio, os torques desses dois pesos em relação ao eixo de rotação (que são opostos) têm que ter magnitudes iguais. Portanto, quem tem braço maior deve ser uma força menor. Conclusão: a barra cinza tem massa maior.



b) Olhando para a Figura (b), em qual ponto A, B ou C está o CM da barra longa?

Se a barra longa fica em equilíbrio na posição mostrada em (a), então o CM dessa barra está exatamente no ponto B, onde passa o eixo de rotação (ponto de apoio).

c) Na Figura (c) a barra longa é posicionada na posição horizontal e solta. Qual o movimento posterior da barra?

Nenhum, pois esse equilíbrio da barra longa é indiferente, conforme a discussão que fizemos no texto para a balança de pratos. A barra longa fica estática em qualquer ângulo de inclinação.

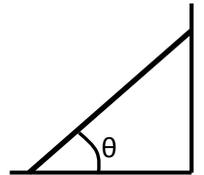
6.3 Exercícios propostos

EP 6.1) Uma haste de comprimento $2L$ é composta de duas hastes feitas de materiais diferentes: A (densidade de massa ρ_A) e B (densidade de massa ρ_B), cada uma de comprimento L , emendadas uma na outra. A haste é pendurada por duas cordas leves amarradas nas suas extremidades e amarradas ao teto, deixando a haste na

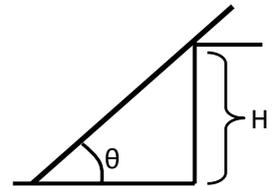
posição de equilíbrio estático horizontal. As cordas ficam na posição vertical. Calcule a razão T_A / T_B entre os módulos das tensões nas cordas: T_A na corda amarrada do lado A e T_B na corda amarrada do lado B.

EP 6.2) Um bloco em repouso apoiado em uma superfície horizontal é puxado por uma força de módulo F inclinada de um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito estático bloco/superfície é μ_E . Calcule o valor de θ que vai fazer com que a menor força F necessária para tirar o bloco do repouso seja mínima. Desconsideramos aqui o tombamento do bloco.

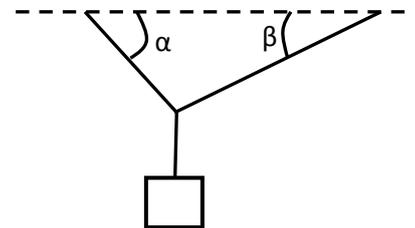
EP 6.3) Uma escada de massa M e comprimento L está apoiada em um piso horizontal e em uma parede vertical, conforme a figura ao lado. Não há atrito na parede e o coeficiente de atrito estático escada/piso é μ_E . Calcule o menor valor do ângulo θ compatível com o equilíbrio estático da escada. Note que se adicionarmos um atrito na parede o equilíbrio se torna indeterminado (ver Ref. *Statics of a ladder leaning against a rough wall*, K. S. Mendelson, American Journal of Physics, 63 (1995)).



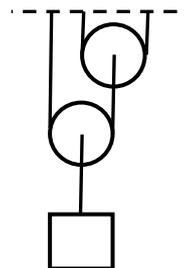
EP 6.4) Uma escada de massa M e comprimento L está apoiada em um piso horizontal e em uma quina em uma parede vertical, conforme a figura ao lado. Não há atrito na quina da parede, mas há atrito (estático) com o piso. Calcule o módulo da força de atrito estático piso/escada.



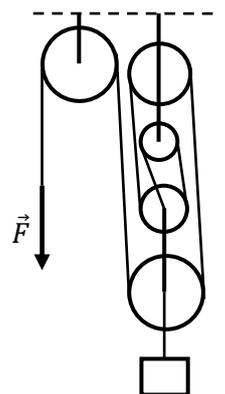
EP 6.5) Um bloco de massa M está em equilíbrio estático pendurado por duas cordas leves amarradas ao teto, conforme a figura ao lado. Determine o módulo da tensão na corda menor.



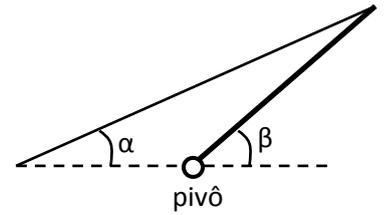
EP 6.6) Um bloco está em equilíbrio estático preso a duas polias conforme a figura ao lado. O bloco tem massa M e cada polia tem massa m . As polias podem girar livremente sem atrito em seus eixos. Determine o módulo da tensão na corda menor fixada ao teto, que abraça a polia superior.



EP 6.7) Um bloco de massa M está sendo mantido em equilíbrio por uma força \vec{F} aplicada à extremidade de uma corda leve que passa por 5 polias leves, conforme a figura ao lado. As polias giram sem atrito em seus eixos. Considere a aproximação em que todos os segmentos de cordas são verticais. Calcule o módulo de F necessário para manter o equilíbrio do bloco.



EP 6.8) Uma haste rígida de massa M e comprimento L é pivotada (eixo de giro sem atrito) em sua base e é mantida em equilíbrio estático pendurada por uma corda leve, inclinada de um ângulo β , conforme a figura ao lado. a) Calcule o módulo da tensão na corda. b) Calcule o módulo da força que o pivô faz na haste.



6.4 Respostas dos exercícios propostos

EP 6.1) $\frac{3\rho_A + \rho_B}{\rho_A + 3\rho_B}$

EP 6.2) $\tan(\theta) = \mu_E$

EP 6.3) $\tan(\theta_{MIN}) = 1/(2\mu_E)$

EP 6.4) $\frac{Mg}{2H} \cos(\theta) \sin^2(\theta)$

EP 6.5) $\frac{\cos(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} Mg$

EP 6.6) $\left(\frac{M}{4} + \frac{m}{2}\right) g$

EP 6.7) $Mg/5$

EP 6.8) a) $\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \frac{Mg}{2}$ b) $\sqrt{A^2 + B^2}$ com $A = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \frac{Mg}{2}$ e $B = Mg + \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \frac{Mg}{2}$

7

Elasticidade



7.1 Introdução

Nos capítulos anteriores fizemos a hipótese de que o corpo cujo movimento ou equilíbrio estávamos estudando era um corpo rígido, ou seja, um corpo de forma e tamanho fixos. Na natureza não existe um corpo com essas propriedades, porque todos os materiais possuem uma certa elasticidade, ou seja, uma capacidade de se deformarem quando submetidos a forças externas. Assim sendo, os corpos reais podem se contrair, dilatar, dobrar, curvar, torcer etc., quando submetidos a forças externas. Podem também se romper, ou quebrar. Quando uma pessoa senta em uma cadeira que parece frágil, ela se preocupa se a cadeira vai suportar o esforço de sustentar seu peso, se a cadeira vai se deformar além do suportável e quebrar.

Ao analisar as condições de equilíbrio de um corpo deformável temos que levar em conta as deformações que esse corpo pode sofrer, devido às forças externas que atuam nele. Essas deformações podem modificar os braços de alavanca das forças, e um equilíbrio que estava garantido para um corpo idealmente rígido, pode não estar garantido para um corpo real deformável. Enfim, as idéias que discutimos no capítulo anterior sobre o equilíbrio dos corpos se tornarão inúteis se não tivermos a garantia prévia de que as formas desses corpos não vão se alterar muito devido à ação das forças a que eles estão submetidos. Portanto, um conhecimento sobre a deformabilidade e a resistência dos materiais se apresenta como crucial para aquele que pretende projetar uma máquina, uma edificação ou uma estrutura sólida qualquer.

Esses conceitos ligados ao comportamento elástico dos materiais fazem parte das ciências da elasticidade e resistência dos materiais, que são, cada uma, suficientemente vastas e profundas, do ponto de vista teórico, experimental e numérico. O conhecimento adquirido através dessas ciências contribuiu de forma marcante para o avanço tecnológico da humanidade. No início da civilização havia a necessidade de novos materiais para a construção de abrigos, de ferramentas e de armas de guerra e caça. As idades da pedra, do bronze e do ferro se referem aos materiais que eram a base da tecnologia na construção desses artefatos em diferentes períodos da história (eras arqueológicas). O desenvolvimento contínuo de novos materiais abre

fronteiras para novas tecnologias e para saltos de desenvolvimento. A revolução industrial, por exemplo, se deu em grande parte graças à disponibilidade do aço resistente e barato. O avanço da aviação e da navegação comerciais, da eletrônica e da medicina depende fortemente do surgimento de novos materiais. Do ponto de vista econômico, o conhecimento preciso das propriedades de resistência dos materiais permite que se construam estruturas mais “enxutas”, sem exageros em suas dimensões e quantidades de material, que levariam, inutilmente, a estruturas maiores, mais pesadas, mais caras e de maior consumo energético.

Nosso interesse aqui é discutir apenas as noções básicas ligadas à elasticidade e resistência dos materiais. Os estudantes de engenharia civil, mecânica, ou áreas afins terão oportunidade de aprofundar seus estudos nessa área.

7.2 Tensão e deformação

A idéia central aqui é que um corpo submetido a um esforço externo vai se deformar e devemos ser capazes de quantificar essa deformação em termos do esforço aplicado. Queremos descobrir uma “lei do esforço/deformação” que nos permita conhecer como um corpo se deforma e fazer previsões das deformações que ele vai sofrer. Essas previsões vão nos ajudar a dimensionar as estruturas de uma edificação ou de uma máquina, para que elas não se deformem muito ou não se quebrem. Estamos utilizando aqui as palavras “esforço” e “deformação” sem muito cuidado sobre seus significados precisos. O que faremos primeiro então será definir de forma mais precisa esses termos.

Considere o exemplo de uma viga de prédio que sustenta parte do peso do andar superior e do que está nele (pessoas, móveis etc.) como ilustrado na Figura 7.1. A idéia ilustrada nessa Figura é que o que estamos chamando de esforço, que seria a causa da deformação, não se resume apenas à força, mas envolve também a área em que essa força se concentra.

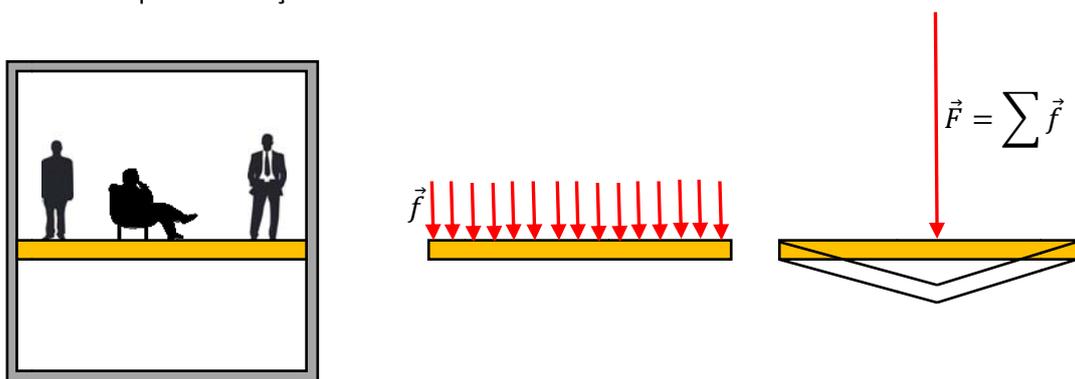


Figura 7.1: Uma viga está submetida a um esforço porque sustenta parte do peso do andar superior de um prédio e tudo mais que esta sobre ela. A força que atua na viga está distribuída em toda a área da viga em que o andar superior e tudo mais se apóia. Se a força fosse toda concentrada em uma área pequena no centro da viga, esperaríamos consequências mais drásticas sobre a forma da viga, como, por exemplo, que a viga se dobrasse.

Uma força F distribuída em uma área A grande implicará em menores deformações do que uma mesma força distribuída em uma área pequena. Assim definimos esforço como:

$$\text{Esforço} = \frac{F}{A}$$

O nome técnico para isso que estamos chamando de esforço é “tensão”, e esse é o nome que usaremos daqui para diante.

Note que já usamos o nome tensão para forças produzidas por cordas, barbantes e cabos tensionados. Aqui o significado é diferente, tensão é simplesmente força por unidade de área, cuja unidade natural é N/m^2 ou pascal (Pa). Poderíamos chamar essa razão de pressão, afinal pressão também é força/área. Mas, reservamos o termo pressão para os fluidos, sendo F a força que um fluido faz ortogonalmente a uma área A . A tensão é um conceito mais geral, pois F pode ser aplicada por qualquer coisa e pode inclusive atuar tangencialmente à área A (como no caso da tensão de cisalhamento). Por exemplo, se uma força de magnitude $F = 100 \text{ N}$ for aplicada uniformemente em uma superfície de área $A = 0,1 \text{ m}^2$, a tensão correspondente nos pontos dessa superfície é de 1.000 Pa .

Agora vamos definir o que entendemos por deformação, que é basicamente uma variação ΔL em um comprimento (ou dimensão) de um corpo. Imagine que você seja informado de que um cabo de aço utilizado em alguma aplicação se deformou, tendo esticado de $\Delta L = 1$ metro. O cabo tinha o comprimento L_0 (metros) e passou a ter o comprimento $L_0 + 1$. Essa deformação é grande ou pequena? Não podemos responder essa pergunta, a resposta depende do valor de L_0 . Imagine que $L_0 = 10 \text{ km}$, então essa deformação seria imperceptível a olho nu. Por outro lado, se $L_0 = 1 \text{ m}$, então essa deformação seria muito grande e evidente, o cabo dobraria de tamanho e não precisaríamos nem de instrumentos de medição para ver que o cabo se deformou muito. Assim sendo, o simples valor de ΔL não é capaz de mensurar a deformação de um corpo. Precisamos relativizar esse ΔL , definido:

$$\text{Deformação} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Note que a deformação é adimensional. Por exemplo, se um cabo de comprimento inicial $L_0 = 10 \text{ m}$ dilatar de $\Delta L = 10 \text{ cm}$, sua deformação foi de $0,01$ (sem nenhuma unidade).

A teoria/ciência da elasticidade busca uma lei, uma relação entre essas duas grandezas:

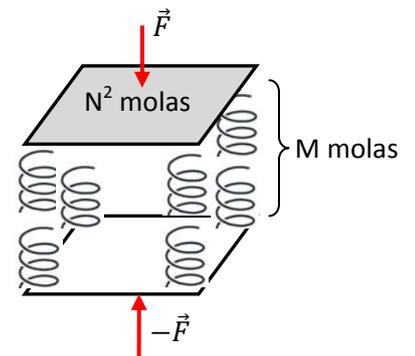
$$\frac{F}{A} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \frac{\Delta L}{L_0}$$

de tal forma que possamos fazer previsões das deformações, se conhecermos as tensões.

A lei básica da elasticidade é a lei de Hooke que diz que essa relação é a mais simples possível, uma relação linear, ou de proporcionalidade:

$$\frac{F}{A} \propto \frac{\Delta L}{L_0}$$

Robert Hooke estabeleceu essa lei por volta de 1680 através de vários experimentos com barras, fios e molas sendo alongadas por pesos pendurados. Experimentando com barras e fios feitos de vários materiais diferentes, como metais, madeiras, cabelos, ossos etc., Hooke estabeleceu que todos os materiais apresentam esse regime linear de relação entre tensão e deformação, ou seja, dobrando a tensão, dobra-se a deformação. A validade desse regime é observada basicamente nas situações em que as tensões e deformações são pequenas. Nós já tivemos contato com essa lei quando discutimos o comportamento das molas. O fato da lei de Hooke ser válida em geral dá uma pista de que microscopicamente todos os materiais têm em comum que suas ligações químicas se comportam, do ponto de vista mecânico, como molas ideais. Quando submetemos um material a uma tensão, esta se propaga internamente, em um nível microscópico, e a própria estrutura atômica do material é tensionada. Quando átomos vizinhos dentro do material se afastam, eles se atraem de volta, devido às suas distribuições de cargas elétricas. Quando esses átomos se aproximam muito, eles se repelem mutuamente, devido à superposição de suas nuvens eletrônicas. Os átomos se comportam mecanicamente como se estivessem ligados por pequenas molas. Dessa forma, quando esticamos um fio de aço, por exemplo, estamos esticando um número muito grande de molas microscópicas emendadas umas nas outras, correspondentes às ligações químicas que unem os átomos que compõem o aço. A Figura ao lado ilustra um “modelo” de sólido que é um aglomerado de $N^2 M$ molas iguais (material homogêneo), cada uma de constante de mola k_1 , sendo comprimido por forças opostas de módulo F . Se a_1 é a área da seção transversal de uma mola e l_1 é o comprimento de uma mola relaxada, segue (da lei das molas) que a deformação $\Delta x_1 > 0$ de uma mola é tal que $k_1 \Delta x_1 = F/N^2$. Portanto, a deformação (total) de compressão do sólido é:



$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{M \Delta x_1}{M l_1} = \frac{F}{k_1 N^2 l_1} = \frac{a_1}{k_1 l_1} \frac{F}{N^2 a_1} = \left(\frac{a_1}{k_1 l_1} \right) \frac{F}{A}$$

sendo $A = N^2 a_1$ a área de aplicação das forças $\pm \vec{F}$.

Desse modelo simples deduzimos a razoabilidade da lei de Hooke:

$$\frac{F}{A} \propto \frac{\Delta L}{L_0}$$

Para transformar a relação de proporcionalidade na lei de Hooke em uma igualdade basta introduzir uma constante de proporcionalidade:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L_0}$$

sendo E o módulo de elasticidade, ou constante elástica do material. O módulo de elasticidade E mede, de uma certa forma, a rigidez, ou resistência de um material à deformação. De fato, da lei de Hooke vemos que:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{A}$$

ou seja, quanto maior o valor de E , menor a deformação para uma dada tensão. Um material idealmente rígido teria $E \rightarrow \infty$. O módulo de elasticidade é uma espécie de “constante de mola” para um dado material e está relacionado diretamente à rigidez mecânica (força) de suas ligações químicas. As ligações covalentes (compartilhamento de elétrons) entre átomos (como no caso do diamante e do vidro) levam, geralmente, a materiais mais rígidos, ou seja, a maiores valores de E .

Há vários outros parâmetros, além de E , para se definir a resistência de um material, que não vamos estudar aqui. Dentre os diferentes materiais, o diamante tem a reputação de ser o material natural mais duro (ou sólido) que existe. A escala de “dureza” (escala de Mohs) dos minerais começa com o talco e o gesso, os mais macios, e termina com o diamante, o mais duro. Isso significa, basicamente, que se um diamante for arrastado contra outro material, esse material vai ser riscado/arranhado, e o diamante vai sair ileso. Por isso o diamante (artificial) é utilizado em ferramentas de corte, brocas e serras de alta performance. Na escala de deformabilidade o diamante também se destaca, sendo o mais rígido, com módulo de elasticidade $E \cong 10^{12}$ Pa. Ele se destaca também no preço, sendo o material mais caro que existe.

Na internet e em livros técnicos da área é possível encontrar tabelas de módulo de elasticidade para diferentes materiais. O valor de E pode depender de fatores externos, como a temperatura. Em geral, o aumento de temperatura leva a uma diminuição em E , pois o material aquecido se torna mais mole e mais deformável.

Para um corpo específico, a maneira como ele vai se deformar depende não só do material de que ele é feito, mas também de sua forma. A forma do corpo vai influenciar como vão se distribuir as tensões internas no corpo e, portanto, como ele vai se deformar. Para tornar as idéias mais simples, consideremos objetos de forma cilíndrica, para os quais as definições de tensão e deformação são mais evidentes.

7.2.1 Tensão de dilatação

Considere um corpo cilíndrico maciço (um tarugo), feito de um certo material, que é puxado em suas extremidades por forças externas opostas de mesma magnitude, conforme a Figura 7.2 abaixo. O corpo está em equilíbrio, pois as forças se cancelam, por hipótese. Se ele fosse um corpo rígido, nada aconteceria.

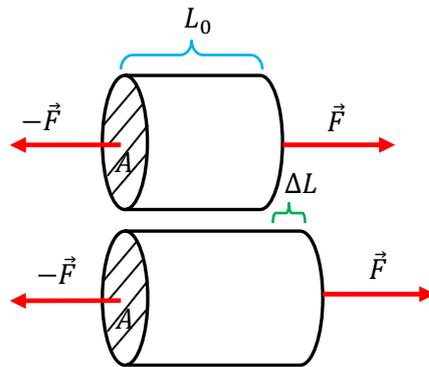
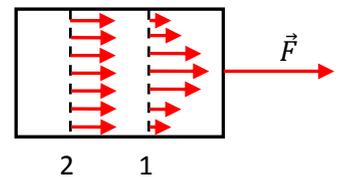


Figura 7.2: Um corpo cilíndrico de área de seção transversal A é puxado pelas extremidades e dilata.

Note que estamos supondo que a força \vec{F} está distribuída uniformemente em toda a área A hachurada de uma face do cilindro. Analogamente para $-\vec{F}$. Essa força vai se propagar para dentro da estrutura do cilindro e podemos pensar que cada fatia cilíndrica interna do cilindro está sendo puxada por forças opostas de mesma magnitude e, por consequência, sofrendo uma pequena dilatação. De fato, a hipótese de uniformidade da força externa não é muito crítica porque, conforme afirma o princípio de Saint-Venant, uma tensão externa aplicada de forma concentrada na extremidade de uma barra vai se tornar uniformemente distribuída em sua seção transversal, à medida que penetramos para dentro da barra, e essa uniformização da tensão vai ser rápida, ou seja, vai ocorrer em seções próximas da extremidade da barra. A Figura acima ilustra essa idéia: na seção 2 a tensão já se uniformizou ao longo da seção transversal da barra.



Enfim, se esse corpo cilíndrico fosse rígido, nada iria acontecer. Não há força resultante e nem torque resultante. Mas, sendo esse corpo deformável, ele vai dilatar e seu comprimento vai aumentar de ΔL . No regime de validade da lei de Hooke podemos dizer que:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L_0}$$

sendo $E = Y$ o módulo de elasticidade de dilatação, ou módulo de Young, do material que compõe o cilindro. O cobre, por exemplo, possui $Y \cong 120 \text{ GPa}$ (ou $1,2 \times 10^{11} \text{ Pa}$) enquanto o aço possui $Y \cong 200 \text{ GPa}$. Isso significa que se um fio de aço e um fio de cobre, de comprimentos iniciais iguais, forem puxados em suas extremidades por tensões (F/A) iguais, o fio de cobre vai esticar praticamente o dobro de quanto vai esticar o fio de aço.

Em aplicações práticas na engenharia se requer que uma estrutura suporte um nível máximo de tensão, que não pode ser ultrapassado, sob o risco de haver ruptura do material. Seja T_W esse nível de tensão (tensão de trabalho, ou tensão permitida). Para o caso simples de uma estrutura cilíndrica como a que discutimos aqui, a área da seção transversal, para uma dada tensão T_W , é:

$$\frac{F}{A} = T_W \Rightarrow A = \frac{F}{T_W}$$

Quanto menor a tensão T_W permitida, maior deve ser a área da seção, para uma mesma força aplicada F . Da mesma forma, para uma dada área, podemos determinar a força máxima aceitável:

$$F_{MAX} = A T_W$$

Partindo da lei de Hooke, podemos determinar T_W a partir da deformação máxima permitida e do módulo de Young do material:

$$T_W = Y \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right)_{MAX}$$

Para um exemplo numérico, considere que o (ou um tipo de) aço suporte no máximo uma tensão de dilatação de 450 MPa (M = mega = 10^6). Após isso ele se rompe. O módulo de Young desse aço é $Y = 200$ GPa (esses valores foram inspirados em tabelas que encontramos em sites na internet, mas note que há vários aços e os parâmetros de resistência mecânica vão depender fortemente da composição química desses materiais e também do método usado para fabricá-los). Obviamente um engenheiro que pretendesse construir uma estrutura com esse aço - um cabo de aço, por exemplo - deveria recomendar uma tensão de trabalho T_W bem menor que esse valor máximo de 450 MPa, para trabalhar com uma boa margem de segurança. Essas tensões de trabalho (ou permitidas) T_W são geralmente convencionadas como sendo uma fração da tensão de transição entre o regime elástico e o regime plástico de deformação, sobre os quais discutiremos mais adiante. Nós vamos assumir aqui, apenas como exemplo, que $T_W = 450$ MPa, para determinar valores extremos para os parâmetros. Por exemplo, a deformação máxima admitida para essa estrutura seria:

$$T_W = Y \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right)_{MAX} \Rightarrow \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right)_{MAX} = \frac{T_W}{Y} = 0,00225$$

Se um cabo desse aço tivesse um comprimento original $L_0 = 10$ m, sua deformação máxima quando submetido a essa tensão máxima T_W seria $\Delta L_{MAX} = 0,0225$ m, ou seja, 2,25 cm.

Se a área da seção transversal do cabo de aço (um cilindro) fosse $A = 3,14 \times 10^{-4}$ m² (raio de 1 cm), a força máxima de dilatação que ele suportaria seria:

$$F_{MAX} = A T_W \cong 141.000 \text{ N (basicamente o peso de } 14.100 \text{ kg } \cong 14 \text{ toneladas)}$$

Por outro lado, se esse cabo tivesse que suportar um “peso” de 10 toneladas (uma massa de 10.000 kg), sua área (mínima) de seção deveria ser:

$$A = \frac{F}{T_W} = \frac{10.000 \times 9,8}{450.000.000} \cong 2,18 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

que corresponde a um raio de 0,83 cm.

Para o cobre, por exemplo, encontramos as estimativas: $Y = 120$ GPa e $T_W = 220$ MPa. Comparando com o aço do exemplo acima, obtemos:

i) Para um cabo com área de seção $A = 3,14 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ (raio de 1 cm), a força máxima de dilatação que ele suportaria seria:

$$F_{MAX} = A T_W \cong 69.000 \text{ N (basicamente o peso de 6.900 kg)}$$

ii) Se esse cabo tivesse que suportar um “peso” de 10 toneladas (uma massa de 10.000 kg), sua área (mínima) de seção deveria ser:

$$A = \frac{F}{T_W} = \frac{10.000 \times 9,8}{220.000.000} \cong 4,45 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

que corresponde a um raio de 1,2 cm.

Vemos claramente que o cabo de cobre suporta pesos menores e/ou deve ser mais grosso para suportar o mesmo peso, quando comparado com o aço. Mesmo sendo mais “fraco”, o cobre possui outras propriedades que o tornam um material muito utilizado em construções. Uma dessas propriedades é a alta resistência à corrosão.

7.2.2 Tensão de compressão

Se invertermos os sentidos das forças, obtemos um corpo cilíndrico sob tensão de compressão, e seu comprimento vai diminuir, devido à ação da tensão. A Figura 7.3 ilustra essa situação.

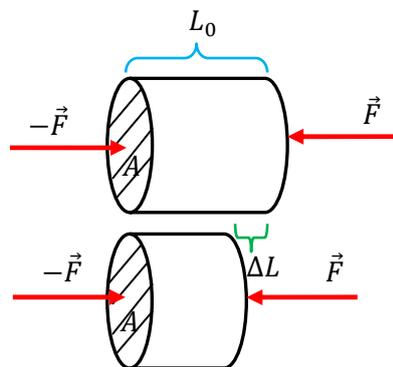


Figura 7.3: Um corpo cilíndrico de área de seção transversal A é empurrado pelas extremidades e se comprime.

No regime de validade da lei de Hooke, podemos escrever:

$$\frac{F}{A} = Y' \frac{|\Delta L|}{L_0}$$

sendo Y' o módulo de elasticidade (ou de Young) de compressão, que pode, em princípio, ser diferente do módulo de elasticidade de dilatação. Introduzimos o módulo em $|\Delta L|$ porque nesse caso ΔL é negativo. Para muitos materiais observa-se um comportamento simétrico para dilatação/compressão, ou seja, $Y' = Y$, como no caso de uma mola ideal. Mas, com uma pesquisa rápida na internet podemos encontrar facilmente informações sobre materiais assimétricos, para os quais $Y' \neq Y$. O concreto, por exemplo, é um material forte quando submetido a tensões de compressão (ele suporta grandes tensões de compressão sem se romper), mas é fraco quando submetido a tensões de dilatação.

Qualquer estrutura vertical está sujeita a uma tensão de compressão, pela ação do próprio peso. Uma coluna cilíndrica vertical (de altura inicial L) apoiada no piso, por exemplo, possui um perfil de tensão que depende da altura até o piso. A parte inferior da coluna está submetida a uma maior tensão, porque sustenta um peso maior. A Figura 7.4 abaixo ilustra essa idéia. De fato, sendo ρ a densidade de massa (kg/m^3) do material que compõe a coluna, vemos na figura que a seção transversal da coluna (de área A) em uma altura h_1 está sustentando um peso:

$$P_1 = \rho g A (L - h_1)$$

enquanto que a seção transversal na altura h_2 ($>h_1$) sustenta um peso menor:

$$P_2 = \rho g A (L - h_2)$$

Enfim, o peso sustentando em uma altura h da coluna é:

$$P(h) = \rho g A (L - h)$$

Por exemplo, a base da coluna ($h = 0$) sustenta o peso todo da coluna, pois:

$$P(h = 0) = \rho g A L$$

sendo $A L$ o volume da coluna cilíndrica.

Se considerarmos ainda uma tensão p_0 no topo da coluna (a pressão atmosférica para um poste livre ou a tensão produzida por um outro corpo apoiado no topo da coluna), podemos dizer que a tensão na altura h é:

$$\frac{F}{A} = p_0 + \rho g (L - h)$$

Portanto, na base da coluna ($h = 0$) a tensão é $p_0 + \rho g L$, enquanto que no topo ($h = L$) a tensão é apenas p_0 .

A lei de Hooke diz então que a deformação em uma fatia da coluna de comprimento (altura) inicial l_0 situada em uma altura h do poste será:

$$\frac{|\Delta l|}{l_0} = \frac{1}{Y} [p_0 + \rho g (L - h)]$$

sendo Y o módulo de Young do material de que a coluna é feita.

Se tivéssemos que apostar em qual lugar a coluna teria mais chance de quebrar, ou sofrer uma fratura, apostaríamos que seria na base ($h = 0$), pois a base está submetida a maiores tensões e a maiores deformações. Portanto, a base é o local onde a coluna está mais vulnerável ao excesso de deformação e conseqüente falha do material.

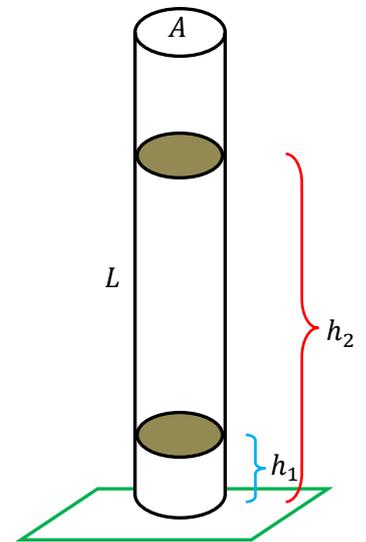


Figura 7.4: Uma coluna vertical de comprimento L está submetida a uma tensão de compressão.

Para uma coluna feita de material que deve suportar uma tensão T_W (tensão de trabalho), que garante que não haja nenhum perigo de falha no material, a altura máxima permitida seria (sendo a base da coluna a região de maior tensão):

$$P(h = 0) = p_0 + \rho g L_{MAX} = T_W \Rightarrow L_{MAX} = \frac{1}{\rho g} (T_W - p_0)$$

Maiores tensões de trabalho vão permitir colunas mais altas. Materiais mais densos, bem como maiores tensões no topo, vão requerer colunas mais baixas. Nesse sentido, uma coluna de madeira, que é um material geralmente de baixa densidade, pode apresentar vantagem em relação a uma coluna de concreto.

Tomando como exemplo o concreto usado em construções (de fato existem vários concretos possíveis, vamos pensar aqui no que seria um tipo particular de concreto, cujas características mecânicas podem ser encontradas facilmente em sítios na internet), ele admite uma tensão máxima $T_{MAX} \cong 30$ MPa. Esperamos então que a tensão de trabalho seja tal que $T_W \ll T_{MAX}$ para evitar o perigo de ruptura do concreto. No caso de uma coluna de concreto que tem sua parte superior livre (um poste, por exemplo), podemos usar os valores numéricos: pressão atmosférica $p_0 \cong 101$ kPa ($k = \text{quilo} = 10^3$) e densidade $\rho \cong 2.400$ kg/m³. Considerando um caso extremo, em que $T_W = T_{MAX}$, podemos determinar a altura limite do poste (note que a pressão atmosférica é desprezível nesse caso):

$$L_{MAX} = \frac{1}{\rho g} (T_W - p_0) \cong 1.300 \text{ m}$$

Essa altura limite não leva em conta outros efeitos que podem causar a ruptura da coluna, como, por exemplo, um encurvamento. Para reduzir a chance de encurvamento, a coluna deveria ter sua seção transversal aumentada (coluna mais grossa).

Supondo que a coluna de altura L deva sustentar um peso P , segue que $p_0 = P/A$ e obtemos que a área da seção transversal da coluna deve ser:

$$\frac{P}{A} + \rho g L = T_W \Rightarrow A = \frac{P}{T_W - \rho g L}$$

Vemos que para sustentar pesos maiores a coluna deve ser mais larga. Maiores tensões de trabalho vão permitir colunas mais estreitas. Materiais mais densos e colunas mais altas vão exigir colunas mais largas. Se o peso da coluna não é importante (uma coluna de madeira, por exemplo) então $A = P/T_W$. Note que o peso da coluna vai se tornando mais importante à medida que ela se torna mais alta (maiores L s).

A compressão total da coluna é dada pela soma das compressões $|\Delta l|$ de cada fatia da coluna:

$$|\Delta L| = \sum |\Delta l| \rightarrow \int_{h=0}^{h=L} |dl| = \int_{h=0}^{h=L} \frac{1}{Y} [p_0 + \rho g (L - h)] dh$$

Nessa expressão consideramos o limite em que há infinitas fatias de espessura infinitesimal $l_0 = dh$, o que leva, através de um processo padrão de limite, do somatório para a integral.

Concluindo, a deformação (compressão) total da coluna é:

$$\frac{|\Delta L|}{L} = \frac{1}{Y} \left(p_0 + \frac{\rho g L}{2} \right)$$

Note que quanto mais deformável o material da coluna (menor Y), mais denso esse material (maior ρ) e mais alta a coluna (maior L), maior será a deformação.

Para obtermos uma estimativa numérica no caso de uma coluna de concreto que tem sua parte superior livre (um poste, por exemplo), podemos usar os valores numéricos: pressão atmosférica $p_0 \cong 101$ kPa, densidade $\rho \cong 2.400$ kg/m³, módulo de Young $Y \cong 30$ GPa. Segue que $p_0/Y \cong 3,4 \times 10^{-6}$ e:

$$\frac{|\Delta L|}{L} \cong 3,4 \times 10^{-6} + 3,9 \times 10^{-7} L$$

com L em metros. Para que essa coluna (ou poste) tenha uma compressão absoluta $|\Delta L| = 1$ cm, sua altura deve ser $L \cong 156$ m. Na base dessa coluna a tensão seria $\rho g L \cong 3,7$ MPa.

Uma coluna de perfil mais adequado seria uma coluna de base mais larga, como uma coluna cônica, por exemplo. Para essa coluna a área da seção transversal cresceria na base, que é onde a força peso sustentada é maior. Conseqüentemente, poderia haver um alívio na tensão e na deformação nessa região.

Qual seria a forma ideal de uma coluna, que teria um perfil constante de tensão, ou seja, que tivesse a tensão independente da altura? Deveria ser uma coluna em que a área da seção transversal dependesse da altura, $A = A(h)$, de tal forma que a tensão fosse constante, independente de h .

Queremos que a razão $P(h)/A(h)$ seja constante, independente de h , ou seja:

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{P(h)}{A(h)} \right) = \frac{1}{A(h)} \frac{dP(h)}{dh} - \frac{P(h)}{[A(h)]^2} \frac{dA(h)}{dh} = 0$$

A ideia dessa equação é que se a razão $P(h)/A(h)$ for uniforme, ou seja, independente da altura h , então, a derivada $d/dh[P(h)/A(h)]$ deve ser nula. Note que:

$$\frac{1}{A(h)} \frac{dP(h)}{dh} - \frac{P(h)}{[A(h)]^2} \frac{dA(h)}{dh} = 0 \Rightarrow dP = \frac{P(h)}{A(h)} dA$$

dP é a diferença de peso entre a porção da coluna que está acima da fatia da coluna de espessura dh posicionada na altura h e a porção que está abaixo, ou seja:

$$dP = P(h + dh) - P(h)$$

Essa diferença de peso (em módulo) é exatamente o peso da própria fatia, ou seja:

$$dP = -\rho g A(h)dh$$

O sinal negativo reflete o fato de que o peso acima da fatia na altura h decai com h , ou seja, quanto mais alta a fatia, menor o peso acima dela.

Obtemos:

$$dP = \frac{P(h)}{A(h)} dA \Rightarrow -\rho g A(h) dh = T_W dA$$

sendo $T_W = P(h)/A(h)$ o nível de tensão constante (tensão de trabalho) que desejamos que haja na coluna.

Portanto, chegamos à seguinte equação diferencial para a área em função da altura h :

$$\frac{dA}{A(h)} = -\frac{\rho g}{T_W} dh$$

Integrando os dois lados da equação obtemos:

$$\ln\left(\frac{A(h)}{A_0}\right) = -\frac{\rho g}{T_W}(h - h_0)$$

Sendo \ln a função logaritmo natural e A_0 e h_0 constantes de integração. Por exemplo, tomando $h_0 = 0$, A_0 seria a área da base da coluna, que chamaremos de A_B . Exponenciando os dois lados da equação obtemos finalmente:

$$A(h) = A_B e^{-\frac{\rho g}{T_W}h}$$

Vemos que a área da seção da coluna deve decair exponencialmente com a altura, ou seja, a forma da coluna seria algo parecido com a mostrada na Figura 7.5 abaixo. Podemos fixar o valor de T_W como sendo o valor da tensão no topo ($h=L$) da coluna, que sustenta o peso P de outro corpo, ou seja, $T_W = P/A_T$, sendo A_T área no topo da coluna, que é dada por:

$$A_T = A(h = L) = A_B e^{-\frac{\rho g}{T_W}L}$$

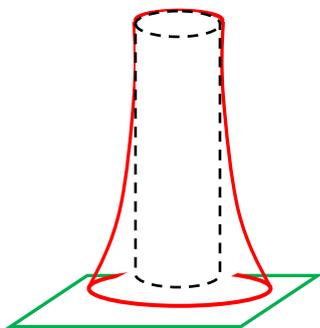


Figura 7.5: Uma coluna (ou poste) vertical “inteligente” seria aquele em que a área de seção transversal variasse exponencialmente com a altura ao piso.

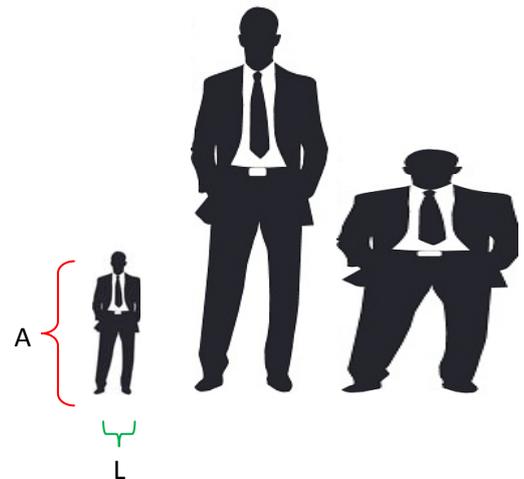
Se você prestar atenção vai ver que os postes de concreto utilizados na rede elétrica são geralmente postes de forma cônica. A idéia dessa forma é a mesma discutida aqui, equalizar a tensão ao longo da altura

do poste. A escolha específica da forma cônica deve ser ditada por outras razões práticas, como o custo de produção. Postes ocos podem ser tão resistentes quanto os postes sólidos, mas são mais leves e mais baratos.

Olhando a figura de uma coluna vertebral (Figura ao lado), ou do tronco de uma palmeira alta, vemos que a natureza apresenta suas soluções para a equalização da tensão de compressão devido à ação do peso. Quais soluções?

Galileu Galilei foi, como em muitas outras áreas, pioneiro na investigação das propriedades mecânicas dos materiais. Pensando na compressão devido à ação do peso, Galileu argumentou que a existência na natureza de árvores, pessoas ou animais gigantes é impossível. Criaturas como o King Kong e o Godzilla só podem existir na ficção. Uma pessoa de, digamos, dez metros de altura, com as mesmas proporções de uma pessoa comum, sofreria fraturas nos ossos das pernas assim que se colocasse na posição vertical. O argumento é simples e pode ser baseado nas figuras ao lado que ilustram o corpo de uma pessoa comum, de um gigante “proporcional” e de um gigante “atarracado”. A forma da pessoa comum pode ser caracterizada pela sua altura A , sua largura L e sua profundidade P (para dentro da página). O gigante proporcional, por sua vez, possuiria as mesmas proporções da pessoa comum, ou seja, tratar-se-ia basicamente de uma ampliação isotrópica, por um fator $\alpha > 1$, da pessoa comum. A altura do gigante proporcional seria αA , a largura αL e a profundidade αP .

Segue então o argumento de Galileu: se o peso da pessoa comum é p , o peso da gigante seria $\alpha^3 p$. Por outro lado, se a área da seção transversal do fêmur (osso mais longo da perna), por exemplo, da pessoa comum é A , no gigante essa área seria $\alpha^2 A$. Logo, a tensão (devido ao peso) no fêmur do gigante seria α vezes a tensão no fêmur da pessoa comum ($\alpha^3 p / \alpha^2 A = \alpha p / A$). Desse cálculo se conclui que uma criatura gigante estaria sujeita a tensões maiores e, portanto, a deformações maiores nos ossos. Daí o maior risco de fratura. Uma pessoa gigante ampliada por um fator $\alpha=10$, por exemplo, pesaria 1000 vezes o peso de uma pessoa comum e teria os ossos 100 vezes mais largos, ossos que teriam que suportar uma tensão 10 vezes maior e sofrer deformações 10 vezes maiores (dada a lei de Hooke). Um osso humano submetido a uma tensão 10 vezes maior que a normalmente suportada se quebraria



facilmente. Para garantir a sobrevivência dessa pessoa gigante, ela teria que ter os ossos feitos de outro material, diferente e mais resistente que o material de que são feitos os ossos de uma pessoa comum. Outra possibilidade seria a pessoa gigante ser desproporcional quando comparada a uma pessoa comum, como no caso do gigante atarracado da Figura acima. De fato, imagine um gigante atarracado com as seguintes dimensões: A , αL e αP . Ele tem a mesma altura que uma pessoa comum, mas é mais largo. Para $\alpha=10$, por exemplo, suas dimensões seriam A , $10L$ e $10P$. Nesse caso, o peso seria apenas 100 vezes maior, assim como a área do fêmur, e a tensão seria a mesma que aquela nos ossos de uma pessoa comum. Esse gigante teria, talvez não por acaso, as proporções de um elefante. Os animais marinhos não sofrem tanto a compressão do peso, pois estão flutuando na água submetidas ao empuxo, que é uma força distribuída. Provavelmente também por isso, segue o fato de que o maior animal que existe na Terra seja a baleia azul.

As tensões de dilatação e compressão, assim como outras tensões que não vamos discutir aqui, podem ocorrer ao mesmo tempo em um corpo. Por exemplo, considere uma viga de seção retangular apoiada apenas em suas extremidades, como na Figura 7.6. Devido à ação de seu próprio peso, a viga vai assumir uma forma curva, como a forma de um simples varal de secar roupa. Esse encurvamento (ou flexão) é, ele mesmo, um tipo de deformação particular que não vamos discutir aqui. Nos concentraremos nas tensões de compressão e dilatação que estão ocorrendo na viga. De fato, olhando para a forma curva da viga vemos que sua parte superior está sendo comprimida, enquanto que sua parte inferior está sendo dilatada. O perfil de tensão seria algo como mostrado na Figura 7.6 para uma fatia central da viga. A parte superior da fatia, e da viga, é muito comprimida (forças representadas por setas verdes), mas a compressão vai diminuindo à medida que nos aproximamos do centro da viga. A parte inferior, por sua vez, é muito dilatada, (setas azuis) mas a dilatação vai diminuindo à medida que nos aproximamos do centro da viga. Note que há uma inversão de sinal na tensão (no sentido da força) em uma linha central horizontal (linha neutra) que corta a viga ao meio. Sendo a deformação proporcional à tensão, esperamos então que essa viga se deforme muito em suas faces superior e inferior e esteja livre de deformação em sua porção central.

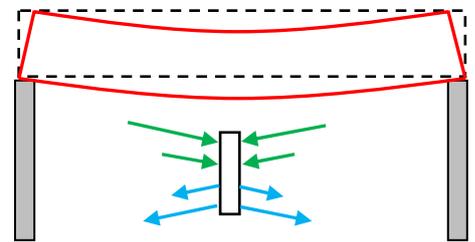


Figura 7.6: Uma viga encurvada (fletida) pela ação de seu próprio peso e de seus apoios nas extremidades.

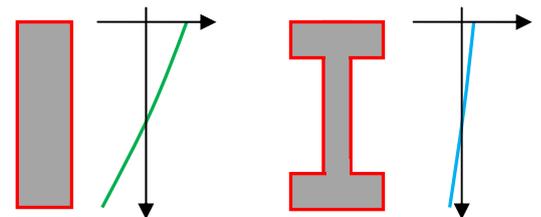


Figura 7.7: Uma viga de seção retangular apresenta concentrações de tensões em suas faces superior e inferior (curva verde). Uma viga com a seção em forma de I equaliza a distribuição de tensões (curva azul).

Nesse sentido, percebemos que a forma retangular para a seção transversal da viga não é uma boa escolha, do ponto de vista da distribuição de tensões. Uma escolha melhor seria uma viga de seção transversal

com a forma da letra I, como mostrado na Figura 7.7 acima. Essa forma possui área de seção transversal grande onde as forças de compressão/dilatação são grandes e área pequena onde essas forças são pequenas. Obtém-se então uma viga com distribuição mais uniforme de tensões e deformações. Mostramos na figura um esboço do gráfico da tensão em função da posição vertical na seção transversal da viga. Tensões positivas representam compressão e tensões negativas dilatação. A idéia que queremos passar é que o aumento da área nas faces superior e inferior da viga reduz o nível de tensão nessas regiões. A parte central da viga, por sua vez, não é muito afetada por uma redução na área da seção transversal.

A Figura 7.8 (retirada do livro *History of strength of materials* (S. Timoshenko)) mostra o desenho de um experimento proposto e realizado por Leonardo da Vinci para estudar a resistência dos materiais. O objetivo era testar a resistência de um fio de ferro (um arame), aumentando a força que ele sustentava, até observar ele se romper. Para isso, areia caía lentamente em um cesto amarrado à extremidade do fio e o peso da areia que provocava a quebra do fio era registrado. Fios de materiais mais resistentes suportavam maior quantidade de areia no cesto.

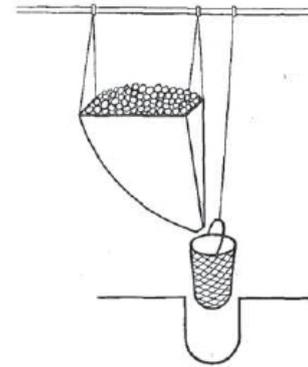


Figura 7.8: Um experimento realizado por Leonardo da Vinci para estudar a resistência de um fio de ferro.

Hoje em dia experimentos similares são realizados em laboratórios de resistência dos materiais. Um pequeno cilindro (um tarugo) feito de um material cujas propriedades se quer estudar é colocado em uma máquina que vai aumentando a tensão progressivamente e medindo a deformação. Um ensaio típico é aquele em que a tensão é de dilatação e o resultado, um diagrama tensão-deformação, é qualitativamente como mostrado na Figura 7.9 abaixo.

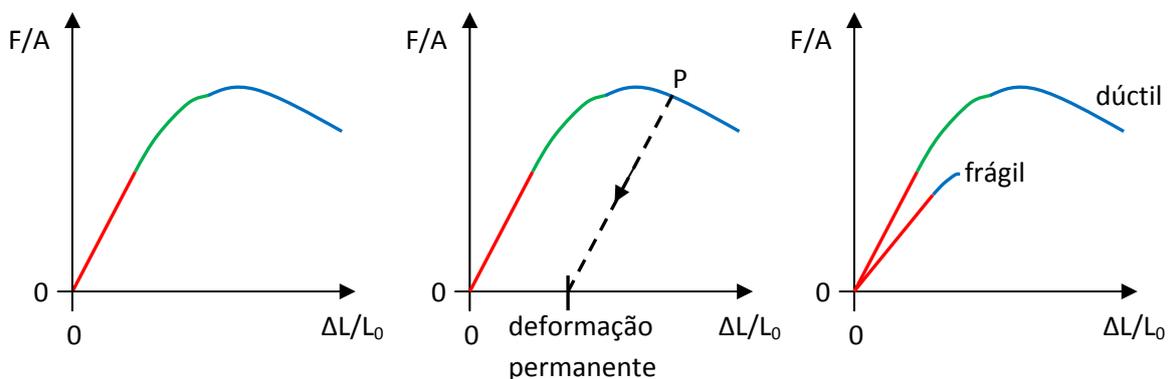


Figura 7.9: Comportamento típico (qualitativo) da relação entre tensão e deformação (diagrama tensão-deformação) obtido em um experimento em que um cilindro de um determinado material é submetido a uma tensão de dilatação F/A progressiva.

O primeiro gráfico ilustra o comportamento típico da tensão versus deformação, enquanto a tensão F/A vai crescendo progressivamente. Nota-se basicamente o que é esperado, a deformação vai crescendo com o aumento da tensão. A curva começa linear, curva-se e termina quando o tarugo se rompe. Essa curva possui tipicamente as seguintes características principais:

1. A curva inicia com uma porção linear (segmento vermelho) que é uma manifestação da validade universal da lei de Hooke, para pequenas tensões e deformações. A inclinação dessa reta $\Delta y/\Delta x$ fornece o valor do módulo de elasticidade E (Y) do material. Para materiais em que essa porção linear da curva é muito limitada (pois a lei de Hooke só vale mesmo para tensões/deformações muito pequenas, tipicamente $\Delta L/L_0 \leq 0,001$), o módulo de elasticidade pode ser determinado por outros métodos, como pela medida da velocidade do som nesse material, que é proporcional a \sqrt{E} (o som se propaga mais rapidamente nos materiais mais rígidos).
2. A curva termina, no extremo final do segmento azul, porque o cilindro se quebra após um certo nível máximo de tensão/deformação suportável.
3. As porções vermelha e verde da curva compõem o regime elástico de deformação: o regime em que o material se comporta como o que entendemos por um elástico. O que caracteriza esse regime é a reversibilidade da deformação, ou seja, se nesse regime desligarmos a máquina que está tensionando o cilindro/material, este perde totalmente sua deformação e volta a ter seu tamanho original. O cilindro estica e volta, como um elástico. Não há nenhum efeito de memória da tensão/dilatação que o material sofreu durante o processo.
4. A porção azul da curva compõe o regime plástico, que se caracteriza pela irreversibilidade das deformações, conforme ilustramos no segundo gráfico da Figura 7.9. Estando o material no ponto P, ou seja, com a tensão e a deformação correspondentes ao ponto P da curva, se desligarmos a máquina que está tensionando o cilindro/material, este relaxa seguindo a reta tracejada (ou algo similar) e se estabiliza com uma deformação permanente, irreversível. O material fica esticado/deformado permanentemente, mesmo não estando mais sendo puxado em suas extremidades (F/A vai a zero, mas $\Delta L/L_0$ não) . O material registra permanentemente uma memória da dilatação que ele sofreu durante o processo.

A redução na tensão na parte final da curva (final da porção azul) reflete o processo de ruptura do tarugo, que começa a acontecer para grandes deformações. O estudo do conjunto das propriedades básicas mostradas nesse gráfico - elasticidade, plasticidade e ruptura/fratura - constitui o núcleo da ciência da resistência dos materiais.

No funcionamento de uma viga em um prédio, por exemplo, seria interessante que esta se mantivesse em seu regime elástico de deformações, pois somente nesse caso ela não acumularia deformações permanentes

com o passar do tempo, o que poderia levar a um crescente perigo de ruptura do material. De fato, nas aplicações em engenharia pressupõe-se sempre que o material vai estar submetido a tensões dentro do regime elástico, ou seja, sem o acúmulo de deformações permanentes. A chamada tensão segura/permitida, ou tensão de trabalho T_W , pode ser convencionada como sendo uma fração (1/2, por exemplo) da tensão máxima que define a transição do regime elástico para o regime plástico (ponto de ligação da curva verde na curva azul na Figura acima). Nessa região de tensões pode-se assumir também a validade da lei de Hooke.

No terceiro gráfico na Figura 7.9 mostramos dois comportamentos típicos diferentes para os materiais: os materiais dúcteis são aqueles que apresentam uma curva $F/A \times \Delta L/L_0$ longa, ou seja, eles se deformam muito antes de chegarem à ruptura, passando por um regime plástico longo. É uma característica de muitos metais, como o aço, que apresentam alta maleabilidade. Os materiais frágeis são aqueles que possuem uma curva $F/A \times \Delta L/L_0$ curta, ou seja, logo após uma pequena deformação eles se rompem, quase sem passar por um regime plástico de deformação. É o caso do vidro, do concreto, do giz e do ferro fundido. São materiais que não avisam que vão quebrar, simplesmente se quebram abruptamente. Um mesmo material pode apresentar um comportamento dúctil ou frágil, dependendo da temperatura. O aço, por exemplo, é normalmente dúctil, mas se torna frágil em baixas temperaturas ($T < 0^\circ\text{C}$).

Os gráficos da Figura 7.9 ilustram o que seria o comportamento de um material submetido a uma tensão de dilatação F/A constante no tempo. A ruptura/quebra do material se dá quando a tensão atinge um valor limite característico desse material. Nos casos em que o material fica submetido a uma tensão não constante, periódica, cíclica ou pulsante, o que é muito comum em máquinas, pode haver o acúmulo de danos microscópicos, com o passar do tempo, e o material pode se romper com um nível de tensão bem mais baixo que o representado na Figura 7.9. Esse processo de acúmulo de pequenos danos/fissuras e concomitante enfraquecimento do material pela aplicação repetitiva de tensões é chamado de fadiga (fadiga = cansaço). Se você tentar romper um arame de aço com uma tensão constante, aplicada com suas próprias mãos, é muito provável que você não consiga. Se, por outro lado, você dobrar e desdobrar esse arame sucessivamente em um mesmo ponto, a fadiga do material levará facilmente a uma ruptura do arame. Você vai vencê-lo pelo cansaço.

Nossa discussão anterior se restringiu aos casos em que a força de tensão está aplicada ortogonalmente a uma superfície do corpo, comprimindo-o ou dilatando-o, que são as situações mais simples. Mas, não é difícil imaginar um caso diferente, em que a força é aplicada paralelamente (tangencialmente) a essa superfície. Chamamos de tensão de cisalhamento (ou cortante) aquela resultante de uma força tangencial a uma dada superfície de um corpo. Esse é o tipo de tensão que levamos ao extremo quando cortamos algo com uma faca ou tesoura. Nesse extremo a deformação de cisalhamento é tão grande que produz a ruptura, ou seja, o corte, do material. Em geral podemos considerar então uma força oblíqua atuando na superfície de um corpo. A

componente da força ortogonal à superfície vai levar a uma compressão/dilatação (dependendo de seu sentido), enquanto que a componente tangencial da força vai levar ao que estamos chamando de cisalhamento.

Considere o exemplo de um pino cilíndrico de metal, que une duas placas metálicas, conforme ilustrado na Figura 7.10 que segue. Forças \vec{F} e $-\vec{F}$ puxam as placas, tentando separá-las, mas o pino impede (por hipótese) essa separação. Note que nessa situação o pino não está sendo comprimido ou dilatado, ele está sendo cortado pelas mesmas forças \vec{F} e $-\vec{F}$ que as placas (no equilíbrio) transmitem para ele.

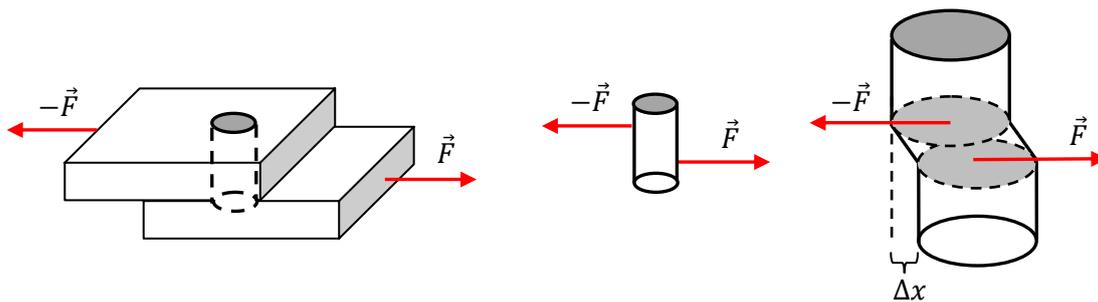


Figura 7.10: Ilustração da deformação de cisalhamento (ou simplesmente cisalhamento) em um pino cilíndrico que une duas placas que são puxadas em direções opostas. Na terceira figura ilustramos a deformação absoluta Δx sofrida pela porção do pino localizada entre as duas placas.

Para enunciar a lei de Hooke para o cisalhamento vamos nos concentrar na porção do pino que sofre a deformação, que está ampliada na Figura 7.11 abaixo. Nessa Figura mostramos as dimensões que estão envolvidas nas definições de tensão e deformação de cisalhamento. A lei de Hooke fica:

$$\frac{F}{A} = S \frac{\Delta x}{H}$$

sendo F o módulo da força de cisalhamento (ou cortante), A a área onde a força está aplicada (a área da seção transversal do pino no caso da Figura 7.10), Δx a deformação lateral do cilindro, H a altura do cilindro e S o módulo de elasticidade de cisalhamento, ou simplesmente módulo de cisalhamento.

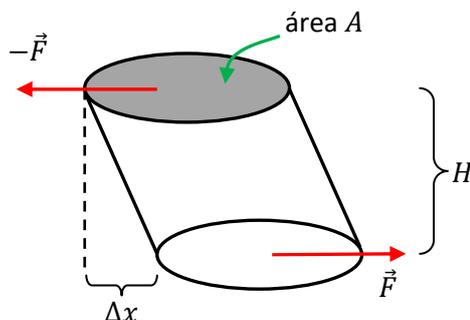


Figura 7.11: Um cilindro sofrendo cisalhamento devido à ação das forças \vec{F} e $-\vec{F}$ que atuam tangencialmente às suas faces superior e inferior.

O cobre, por exemplo, possui módulo de Young $Y \cong 11 \times 10^{10}$ Pa e módulo de cisalhamento $S \cong 4,4 \times 10^{10}$ Pa. Isso significa que o cobre é mais deformável por tensões de cisalhamento do que por tensões de compressão/dilatação. Essa é uma propriedade comum dos materiais ($S \cong Y/2$).

A Figura 7.12 que segue ilustra a ação das duas lâminas de uma tesoura tensionando e cortando uma folha de papel (em vermelho) por excesso de deformação de cisalhamento. As forças \vec{F} e $-\vec{F}$ são aplicadas ao longo das linhas de contato das lâminas com o papel, uma lâmina empurra para cima e outra empurra para baixo. A tensão não é simplesmente de compressão porque as lâminas não coincidem, uma lâmina desliza ao lado da outra. A porção do papel entre as duas lâminas sofre cisalhamento, se deforma e finalmente se rompe.

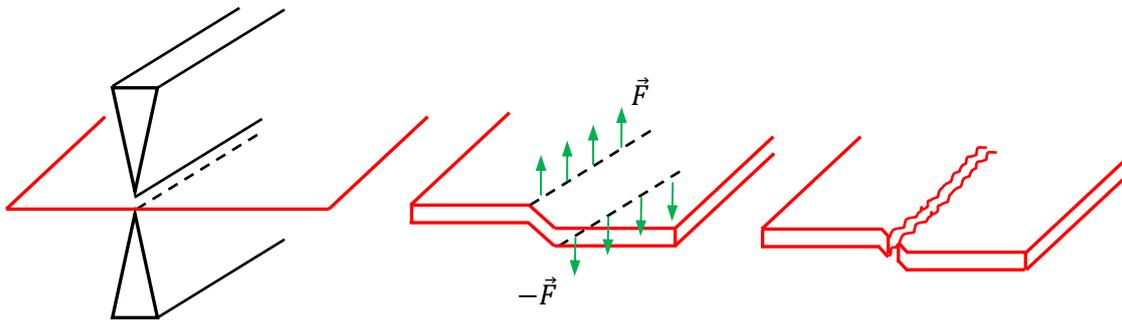


Figura 7.12: Ilustração da ação das lâminas de uma tesoura que cortam uma folha de papel (em vermelho) através do cisalhamento.

7.3 Exercícios resolvidos

ER 7.1) Uma haste metálica (módulo de Young Y) de comprimento inicial L_0 e área de seção transversal A , está impressada entre duas paredes rígidas (distanciadas de exatamente L_0) e tem, portanto, suas duas extremidades fixas. A temperatura da haste é aumentada de ΔT e ela tenta se dilatar, pressionando as paredes. Considere que o coeficiente de expansão térmica linear do metal é α .

Dados: L_0 , A , Y , α e ΔT .

Calcule a tensão na haste produzida pela expansão térmica.

A ideia é que se não houvesse as paredes, a haste se dilataria livremente de:

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T$$

Estando a haste impressada, essa dilatação não vai ocorrer e ela vai ficar submetida a uma tensão, devido às forças de compressão que as paredes fazem nela. Para calcular essa força, imaginamos primeiramente que a haste está livre e se expande de ΔL . Agora aplicamos forças de compressão de módulo F nas extremidades da haste, de tal forma que ela retorne ao seu comprimento original L_0 . Então, F deve ser a força de compressão que as paredes estão fazendo na haste para mantê-la com seu comprimento L_0 .

Pensando então na lei de Hooke para a compressão, partindo do comprimento inicial $L_0 + \Delta L$ e admitindo uma deformação de $\Delta L / (L_0 + \Delta L)$ obtemos:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L_0 + \Delta L} \cong Y \frac{\Delta L}{L_0} = Y \frac{L_0 \alpha \Delta T}{L_0} = Y \alpha \Delta T$$

Quanto mais rígido o metal (maior Y), mais termicamente expansível (maior α) e maior o incremento na temperatura (maior ΔT), mais tensionada fica a haste.

Esse tipo de “tensão térmica” pode ocorrer, por exemplo, em um cano de cobre que transporta água quente e que está (o cano) “cimentado” e fixo dentro de uma estrutura de concreto.

ER 7.2) Uma haste de comprimento inicial L_0 e área de seção transversal A , feita de um material de módulo de Young Y e densidade de massa ρ , é pendurada no teto e assume uma posição de equilíbrio vertical.

Dados: L_0 , A , Y , ρ e g .

Calcule a elongação total da haste.

A idéia está ilustrada na figura ao lado. A haste dilata devido à ação de seu próprio peso. Mas, cada pequena fatia da haste, como a fatia de comprimento dx mostrada e ampliada na figura, suporta um peso diferente. A fatia mais no topo da haste, por exemplo, sustenta todo o peso da haste, e deve dilatar muito.

A fatia de altura dx localizada na posição x da haste sustenta o peso da porção de haste que está para baixo dela, ou seja:

$$F(x) = \rho g A x$$

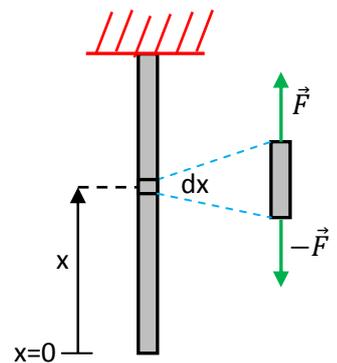
Estamos desprezando o peso da própria fatia, que estará sendo dilatada por forças opostas de magnitudes iguais a $F(x)$. Usando a lei de Hooke para a dilatação, obtemos que essa fatia vai dilatar de uma quantidade $dl(x)$ dada por:

$$\frac{F(x)}{A} = \rho g x = Y \frac{dl(x)}{dx}$$

Portanto:

$$dl(x) = \frac{\rho g}{Y} x dx$$

Vemos que a dilatação cresce com a posição x da fatia. Fatias mais altas suportam mais peso e se dilatam mais. Para encontrar a dilatação total da haste basta somar essas dilatações sobre todas as fatias, ou seja, integrar $dl(x)$ com x variando desde 0 até L_0 :



$$\Delta l = \int_0^{L_0} dl(x) = \int_0^{L_0} \frac{\rho g}{Y} x dx = \frac{\rho g}{Y} \frac{L_0^2}{2}$$

Como a massa M da haste é dada por $M = \rho L_0 A$, podemos escrever também:

$$\Delta l = \frac{Mg}{YA} \frac{L_0}{2}$$

Note que YA tem unidade de força e é geralmente uma força muito grande. O aço, por exemplo, possui $Y \cong 200$ GPa, ou seja, $Y \cong 2 \times 10^{11}$ N/m² e densidade $\rho \cong 7.800$ kg/m³. Um vergalhão de aço de comprimento $L_0 = 10$ m, e área de seção transversal $A = 3,14 \times 10^{-4}$ m² (raio de 1 cm) possui um peso $Mg = \rho g L_0 A \cong 240$ N, enquanto que $YA \cong 6,28 \times 10^7$ N. Portanto, a razão entre as forças fica $Mg/YA \cong 3,82 \times 10^{-6}$. Esse vergalhão vai dilatar de:

$$\Delta l \cong 1,91 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Resultados como esse mostram que a hipótese de corpo rígido não é nada muito fora da realidade, para corpos feitos de uma grande classe de materiais.

Esse resultado se aplica também para uma haste apoiada no chão, em equilíbrio na posição vertical. A idéia é a mesma, basta trocar a dilatação pela compressão.

ER 7.3) Uma placa de metal triangular de espessura δ (ver Figura) está pendurada na vertical, com a base fixa no teto e o vértice sendo puxado para baixo por uma força vertical de módulo F . A base da placa tem comprimento 2Δ (área = $A_0 = 2\Delta \delta$). A altura da placa é H e o metal de que ela é feita tem densidade de massa ρ .

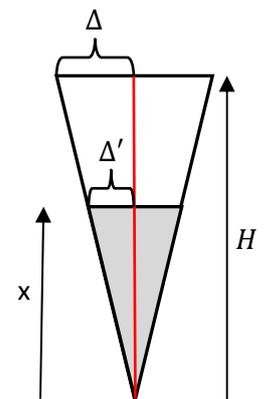
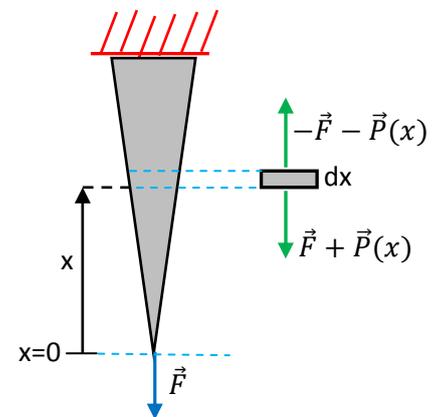
Dados: $A_0 = 2\Delta\delta$, Δ , δ , F , H , ρ e g .

a) Calcule a tensão na placa em função da variável x definida na Figura.

A idéia está ilustrada na Figura ao lado. A placa vai dilatar devido à ação de seu próprio peso e da força \vec{F} . Cada pequena fatia da haste, como a fatia de comprimento dx mostrada na Figura, suporta um peso diferente, o peso do pedaço de placa abaixo dele, e ainda a força \vec{F} .

Seja $P(x)$ o peso da porção triangular de placa abaixo da posição x na placa, conforme a Figura ao lado (porção cinza). Vemos que:

$$P(x) = \rho g V(x) = \rho g \frac{1}{2} (2\Delta'x) \delta$$



Sendo $V(x) = 1/2 (2\Delta'x)\delta$ o volume da porção triangular de placa em cinza. Sabendo que:

$$\frac{\Delta}{H} = \frac{\Delta'}{x}$$

obtemos finalmente para o peso “pendurado” abaixo da altura x :

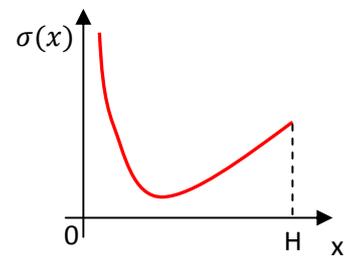
$$P(x) = \frac{1}{2} \rho g \frac{A_0}{H} x^2$$

Portanto, a tensão a que um segmento de placa de área $2\Delta'\delta$ na altura x está submetido é:

$$\frac{F + P(x)}{2\Delta'\delta} = \frac{F + (1/2)\rho g (A_0/H) x^2}{2(\Delta/H)x\delta} = \frac{FH}{A_0 x} + \frac{1}{2}\rho g x$$

b) Esboce um gráfico da tensão calculada acima, que vamos chamar de $\sigma(x)$, em função de x .

O gráfico fica como mostrado ao lado. Considere que $0 \leq x \leq H$. Note que $\sigma(x)$ diverge na ponta da placa, porque ela é infinitamente fina (termo $1/x$), o que não deve ocorrer na prática, para uma placa real. Em seguida $\sigma(x)$ decai e depois cresce novamente devido ao termo linear em x . A tensão é máxima local na face superior da placa ($x=H$), de área A_0 , onde ela vale:



$$\sigma_{MAX} = \sigma(x = H) = \frac{F}{A_0} + \frac{1}{2}\rho g H = \frac{F + P}{A_0}$$

sendo P o peso da placa.

c) Calcule o valor de x^* para o qual a tensão $\sigma(x)$ é mínima. Nessa altura a deformação da placa será mínima (pressupõe-se que $x^* < H$, mas isso só é verdade se valer $F < P$).

Derivando e igualando a zero obtemos a equação:

$$\frac{d}{dx} \sigma(x) = -\frac{FH}{A_0 x^2} + \frac{1}{2}\rho g = 0$$

Portanto:

$$x^* = \sqrt{\frac{2FH}{A_0\rho g}}$$

Note que para valer $x^* < H$ devemos ter:

$$\sqrt{\frac{2FH}{A_0\rho g}} < H \Rightarrow \frac{2F}{A_0\rho g} < H \Rightarrow F < \frac{1}{2}\rho g A_0 H \Rightarrow F < P$$

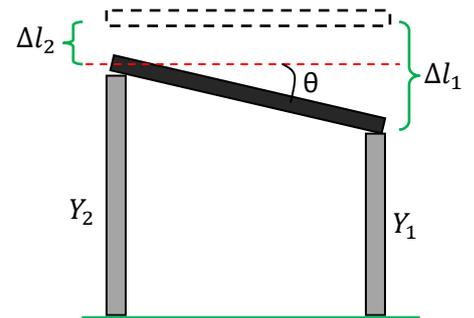
ER 7.4) Uma haste rígida de comprimento L e massa M é apoiada em duas hastes verticais deformáveis, ambas apoiadas no piso horizontal. As hastes verticais são feitas de materiais diferentes, mas de mesmo comprimento inicial H_0 e mesma área de seção transversal A . Uma haste vertical é feita de um material com

módulo de Young Y_1 enquanto que a outra é feita de um material com módulo de Young Y_2 . Vamos supor, apenas para ilustrar, que $Y_1 < Y_2$, ou seja, que a haste 2 se deforme menos que a haste 1. Vamos supor também que o peso da haste rígida seja muito maior que os pesos das hastes verticais, de tal forma que vamos desprezar as deformações dessas hastes devido à ação de seus próprios pesos (que foi calculada no exercício anterior e que é, por hipótese, desprezível nesse caso).

Dados: L, M, H_0, A, Y_1, Y_2 e g .

Calcule a inclinação da haste rígida em relação à horizontal.

A figura ao lado ilustra a ideia de que, devido às deformações diferentes das duas hastes verticais, a haste rígida vai ficar inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. O retângulo tracejado seria a posição inicial da haste rígida, depositada quando as hastes verticais possuíam comprimentos iguais. Sob ação do peso da haste rígida, a haste 1 contrai de Δl_1 enquanto que a haste 2 contrai de uma quantidade menor Δl_2 , porque ela é mais dura. Da figura fica claro que:



$$\text{sen}(\theta) = \frac{|\Delta l_1| - |\Delta l_2|}{L}$$

Note que, analisando o equilíbrio da haste rígida, na posição inclinada, concluímos que o peso dessa haste se distribuirá igualmente entre as duas hastes verticais, ou seja, elas estarão cada uma comprimida por forças de magnitude $Mg/2$. Da lei de Hooke para a compressão, obtemos para a haste i ($i=1,2$):

$$\frac{F}{A} = Y \frac{|\Delta L|}{L_0} \Rightarrow \frac{M g}{2 A} = Y_i \frac{|\Delta L_i|}{H_0}$$

Portanto:

$$|\Delta L_i| = \frac{M g}{Y_i} \frac{H_0}{2 A}$$

Concluindo, a inclinação da haste rígida é:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{M g H_0}{2 A L} \left(\frac{1}{Y_1} - \frac{1}{Y_2} \right)$$

Note que se $Y_1 = Y_2$, a haste rígida permaneceria na horizontal ($\theta = 0$), apenas em uma posição mais baixa, devido às compressões iguais das hastes verticais. Para duas hastes verticais, uma de alumínio e outra de aço, teríamos: $Y_2 \cong 2 \times 10^{11}$ Pa (aço) e $Y_1 \cong 6,9 \times 10^{10}$ Pa (alumínio). Portanto:

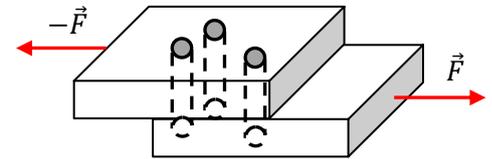
$$\frac{1}{Y_1} - \frac{1}{Y_2} \cong 9,5 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$$

Se essas hastes tiverem o comprimento inicial $H_0 = 3$ m e área de seção transversal $A = 3,14 \times 10^{-4}$ m² (raio de 1 cm) e a haste rígida tiver massa $M = 100$ kg e comprimento $L = 10$ m, obtemos:

$$\text{sen}(\theta) \cong 4,44 \times 10^{-6} \Rightarrow \theta \cong 2,5 \times 10^{-4} \text{ graus}$$

Uma inclinação muito pequena.

ER 7.5) Duas placas são unidas por N pinos cilíndricos de área de seção transversal A feitos de um material com módulo de cisalhamento S . As placas são puxadas conforme a figura ao lado (que ilustra o caso $N=3$) por forças de módulo F . Suponha que cada pino suporte uma deformação máxima de cisalhamento $d_c^{(MAX)}$, antes de quebrar. Calcule o número mínimo N_{MIN} de pinos para que não ocorra a quebra de nenhum pino.



Dados: A , S , F e $d_c^{(MAX)}$.

A idéia é que a força F vai se dividir igualmente entre os pinos e que, portanto, a tensão de cisalhamento em um pino será:

$$\frac{F/N}{A}$$

Da lei de Hooke, a deformação de um pino será:

$$d_c = \frac{\Delta x}{H} = \frac{1}{S} \frac{F/N}{A} = \left(\frac{F}{SA}\right) \frac{1}{N}$$

Note que na equação acima a razão $\frac{F}{SA}$ é uma constante. Vemos que a deformação de cisalhamento em um pino diminui com o aumento do número de pinos:

$$d_c = \left(\frac{F}{SA}\right) \frac{1}{N}$$

As condições do problema pedem que:

$$d_c < d_c^{(MAX)}$$

para que nenhum pino quebre. Portanto:

$$\left(\frac{F}{SA}\right) \frac{1}{N} < d_c^{(MAX)} \Rightarrow N > \frac{F/SA}{d_c^{(MAX)}}$$

Concluindo:

$$N_{MIN} = \frac{F/SA}{d_c^{(MAX)}} = \frac{F}{SA d_c^{(MAX)}}$$

Notamos então que o número mínimo de pinos aumenta se F aumenta e diminui se o material dos pinos é mais forte (maior S , material menos deformável) e/ou se a área da seção transversal dos pinos é maior (maior A) e/ou se a deformação máxima suportável em cada pino é maior (maior $d_C^{(MAX)}$).

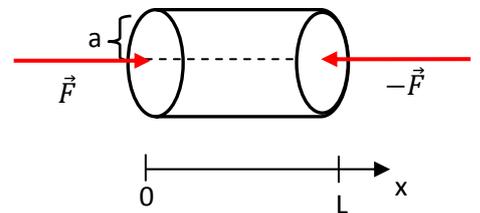
7.4 Exercícios propostos

EP 7.1) Um cabo com comprimento original de 2 m e raio da seção transversal igual a 0,2 cm, feito de um tipo de aço com $Y=200$ GPa, sofre uma tensão de dilatação e alonga 1 mm. Calcule o módulo (em Newtons) da força que tensiona o cabo.

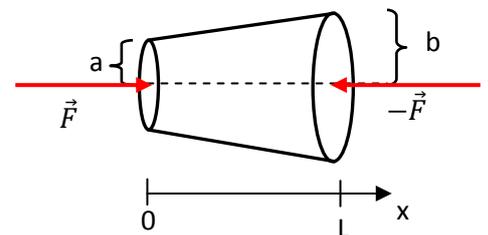
EP 7.2) Um aço (A) tem $Y=200$ GPa e densidade 7.800 kg/m^3 e uma madeira (M) tem $Y=10$ GPa e densidade 500 kg/m^3 . Considere dois postes cilíndricos iguais feitos desses materiais. Calcule a razão $\Delta l_A/\Delta l_M$ entre as compressões desses postes devido à ação de seus próprios pesos.

EP 7.3) Um aço (A) tem $Y=200$ GPa e densidade 7.800 kg/m^3 e uma madeira (M) tem $Y=10$ GPa e densidade 500 kg/m^3 . Considere dois postes cilíndricos iguais feitos desses materiais. a) Calcule a razão t_A/t_M entre as tensões nas bases desses postes devido à ação de seus próprios pesos. b) Considere agora que os postes podem ter áreas de seção transversais diferentes. Calcule a razão entre essas áreas A_A/A_M para que os dois postes tenham a mesma deformação na base.

EP 7.4) Um poste de forma cilíndrica está submetido a uma compressão, conforme a figura ao lado. Y é o módulo de Young do material do poste. a) Qual é a tensão F/A na posição x do poste? b) Esboce um gráfico da tensão em função de x . c) Calcule a deformação de uma fatia de poste de espessura dx localizada na posição x . d) Integrando (c), calcule a deformação $|\Delta L|/L$ do poste.



EP 7.5) Um poste de forma cônica está submetido a uma compressão, conforme a figura ao lado. Y é o módulo de Young do material do poste. a) Calcule a tensão F/A na posição x do poste. b) Esboce um gráfico da tensão em função de x . c) Calcule a deformação de uma fatia de poste de espessura dx localizada na posição x . d) Integrando (c), calcule a deformação $|\Delta L|/L$ do poste.



EP 7.6) Considere uma coluna vertical que deve sustentar um peso P em seu topo. A coluna possui altura L e é feita de material de densidade de massa ρ . Vamos supor que a tensão de trabalho é T_W , ou seja, a tensão em uma fatia qualquer da coluna não pode ultrapassar T_W .

a) Suponha uma coluna cilíndrica, cuja tensão na base é T_W . Calcule o volume dessa coluna.

b) Suponha uma coluna de tensão uniforme T_W , conforme discutido no texto ($T_W = P/A(h = L)$). Através de uma integral, calcule o volume dessa coluna.

c) Para mostrar de uma forma mais simples que a coluna curva gasta menos material que a coluna cilíndrica, mostre que no caso $T_W \gg \rho g L$, o resultado de (a) se torna:

$$V_{cil} = \frac{PL}{T_W} \left(1 + \frac{\rho g L}{T_W} \right)$$

enquanto que o resultado de (b) se torna:

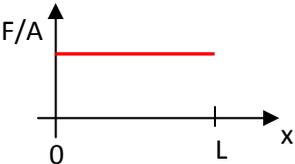
$$V_{curv} = \frac{PL}{T_W}$$

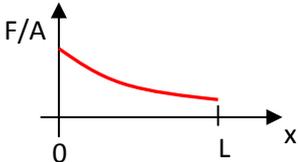
7.5 Respostas dos exercícios propostos

EP 7.1) $\cong 1.257 \text{ N}$

EP 7.2) 0,78

EP 7.3) a) 15,6 b) 0,78

EP 7.4) a) $\frac{F}{\pi a^2}$ b)  c) $\frac{\delta x}{dx} = \frac{F}{Y \pi a^2}$ d) $\frac{F}{Y \pi a^2}$

EP 7.5) a) $\frac{F}{\pi(a+(b-a)x/L)^2}$ b)  c) $\frac{\delta x}{dx} = \frac{F}{Y \pi(a+(b-a)x/L)^2}$ d) $\frac{F}{Y \pi ab}$

EP 7.6) a) $\frac{PL}{T_W - \rho g L}$ b) $\frac{P}{\rho g} \left(e^{\frac{\rho g L}{T_W}} - 1 \right)$ c) faça expansões dos volumes em séries de potências da razão $\frac{\rho g L}{T_W}$.

8

Gravitação de Newton



8.1 Introdução

Se você olhar para o céu limpo à noite vai ver vários pontos luminosos cintilantes, sendo a grande maioria estrelas da nossa galáxia, a Via Láctea. Se você olhar na noite seguinte vai ver o mesmo padrão de estrelas, que estão praticamente fixas, tendo em vista suas distâncias incríveis da Terra. Esse padrão de estrelas se move muito pouco e lentamente no céu porque a Terra se move, girando em torno de si mesma e em torno do Sol. Cada estrela é um sol. O Sol propriamente dito é a estrela mais próxima da Terra. Você poderá observar também, além da Lua, pontos luminosos que se deslocam no céu: hoje um desses pontos está próximo da estrela **A**, mas, daqui a um mês, ele estará próximo de outra estrela **B**. Esses são os planetas do nosso sistema solar, que os gregos batizaram de “estrelas errantes”.

O interesse em entender o movimento desses planetas e dos demais corpos celestes vem desde a antiguidade. Uma das razões para isso, e que perdura até hoje, é a crença de que o simples movimento dos planetas é capaz de afetar o cotidiano (sorte/azar) das pessoas aqui na Terra (astrologia). Mas, a astronomia nasceu por motivos mais nobres, como, por exemplo, um meio de localização/posicionamento global (o astrolábio náutico foi um precursor do aparelho moderno de GPS) e a previsão do início e fim das estações do ano. Os egípcios, por exemplo, usavam a posição da estrela Sírio (que é a estrela mais brilhante no céu) para marcar o início da estação de cheia do rio Nilo.

Na tentativa de entender o que acontecia no céu foram criados modelos. Alguns modelos apelavam para motivações estéticas e místicas, como a idéia de Ptolomeu de que a Terra estava estática no centro do universo e de que o Sol, a Lua, as estrelas e planetas estavam fixos em esferas que giravam em torno da Terra. Trata-se de um sistema geocêntrico com órbitas circulares para os planetas. Uma dificuldade desse modelo era explicar o movimento retrógrado de alguns planetas. Alguns planetas invertem seu sentido de movimento: por um certo período de tempo eles circulam em um dado sentido no céu, mas às vezes eles voltam no sentido contrário e depois começam a se mover novamente no sentido original. Para dar conta disso, Ptolomeu teve

que imaginar que os planetas giravam em círculos que rolavam em volta de outros círculos com centro na Terra. Após um salto no tempo evoluiu-se para o modelo de Copérnico, em que o Sol estava no centro das órbitas circulares e a Terra era apenas mais um planeta girando em torno do Sol. Trata-se de um modelo heliocêntrico. Uma das dificuldades na aceitação desse modelo estava na afirmação que a Terra se move, o que parecia absurdo. Em princípio, nós - os passageiros na Terra - sentiríamos esse movimento. Veríamos também as estrelas se moverem rapidamente no céu, a não ser que elas estivessem incrivelmente distantes e fossem incrivelmente brilhantes, o que acontece de fato, mas que parecia absurdo na época. A substituição da Terra pelo Sol como sendo o centro do universo também desafiava os dogmas religiosos de então (cerca de 1600). Galileu Galilei quase foi condenado à prisão perpétua pela heresia de defender o heliocentrismo e afirmar, como consequência, que a Terra se movia. Galileu foi absolvido em 1632. Graças ao acesso a dados numéricos de muitos anos de observação dos movimentos dos planetas, Kepler conseguiu formular e estabelecer suas leis para o movimento dos planetas. A primeira lei afirmava que, o que se observa de fato é que as órbitas dos planetas são elipses com o Sol em um dos focos e não círculos. Ficava então provada experimentalmente a hipótese do heliocentrismo. Além disso, as órbitas perfeitas circulares devem dar lugar às órbitas elípticas achatadas.

Coube a Isaac Newton propor uma teoria/explicação que fosse compatível com o conhecimento estabelecido que se tinha na época sobre os movimentos dos planetas, basicamente as três leis de Kepler. Sua hipótese básica deveria ser a de que nos planetas age uma força apontando para o Sol, cuja magnitude decai com o quadrado da distância (similar à lei de Coulomb para a força atrativa/repulsiva entre cargas elétricas, que é posterior à lei de Newton) uma idéia que já circulava e parecia razoável na época. Essa teoria é a gravitação de Newton que vamos discutir aqui. Podemos dizer que a teoria de Newton unificou os fenômenos celestes com os fenômenos terrestres, ao estabelecer que a causa da queda de uma maçã é a mesma causa da órbita da Lua em torno da Terra ou de um planeta em torno do Sol. Para mostrar a validade de sua teoria, Newton teve que desenvolver suas próprias ferramentas: a mecânica clássica, que estamos estudando aqui desde o capítulo 1, e o cálculo infinitesimal e integral. A mecânica e a teoria de gravitação de Newton foram apresentadas ao mundo no livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, publicado em 1687. A teoria da gravitação de Newton é extremamente precisa, capaz de prever as posições dos planetas com vários anos de antecedência. Uma prova dessa precisão foi a previsão da existência do planeta Netuno, feita a partir da comparação entre as órbitas calculada e observada do planeta Urano. Mais recentemente, podemos considerar que a chegada do homem à Lua em 1969 seria impossível sem a grande precisão da teoria de Newton no cálculo de órbitas.

8.2 A lei da gravitação universal

Newton começa sua teoria da gravitação afirmando que há uma força atrativa entre todos os corpos: a força da gravidade (no latim a palavra *gravitas* significa pesado, a força da gravidade seria então a força ligada ao peso). A idéia de que essa força deveria decair com o quadrado da distância já era discutida na época de Newton, mas apenas como uma hipótese plausível. Newton adotou esse comportamento para sua lei de força. A universalidade da queda livre (independência de \vec{g} com a massa do corpo em queda livre) já havia sido estabelecida por Galileu, e Newton supôs então que a força da gravidade deve ser proporcional à massa do corpo que sofre a força (daí, como $\vec{F} = m \vec{a}$ e \vec{F} é proporcional à massa m do corpo em queda, \vec{a} se torna independente de m para um corpo em queda livre, para o qual $\vec{a} = \vec{g}$). Tendo em vista a terceira lei de Newton (ação/reação), a força deve ser proporcional também à massa do corpo que faz a força, vindo daí o fato de que a força da gravidade deve ser proporcional ao produto das duas massas envolvidas na interação.

Para tornar essa idéia mais precisa, considere duas partículas, uma de massa m_1 e outra de massa m_2 , distanciadas uma da outra de uma distância r , conforme a Figura 8.1. A lei da gravitação de Newton diz que essas duas partículas se atraem mutuamente com forças dadas por:

$$\vec{F}_{2/1} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{x}$$

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{x}$$

Note que $\vec{F}_{2/1}$ e $\vec{F}_{1/2}$ formam um par ação-reação.

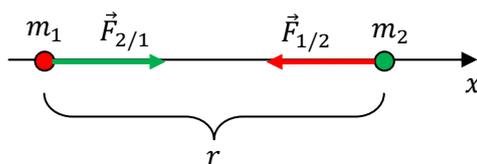


Figura 8.1: Duas partículas se atraindo mutuamente pelo efeito da gravidade entre elas. Se partirem do repouso, elas vão se aproximar até se unirem no centro de massa do sistema de duas partículas.

A constante de proporcionalidade G é chamada constante de gravitação universal, cujo valor numérico não é fixado pela teoria, ele deve ser determinado experimentalmente. Os dados experimentais sobre os movimentos de planetas ou da Lua não ajudam na determinação do valor de G , pois não conhecemos a priori as massas desses corpos. Essas massas só poderão ser determinadas depois, já com o conhecimento prévio do valor de G . Assim sendo, mede-se G com experimentos em laboratório que determinam a força da gravidade entre pequenas bolinhas de metal, com as massas e distância entre elas conhecidas (por exemplo, a balança de torção de Cavendish). Trata-se de um experimento difícil porque a força da gravidade nesses casos em que

os corpos são pequenos é muito fraca e difícil de medir. É o que evidencia o valor minúsculo determinado para a constante G : $G \cong 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

De fato, a aplicação da expressão de força acima não é evidente para bolinhas de metal, pois essa expressão só se aplica a duas partículas, caso em que a distância r e a linha de ação (eixo x) estão bem definidas. Se você se propuser a calcular a força da gravidade entre uma cadeira e uma mesa, por exemplo, vai perceber a dificuldade/ambigüidade nas definições de r e do eixo x . Note que o conceito de centro de gravidade (CG), ou a idéia de se substituir o corpo por uma partícula em algum ponto no espaço, não tem utilidade geral aqui, pois a posição do CG de um corpo só é facilmente determinada se no interior desse corpo a aceleração da gravidade, ou seja, o campo gravitacional, for uniforme. Nesse caso já mostramos que o CG está no mesmo lugar do centro de massa (CM) do corpo. O campo de gravidade (campo de forças gravitacionais) que uma cadeira ou uma mesa geram em suas vizinhanças está longe de ser uniforme. Em casos assim devemos usar o princípio da superposição. Para calcular a força gravitacional que a cadeira faz na mesa, por exemplo, pensamos em cada partícula i (átomo ou próton, etc.) que compõe a cadeira fazendo força em cada partícula j que compõe a mesa e somamos sobre todas as partículas da cadeira e da mesa. Matematicamente:

$$\vec{F}_{cad/mesa} = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_m} G \frac{m_i m_j}{d_{ij}^2} \hat{x}_{ij}$$

sendo N_c o número de partículas na cadeira, N_m o número de partículas na mesa, d_{ij} a distância entre a partícula i e a partícula j e \hat{x}_{ij} um vetor unitário ao longo da linha que une as partículas i e j , apontando para a partícula i (para a cadeira). Na prática, as partículas estão tão densamente distribuídas no espaço (N_c e $N_m \cong 10^{24}$) que podemos substituir as somas por integrais de volume. Obviamente o cálculo dessas integrais é, em geral, uma tarefa praticamente impossível. Impossível e inútil, pois não vamos ganhar muita coisa resolvendo essas integrais. Fato é que a força $\vec{F}_{cad/mesa}$ é desprezível e não vemos na prática nenhum efeito dela. Mas ela está lá. Se levássemos a cadeira e a mesa para um laboratório, poderíamos mostrar a existência da força $\vec{F}_{cad/mesa}$ usando, por exemplo, uma balança de torção. Mas não ganharíamos muito com isso também. A força da gravidade só é importante mesmo quando pelo menos uma das massas envolvidas na interação gravitacional é gigantesca, para dar conta do fator 10^{-11} da constante G . Por exemplo, o peso de uma cadeira é facilmente observado. Ele é fruto da interação gravitacional da cadeira com a Terra, que possui uma massa da ordem de 10^{25} kg.

Mas, enfim, nada nos impede de estimar a força da gravidade entre uma cadeira e uma mesa. Digamos que a cadeira tenha massa $m_c = 3$ kg e que a mesa tenha massa $m_m = 10$ kg. A distância r entre esses dois corpos é difícil de ser definida, mas digamos que adotemos o valor $r=1$ m. Então (em newtons):

$$F_{cad/ mesa} \cong G \frac{m_c m_m}{r^2} \cong 2 \times 10^{-9}$$

Quanto à direção de $\vec{F}_{cad/ mesa}$ não nos arriscaremos a determiná-la, mas deve ser algo que aponta mais ou menos do meio da mesa para o meio da cadeira, seja lá o que for isso. Fato é que comparando o valor de $F_{cad/ mesa}$ com o peso da cadeira ($\cong 30$ N) e o peso da mesa ($\cong 100$ N) vemos que se trata de uma força desprezível. Se essa força atuasse sozinha na mesa, ou seja, se não houvesse atrito, peso e nem mais nenhuma força na mesa, a aceleração que a mesa adquiriria seria:

$$a_{mesa} = \frac{F_{cad/ mesa}}{m_m} \cong 2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$$

Se a mesa partisse do repouso e ficasse submetida constantemente a essa aceleração, ela demoraria cerca de 160 anos para atingir a velocidade de 1 m/s.

Os problemas que pretendemos abordar aqui envolvem basicamente a interação gravitacional entre corpos astronômicos (de massas muito grandes) de formas aproximadamente esféricas, como estrelas, planetas e luas, e entre esses corpos astronômicos e outros corpos pequenos (de massas pequenas), como satélites artificiais, projéteis e pessoas. É interessante registrar que a emergência natural da forma esférica em corpos de dimensões astronômicas já é, ela mesma, uma consequência da simetria esférica da força da gravidade, que não privilegia nenhuma direção no espaço. Para calcular a força da gravidade entre esses corpos, os corpos pequenos serão tratados como se fossem partículas localizadas em seus centros de massa (já que os campos gravitacionais dos corpos grandes são basicamente uniformes no interior dos corpos pequenos). Já vimos essa ideia em um capítulo anterior: se a gravidade é uniforme dentro de um corpo, ou seja, se $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g} = \text{constante}$ dentro desse corpo, então CG=CM (o ponto de aplicação do peso está no CM). Quanto aos objetos esféricos, pequenos ou grandes, não precisaremos fazer nenhuma aproximação. Trataremos esses corpos também como partículas, graças ao teorema das cascas, que enunciaremos a seguir.

O teorema das cascas afirma que uma casca esférica de massa M (algo parecido com uma bola de pingue-pongue, que é uma casca esférica de plástico com uma espessura bem pequena. Uma casca esférica mesmo é um objeto ideal, de espessura nula) atrai uma partícula de massa m que está fora dela como se fosse ela mesma uma partícula de massa M localizada em seu centro. O teorema afirma também que uma casca esférica de massa M não exerce nenhuma força gravitacional em uma partícula de massa m que está dentro dela. A ideia está ilustrada na Figura 8.2.

O fato da casca não exercer força sobre uma partícula dentro dela é surpreendente e só vale para forças que decaem com o quadrado da distância, como no caso da gravidade (vale também para a força eletrostática entre cargas elétricas). Não nos preocuparemos em demonstrar esse teorema aqui, pois sua

demonstração consiste basicamente na solução de integrais. O importante é entender seu significado e suas conseqüências.

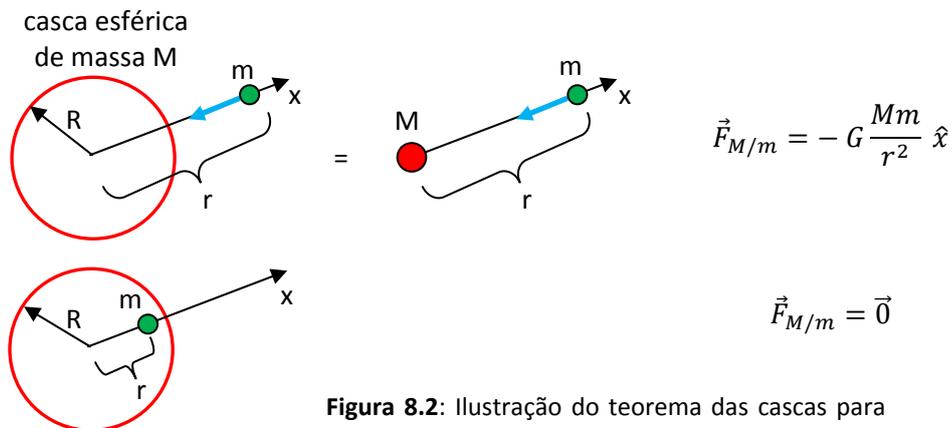


Figura 8.2: Ilustração do teorema das cascas para uma casca de massa M e raio R. Não confunda a casca esférica (algo como uma bola de pingue-pongue) com um círculo.

Podemos estender esse resultado para uma esfera maciça (algo como uma bola de sinuca), que pode ser pensada como uma sucessão de infinitas cascas esféricas concêntricas. A Figura 8.3 abaixo ilustra o resultado do teorema das cascas aplicado para esferas maciças.

A idéia é que uma esfera maciça de massa M atrai uma partícula de massa m que está fora dela ($r > R$) como se fosse, ela mesma, uma partícula de massa M localizada em seu centro. Para uma partícula dentro da esfera maciça, em um raio $r < R$, como um tatu enfiado em um buraco na terra, por exemplo, somente a esfera maciça com raio r atrai a partícula (as cascas externas, com raios $> r$, não atraem a partícula). Essa esfera de raio r contém uma massa $M(r)$ que é uma função crescente do raio r.

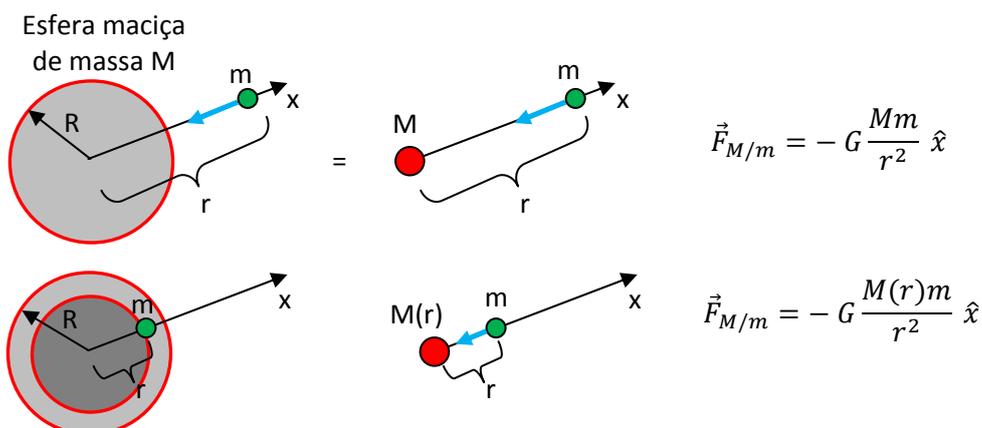


Figura 8.3: Ilustração da extensão do teorema das cascas para uma esfera maciça (algo como uma bola de sinuca) de massa M e raio R.

Para uma esfera maciça de densidade de massa ρ uniforme, podemos escrever a densidade de massa ρ e a massa $M(r)$ na forma:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow M(r) = M \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

Substituindo esse $M(r)$ na expressão de $\vec{F}_{M/m}$ (para uma partícula dentro da esfera) obtemos:

$$\vec{F}_{M/m} = -G \frac{M(r)m}{r^2} \hat{x} = -GM \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{m}{r^2} \hat{x} = -G \frac{M m}{R^3} r \hat{x}$$

Vemos que a força gravitacional que a esfera maciça faz em uma partícula localizada dentro dela cresce linearmente com o raio r (o raio da partícula) e que em seu centro ($r=0$) essa força é nula, que é o resultado que poderíamos esperar tendo em vista a simetria dessa situação.

O resultado desse teorema pode ser estendido para duas esferas: duas esferas maciças de massa M_1 e M_2 se atraem mutuamente como se elas fossem duas partículas, uma de massa M_1 localizada no centro da esfera 1 e outra de massa M_2 localizada no centro da esfera 2. Essa afirmação é equivalente a dizer que o CG de um corpo esférico A mergulhado na gravidade de um outro corpo esférico B está no centro geométrico desse corpo A (que coincide com o CM do corpo A). O teorema das cascas só é válido para esferas maciças com densidades de massa uniformes ou de simetria esférica, ou seja, de densidades de massa $\rho(r)$, que dependem apenas do raio r em relação ao centro da esfera maciça. Para um objeto esférico assimétrico, como, por exemplo, uma esfera maciça composta de um hemisfério de ferro colado a um hemisfério de alumínio, o teorema não se aplica. Isso porque esses corpos não podem ser pensados como uma sucessão de cascas de massas uniformes (um hemisfério teria mais massa do que o outro).

Portanto, na aproximação em que o Sol e a Terra são esferas maciças, de densidades de massa com simetria esférica ($\rho(r)$), o teorema das cascas diz que a força de atração gravitacional que o Sol exerce sobre a Terra é dada por:

$$\vec{F}_{S/T} = G \frac{M_S M_T}{r^2} \hat{x}$$

sendo M_S a massa do Sol, M_T a massa da Terra, r a distância entre o centro do Sol e o centro da Terra e \hat{x} um vetor unitário ao longo da reta que passa pelo centro do Sol e o centro da Terra, apontando para o Sol.

Analogamente, a força que a Terra faz em um satélite artificial é (considerando que a Terra é uma esfera maciça e o satélite artificial é uma partícula localizada no CG/CM dele):

$$\vec{F}_{T/sat} = G \frac{M_T m}{r^2} \hat{x}$$

sendo M_T a massa da Terra, m a massa do satélite, r a distância entre o centro da Terra e o centro de massa do satélite e \hat{x} um vetor unitário ao longo da reta que passa pelo centro da Terra e o CM do satélite, apontando para a Terra.

Da mesma forma, a força que a Terra faz em uma maçã pendurada no pé é (considerando que a Terra é uma esfera maciça e a maçã é uma partícula localizada no CG/CM dela):

$$\vec{F}_{T/maçã} = G \frac{M_T m}{r^2} \hat{x}$$

sendo M_T a massa da Terra, m a massa da maçã, r a distância entre o centro da Terra e o centro de massa da maçã e \hat{x} um vetor unitário ao longo da reta que passa pelo centro da Terra e o CM da maçã, apontando para a Terra. Essa força é o que chamamos de peso da maçã.

Esses três exemplos (Terra/Sol, Terra/satélite e Terra/maçã) ilustram a universalidade da lei de gravitação de Newton.

Para mostrar explicitamente que a lei de gravitação leva a uma órbita elíptica dos planetas em torno do Sol e às outras duas leis de Kepler, devemos resolver a equação de movimento (segunda lei de Newton + lei da gravitação) de um planeta P na gravidade do Sol:

$$\vec{F}_{S/P}(t) = -G \frac{M_S M_P}{r(t)^2} \hat{r}(t) = M_P \frac{d^2}{dt^2} r(t) \hat{r}(t)$$

sendo M_P a massa do planeta e $\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t)$ a posição do planeta em relação ao centro do Sol (suposto estático). Note que o vetor unitário radial $\hat{r}(t)$ é comumente definido apontando do centro do Sol (a origem) para o centro do planeta (daí o sinal negativo na força). Esse vetor muda de direção à medida que o planeta se move e por isso é uma função do tempo. O mesmo vale para o raio $r(t)$: a distância entre os centros do planeta e do Sol varia com o tempo. A massa M_P está dos dois lados da equação e vai desaparecer, significando que a equação de movimento é a mesma para qualquer planeta. O que vai diferenciar o movimento de um planeta do outro são as condições iniciais (posição e velocidade iniciais) do movimento, que foram, em princípio, definidas arbitrariamente na época em que o sistema solar se formou a partir da condensação de uma nuvem de gás.

De fato, a equação:

$$-G \frac{M_S}{r(t)^2} \hat{r}(t) = \frac{d^2}{dt^2} r(t) \hat{r}(t)$$

em que $\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t)$ é a posição do corpo em relação ao centro do Sol, descreve o movimento de qualquer corpo que gravita em torno do Sol, seja ele um planeta, um asteroide, um cometa ou um satélite artificial. A diferença está nas condições iniciais do movimento. Ao escrever essa equação, que é a segunda lei de Newton

para o corpo que orbita o Sol, estamos assumindo que o (centro do) Sol, que é o referencial/origem onde nasce o vetor $\vec{r}(t)$, é um referencial inercial, ou seja, que o centro do Sol está em repouso ou em MRU (não está acelerado). Essa condição não é estritamente verdadeira, mas, tendo em vista que a massa do Sol é muito maior, por hipótese, que a massa do corpo em órbita em torno do Sol, a aceleração do centro do Sol (em torno do CM do sistema corpo+Sol) pode ser desprezada sem conseqüências mais sérias. No caso dos planetas, asteróides e cometas a condição de que a massa do Sol é muito maior que a massa desses corpos é claramente verdadeira. Júpiter, que é o planeta mais massivo do sistema solar, tem uma massa próxima de um milésimo da massa do Sol.

Da mesma forma, a equação:

$$-G \frac{M_T}{r(t)^2} \hat{r}(t) = \frac{d^2}{dt^2} r(t) \hat{r}(t)$$

em que $\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t)$ é a posição do corpo em relação ao centro da Terra (suposta estática ou em MRU), descreve o movimento de qualquer corpo em queda livre sob ação da gravidade da Terra, seja ele a Lua, um satélite artificial, ou uma maçã. Essa foi a unificação que herdamos de Newton, dos fenômenos celestes com os fenômenos terrestres.

Não pretendemos resolver essas equações diferenciais aqui, tendo em vista que sua complexidade foge do contexto.

8.3 A aceleração da gravidade

Nos capítulos anteriores já tivemos oportunidade de mencionar o fato de que a aceleração da gravidade não é uniforme na vizinhança da Terra. Podemos entender essa afirmação de forma simples no do contexto da teoria de Newton da gravitação. A aceleração da gravidade \vec{g} é definida como sendo a aceleração que um corpo adquire quando ele está em queda livre, ou seja, somente sob ação de seu próprio peso. O peso \vec{P} de um corpo de massa m aqui na Terra é a força da gravidade que a Terra faz nesse corpo, ou seja:

$$\vec{P} = -G \frac{M_T m}{r^2} \hat{r}$$

sendo r a distância do CM (que coincide com o CG) do corpo ao centro da Terra e \hat{r} um vetor unitário na direção radial que passa pelo centro da Terra e pelo CM do corpo, apontando da Terra para o corpo (daí o sinal negativo). A direção de \hat{r} que acabamos de definir é a direção que chamamos no dia-a-dia de vertical. É interessante notar que não existe uma vertical, a direção vertical é a direção do raio que passa pelo centro da Terra. Essa é a direção que um pedreiro determina experimentalmente usando um aparelho simples chamado prumo, que consiste basicamente em uma pequena massa pendurada na ponta de um barbante. A vertical no pólo norte, por exemplo, é ortogonal à vertical na linha do equador.

Da segunda lei de Newton concluímos que para um corpo em queda livre:

$$\vec{P} = -G \frac{M_T m}{r^2} \hat{r} = m \vec{a} = m \vec{g} \Rightarrow \vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \hat{r}$$

Notamos da equação acima que a magnitude da aceleração da gravidade \vec{g} decai com o quadrado da distância ao centro da Terra. Nesse sentido a aceleração da gravidade no telhado de uma casa é mais fraca do que no chão. Está claro que a expressão acima só se aplica a um corpo que está fora da Terra, ou seja, para o qual $r \geq R_T$, sendo R_T o raio da Terra. Para um corpo enfiado dentro da Terra, em um túnel, por exemplo, devemos descontar as massas das cascas externas, conforme o teorema das cascas. Portanto, a equação para \vec{g} acima só se aplica a pontos do espaço fora do planeta Terra, suposto esférico de densidade de massa esfericamente simétrica.

Podemos escrever a magnitude da aceleração da gravidade em termos da altura h de um ponto em relação à superfície da Terra. Basta fazer $r = R_T + h$ (R_T é o raio da Terra) e, portanto:

$$g(h) = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

Na Figura 8.4 ilustramos essa mudança de variáveis.

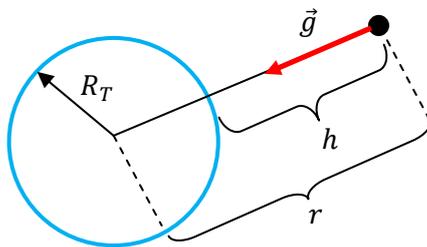


Figura 8.4: Um ponto no espaço (bolinha preta) está a uma distância r do centro da Terra e a uma altura h da superfície da Terra. Então: $r = R_T + h$.

Na Figura 8.5 esboçamos o comportamento de $g(h)$ em função da altura h . Na superfície da Terra vale $g(0) \cong 9,8 \text{ m/s}^2$. Mostramos também, para efeito de comparação, o valor da aceleração da gravidade na altura de 400 km em relação à superfície da Terra, que é basicamente a altura da órbita da Estação Espacial Internacional (EEI).

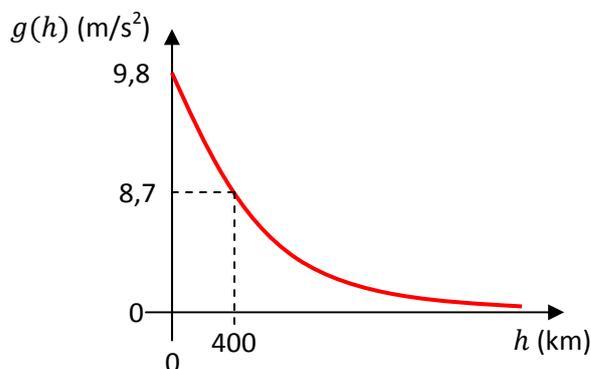


Figura 8.5: Esboço do comportamento da aceleração da gravidade com a altura em relação à superfície da Terra.

Fica claro que o decaimento da aceleração da gravidade com a altura é bem lento, o que justifica nossa hipótese de que na vizinhança da superfície da Terra a aceleração da gravidade é uniforme, ou seja, tem o mesmo valor $g(0) \cong 9,8 \text{ m/s}^2$ em todos os pontos do espaço. Lá na EEI os astronautas estão submetidos a uma aceleração da gravidade $g(400 \text{ km}) \cong 8,7 \text{ m/s}^2$, apesar de se sentirem na ausência de peso. Já tivemos oportunidade de discutir esse aparente paradoxo. Resumidamente: um astronauta na EEI está em queda livre, assim como a própria EEI e tudo que está dentro dela. Tudo já está caindo e não tem como o astronauta observar algo que é solto de sua mão cair. Da mesma forma, uma balança na EEI vai medir peso nulo para qualquer corpo colocado em cima dela, pois a balança não mede o peso do corpo diretamente, mas sim a força de contato balança/corpo e a balança também está em queda livre. Mesmo que as balanças não funcionem dentro da EEI, existe a necessidade de se monitorar a massa corporal de um astronauta que está lá no espaço, para conferir periodicamente seu estado de saúde. Como medir a massa do astronauta sem o uso de uma balança? Uma maneira é construir um oscilador bloco-mola, em que o bloco é o astronauta (estudaremos esse oscilador no próximo capítulo). Ao ser colocado para oscilar, esse oscilador oscila com frequência angular $\omega = \sqrt{k/M}$ sendo k a constante de mola (dureza da mola) e M a massa do bloco, ou do astronauta nesse caso. Medindo-se ω e conhecendo-se k , obtém-se a massa M do astronauta.

Concluindo: a gravidade aparente na EEI é nula. Mas há gravidade lá e é essa gravidade da Terra que faz com que a EEI e o astronauta orbitem a Terra.

A uma distância infinita da Terra g se anula, significando que a influência gravitacional da Terra deixou de existir nesse lugar.

A função $\vec{g}(\vec{r})$ definida em todos os pontos \vec{r} na vizinhança de um corpo (planeta, estrela etc.) é o que chamamos de campo gravitacional do corpo. O campo gravitacional da Terra, por exemplo, é dado pela função:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M_T}{r^2} \hat{r}$$

sendo M_T a massa da Terra, e $\vec{r} = r \hat{r}$ o vetor posição de um ponto no espaço, exterior à Terra, com origem no centro da Terra, ou seja, r é a distância do ponto ao centro da Terra e \hat{r} é um vetor unitário na direção radial que passa pelo centro da Terra e pelo ponto, apontando da Terra para o ponto (daí o sinal negativo). A figura 8.6 que segue ilustra algumas setas que representam o campo gravitacional \vec{g} na vizinhança de um corpo esférico (o teorema das cascas diz que esse campo gravitacional é o mesmo de uma partícula localizada no centro do corpo esférico, concentrando toda a sua massa).

Note, $\vec{g}(\vec{r})$ não é a aceleração do ponto \vec{r} , um ponto não acelera. $\vec{g}(\vec{r})$ é a aceleração que uma partícula abandonada na posição \vec{r} vai adquirir, se deixada em queda livre. Equivalentemente, $m \vec{g}(\vec{r})$ é a força da gravidade que uma partícula de massa m colocada na posição \vec{r} vai sofrer, devido à atração da Terra.

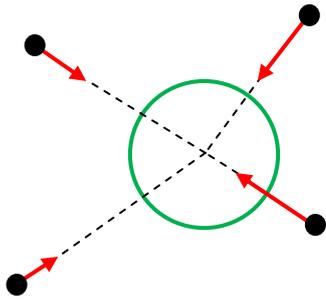


Figura 8.6: Ilustração de alguns vetores representando o campo gravitacional \vec{g} na vizinhança de um corpo esférico de densidade de massa uniforme. A cada ponto do espaço \vec{r} (bolinhas pretas) podemos associar um vetor $\vec{g}(\vec{r})$, que aponta radialmente para o centro do corpo e cuja magnitude decai com o quadrado da distância do ponto ao centro. Considere que essas setas podem ser desenhadas no espaço tridimensional. Infinitas setas apontando radialmente para o centro.

Resumindo: a idéia é que $\vec{g}(\vec{r})$ representa a influência gravitacional que um corpo produz no espaço ao seu redor: uma partícula de massa m solta na posição \vec{r} do espaço vai cair com aceleração $\vec{g}(\vec{r})$ devido à gravidade desse corpo. O campo gravitacional de um corpo esférico com densidade de massa esfericamente simétrica é relativamente simples, como ilustrado na figura 8.6. É um campo radial que decai com o quadrado da distância. Já o campo gravitacional de um corpo de forma arbitrária (com uma cadeira) pode ser bastante complicado e difícil de calcular. Fato é que para calcular, por exemplo, o peso de uma cadeira de massa m , precisamos considerar apenas o campo gravitacional da Terra, que é simples (supondo que a Terra é esférica) e considerar que a cadeira é uma partícula localizada em seu CM (\vec{r}_{CM}), já que o campo gravitacional da Terra varia lentamente no espaço e é, portanto, uniforme dentro do volume da cadeira (o que implica que CG=CM). O peso dessa cadeira é simplesmente: $\vec{P} = m \vec{g}(\vec{r}_{CM})$. Podemos simplificar mais ainda e dizer que $\vec{P} = m \vec{g}(\vec{r})$ sendo \vec{r} qualquer ponto da cadeira, já que $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}_{CM})$. Podemos ir além e simplificar um pouco mais dizendo que $\vec{P} = m \vec{g}$ sendo \vec{g} a aceleração da gravidade na vizinhança da superfície da Terra, que é basicamente uniforme. Para efeito de torque, a seta de \vec{P} deve ser representada em \vec{r}_{CM} . Em contraste, se queremos calcular a força gravitacional que uma mesa faz em uma cadeira, como no exemplo que já discutimos, temos que considerar o campo gravitacional da mesa, que está longe de ser simples. A idéia de que o CG da cadeira nesse campo é igual ao CM da cadeira não funciona mais, pois a aceleração $\vec{g}(\vec{r})$ produzida pela mesa é (muito) diferente em cada ponto da cadeira. Conforme já discutimos, não há muito interesse em se calcular a força da gravidade entre uma cadeira e uma mesa: ela é desprezível.

A expressão da magnitude da aceleração da gravidade da Terra $g(h)$ envolve a massa e o raio da Terra, que não são parâmetros simples de serem conhecidos. Uma estimativa para o valor do raio da Terra já é conhecida desde a Grécia antiga. Eratóstenes de Alexandria estimou o raio da Terra medindo o comprimento das sombras de hastes fincadas na terra em duas cidades diferentes. Conhecendo a distância entre essas duas cidades e usando geometria/trigonometria, ele chegou próximo do valor real que é $R_T \cong 6.400$ km (apenas para comparação, a distância rodoviária entre as cidades de Porto Alegre e Manaus é de cerca de 4.500 km). Quanto à massa da Terra, seu valor só pôde ser medido com precisão após o surgimento da teoria de Newton

da gravitação. A teoria de Newton possibilitou que se pesasse a Terra. Para isso, podemos medir a aceleração de queda livre g de uma pequena pedrinha e então calcular a massa da Terra por:

$$M_T = \frac{g R_T^2}{G}$$

que vai fornecer o valor aproximado $M_T \cong 6 \times 10^{24}$ kg. Um método mais simples é medir o período de oscilação de um pêndulo e daí calcular diretamente a massa da Terra. Portanto, graças à teoria de Newton, podemos medir M_T usando apenas um cronômetro. Discutiremos sobre o movimento oscilatório de pêndulos no próximo capítulo.

Conhecendo a massa e o raio da Terra, podemos fazer uma estimativa da densidade de massa da Terra, e especular sobre sua composição de matéria. Na época de Newton já havia a idéia de que o núcleo da Terra é composto basicamente de ferro, o que permitiria explicar a origem do campo magnético da Terra (a densidade do ferro é aproximadamente 8 g/cm^3).

A densidade média do planeta Terra é dada por:

$$\rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$$

Utilizando os valores definidos anteriormente obtemos: $\rho_T \cong 5,5 \text{ g/cm}^3$, ou seja, a teoria de Newton prevê que se a Terra fosse uma esfera maciça de densidade uniforme, sua densidade de massa seria $5,5 \text{ g/cm}^3$. Isso significa que um pedacinho da Terra de forma cúbica com aresta igual a 1 cm deve ter massa próxima de 5,5 g. Podemos verificar experimentalmente a validade dessa previsão, medindo a densidade de massa de qualquer coisa que compõe a Terra, desde um copo de água, um pedregulho até um galho de árvore. Obviamente, ao fazer isso, vamos obter materiais de várias densidades diferentes, mas apenas materiais coletados na superfície da Terra. Fazendo uma média sobre todos esses materiais obtemos uma densidade média bem menor que a calculada acima. As pedras que encontramos por aí, por exemplo, possuem uma densidade média de $2,7 \text{ g/cm}^3$. A água possui densidade 1 g/cm^3 . A conclusão que chegamos é que a Terra é menos densa em sua superfície do que no seu interior. Esses resultados estão de acordo com a idéia de que a Terra não é de fato uma esfera de densidade uniforme, pelo contrário, a Terra possui uma estrutura de camadas: basicamente uma crosta menos densa em volta de um núcleo mais denso formado de metais pesados, principalmente o ferro. Essa estrutura de camadas da Terra é explicada pela teoria de formação do sistema solar, que afirma que a Terra (e os outros planetas) teve origem na condensação de uma nuvem de gás, há bilhões de anos. Durante essa condensação, a Terra passou por uma fase quente/líquida quando os materiais mais densos foram afundando e se concentrando na região central do núcleo, pela ação da gravidade. Na superfície ficaram flutuando os materiais menos densos. Com o resfriamento lento da Terra,

essa estrutura de camadas se cristalizou. Nesse sentido, podemos dizer que a teoria da gravitação de Newton está de acordo com esse modelo de formação do Sistema Solar.

8.4 Energia potencial gravitacional

Já tivemos oportunidade de ver as vantagens do uso dos conceitos de energias cinética e potencial na interpretação e solução de problemas de mecânica. Em particular, os problemas de gravitação envolvem tipicamente apenas duas energias (mecânicas): a cinética (K) e a potencial gravitacional (U_g). Idealmente não há dissipação de energia (arraste/atrito), pois os corpos astronômicos se deslocam no vácuo e são rígidos. Assim sendo, os problemas de gravitação se encaixam no que já denominamos de problemas conservativos, que são aqueles em que a energia mecânica do sistema se conserva:

$$K + U_g = \text{constante}$$

Pensando no problema da translação dos corpos, ou seja, se nos concentramos nos cálculos de órbitas e deixarmos de lado as questões ligadas à rotação dos corpos celestes (podemos pensar também que as energias cinéticas de rotação são constantes, pelo fato da força da gravidade ser central e não produzir torques), o problema se resume ao de partículas submetidas à força da gravidade de Newton. Nesse caso, só precisamos considerar a energia cinética de translação dos N corpos do sistema:

$$K = \sum_{i=1}^N K_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i V_i^2$$

Quanto à energia potencial gravitacional, já mostramos que para uma partícula de massa m em uma altura h dentro de uma região com aceleração da gravidade uniforme g é:

$$U_g = m g h$$

Obviamente não podemos usar essa expressão para problemas de gravitação envolvendo órbitas que percorrem milhares de quilômetros no espaço, pois nesses casos g não pode ser considerado uniforme, ou seja, com um valor constante ao longo de todo o movimento. A expressão acima para U_g só pode ser aplicada com confiança nos casos em que os movimentos são curtos, como o movimento de um pequeno projétil na vizinhança da superfície da Terra.

O que devemos fazer aqui é deduzir novamente a expressão de U_g para uma partícula dentro do contexto da teoria de gravitação de Newton, ou seja, considerando que, para uma partícula que orbita em torno da Terra, por exemplo, a aceleração da gravidade não é constante, posto que ela é dada por:

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \hat{r}$$

Apenas para relembrar, o conceito de energia potencial está associado a forças conservativas, cujo trabalho independe da trajetória. Assim sendo, o trabalho dessas forças é dado por uma função da posição apenas (mais especificamente pela variação de uma função da posição), que chamamos então de energia potencial. Essa função, a energia potencial, permite computar o trabalho da força antes mesmo que esse trabalho se realize, daí o nome “potencial”.

Consideremos a situação mostrada na Figura 8.7 abaixo: uma partícula de massa m vai de A até B pela trajetória dada pela curva vermelha, que está toda mergulhada no campo gravitacional da esfera de massa M (suposta estática).

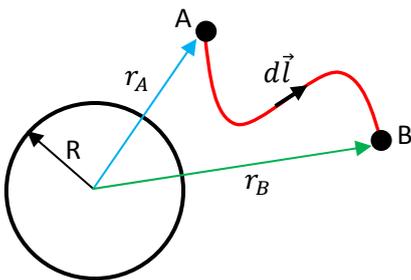
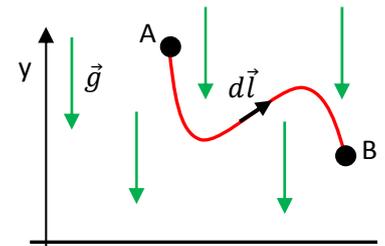


Figura 8.7: Uma partícula de massa m percorre uma trajetória (curva vermelha) entre os pontos A e B, dentro do campo gravitacional da esfera de massa M e raio R . Por exemplo, um satélite artificial (a partícula) viaja em torno do planeta Terra (a esfera), desde A até B. A curva é apenas ilustrativa e não representa necessariamente uma trajetória real de queda livre.

Para efeito de comparação, vamos deduzir novamente a expressão $U_g = m g h$ e somente depois deduzir a nova expressão de U_g . Para chegarmos em $U_g = m g h$ devemos desprezar a variação de \vec{g} com a posição no espaço. Assumimos então que \vec{g} possui módulo, direção e sentido fixos. A direção única de \vec{g} é o que chamamos de vertical. Essas hipóteses são razoáveis se a órbita de A até B mostrada na Figura 8.7 for pequena, ou seja, se a distância entre A e B não for muito grande. Nesse caso a aceleração da gravidade (setas verdes) na vizinhança da órbita AB fica uniforme, como ilustrado na Figura ao lado. Adotando um referencial em que o eixo y (a direção vertical) está ao longo da direção de \vec{g} , apontando para cima (para fora da Terra), obtemos: $\vec{g} = -g \hat{y}$. Portanto, o trabalho do peso da partícula de massa m na trajetória de A até B (curva vermelha) fica:



$$W_{m\vec{g}}(A \rightarrow B) = \int_A^B -m g \hat{y} \cdot d\vec{l}$$

sendo $d\vec{l}$ um vetor deslocamento tangente à trajetória da partícula. O produto escalar é uma operação de projeção, ou seja, podemos entender o produto $\vec{A} \cdot \vec{B}$ como sendo a projeção de \vec{A} ao longo de \vec{B} (e vice-versa). Portanto, o produto $\hat{y} \cdot d\vec{l}$ é a projeção de um deslocamento qualquer ($d\vec{l}$) ao longo do eixo y , ou seja, $\hat{y} \cdot d\vec{l} = dy$. Logo:

$$W_{m\vec{g}}(A \rightarrow B) = \int_A^B -m g dy = -m g y \Big|_A^B = -m g (y_B - y_A)$$

Podemos apenas fazer uma mudança de linguagem e passar a chamar a coordenada y de h , a altura de cada ponto. Assim, obtemos finalmente:

$$W_{m\vec{g}}(A \rightarrow B) = mgh_A - mgh_B$$

Está claro na expressão acima que o trabalho do peso independe da trajetória, ele só depende das posições dos pontos A e B (no caso, apenas das posições verticais). Nesse sentido o peso (constante) é uma força conservativa.

A energia potencial U_g de um corpo é definida como sendo a capacidade que o peso dele tem de realizar trabalho. Portanto, podemos construir a seguinte equação:

$$U_g(B) = U_g(A) - \text{“gasto” de } U_g \text{ no percurso AB}$$

Como um corpo “gasta” sua energia potencial U_g ? Sendo U_g a capacidade do peso de realizar trabalho, o “gasto” de U_g é exatamente o trabalho do peso. Portanto:

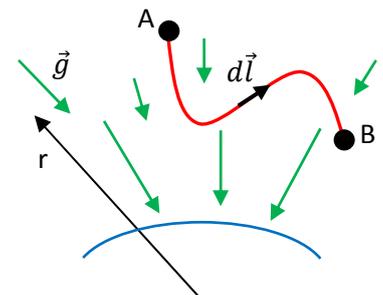
$$U_g(B) = U_g(A) - W_{m\vec{g}}(A \rightarrow B)$$

Logo:

$$U_g(B) - U_g(A) = mgh_B - mgh_A$$

Daí vem a expressão $U_g = m g h$, que vale como aproximação se a trajetória de A até B é curta, ou seja, se a trajetória de A até B está limitada a uma região do espaço onde as variações de \vec{g} no espaço são desprezíveis. Note que de fato a expressão acima nos permite dizer que $U_g = m g h + C$, sendo C uma constante arbitrária. C é a energia potencial do corpo quando este estiver na posição com $h = 0$. Como altura é um conceito relativo, fica claro que o próprio valor de h é arbitrário, ele depende da referência de medição de alturas. Portanto, podemos escolher arbitrariamente $C = 0$ para simplificar a expressão de U_g .

A teoria de Newton da gravitação nos ensinou que \vec{g} de fato varia no espaço e essa variação não vai passar despercebida ao longo do movimento de um satélite, asteróide, cometa ou planeta. Agora podemos considerar que a órbita de A até B na Figura 8.7 é gigante e que a distância entre A e B é de milhares ou mesmo milhões de quilômetros. Portanto, agora a situação é como ilustrado na Figura ao lado. A aceleração da gravidade (setas verdes) na vizinhança da órbita AB decai com o quadrado da distância e não tem uma direção única. Pelo contrário, ela aponta na direção do raio r que passa em cada ponto do espaço. O trabalho do peso da partícula de massa m na trajetória de A até B (curva vermelha) fica:



$$W_{m\vec{g}}(A \rightarrow B) = \int_A^B -m G \frac{M}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}$$

Novamente, o produto escalar $\hat{r} \cdot d\vec{l}$ é uma projeção de $d\vec{l}$ ao longo de \hat{r} , ou seja, ao longo do raio. Segue que $\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$ e, portanto:

$$W_{m\vec{g}}(A \rightarrow B) = \int_A^B -m G \frac{M}{r^2} dr = -G m M \int_A^B \frac{dr}{r^2} = G m M \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Logo:

$$U_g(B) - U_g(A) = -\frac{G m M}{r_B} - \frac{G m M}{r_A}$$

Segue que:

$$U_g(r) = -\frac{G m M}{r}$$

De fato, a solução mais geral da equação acima é:

$$U_g(r) = -\frac{G m M}{r} + C$$

sendo C uma constante arbitrária, que desaparece quando fazemos a diferença $U_g(B) - U_g(A)$. O significado dessa constante é simples, tomando $r \rightarrow \infty$, obtemos:

$$U_g(\infty) = C$$

Ou seja, C é a energia potencial que uma partícula tem quando está a uma distância infinita da esfera de massa M . Como a constante é arbitrária, podemos arbitrá-la como sendo zero, o que nos dá finalmente:

$$U_g(r) = -\frac{G m M}{r}$$

Note que a energia potencial da partícula de massa m é sempre negativa, mas cresce com o crescimento da “altitude” r , que é o que devemos esperar (um corpo em uma altura maior possui mais energia potencial). O fato da energia ser sempre negativa está ligado à nossa escolha da constante C como sendo zero e não tem nenhum outro significado além disso. De fato, mesmo na aproximação em que $U_g = m g h$ a energia já podia ser negativa, bastando para isso que a partícula de massa m estivesse abaixo da referência de altura $h=0$, ou seja, que a partícula tivesse altura negativa (profundidade). Note também que a expressão acima para $U_g(r)$ só se aplica para pontos com raio r maior do que R , ou seja, para pontos externos à esfera de raio R e massa M . Para considerar pontos internos, teríamos que levar em conta o desconto das massas das cascas externas, conforme o teorema das cascas (não vamos perder tempo com isso porque não consideraremos órbitas interiores). A Figura 8.8 que segue ilustra o comportamento da função $U_g(r)$ com o raio r . Note que a curva só está definida pela função acima para $r \geq R$ (fora da esfera de raio R).

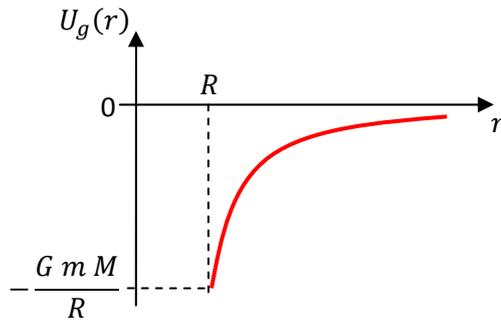


Figura 8.8: comportamento da energia potencial $U_g(r)$ para um par de corpos de massas m e M separados por uma distância r . A energia é monótona crescente com a “altura” r .

Apesar de chamarmos $U_g(r)$ de “energia potencial da partícula de massa m ”, é interessante frisar que $U_g(r)$ é de fato a energia potencial gravitacional do par de massas M e m , pois essa energia está ligada à interação mútua gravitacional entre essas duas massas. O raio r não é uma propriedade absoluta da massa m , mas sim a distância entre os centros do par m e M . Quando usamos a linguagem simplificada “energia potencial da partícula de massa m ”, o fazemos porque geralmente estamos interessados apenas no movimento da massa m , em um referencial em que a massa M está estática, como, por exemplo, quando estudamos a órbita de um planeta (se movendo) em torno do Sol (suposto em repouso).

Voltando à Figura 8.7, a conservação da energia mecânica nos permite escrever:

$$E(A) = E(B) \Rightarrow m \frac{V_A^2}{2} - G \frac{M m}{r_A} = m \frac{V_B^2}{2} - G \frac{M m}{r_B}$$

Essa equação foi escrita no referencial em que a massa M está parada (não há o termo de energia cinética de M), supondo que estamos interessados apenas no movimento da massa m em relação à massa M . Note que a massa m está em todos os termos e pode ser eliminada. A equação independe da massa do corpo que está se movendo (as propriedades da queda livre independem do corpo que está em queda):

$$\frac{V_A^2}{2} - G \frac{M}{r_A} = \frac{V_B^2}{2} - G \frac{M}{r_B}$$

8.4.1 Velocidade de escape

Um problema interessante que pode ser resolvido facilmente utilizando os conceitos de energia em gravitação é o da velocidade de escape. A velocidade de escape é a velocidade mínima que um corpo de massa m em queda livre deve ter para escapar da atração gravitacional de um corpo de massa M . Imagine que uma pessoa lance uma pedra para cima (vamos desprezar a influência do ar). A pedra sobe, se afasta da Terra, atinge uma altura máxima e cai de volta na Terra. A pedra não conseguiu escapar da atração gravitacional da Terra. Imagine que essa pedra seja lançada com uma velocidade inicial maior. Ela vai se afastar mais da Terra, vai atingir uma altura máxima maior e enfim, cair de volta na Terra. Fato é que existe uma velocidade, a chamada velocidade de escape, tal que, se a pedra for lançada com essa velocidade (ou com velocidade maior), ela vai subir, subir e nunca mais voltar. Ela escapa da atração gravitacional da Terra. Como a influência

gravitacional (o campo gravitacional) de um corpo se estende por todo o espaço em volta dele, a condição de escape é basicamente que a altura máxima seja infinita. Somente nesse caso a massa m vai estar a uma distância infinita da massa M e vai deixar de ser atraída por ela: a massa m vai escapar da gravidade de M .

Para calcular a velocidade de escape podemos nos basear na Figura 8.7. Suponha que um corpo X , de massa m , inicie seu movimento de queda livre no ponto A , com velocidade inicial V_A . Ele conseguirá escapar da gravidade de M ? Obviamente estamos supondo aqui que o vetor \vec{V}_A está apontando para uma direção tal que exclui a possibilidade do corpo X colidir com a esfera de massa M . Da equação da conservação da energia mecânica para a órbita de X :

$$\frac{V_A^2}{2} - G \frac{M}{r_A} = \frac{V_B^2}{2} - G \frac{M}{r_B}$$

Note que essa equação independe da massa m do corpo X que está orbitando M . Para analisar a possibilidade de escape, tomamos o ponto B no infinito, ou seja, tomamos $r_B \rightarrow \infty$ na equação acima. Ficamos com:

$$V_B = V_\infty = \sqrt{V_A^2 - 2G \frac{M}{r_A}}$$

Essa equação diz que se o corpo X chegar a se afastar uma distância infinita da massa M , ele vai chegar lá no infinito com a velocidade V_∞ . Suponha que arbitremos alguns valores para V_A , r_A e M na equação acima. É fácil ver que, devido ao sinal negativo, alguns conjuntos de valores vão levar a um valor negativo dentro da raiz quadrada, o que levará a uma velocidade V_∞ imaginária (por exemplo, $V_\infty = \sqrt{-100} = 10i$ m/s). Concluimos que com essa velocidade inicial V_A , partindo dessa distância (raio) inicial r_A , o corpo X não escapa de M , pois não há possibilidade disso ocorrer conservando a energia mecânica. Suponha que arbitremos outros valores para V_A , r_A e M e que dessa vez seja gerado um número positivo dentro da raiz quadrada, ou seja, que haja uma solução real para V_∞ (por exemplo, $V_\infty = \sqrt{100} = 10$ m/s), nesse caso concluimos que com essa velocidade inicial V_A o corpo X conseguiu escapar da gravidade de M , partindo de r_A . Ele escapou e vai chegar ao infinito com uma velocidade tal que fará com que ele continue se afastando indefinidamente de M , já que seu movimento no infinito será um MRU (livre de forças). É fácil ver que a transição entre não escapar/escapar está na mudança de sinal do termo dentro da raiz quadrada na expressão de V_∞ . De fato, quando valer:

$$V_A^2 - 2G \frac{M}{r_A} = 0$$

o corpo X vai chegar no infinito e atingir o repouso ($V_\infty = 0$), não voltando nunca mais a se aproximar de M . Essa equação define, portanto, a velocidade mínima que o corpo X tem que ter para escapar da gravidade do corpo cuja massa é M . Essa velocidade (mínima) é a velocidade de escape V_{ESC} que é dada por:

$$V_{\infty} = 0 \Rightarrow V_{ESC}^2 - 2G \frac{M}{r_A} = 0 \Rightarrow V_{ESC}(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Resumindo: $V_{ESC}(r)$ é a velocidade mínima que o corpo X deve ter (essa velocidade não depende do corpo X, ou seja, da massa m , ela é uma propriedade do corpo de massa M) para escapar da gravidade do corpo cuja massa é M partindo de um raio r . Note que a velocidade de escape depende do corpo de quem se está tentando escapar (M) e também da distância inicial r . Se o corpo X já parte de uma distância r grande, seu escape será mais fácil, pois a velocidade de escape será menor. Um astronauta na Estação Espacial Internacional, por exemplo, precisaria de uma velocidade menor para escapar da Terra do que uma pessoa aqui na superfície da Terra. Isso porque o astronauta já está, de certa forma, mais próximo do infinito do que uma pessoa na superfície da Terra, mais próximo por cerca de 400 km, que é a distância aproximada da estação espacial até a superfície da Terra. Se o corpo X for lançado de r com velocidade menor que $V_{ESC}(r)$, ele não consegue se afastar infinitamente da massa M , ele está preso na gravidade de M . Se o corpo X for lançado de r com velocidade maior que $V_{ESC}(r)$, ele escapa e chega ao infinito com folga, com velocidade sobrando, a ponto de continuar se afastando de M indefinidamente, em MRU.

Já comentamos que para discutir rigorosamente o movimento dos planetas devemos resolver a equação diferencial (que é a segunda lei de Newton para um corpo de massa m que orbita um corpo de massa M , suposto em repouso):

$$\vec{F}_{M/m}(t) = -G \frac{Mm}{r(t)^2} \hat{r}(t) = m \frac{d^2}{dt^2} r(t) \hat{r}(t)$$

sendo M a massa do corpo orbitado e $\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t)$ a posição do corpo (de massa m) que orbita, em relação ao centro do corpo de massa M . O vetor unitário $\hat{r}(t)$ aponta ao longo do raio que une os centros do corpo que orbita e do corpo orbitado, apontando para o corpo que orbita (daí o sinal negativo na força, pois ela é atrativa). A massa m desaparece da equação, que vale então para qualquer corpo, um planeta, um cometa, um satélite, uma pedra, uma maçã etc. O que difere um movimento do outro são as condições iniciais sobre a velocidade e o raio. Mas, as condições iniciais definirão também se o corpo em questão possui velocidade inicial maior, igual ou menor que a velocidade de escape de M a partir daquele raio onde seu movimento começa. Nesse contexto, é possível mostrar que a equação acima admite três soluções diferentes, conforme as condições iniciais sobre r (ou seja, r_0) e $V(r)$, ou seja, conforme $V(r_0)$ seja maior, igual ou menor que a velocidade de escape $V_{ESC}(r_0)$:

1. Se $V(r_0) > V_{ESC}(r_0)$: ocorre o escape e a órbita de m é uma hipérbole, que é uma curva aberta.
2. Se $V(r_0) = V_{ESC}(r_0)$: ocorre o escape e a órbita de m é uma parábola, que é uma curva aberta.
3. Se $V(r_0) < V_{ESC}(r_0)$: não ocorre o escape e a órbita de m é uma elipse, que é uma curva fechada.

A Figura 8.9 ilustra essa idéia. Imagine uma pedra que é lançada em queda livre (desprezamos a influência de uma possível atmosfera do planeta) a partir do ponto A, que está a uma distância r_0 do centro do planeta de massa M. Essa pedra é lançada com uma velocidade inicial de módulo V_0 . Para escapar da influência de M, a pedra deveria ter, no mínimo, a velocidade de escape:

$$V_{ESC}(r_0) = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

Segue então que se $V_0 > V_{ESC}(r_0)$, a pedra escapa, ela se afasta indefinidamente de M, seguindo uma curva aberta que é uma hipérbole (curva verde). Se $V_0 = V_{ESC}(r_0)$, a pedra escapa também, seguindo uma curva aberta que é uma parábola (curva azul). Na figura mostramos apenas um pedaço dessas curvas, elas são curvas abertas que se estendem até o infinito, a partir da posição r_0 . Se $V_0 < V_{ESC}(r_0)$, a pedra não consegue escapar da gravidade de M, ela fica presa, girando em torno de M em uma curva fechada que é uma elipse (curva vermelha).

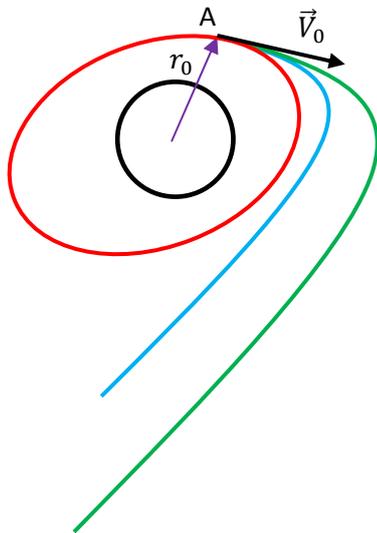


Figura 8.9: Uma pedra é lançada em queda livre na vizinhança de um corpo de massa M (círculo preto). Dependendo do valor da velocidade inicial V_0 , a pedra pode se afastar indefinidamente de M (curvas azul e verde) ou ficar aprisionada na vizinhança de M (curva vermelha). Ela pode também cair em M, mas essas órbitas não são mostradas. As curvas são apenas esboços, não são trajetórias calculadas.

Note que a direção da velocidade não tem influência no fato de um corpo escapar ou não da gravidade de outro corpo. Diferentes direções de \vec{V}_0 definirão apenas diferentes órbitas hiperbólicas, parabólicas ou elípticas, de acordo com o valor do módulo V_0 quando comparado a $V_{ESC}(r_0)$. Desde que não haja possibilidade de colisão, um corpo com $V(r) \geq V_{ESC}(r)$ vai escapar da gravidade do corpo de massa M, qualquer que seja a direção do vetor $\vec{V}(r)$.

Note que há também a possibilidade da trajetória ser retilínea, no caso específico em que \vec{V}_0 tem a direção radial (para cima).

Todos os corpos que fazem parte do Sistema Solar, planetas, asteróides e cometas estão aprisionados à gravidade do Sol. Suas velocidades orbitais em qualquer ponto de suas órbitas, que são elipses, são inferiores à velocidade de escape do Sol a partir desse ponto. Os corpos que no passado possuíam velocidades orbitais

iguais ou superiores à velocidade de escape do Sol em um dado ponto de suas órbitas, seguiram a partir daí órbitas abertas e escaparam do Sistema Solar, ao longo dos bilhões de anos de sua existência. Esses corpos, de certa forma, evaporaram do Sistema Solar. O que sobrou, não pode escapar mais. O cometa Halley, por exemplo, possui uma órbita gigantesca, que demora cerca de 75 anos para ser percorrida. Ele se afasta muito do Sol, mas como ele não possui velocidade para escapar, ele retorna a cada 75 anos em um vôo rasante próximo do Sol, época em que ele pode ser visto da Terra. Analogamente, o planeta Netuno possui um período orbital de cerca de 175 anos, se afastando muito do Sol (menos que o cometa Halley, pois sua órbita é mais redonda), mas sempre retornando, pois ele não consegue escapar da gravidade do Sol. Da mesma forma, podemos dizer que a Lua não pode escapar da gravidade da Terra, pois ela tem velocidade orbital sempre menor que a velocidade de escape da Terra $V_{ESC}(r)$ lá no raio r em que a Lua está. Analogamente, os anéis do planeta Saturno são basicamente cristais de gelo com tamanhos da ordem de 1 cm. Esses cristais ficam lá orbitando Saturno porque suas velocidades orbitais são sempre menores que a velocidade de escape de Saturno a partir do raio r desses anéis.

Note que, com esse resultado, fica provado que a teoria da gravitação de Newton é compatível com a primeira lei de Kepler (que discutiremos mais adiante), que afirma que as órbitas dos planetas são de fato elipses. O círculo é uma elipse, e nesse sentido a teoria de Newton permite que planetas tenham órbitas circulares, conforme idealizaram Ptolomeu e Copérnico. Mas, a realização de uma órbita exatamente circular requer uma condição inicial muito especial sobre a velocidade e o raio, uma condição rara de acontecer ao acaso na natureza. Por isso, não se espera que uma órbita natural exatamente circular seja encontrada em algum lugar. Mesmo assim, muitos planetas possuem órbitas elípticas bem próximas de um formato circular, como o caso da Terra. Comentaremos mais sobre isso quando discutirmos os movimentos dos planetas.

A velocidade de escape da Terra, para um corpo na superfície da Terra é dada por:

$$V_{ESC}(R_T) = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}$$

Sendo $M_T \cong 6 \times 10^{24}$ kg e $R_T \cong 6.400$ km, obtemos:

$$V_{ESC}(R_T) \cong 11 \text{ km/s} \cong 40.000 \text{ km/h}$$

Portanto, se lançarmos uma pedra para cima, em qualquer ângulo (sem a possibilidade de colisão), com velocidade igual ou maior que 11 km/s, a pedra vai subir, desaparecer no horizonte e nunca mais voltar (se desprezarmos a influência do ar). Ela vai se afastar infinitamente da Terra. Analogamente, a velocidade de escape da Lua, para um corpo que esta lá na superfície da Lua é (considerando que $R_L \cong R_T / 4$ e $M_L \cong M_T / 80$):

$$V_{ESC}(R_L) = \sqrt{\frac{2 G M_L}{R_L}} \cong \frac{V_{ESC}(R_T)}{\sqrt{20}} \cong 2.5 \text{ km/s} \cong 8.800 \text{ km/h}$$

Vemos que é muito mais fácil escapar da superfície Lua do que da Terra. Esse é um dos principais motivos que explicam a ausência de atmosfera na Lua, pois a força que mantém a atmosfera ligada a um planeta é a gravidade. As partículas que compõem a atmosfera se comportam como pequenos projéteis, que sobem e caem de volta intercalando colisões e queda livre. As velocidades dessas partículas estão determinadas basicamente por suas massas e pela temperatura do planeta. Quanto maior a temperatura T e menor a massa m , maior a velocidade V (basicamente $m V^2/2 = 3 k_B T/2$, sendo k_B a constante de Boltzmann). Assim sendo, na Terra as condições de temperatura e gravidade levam a velocidades moleculares médias menores que a velocidade de escape e, portanto, à presença de uma atmosfera. Na Lua, a gravidade é muito fraca para impedir o escape de moléculas e, portanto, a presença de uma atmosfera é impossível. Da mesma forma, no planeta Mercúrio, que é o mais próximo do Sol, a alta temperatura e a baixa velocidade de escape impossibilitam a presença de uma atmosfera.

8.5 Órbitas de satélites

Um satélite artificial é um artefato construído pelo homem que orbita um corpo celeste, como por exemplo, a Terra, a Lua ou o Sol. Suas aplicações são variadas, como, por exemplo: telecomunicações, previsão do tempo, localização global (GPS) e espionagem militar. Satélites podem contribuir também para o avanço da ciência, como a Estação Espacial Internacional, onde astronautas podem ficar alojados orbitando a Terra, e o telescópio espacial Hubble. O primeiro satélite artificial foi o Sputnik, lançado em 1957, dando início à corrida espacial, que culminou com a chegada do homem à Lua em 1969. Os satélites são levados até suas órbitas através de foguetes e depois permanecem lá, em queda livre, orbitando um corpo celeste. Eles não precisam gastar energia para orbitar, pois viajam no vácuo. Geralmente os satélites possuem baterias, recarregadas por painéis solares, para alimentar os circuitos eletrônicos e pequenos foguetes que são acionados esporadicamente para ajustes de órbita. Os satélites com órbitas muito baixas em torno da Terra, por exemplo, podem cair após um tempo, devido à influência, bem pequena, da atmosfera terrestre. A gravidade da Lua também modifica lentamente as órbitas de alguns satélites que orbitam a Terra. Um pequeno foguete pode ser usado para corrigir a órbita de tempos em tempos. Com um pouco de paciência, podemos observar satélites a olho nu, transitando em torno da Terra. Logo após o anoitecer, um satélite pode refletir a luz do Sol e ser visto como um pequeno ponto brilhante, parecido com uma estrela, mas se movendo rapidamente no céu. Quando ele entra na região de sombra da Terra, desaparece.

Os satélites têm órbitas elípticas, como previsto por Newton, mas, muitos satélites possuem, propositalmente, órbitas aproximadamente circulares. Como esse é um caso mais simples, vamos analisar o

movimento de um satélite de massa m em uma órbita circular em torno de um corpo esférico de massa M . Conforme o teorema das cascas, e sendo o satélite um corpo relativamente pequeno, podemos considerar que esse problema envolve duas partículas, a partícula de massa m (no CM/CG do satélite) orbitando a partícula de massa M (no centro da esfera), que suporemos fixa no espaço. Como a energia mecânica do sistema é constante, segue que o movimento circular é uniforme (MCU), ou seja, o satélite possui velocidade de módulo constante. Já estudamos o MCU e sabemos que a principal característica desse movimento é que a aceleração da massa m é centrípeta e, portanto, a segunda lei de Newton e a lei de Newton da gravitação juntas dizem que, para o satélite:

$$R_{cent} = m a_{cent} \Rightarrow G \frac{M m}{r^2} = m \frac{V^2}{r}$$

sendo r o raio da órbita. Chegamos então a uma relação simples entre os parâmetros orbitais V e r de um satélite em uma órbita circular de raio r com velocidade V em torno de um corpo esférico de massa M :

$$V^2 = G \frac{M}{r}$$

Note que a massa do satélite desapareceu, ou seja, qualquer que seja o satélite, a relação entre V e r é a mesma. É interessante notar que essa velocidade é igual à velocidade de escape a partir do raio r dividida por um fator $\sqrt{2}$.

Por exemplo, considere a Estação Espacial Internacional (EEI), que orbita a Terra a cerca de 400 km de altura, em uma órbita aproximadamente circular. Qual a velocidade orbital da EEI? Fazendo $r = R_T + h$ na relação entre velocidade e raio deduzida acima, obtemos:

$$V^2 = G \frac{M_T}{R_T + h}$$

sendo $R_T \cong 6.400$ km e $M_T \cong 6 \times 10^{24}$ kg o raio e a massa da Terra. Fazendo $h=400$ km obtemos $V \cong 7,7$ km/s. A Figura 8.10 ao lado mostra uma sequência de imagens da EEI em sua órbita vista aqui da Terra, tendo o Sol ao fundo. A estação está em queda livre com a velocidade incrível de $7,7$ km/s $\cong 28.000$ km/h.

Satélites de comunicação, como os de transmissão de TV, por exemplo, devem ser geoestacionários, ou seja, devem ser vistos estáticos no céu a partir de um observador na Terra. Só assim podemos apontar uma antena parabólica fixa na Terra para eles. Para que um satélite seja geoestacionário ele deve, basicamente, compartilhar a rotação da Terra,

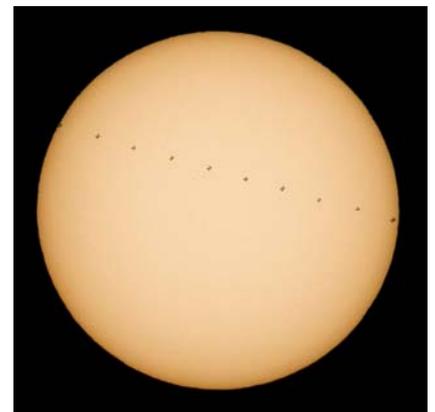
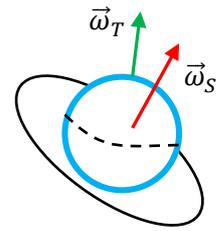


Figura 8.10: A órbita da Estação Espacial Internacional em torno da Terra, tendo o Sol ao fundo. Fonte: <https://www.nasa.gov/>.

ou seja, girar em uma órbita circular com velocidade angular $\omega_T = 2\pi$ rad/dia no mesmo sentido da rotação da Terra. Ele deve também ter o mesmo eixo de rotação da Terra (que passa pelos pólos), ou seja, a órbita do satélite deve ser um círculo no plano equatorial. Dessa forma, a Terra, a antena parabólica e o satélite giram juntos (como um só corpo rígido), resultando que o satélite não se move, em relação à antena fixa na Terra. A Figura ao lado ilustra a Terra (em azul), a linha do equador (tracejada) e a órbita de um satélite (em preto). Se $\vec{\omega}_T$ é a velocidade angular da Terra (ao longo do eixo que passa por seus pólos) e $\vec{\omega}_S$ é a velocidade angular do satélite em sua órbita circular em torno do centro da Terra, então, para que o satélite seja geoestacionário deve valer: $\vec{\omega}_S = \vec{\omega}_T$, ou seja, a órbita deve estar no plano do equador. Qual deve ser a velocidade orbital de um satélite geoestacionário? Supondo uma órbita circular de raio r , a velocidade orbital é simplesmente:



$$V = \omega_T r$$

Mas, não conhecemos o raio da órbita. Qual o raio da órbita de um satélite geoestacionário? Sabemos que para uma órbita circular:

$$V^2 = (\omega_T r)^2 = G \frac{M_T}{r}$$

Portanto:

$$r^3 = G \frac{M_T}{\omega_T^2}$$

Obtemos $r \cong 42.000$ km que corresponde a uma altura $h \cong 36.000$ km. A velocidade orbital é $V \cong 3$ km/s $\cong 11.000$ km/h.

A Lua é o satélite natural da Terra, compondo, juntamente com a Terra, uma espécie de haltere que orbita o Sol. Esse haltere gira em torno de seu CM, que está dentro da Terra, por que a massa da Terra é cerca de 81 vezes a massa da Lua ($M_T \cong 81 M_L$). Portanto, podemos dizer que, aproximadamente, a Lua gira em torno da Terra, quando vista por um observador externo, fora do sistema Terra+Lua. Além disso, a órbita é pouco achatada e pode ser aproximada por um círculo. Nessa aproximação, podemos dizer que a Lua possui uma órbita circular em torno do centro da Terra. Qual o raio dessa órbita? O período orbital da Lua, ou seja, o tempo que a Lua demora para percorrer um círculo completo em torno da Terra é $T_L \cong 27$ dias (aproximadamente um mês). Portanto, a velocidade orbital da Lua é:

$$V_L = \frac{2\pi r}{T_L}$$

sendo r o raio da órbita circular. Como sabemos que para órbitas circulares vale em geral:

$$V^2 = G \frac{M}{r}$$

concluimos que:

$$V_L^2 = \left(\frac{2 \pi r}{T_L} \right)^2 = G \frac{M_T}{r}$$

Segue que:

$$r^3 = \frac{G M_T}{4 \pi^2} T_L^2$$

Sendo a massa da Terra $M_T \cong 6 \times 10^{24}$ kg, obtemos $r \cong 380.000$ km. Para a velocidade orbital obtemos $V_L \cong 1$ km/s. Os primeiros astronautas que pisaram na Lua levaram cerca de dois dias para percorrer esses 380.000 km que separam a Terra da Lua. Foi uma viagem rápida. As marés que observamos nos oceanos (elevação e declínio periódicos do nível do mar) são produzidas principalmente pela gravidade da Lua, mas também tem uma contribuição da gravidade do Sol. Quando a Lua está nas fases cheia ou nova, os efeitos se somam e as marés são mais intensas. Veremos na próxima seção que a órbita da Lua é de fato uma elipse, e por isso ela se aproxima e se afasta periodicamente da Terra. As maiores marés ocorrem quando a Lua está no seu ponto de aproximação máxima da Terra (perigeu).

8.6 Órbitas de Planetas: Leis de Kepler

Nosso Sistema Solar originou-se da condensação de uma nuvem de gás há cerca de 4,5 bilhões de anos e possui atualmente oito planetas (em ordem a partir do Sol): Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. Plutão já foi considerado um planeta, mas hoje é classificado como um planeta-anão. Essa reclassificação se deveu à descoberta de que Plutão está em uma região onde existem vários outros corpos similares a ele (cinturão de Kuiper) que podem ainda colidir entre si e se fundirem dando origem a novos corpos celestes. Nesse sentido, só são considerados planetas aqueles corpos cuja vizinhança está limpa (com exceção das luas), exatamente por eles serem o resultado final e estável de um processo de colisões/fusões impulsionado pela gravidade. Mesmo após essa limpeza, restam ainda milhares de asteróides e meteoróides vagando em torno do Sol. Um asteróide é basicamente um pedaço de rocha com tamanhos desde 1 metro a milhares de metros. Um meteoróide é uma pedra menor. As milhares de crateras na superfície da Lua registram as cicatrizes de seus encontros com asteróides/meteoróides ao longo de sua história. A Terra não está livre desses impactos, mas os processos naturais/climáticos de erosão e vegetação acabam por esconder/apagar as crateras deles resultantes.

As principais características dos movimentos dos planetas foram extraídas por Johannes Kepler de dados experimentais acumulados ao longo de muitos anos, e estão enunciados na forma das três leis que estudaremos em seguida. Vale a pena enfatizar que as leis de Kepler são propriedades da gravidade e não valem, portanto, apenas para o movimento dos planetas. Elas valem também para o movimento de Luas em

torno de planetas e planetas, cometas e asteróides em torno de estrelas. Valem também para a queda de uma pedra ou de uma maçã aqui na Terra, na aproximação em que desprezamos o atrito do ar (queda livre).

As leis de Kepler são:

1ª) As órbitas dos planetas são elipses, com o Sol em um dos focos.

Isso significa que a órbita de um planeta é uma curva plana achatada, como na Figura 8.11 que segue. A elipse é uma curva plana definida em termos de dois pontos, os focos F_1 e F_2 . Os pontos P que pertencem à elipse (curva vermelha) satisfazem à seguinte propriedade:

$$r_1 + r_2 = \text{constante}$$

Por isso, a maneira mais fácil de se esboçar uma elipse em uma folha de papel é fixar dois alfinetes onde se deseja que sejam os focos. Amarram-se as duas extremidades de um barbante de comprimento L nos alfinetes. Tensionando o barbante com uma caneta e riscando no papel, traça-se uma elipse com $r_1 + r_2 = L$.

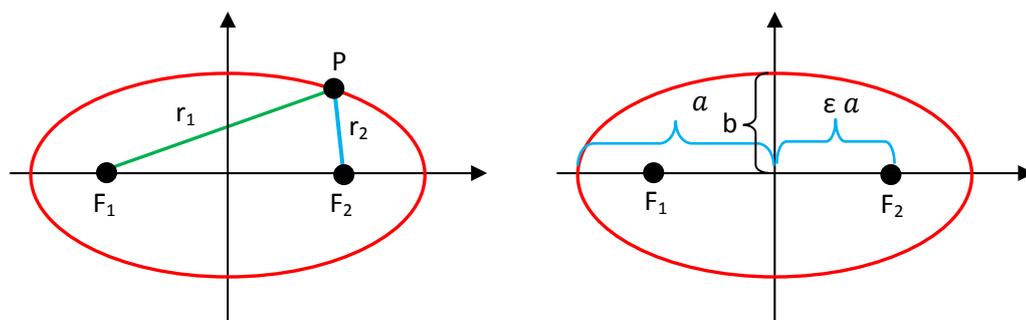


Figura 8.11: Propriedades básicas de uma elipse: focos (F_1 e F_2), semi-eixos (a e b) e excentricidade (ϵ).

As dimensões da elipse podem ser caracterizadas pelo semi-eixo maior a e pelo semi-eixo menor b , que são as distâncias máximas do centro da elipse ao longo de seus dois eixos de simetria. Não é difícil mostrar que $r_1 + r_2 = 2a$. O achatamento da elipse está caracterizado pela diferença entre a e b , se valer $a = b$, então a elipse se torna um círculo. Outra grandeza que pode caracterizar o achatamento de uma elipse é a excentricidade ϵ , definida de tal forma que ϵa é a distância de um foco qualquer até o centro da elipse. Quanto maior o valor de ϵ ($0 \leq \epsilon < 1$) mais achatada é a elipse. Uma elipse com $\epsilon = 0$ é um círculo com raio $r = a = b$, para a qual os focos F_1 e F_2 colapsam no centro e $r_1 = r_2 = r$. Note que $b = \sqrt{1 - \epsilon^2} a$.

Não demonstraremos a primeira lei de Kepler aqui porque para demonstrá-la temos que calcular a órbita de um planeta a partir da segunda lei da dinâmica e da lei da gravitação de Newton. A complexidade da solução dessa equação foge do nosso contexto. Vale a pena ressaltar que a primeira lei de Kepler é consequência direta do fato da força da gravidade decair com o quadrado da distância: a existência de órbitas elípticas para os planetas é consequência direta do fato da força entre o Sol e os planetas decair com o quadrado da distância entre eles.

Conforme nosso comentário anterior, sobre a generalidade das leis de Kepler, podemos afirmar que a órbita do cometa Halley é uma elipse com o Sol em um dos focos. As órbitas da Lua e da Estação Espacial Internacional são elipses com a Terra em um dos focos. A órbita de uma pedra lançada para cima em uma direção oblíqua em relação à vertical é um segmento de elipse com a Terra em um dos focos (desprezando o atrito com o ar). A primeira lei de Kepler só não vale para corpos em queda livre com velocidades maiores ou iguais à velocidade de escape, para os quais as órbitas são hipérbolas ou parábolas.

As órbitas dos planetas do Sistema Solar, com exceção de Mercúrio, são bastante circulares. A órbita da Terra, por exemplo, possui excentricidade $\epsilon_T \cong 0,017$. Supondo então que a órbita da Terra é circular obtemos para o raio da órbita (conforme visto na seção anterior):

$$r^3 = \frac{G M_S}{4 \pi^2} T_T^2$$

sendo $M_S \cong 2 \times 10^{30}$ kg a massa do Sol e $T_T \cong 365$ dias o período orbital da Terra. Obtemos $r = a \cong 1,5 \times 10^8$ km. Com esses valores numéricos concluímos que a distância do centro da órbita da Terra até um dos focos é $\epsilon_T a \cong 0,017 \times 1,5 \times 10^8$ km $\cong 2,6 \times 10^6$ km (2,6 milhões de quilômetros). Essa distância é muito pequena, quando comparada ao tamanho do raio da órbita $a \cong 1,5 \times 10^8$ km (150 milhões de quilômetros). Enfim, é fato que a Terra se aproxima e se afasta um pouco do Sol, que está em um dos focos de sua órbita elíptica. A distância máxima da Terra até o Sol (raio do Afélio) é $a + \epsilon_T a = (1 + \epsilon_T)a \cong 1,523 \times 10^8$ km (usando a estimativa para a distância a obtida anteriormente) enquanto que a distância mínima da Terra até o Sol (raio do Periélio) é $a - \epsilon_T a = (1 - \epsilon_T)a \cong 1,475 \times 10^8$ km. Note que esses afastamentos e aproximações da Terra ao Sol não têm nenhuma relação com a sucessão das estações do ano. A sequência de estações do ano é consequência da inclinação do eixo de rotação da Terra, em relação ao plano da órbita elíptica da Terra. Essa inclinação afeta o ângulo de incidência da luz do Sol na superfície da Terra, afetando a transferência de energia e a temperatura. Mesmo se a órbita da Terra fosse um círculo, haveria as diferentes estações do ano. Somente em um planeta de órbita muito excêntrica podemos esperar uma influência orbital no clima produzida pela aproximação e afastamento do planeta em relação ao Sol. Esse não é o caso da Terra.

A Lua também possui uma órbita bastante circular em torno da Terra, pois $\epsilon_L \cong 0,05$. Já estimamos que para a órbita da Lua $r = a \cong 380.000$ km. Isso significa que a distância do centro da órbita da Lua até um dos focos é $\epsilon_L a \cong 0,05 \times 380.000$ km $\cong 19.000$ km. Portanto, a Lua se aproxima e se afasta um pouco da Terra, que está em um dos focos (admitindo que $M_T \gg M_L$), ao invés de girar em um círculo. A distância máxima da Lua até a Terra (raio do apogeu) é $a + \epsilon_L a = (1 + \epsilon_L)a \cong 400.000$ km enquanto que a distância mínima da Lua até a Terra (raio do perigeu) é $a - \epsilon_L a = (1 - \epsilon_L)a \cong 360.000$ km.

No caso da Estação Espacial Internacional (EEI), $\epsilon_{EEI} \cong 0,0008$, o que corresponde a uma órbita quase circular (trata-se de uma órbita artificial nesse caso). Para uma órbita com essa excentricidade, se a altura máxima da EEI é de $h_M = 410$ km, a altura mínima h_m será (sendo R_T o raio da Terra em km):

$$a + \epsilon_{EEI} a = (1 + \epsilon_{EEI})a = R_T + 410$$

$$a - \epsilon_{EEI} a = (1 - \epsilon_{EEI})a = R_T + h_m$$

Portanto, dividindo uma equação pela outra obtemos a estimativa:

$$\frac{(1 + \epsilon_{EEI})}{(1 - \epsilon_{EEI})} = \frac{R_T + 410}{R_T + h_m} \Rightarrow h_m = \frac{(1 - \epsilon_{EEI})410 - 2\epsilon_{EEI}R_T}{1 + \epsilon_{EEI}} \cong 399,1 \text{ km}$$

A altura da EEI em relação à superfície da Terra varia apenas cerca de 10 km, por causa da baixa excentricidade da órbita.

O planeta Mercúrio é o que possui órbita de maior excentricidade no Sistema Solar, $\epsilon_M \cong 0,21$, e por isso a aproximação de órbita circular pode não fazer muito sentido para esse planeta. Na Figura 8.12 ao lado mostramos duas elipses com semi-eixos menores iguais: a elipse vermelha é um círculo ($\epsilon=0$) enquanto que a elipse preta possui excentricidade próxima da de Mercúrio ($\epsilon_M \cong 0,21$). Vemos que mesmo no caso de Mercúrio, pelo menos visualmente, a órbita não difere muito de um círculo.

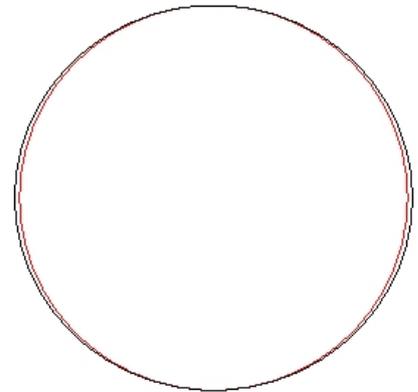


Figura 8.12: Uma elipse de baixa excentricidade (curva preta) é semelhante a um círculo (curva vermelha).

A queda de um projétil, na ausência de atrito com o ar (queda livre), também segue uma trajetória elíptica, mais especificamente um segmento de elipse, tendo em vista que ele colide com o chão. Não há contradição dessa afirmação com nossa discussão anterior da queda livre, quando fizemos a aproximação de que a aceleração da gravidade é constante. De fato, se \vec{g} é constante, ou seja, se \vec{g} é um vetor que não muda de direção/sentido e tem magnitude que não depende do raio, podemos aplicar as leis da cinemática com aceleração constante e mostrar facilmente que as órbitas dos projéteis são parabólicas (com exceção dos projéteis com velocidade inicial nula ou vertical, que seguem trajetórias retilíneas). Na Figura 8.13 ao lado esboçamos três trajetórias de um projétil iniciando no mesmo ponto na superfície da Terra. As trajetórias são elipses com o centro da Terra em um dos focos. As porções das



Figura 8.13: Projéteis lançados da superfície da Terra possuem órbitas que são segmentos de elipses.

elipses que estão dentro da Terra devem ser desprezadas. O projétil sai e bate de volta na superfície da Terra. A trajetória azul é, dentre as três, a trajetória de maior alcance. A idéia da aproximação com \vec{g} constante é que se a elipse for bem pequena, invisível na escala da Figura 8.13, o segmento de elipse que está para fora da Terra, ou seja, a trajetória atual do projétil, não difere muito de uma parábola.

2ª) Lei das áreas.

A segunda lei de Kepler afirma que o raio que vai do Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais. A idéia está ilustrada na Figura 8.14.

Nessa figura, suponha que a bolinha preta seja um planeta orbitando o Sol (bolinha laranja no foco F_1) no sentido anti-horário. Δt é um intervalo de tempo qualquer (digamos $\Delta t = 1$ mês) e t e t' são dois instantes quaisquer. A segunda lei de Kepler diz que as duas áreas hachuradas são iguais, porque o raio $r(t)$ que vai do Sol ao planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais. Essa afirmação é equivalente a dizer que a velocidade com que o raio $r(t)$ varre área (de setor de elipse) é constante. Essa velocidade, com que o raio $r(t)$ varre área, é chamada de “velocidade setorial”. Se $A(t)$ é a área que o raio $r(t)$ está varrendo instantaneamente no instante t , então, a segunda lei de Kepler diz que:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \text{constante}$$

Apenas para introduzir a idéia usada na demonstração dessa lei, vamos considerar primeiro um planeta em uma órbita circular de raio R com velocidade de módulo constante V . Na Figura 8.15 ao lado ilustramos a área hachurada varrida pelo raio R em um intervalo de tempo Δt (uma espécie de pedaço de pizza). O raio do Sol ao planeta se assemelha ao ponteiro de um relógio nesse caso, só que girando no sentido anti-horário na figura. A área varrida é basicamente a área de um triângulo isóceles com dois lados de comprimento R (lados verdes) e a base de comprimento $V \Delta t$ (lado azul), que é o comprimento de arco que o planeta percorre no intervalo de tempo Δt . Apesar desse lado azul ser curvo (um arco), no limite $\Delta t \rightarrow 0$ ele vai se tornar reto e a área hachurada vai ser de fato a área de um triângulo isóceles, ou seja:

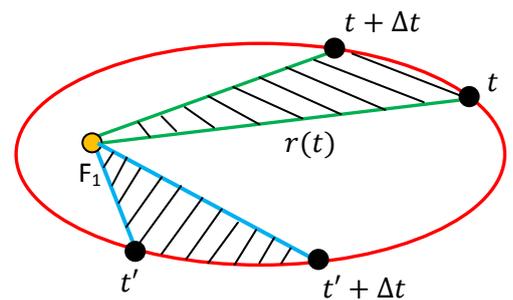


Figura 8.14: O raio do Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais. É o que afirma a segunda lei de Kepler.

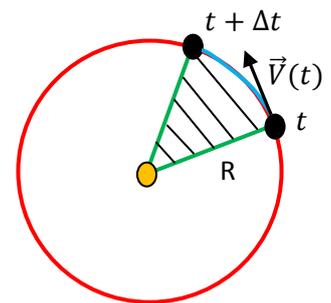


Figura 8.15: Para planetas em órbitas circulares, o raio do Sol ao planeta varre setores de círculo.

$$\Delta A(t) \cong \frac{1}{2} R V \Delta t \Rightarrow dA(t) = \frac{1}{2} R V dt$$

Portanto:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{R V}{2}$$

Vemos que nesse caso simples do movimento circular a velocidade setorial é constante, como afirma a segunda lei de Kepler, pois R e V são constantes.

O produto $R V$ sugere uma relação entre a velocidade setorial e o momento angular do planeta. De fato, se tomarmos um eixo z ortogonal ao plano da órbita e passando pelo centro do Sol, apontando para fora da página, o momento angular do planeta de massa m ao longo desse eixo é:

$$L_z = m R V$$

Esse momento angular é constante, pois R e V são constantes. De fato, já sabemos que a variação de L_z está dada por:

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z$$

sendo τ_z o torque das forças que atuam no planeta. Mas, sendo a força da gravidade do Sol a única força no planeta, e sabendo que essa força aponta diretamente para o Sol e que não possui, portanto, braço de alavanca, concluímos facilmente que $\tau_z = 0$, confirmando e ao mesmo tempo explicando o fato de L_z ser constante. Vemos então que a constância da velocidade setorial está diretamente relacionada à constância do momento angular do planeta em relação ao Sol, já que:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{L_z}{2 m}$$

Podemos imaginar que se essa relação entre a velocidade setorial e o momento angular do planeta em relação ao Sol é geral, ou seja, se ela vale também para planetas em órbitas elípticas, então a segunda lei de Kepler é, em geral, consequência direta do fato da força da gravidade ser uma força central, uma força que aponta ao longo da linha que conecta o Sol ao planeta, conforme enunciado por Newton. De fato, tomando como base a Figura 8.16 ao lado, que utiliza as mesmas ideias do caso da órbita circular, é fácil mostrar que a área hachurada do “triângulo” no limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ é:

$$dA(t) = \frac{1}{2} r(t) V(t) \text{sen}(\varphi(t)) dt$$

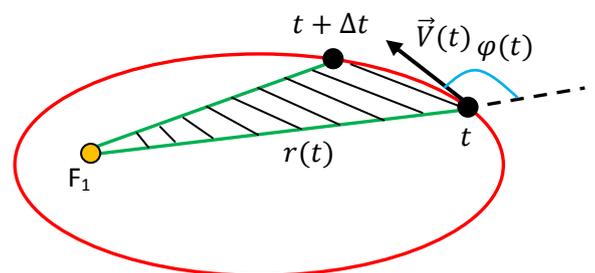


Figura 8.16: A área de um setor de elipse converge para a área de um triângulo escaleno no limite em que $\Delta t \rightarrow 0$.

sendo $\varphi(t)$ o ângulo entre a velocidade $\vec{V}(t)$ e o raio $r(t)$ do planeta (note que a altura do triângulo é $V(t) dt \sin(\pi - \varphi(t)) = V(t) dt \sin(\varphi(t))$). No caso da órbita circular, por exemplo, valem: $r(t) = R$, $V(t) = V$ e $\varphi(t) = 90^\circ$, todos parâmetros constantes. Aqui eles dependem do tempo.

Portanto, segue que:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} r(t) V(t) \sin(\varphi(t))$$

Novamente, tomando um eixo z ortogonal ao plano da elipse, passando pelo Sol, e apontando para fora da página concluímos que (conforme ilustrado na Figura 8.17 ao lado):

$$L_z(t) = m r(t) V(t) \sin(\varphi(t))$$

Portanto, como já havia sido sugerido para o caso da órbita circular:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{L_z(t)}{2m}$$

Esse resultado mostra a validade da segunda lei de Kepler em geral, dado que o momento angular $L_z(t) = m r(t) V(t) \sin(\varphi(t))$, mesmo que isso não seja evidente, não depende do tempo t ($L_z(t) = L_z$).

Resumindo, a segunda lei de Kepler é consequência unicamente do fato de que a força da gravidade entre duas partículas está ao longo da linha que conecta essas partículas, conforme enunciado por Newton. Nesse sentido, a segunda lei de Kepler vale também para as órbitas parabólicas e hiperbólicas dos corpos que possuem velocidades iguais ou superiores à velocidade de escape. De forma análoga à primeira lei, a segunda lei não se restringe ao movimento dos planetas. Podemos afirmar que: o raio que vai do centro do Sol ao centro do cometa Halley varre áreas iguais em tempos iguais; o raio que vai do centro da Terra ao centro da Lua varre áreas iguais em tempos iguais; o raio que vai do centro da Terra ao centro de massa da Estação Espacial Internacional varre áreas iguais em tempos iguais; o raio que vai do centro da Terra ao centro de massa de uma maçã em queda livre varre áreas iguais em tempos iguais etc.

3ª) Lei dos períodos

Os movimentos dos planetas são periódicos, ou seja, se repetem indefinidamente. O período orbital T , ou simplesmente período, é o tempo que o planeta demora para percorrer uma vez sua trajetória completa em torno do Sol. No caso da Terra, por exemplo, esse período é de 1 ano, cerca de 365 dias. A lei dos períodos de Kepler relaciona o período com o tamanho da órbita de um planeta, mais especificamente com o semi-eixo

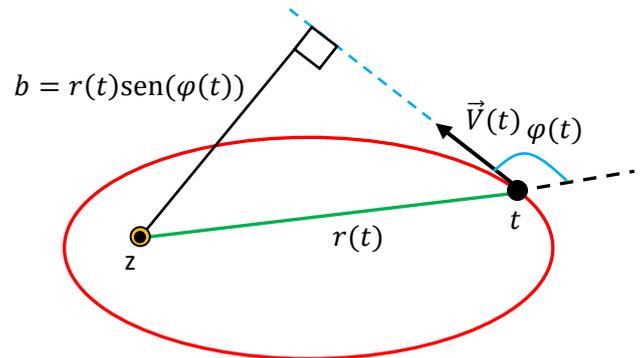


Figura 8.17: O braço de alavanca do momento linear do planeta é $b = r(t) \sin(\varphi(t))$.

maior a . Quanto maior a órbita (maior a) maior o período T . Mais especificamente, a terceira lei de Kepler diz que para todos os planetas de um sistema planetário, o quadrado do período é proporcional ao cubo do semi-eixo maior, ou seja:

$$T^2 = k a^3$$

sendo k uma constante de proporcionalidade, característica do sistema planetário. Se fizermos um gráfico de T^2 versus a^3 , vamos enxergar uma reta que passa pela origem, de inclinação k .

A demonstração da validade da lei dos períodos para o caso particular de órbitas circulares é simples e de fato já foi feita anteriormente, quando discutimos o movimento de satélites. Vamos repetir essa demonstração aqui. Suponha um planeta de massa m orbitando uma estrela de massa M em uma órbita circular. Então, o raio R da órbita e a velocidade orbital V do MCU do planeta estão relacionados por:

$$G \frac{M m}{R^2} = m \frac{V^2}{R} \Rightarrow V^2 = G \frac{M}{R}$$

Já usamos esse resultado outras vezes, mas vale a pena ressaltar que ele só vale porque a força da gravidade é proporcional à massa m do planeta, que aparece dos dois lados da equação e então desaparece.

Sabemos também que para uma órbita circular (de comprimento $2 \pi R$):

$$V = \frac{2 \pi R}{T}$$

Portanto, essas duas equações levam a:

$$V^2 = G \frac{M}{R} = \left(\frac{2 \pi R}{T} \right)^2$$

Segue que:

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{G M} R^3$$

Ou seja, a constante k introduzida por Kepler para os planetas que orbitam M é:

$$k = \frac{4 \pi^2}{G M}$$

Note que não se trata de uma constante universal, pois envolve a massa M do corpo que está sendo orbitado (uma estrela, por hipótese). Trata-se de uma constante no sentido de que não depende da massa m do planeta. A razão entre T^2 e R^3 é a mesma para todos os planetas que orbitam M .

A demonstração da validade da lei dos períodos em geral, ou seja, para órbitas elípticas, requer o cálculo de várias grandezas relacionadas a esse movimento, cálculo que não faremos aqui, dada sua complexidade. Assim sendo, apenas deixaremos registrado, sem demonstração, que a lei dos períodos tem

validade geral: para um planeta de massa m orbitando uma estrela de massa M em uma órbita elíptica de semi-eixo maior a vale:

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{G M} a^3$$

Que é o resultado para órbitas circulares apenas trocando o R por a (a massa m do planeta não aparece nessa relação).

Podemos dizer que a lei dos períodos de Kepler é consequência da proporcionalidade entre a força da gravidade e a massa do corpo que sofre a força, conforme estabelecido por Newton.

Para os planetas do nosso sistema solar vale:

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{G M_S} a^3$$

sendo M_S a massa do Sol. A lei dos períodos permite então a medida da massa do Sol, a partir do conhecimento dos períodos e dos semi-eixos maiores das órbitas dos planetas. A distância média da Terra ao Sol, por exemplo, pode ser estimada através de cálculos geométricos (triangulação). Sendo a_T essa distância média, sabemos que $a_T \cong 1,5 \times 10^{11}$ m. Como para a Terra vale $T_T = 1$ ano ($\cong 3,15 \times 10^7$ s), obtemos:

$$T_T^2 = \frac{4 \pi^2}{G M_S} a_T^3 \Rightarrow M_S = \frac{4 \pi^2 a_T^3}{G T_T^2} \cong 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Observando o movimento do planeta Mercúrio, vemos que seu período orbital é $T_M \cong 88$ dias. Portanto, da lei dos períodos de Kepler segue que:

$$\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{4 \pi^2}{G M_S} = \frac{T_M^2}{a_M^3}$$

O que leva a:

$$a_M^3 = \left(\frac{T_M}{T_T}\right)^2 a_T^3$$

Logo, o semi-eixo maior da órbita elíptica de Mercúrio é $a_M \cong 0,4 a_T$, ou seja, $a_M \cong 5,8 \times 10^{10}$ m.

Com base nesses resultados, e sabendo que a órbita de Mercúrio possui excentricidade $\epsilon_M \cong 0,21$, podemos fazer uma figura em escala mostrando as órbitas da Terra e de Mercúrio, para comparação. Na Figura 8.17 ao lado mostramos essas órbitas. A curva vermelha é basicamente um círculo, e representa a órbita da Terra em torno do Sol, que estaria no centro desse círculo. A órbita de

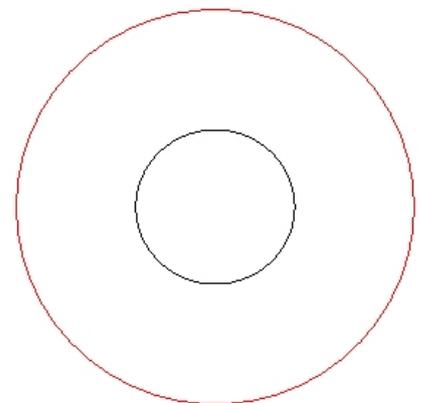


Figura 8.17: Ilustração em escala das órbitas da Terra (vermelha) e de Mercúrio (preta).

Mercúrio é um pouco achatada (curva preta) e tem semi-eixo maior igual a 40% do semi-eixo maior da órbita da Terra.

Vale aqui a mesma observação que já fizemos sobre as outras duas leis de Kepler. A lei dos períodos é consequência da lei da gravidade e não vale apenas para planetas. Podemos dizer que para todos os corpos que orbitam a Terra (de massa M_T), ou seja, a Lua e todos os satélites artificiais em volta da Terra, vale:

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{G M_T} a^3$$

Por exemplo, já sabemos que a Estação Espacial Internacional (EEI) está a cerca de 400 km de altura (h) em uma órbita quase circular. Qual o período da órbita da EEI? Note que o raio da órbita é $a_{EEI} = R_T + h$, portanto:

$$T_{EEI}^2 = \frac{4 \pi^2}{G M_T} (R_T + h)^3$$

Usando os valores numéricos que já definimos anteriormente ($M_T \cong 6 \times 10^{24}$ kg e $R_T \cong 6.400$ km) obtemos:

$$T_{EEI} \cong 1,5 \text{ h}$$

Em apenas 1,5 h (1 h e 30 minutos) a EEI dá uma volta completa em sua órbita em torno da Terra.

Resumindo tudo que estudamos nesse capítulo, podemos dizer que a força da gravidade entre o Sol e um planeta faz com que esse planeta orbite periodicamente o Sol em uma trajetória elíptica, percorrendo essa órbita mais rapidamente quando próximo do Sol e mais lentamente quando distante do Sol. As leis da natureza determinantes para esse movimento são a lei de força que decai com o quadrado da distância, a conservação da energia mecânica e a conservação do momento angular.

Sabemos que o movimento é relativo e alguém poderia argumentar que não estavam errados aqueles que, no passado, afirmavam que o Sol orbita a Terra. Afinal, se a Terra orbita o Sol, então o Sol orbita a Terra. É verdade, tanto como quando um motorista de ônibus afirma que as árvores e as casas estão se movendo, e o ônibus está parado, em relação a ele. Nós aqui na Terra vemos tudo se mover em torno de nós, a Lua, os planetas, o Sol e as demais estrelas. Daí deve ter vindo a quimera de que estávamos estáticos no centro do universo.

Um observador na Terra vê o Sol descrever uma órbita elíptica em torno da Terra. Um observador no Sol vê a Terra descrever uma órbita elíptica em torno do Sol (esse foi o referencial que escolhemos para discutir os movimentos dos planetas). Quem está certo? Todos estão certos, o movimento é relativo. Mas, poderíamos pensar no que diria um observador mais neutro, que não estivesse nem na Terra e nem no Sol, que estivesse observando esse par de corpos lá do espaço. O que ele diria sobre o movimento da Terra e do Sol? Ele diria que o Sol orbita a Terra? Não. Ele diria que a Terra orbita o Sol? Não. Ele diria que a Terra e o Sol

orbitam ao mesmo tempo o centro de massa do sistema Terra+Sol. Já discutimos essa ideia no capítulo 4. A ideia é simples: o Sol faz força na Terra, digamos \vec{F} e a Terra adquire uma aceleração \vec{F}/M_T na direção do Sol. A Terra, por sua vez, faz força no Sol, $-\vec{F}$ e o Sol adquire uma aceleração $-\vec{F}/M_S$ na direção da Terra. O CM desse sistema não está nem aí para isso, pois somente forças externas ao sistema Sol+Terra podem exercer influência (acelerar) nesse CM. Daí, se desprezarmos essas forças externas (que são exercidas pelos outros planetas, pela Lua, pelo centro da galáxia etc.), concluímos que o CM fica em MRU, ou em repouso, dependendo do observador inercial, enquanto que a Terra e o Sol giram em torno desse CM, graças às suas acelerações. Note, como $M_S \gg M_T$, segue que a aceleração do Sol é muito, muito mesmo, menor que a aceleração da Terra. De fato, o CM do sistema Sol+Terra está bem próximo do centro do Sol e, por isso, enquanto a Terra percorre uma órbita elíptica grande, o Sol percorre uma órbita elíptica bem menor. O Observador neutro externo pode até olhar e, inadvertidamente, dizer que ele vê a Terra orbitando o Sol.

As Leis de Kepler se referem a esse movimento, da Terra e de todos os planetas, em órbitas elípticas com o CM do Sistema Solar em um dos focos, movimento que seria observado por um observador neutro externo ao Sistema Solar. Um observador que não vai privilegiar nenhum dos corpos que fazem parte desse sistema. Ao afirmar que os planetas orbitam o Sol, estamos fazendo essa aproximação, de que o CM do Sistema Solar está no centro do Sol, apesar disso não ser estritamente verdadeiro, e que o Sol, portanto, é um referencial inercial (em MRU, $-\vec{F}/M_S \cong 0$). Ao fazer essa aproximação vamos cometer alguns erros nos cálculos das órbitas dos planetas, erros que são muito pequenos e que, por isso, não poderiam ser percebidos por Kepler em sua época. A primeira lei de Kepler afirma que os planetas orbitam o Sol, o que não está muito distante da verdade. Um cálculo mais preciso das órbitas dos planetas deve levar em conta que o Sol é apenas mais um corpo nesse sistema, que sofre força, acelera e também tem sua órbita. O CM desse sistema está no foco de todos os movimentos.

A lei dos períodos de Kepler, por exemplo, fica modificada quando levamos em conta o movimento orbital do Sol, em torno do CM do Sistema Solar. A proporcionalidade entre T^2 e a^3 fica:

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{G (M_S + m)} a^3$$

sendo M_S a massa do Sol e m a massa do planeta. Note que nesse caso a lei deixa de ser igual para todos os planetas, que é o que ocorre quando desprezamos m pelo fato de valer $m \ll M_S$ em geral. Essa aproximação está implícita na lei dos períodos de Kepler, pois, como já mencionamos, Kepler afirmou que o Sol está no foco das órbitas e não o CM do sistema solar. Novamente, o erro que cometemos ao desprezar m na lei dos períodos é pequeno e não poderia ser percebido por Kepler em sua época.

8.7 Exercícios Resolvidos

ER 8.1) Dois planetas esféricos se atraem mutuamente pela ação da gravidade. O planeta A possui massa M e raio R e o planeta B possui massa $9M$ e raio $3R$. Os centros dos planetas estão separados por uma distância $1000R$.

Dados: M , R e G .

a) Calcule o módulo da força gravitacional que atua no planeta A.

De acordo com a lei da gravitação de Newton e o teorema das cascas:

$$F_A = G \frac{M_A M_B}{r^2}$$

com $M_A = M$, $M_B = 9M$ e $r = 1000R$. Portanto:

$$F_A = \frac{9}{(1000)^2} G \frac{M^2}{R^2} = 9 \times 10^{-6} G \frac{M^2}{R^2}$$

b) Calcule o módulo da força gravitacional que atua no planeta B.

A força que A faz em B e a força que B faz em A formam um par ação-reação, de acordo com a terceira lei de Newton. Portanto:

$$F_B = F_A = 9 \times 10^{-6} G \frac{M^2}{R^2}$$

c) Calcule a razão entre as acelerações da gravidade nas superfícies dos planetas A e B, g_A/g_B .

Sabemos que a aceleração da gravidade na superfície de um corpo esférico de massa M e raio R é:

$$g(M, R) = G \frac{M}{R^2}$$

Portanto:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{g(M, R)}{g(9M, 3R)} = \frac{G M (3R)^2}{R^2 G 9M} = 1$$

ER 8.2) A massa da Terra é 81 vezes a massa da Lua ($M_T = 81 M_L$) e o raio da Terra é 3,7 vezes o raio da Lua ($R_T = 3,7 R_L$). Uma bolinha de massa m é solta a partir do repouso de uma pequena altura h da superfície da Terra. Imediatamente antes de tocar o solo, a velocidade dessa bolinha é V_T . Essa mesma bolinha é solta a partir do repouso da mesma altura h da superfície da Lua. Imediatamente antes de tocar o solo, a velocidade dessa bolinha é V_L . O fato da altura h ser pequena permite considerar que a aceleração da gravidade é constante durante a queda da bolinha e desprezar o arraste com o ar aqui na Terra. Calcule o valor numérico para a razão V_T/V_L .

Dados: $M_T = 81 M_L$ e $R_T = 3,7 R_L$.

Desprezando o arraste com o ar aqui na Terra, podemos apelar para a conservação da energia mecânica na queda da bolinha:

$$K + U_g = \text{constante}$$

No contexto em que desprezamos a variação da aceleração da gravidade g com a altura, podemos considerar que $U_g = m g h$. Portanto, para a queda aqui na Terra, da conservação da energia mecânica, obtemos:

$$0 + m g_T h = \frac{1}{2} m V_T^2$$

sendo g_T a aceleração da gravidade na vizinhança da superfície da Terra. Concluímos que:

$$V_T = \sqrt{2 g_T h}$$

Analogamente, para a queda na Lua (onde não precisamos desprezar o arraste do ar porque não há atmosfera):

$$0 + m g_L h = \frac{1}{2} m V_L^2$$

sendo g_L a aceleração da gravidade na vizinhança da superfície da Lua. Segue que:

$$V_L = \sqrt{2 g_L h}$$

Portanto:

$$\frac{V_T}{V_L} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}}$$

Sabendo que a aceleração da gravidade na superfície de um corpo esférico de massa M e raio R é:

$$g(M, R) = G \frac{M}{R^2}$$

Obtemos:

$$g_T = G \frac{M_T}{R_T^2} \quad \text{e} \quad g_L = G \frac{M_L}{R_L^2}$$

Portanto:

$$\frac{V_T}{V_L} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{M_T}{M_L} \left(\frac{R_L}{R_T}\right)^2} = \frac{R_L}{R_T} \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \frac{R_L}{3,7 R_L} \sqrt{\frac{81 M_L}{M_L}} = \frac{9}{3,7} \cong 2,4$$

Note que a razão entre as acelerações da gravidade na Lua e na Terra é:

$$\frac{g_T}{g_L} \cong (2,4)^2 = 5,76$$

ER 8.3) Um projétil de massa m é lançado da superfície de um planeta de massa M e raio R com velocidade de módulo V_0 na direção radial (direção vertical local). Calcule a altura máxima, em relação à superfície do planeta, que o projétil atinge. Considere que o planeta não possui atmosfera.

Dados: m, M, R, V_0 .

Não havendo atrito com o ar, podemos apelar para a conservação da energia mecânica na queda do projétil (queda livre):

$$K + U_g = \text{constante}$$

Mais especificamente:

$$\frac{1}{2} m V^2 - G \frac{M m}{r} = \text{constante}$$

Comparando então a posição de partida, onde $r = R$ e $V = V_0$, com a posição de altura máxima, onde $r = R + h_{MAX}$ e $V = 0$, segue que:

$$\frac{1}{2} m V_0^2 - G \frac{M m}{R} = 0 - G \frac{M m}{R + h_{MAX}}$$

Portanto:

$$V_0^2 - 2G \frac{M}{R} = -2G \frac{M}{R + h_{MAX}}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{R + h_{MAX}} = \frac{1}{R} - \frac{V_0^2}{2 M G}$$

Concluindo:

$$h_{MAX} = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{V_0^2}{2 M G}} - R$$

Definindo r_{MAX} como sendo o raio máximo do projétil em relação ao centro do planeta ($h_{MAX} = r_{MAX} - R$) obtemos:

$$r_{MAX} = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{V_0^2}{2 M G}} = \frac{2 M G}{V_{ESC}^2 - V_0^2}$$

sendo $V_{ESC} = \sqrt{\frac{2 M G}{R}}$ a velocidade de escape da massa M a partir do raio R .

O resultado original para h_{MAX} nos permite calcular a velocidade de escape a partir da superfície do planeta de massa M . Fazendo $h_{MAX} \rightarrow \infty$ obtemos:

$$\frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{V_0^2}{2 M G}} - R \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{V_0^2}{2 M G}} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{R} - \frac{V_0^2}{2 M G} \rightarrow 0 \Rightarrow V_0 = V_{ESC} = \sqrt{\frac{2 M G}{R}}$$

ER 8.4) Observa-se um cometa de massa m passando na vizinhança do Sol. Medições precisas indicaram que no instante em que o cometa estava a uma distância R do centro do Sol, sua velocidade (em relação ao Sol) era, em módulo, $V = \sqrt{\frac{GM_S}{3R}}$, sendo M_S a massa do Sol.

Dados: R , M_S e $V = \sqrt{\frac{GM_S}{3R}}$.

a) Mostre que esse cometa não está em uma órbita circular em torno do Sol.

Se a órbita do cometa fosse circular, teria que valer em qualquer instante a relação entre os parâmetros orbitais que deduzimos no texto para órbitas circulares, qual seja:

$$V^2 = G \frac{M_S}{R}$$

Os dados experimentais indicam que vale, no momento da observação:

$$V^2 = G \frac{M_S}{3R}$$

Segue que a órbita do cometa não é circular. Ela é, portanto, elíptica.

b) Mostre que a energia mecânica desse cometa é negativa (assim sendo, o cometa nunca vai escapar da atração gravitacional do Sol).

A energia mecânica do cometa é:

$$E = K + U_g = \frac{1}{2}mV^2 - G \frac{M_S m}{R}$$

Portanto:

$$E = \frac{1}{2}m \left(G \frac{M_S}{3R} \right) - G \frac{M_S m}{R} = -\frac{5}{6} G \frac{M_S m}{R}$$

Note que energias mecânicas negativas correspondem a velocidades menores que a velocidade de escape. De fato, a velocidade de escape da gravidade do Sol a partir de uma posição distanciada R do centro do Sol é:

$$V_{ESC} = \sqrt{\frac{2GM_S}{R}}$$

Portanto, a energia mecânica de um corpo de massa m , velocidade V e distância R do centro da esfera de massa M_S pode ser escrita como:

$$E = K + U_g = \frac{1}{2}mV^2 - G \frac{M_S m}{R} = \frac{1}{2}m(V^2 - V_{ESC}^2)$$

Da expressão acima vemos que se $E < 0$, então $V < V_{ESC}$, de onde concluímos que esse corpo está em uma órbita elíptica (ou circular, como caso particular). Analogamente, um corpo com $E = 0$ ($V = V_{ESC}$) tem órbita parabólica e finalmente $E > 0$ ($V > V_{ESC}$) corresponde a uma órbita hiperbólica.

c) Calcule a força, em módulo, que o Sol faz no cometa no instante em que a velocidade do cometa atinge o

$$\text{valor } V_X = \sqrt{\frac{2 G M_S}{3 R}}.$$

Essa força vai ser dada pela lei da gravidade de Newton:

$$F = G \frac{M_S m}{R_X^2}$$

sendo R_X a distância do cometa ao centro do Sol no instante em que sua velocidade é V_X . Não conhecemos o valor de R_X , mas podemos apelar para a conservação da energia mecânica do cometa para relacionar R_X com R . Igualando as energias mecânicas do cometa na posição R e na posição R_X obtemos a equação:

$$\frac{1}{2} m V^2 - G \frac{M m}{R} = \frac{1}{2} m V_X^2 - G \frac{M m}{R_X}$$

Substituindo $V^2 = G \frac{M}{3 R}$ e $V_X^2 = G \frac{2 M}{3 R}$ obtemos:

$$G \frac{M}{3 R} - 2 G \frac{M}{R} = G \frac{2 M}{3 R_X} - 2 G \frac{M}{R_X}$$

Ou seja:

$$-\frac{5}{3} \frac{1}{R} = -\frac{4}{3} \frac{1}{R_X}$$

Concluindo:

$$\frac{1}{R_X} = \frac{5}{4} \frac{1}{R}$$

Portanto:

$$F = G \frac{M m}{R_X^2} = G M m \left(\frac{5}{4} \frac{1}{R} \right)^2 = \frac{25}{16} G \frac{M m}{R^2}$$

ER 8.5) Uma nave espacial está inicialmente em uma órbita circular a uma altura h_0 da superfície da Terra. Liga-se um foguete acoplado a essa nave para levá-la a uma outra órbita circular, de altura maior h_F . Calcule o trabalho que esse foguete deve realizar para produzir essa mudança de órbita.

Dados: G , M (massa da Terra), R (raio da Terra), m (massa da nave), h_0 e h_F .

O foguete deve realizar um trabalho igual à variação na energia mecânica da nave nessa mudança de órbita. A energia mecânica da nave é dada por:

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - G \frac{M m}{r}$$

com $r = R + h$. Note que o enunciado do problema se refere apenas à variação na altura da nave, mas sua velocidade também varia nessa mudança de órbita. De fato, para uma órbita circular de raio r em torno da Terra sabemos que vale o vínculo entre V e r :

$$V^2 = G \frac{M}{r}$$

Portanto, a energia mecânica em uma órbita circular é dada por:

$$E = \frac{1}{2} m \left(G \frac{M}{r} \right) - G \frac{M m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M m}{r}$$

O trabalho W do foguete será então:

$$W = E(h_F) - E(h_0) = -\frac{1}{2} G \frac{M m}{R + h_F} - \left(-\frac{1}{2} G \frac{M m}{R + h_0} \right) = \frac{G M m}{2} \left\{ \frac{1}{R + h_0} - \frac{1}{R + h_F} \right\}$$

Note que W é positivo, pois estamos supondo que $h_F > h_0$. Gasta-se energia para realizar essa mudança de órbita.

ER 8.6) Uma nave espacial está em uma órbita circular a uma altura h da superfície do Sol. Calcule o valor numérico da razão V/V_{ESC} entre a velocidade orbital (V) da nave e a velocidade de escape (V_{ESC}) que essa nave deveria ter para escapar da atração gravitacional do Sol, a partir de sua órbita de altura h .

Para uma órbita circular de raio r em torno de M a velocidade orbital V deve ser tal que:

$$V^2 = G \frac{M}{r}$$

Por outro lado, a velocidade de escape da gravidade de M a partir de uma distância (raio) r é:

$$V_{ESC} = \sqrt{\frac{2 G M}{r}}$$

Portanto, qualquer que seja a altura h definida no enunciado, a razão entre as velocidades é:

$$\frac{V}{V_{ESC}} = \frac{\sqrt{\frac{G M}{r}}}{\sqrt{\frac{2 G M}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ER 8.7) Dois asteróides (A e B) em órbitas circulares em torno do Sol possuem energias mecânicas iguais, mas a velocidade orbital do asteróide A é o dobro da velocidade orbital do asteróide B. Calcule a razão m_A/m_B entre as massas dos asteróides.

A energia mecânica de qualquer um dos asteróides é:

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - G \frac{M m}{r}$$

sendo M a massa do Sol. A energia depende da velocidade e do raio da órbita r . Podemos expressar essa energia em termos apenas da velocidade utilizando a relação entre V e r para uma órbita circular:

$$V^2 = G \frac{M}{r}$$

Ficamos com:

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - m V^2 = -\frac{1}{2} m V^2$$

Igualando então as energias dos dois asteróides obtemos:

$$E_A = E_B \Rightarrow -\frac{1}{2} m_A V_A^2 = -\frac{1}{2} m_B V_B^2$$

Portanto:

$$\frac{m_A}{m_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^2$$

Conforme o enunciado, $V_A = 2 V_B$. Concluimos então que:

$$\frac{m_A}{m_B} = \left(\frac{V_B}{2V_B}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ER 8.8) Um asteróide gira em torno do Sol em uma órbita elíptica cujo semi-eixo maior é quatro vezes maior que o semi-eixo maior da órbita da Terra. Calcule o valor numérico do período orbital do asteróide, em anos.

A lei dos períodos de Kepler diz que para todos os corpos que orbitam o Sol:

$$T^2 = k a^3$$

sendo k uma constante (que depende da massa do Sol). Portanto, para a Terra vale:

$$T_T^2 = k a_T^3$$

Analogamente, para o asteróide vale:

$$T_A^2 = k a_A^3$$

Dividindo uma equação pela outra obtemos:

$$\left(\frac{T_A}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{a_A}{a_T}\right)^3 \Rightarrow T_A = \left(\frac{a_A}{a_T}\right)^{3/2} T_T$$

Portanto, sendo $T_T = 1$ ano e $a_A = 4 a_T$, obtemos:

$$T_A = \left(\frac{4 a_T}{a_T}\right)^{3/2} 1 \Rightarrow T_A = 8 \text{ anos}$$

ER 8.9) Dois asteróides pequenos (de massas M_A e M_B) estão se atraindo mutuamente no espaço vazio. Inicialmente ($t=0$) os asteróides estão em repouso e separados entre si por uma distância L . Eles são então soltos e passam a se aproximar devido à atração gravitacional entre eles. Calcule os módulos das velocidades dos asteróides, V_A e V_B , quando a distância entre eles for apenas $L/2$.

Dados: M_A , M_B , G e L .

Vamos tratar os asteróides como partículas. A idéia é que os asteróides vão se atrair mutuamente com a força da gravidade de magnitude dada por:

$$F(t) = G \frac{M_A M_B}{(r(t))^2}$$

sendo $r(t)$ a distância entre os asteróides no instante t . A força entre os asteróides vai ficando mais intensa, a medida que eles se aproximam um do outro. Suas acelerações são, portanto, funções do tempo, assim como suas velocidades. Este é um problema típico em que a abordagem do ponto de vista dos conceitos de energia é mais simples do que a abordagem pelas forças, acelerações e trajetórias. De fato, não havendo forças externas no sistema de dois asteróides, sua energia mecânica se conserva, ou seja:

$$E^{(ANTES)} = E^{(DEPOIS)} \Rightarrow 0 + 0 - G \frac{M_A M_B}{L} = \frac{1}{2} M_A V_A^2 + \frac{1}{2} M_B V_B^2 - G \frac{M m}{L/2}$$

Portanto, as velocidades dos asteróides distanciados por $L/2$ se relacionam por:

$$M_A V_A^2 + M_B V_B^2 = G \frac{M_A M_B}{L}$$

A ausência de forças externas no sistema de dois asteróides garante também a conservação do momento linear \vec{P} do sistema. Os momentos lineares dos dois asteróides estão ao longo do eixo que passa por eles, que chamaremos de x , apontando do asteróide A para o asteróide B. A conservação de P_x leva a:

$$P_x^{(ANTES)} = P_x^{(DEPOIS)} \Rightarrow 0 + 0 = M_A V_A - M_B V_B \Rightarrow V_B = \frac{M_A}{M_B} V_A$$

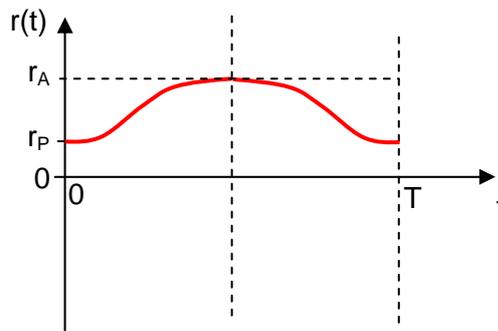
Substituindo esse resultado na equação da energia obtemos:

$$M_A V_A^2 + M_B \left(\frac{M_A}{M_B} V_A \right)^2 = G \frac{M_A M_B}{L} \Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{M_B}{1 + \frac{M_A}{M_B}} \frac{G}{L}} = M_B \sqrt{\frac{G/L}{M_A + M_B}}$$

Analogamente:

$$V_B = \sqrt{\frac{M_A}{1 + \frac{M_B}{M_A}} \frac{G}{L}} = M_A \sqrt{\frac{G/L}{M_A + M_B}}$$

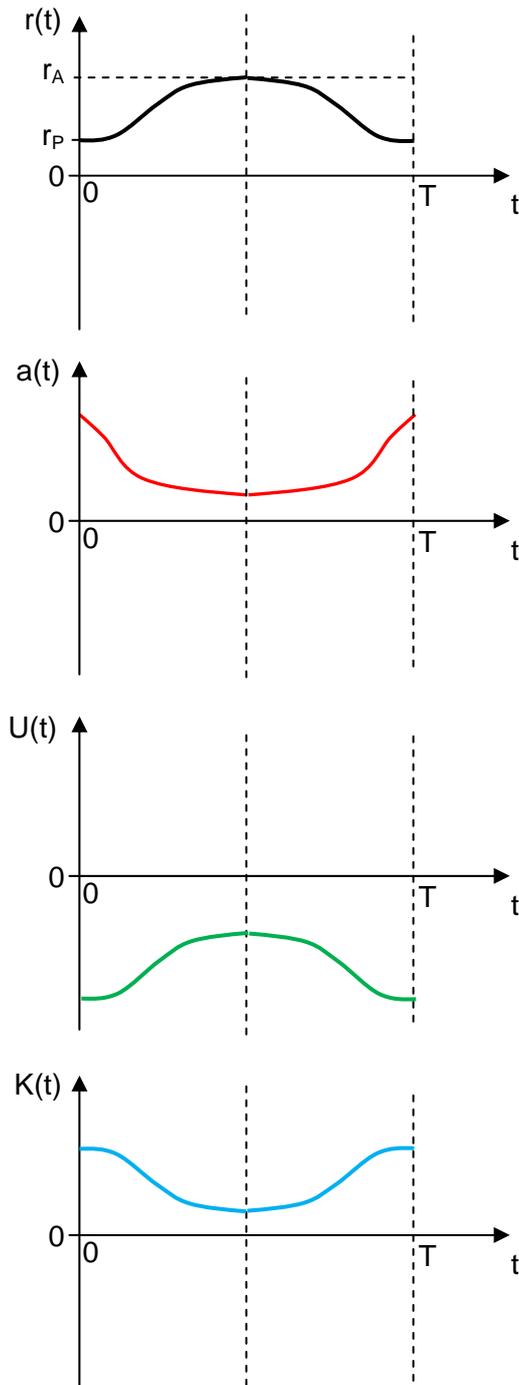
ER 8.10) Considere um planeta em uma órbita elíptica. No periélio (o ponto da órbita mais próximo do Sol) a distância entre o planeta e o Sol é igual a r_p ; no afélio (o ponto da órbita mais afastado do Sol) essa distância é igual a r_A . Levando em conta o gráfico abaixo, que mostra a distância do planeta ao Sol, $r(t)$, em função do tempo t , em um período orbital T do planeta, esboce nos sistemas de eixos abaixo as curvas do módulo da aceleração $a(t)$, da energia potencial gravitacional $U(t)$ e da energia cinética $K(t)$ do planeta, em função do tempo t . Ao lado de cada gráfico escreva as leis (equações) que justificam sucintamente seu raciocínio.



O gráfico de $r(t)$ mostra que a distância do planeta ao Sol oscila periodicamente com o tempo. Em $t=0$ o planeta estava em sua distância mínima r_p em relação ao Sol. Com o passar do tempo ele foi se afastando do Sol, até atingir uma distância máxima r_A e retornar, se aproximando novamente do Sol e assim sucessivamente.

Na próxima página repetimos esse gráfico do raio e esboçamos os gráficos das outras grandezas orbitais em função do tempo.

Resumindo, enquanto o planeta oscila, se aproximando e se afastando do Sol, a magnitude de sua aceleração oscila também. Quanto mais próximo do Sol, maior a aceleração do planeta. As energias potencial gravitacional e cinética também oscilam. Quando o planeta se aproxima do Sol sua energia cinética aumenta, enquanto que sua energia potencial diminui. A energia mecânica, por sua vez, se mantém constante.



A força que o Sol faz no planeta, que é, por hipótese a força resultante no planeta, é dada por:

$$F(t) = G \frac{M_S m}{(r(t))^2}$$

sendo M_S a massa do Sol e m a massa do planeta.

De acordo com a segunda lei de Newton:

$$F(t) = m a(t)$$

Portanto, esboçamos $a(t)$ tendo em vista a relação:

$$a(t) \propto \frac{1}{(r(t))^2}$$

A energia potencial gravitacional do planeta é:

$$U(t) = -G \frac{M_S m}{r(t)}$$

Portanto, esboçamos $U(t)$ tendo em vista a relação:

$$U(t) \propto -\frac{1}{r(t)}$$

A energia mecânica do planeta é constante, o que leva à relação:

$$K(t) + U(t) = \text{constante} = C$$

Portanto, esboçamos $K(t)$ tendo em vista a relação:

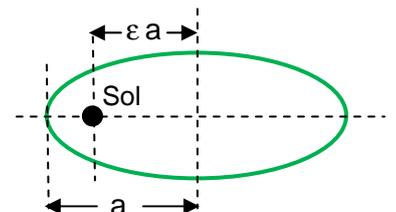
$$K(t) \propto \frac{1}{r(t)} + C$$

Vale lembrar também que $K(t)$ é sempre positiva.

ER 8.11) A figura ao lado ilustra a órbita elíptica do cometa Halley. A órbita possui excentricidade ϵ e semi-eixo maior a .

Dados: ϵ e a .

a) Calcule as distâncias r_A e r_P do cometa ao Sol no afélio (ponto da órbita mais afastado do Sol) e no periélio (ponto da órbita mais próximo do Sol).

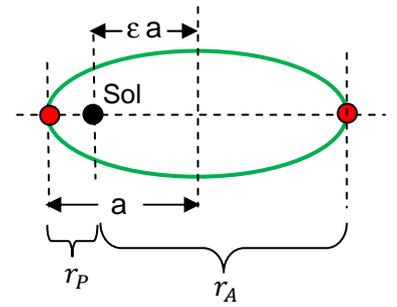


Da figura ao lado vemos que:

$$r_A = a + \varepsilon a = (1 + \varepsilon) a$$

$$r_P = a - \varepsilon a = (1 - \varepsilon) a$$

Note que para $\varepsilon = 0$, obtemos $r_A = r_P = a$, válido para uma órbita circular de raio a .



b) Usando a conservação do momento angular, calcule a razão V_P / V_A entre os módulos das velocidades do cometa no periélio (V_P) e no afélio (V_A).

Considere um eixo z saindo ortogonalmente da página, passando pelo Sol. Como não há torques no cometa ao longo desse eixo, já que a força da gravidade no cometa não possui braço de alavanca, concluímos que há conservação do momento angular L_z do cometa, conforme já discutimos no contexto da lei das áreas de Kepler. Portanto:

$$L_z^{(A)} = L_z^{(P)}$$

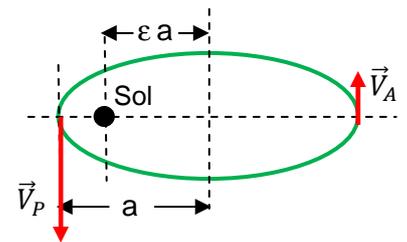
Sendo m a massa do cometa, obtemos, de acordo com a figura ao lado:

$$m r_A V_A = m r_P V_P$$

Portanto:

$$\frac{V_P}{V_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

Note que para $\varepsilon = 0$, obtemos $V_A = V_P$, válido para uma órbita circular (MCU).



c) Sendo G a constante de gravitação universal e M a massa do Sol, use a conservação da energia mecânica para calcular o módulo V_P da velocidade do cometa no periélio em termos de ε , a , G e M .

A conservação da energia mecânica leva a:

$$E_A = E_P \Rightarrow \frac{1}{2} m V_A^2 - G \frac{M m}{r_A} = \frac{1}{2} m V_P^2 - G \frac{M m}{r_P}$$

Podemos eliminar V_A através da relação obtida em (b):

$$V_A = \frac{r_P}{r_A} V_P$$

Portanto:

$$\left(\frac{r_P}{r_A} V_P \right)^2 - 2 G \frac{M}{r_A} = V_P^2 - 2 G \frac{M}{r_P}$$

Segue que:

$$2 G M \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right) = V_P^2 \left(1 - \left(\frac{r_P}{r_A} \right)^2 \right)$$

Finalmente:

$$V_P = \sqrt{\frac{2 G M \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right)}{1 - \left(\frac{r_P}{r_A} \right)^2}} = \sqrt{\frac{G M}{a} \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}}$$

A velocidade no afélio é dada por:

$$V_A = \frac{r_P}{r_A} V_P = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \sqrt{\frac{G M}{a} \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{G M}{a} \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}}$$

Note que para $\epsilon = 0$, obtemos:

$$V_P = V_A = \sqrt{\frac{G M}{a}}$$

que é o resultado válido para uma órbita circular de raio a .

É interessante registrar aqui que notamos nessa questão uma tendência em se utilizar a expressão da aceleração centrípeta para calcular a velocidade V_P , através de:

$$a_{cen}(P) = \frac{V_P^2}{r_P}$$

Utilizando-se para a aceleração centrípeta a expressão da aceleração da gravidade de M em r_P :

$$a_{cen}(P) = \frac{GM}{r_P^2}$$

Obteríamos:

$$V_P^2 = \frac{GM}{r_P} = \frac{G M}{a} \frac{1}{1 - \epsilon} \Rightarrow V_P = \sqrt{\frac{G M}{a} \frac{1}{1 - \epsilon}} \neq \sqrt{\frac{G M}{a} \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}}$$

Que, como podemos ver, é um resultado diferente do que obtivemos anteriormente. É um resultado errado. É errado porque a expressão correta para a aceleração centrípeta em P é:

$$a_{cen}(P) = \frac{V_P^2}{R_P}$$

Sendo R_P o raio de curvatura da órbita, ou seja, da elipse, no ponto P (R_P é o raio do círculo osculante à elipse em P). A fonte de erro aqui está na ideia equivocada de que vale $R_P = r_P$. Mas note, essa mesma ideia levaria à conclusão de que no afélio vale $R_A = r_A$, ou seja, que $R_P \neq R_A$, o que seria um absurdo, dada a

simetria da elipse. É claro que deve valer $R_p = R_A$ pois a metade direita da elipse é exatamente igual à metade esquerda. Resumindo, é verdade que:

$$a_{cen}(P) = \frac{V_p^2}{R_p} \quad \text{e} \quad a_{cen}(P) = \frac{GM}{r_p^2}$$

Portanto, é verdade que:

$$V_p = \sqrt{a_{cen}(P) R_p} = \frac{\sqrt{GM R_p}}{r_p} = \frac{\sqrt{GM R_p}}{a(1 - \epsilon)}$$

O problema aqui é que não conhecemos o raio de curvatura R_p , que nos permitiria calcular V_p .

Então, podemos inverter a questão e calcular R_p , utilizando o resultado correto para V_p . Segue que:

$$V_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} = \frac{\sqrt{GM R_p}}{a(1 - \epsilon)}$$

Portanto:

$$R_p = (1 + \epsilon)(1 - \epsilon)a = (1 - \epsilon^2)a$$

Segue também que:

$$R_A = R_p = (1 - \epsilon^2)a$$

ER 8.12) Um projétil de massa m é lançado da superfície de um planeta de massa M e raio R com velocidade de módulo V_0 em uma direção que faz um ângulo θ com a horizontal. Calcule o raio máximo, em relação ao centro do planeta, que o projétil atinge. Considere que o planeta não possui atmosfera.

Dados: M , R , V_0 e θ .

Esse exercício é parecido com o 8.3, mas lá consideramos apenas o caso particular $\theta = 90^\circ$ (lançamento vertical).

Não havendo atrito com o ar, podemos apelar para a conservação da energia mecânica na queda do projétil (queda livre):

$$K + U_g = \text{constante}$$

Comparando então a posição de partida, onde $r = R$ e $V = V_0$, com a posição de altura máxima, onde $r = r_{MAX}$ e $V = V_f$ (note que agora não podemos admitir que $V_f = 0$, como fizemos no exercício 8.3, pois lá o lançamento era vertical e aqui ele é oblíquo), segue que:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 - G \frac{M m}{R} = \frac{1}{2}mV_f^2 - G \frac{M m}{r_{MAX}}$$

Portanto:

$$V_0^2 - \frac{2GM}{R} = V_f^2 - \frac{2GM}{r_{MAX}}$$

Já introduzindo a velocidade de escape da superfície do planeta:

$$V_{ESC} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

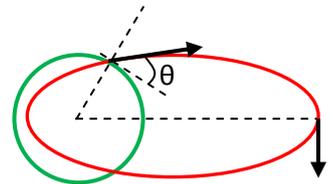
Obtemos:

$$V_0^2 - V_{ESC}^2 = V_f^2 - \frac{2GM}{r_{MAX}}$$

Há duas incógnitas nessa equação: V_f e r_{MAX} . Para obtermos mais uma equação podemos apelar para a conservação do momento angular do projétil, ao longo de um eixo (z) que passa pelo centro do planeta e é ortogonal ao plano da órbita do projétil. Obtemos:

$$L_{z0} = L_{zf} \Rightarrow m V_0 R \cos(\theta) = m V_f r_{MAX} \cos(90^\circ)$$

Note que na altura máxima o projétil possui velocidade com componente radial nula, pois ele parou de se afastar de M e, portanto, a velocidade nesse instante é ortogonal ao raio (trata-se do apoastro do projétil = ponto de afastamento máximo de um astro, análogo ao afélio para um planeta orbitando o Sol). Essa idéia está ilustrada na figura ao lado. A curva vermelha é a órbita elíptica que o projétil vai percorrer, sendo que a porção de elipse que está dentro do planeta (representado pelo círculo verde) deve ser desconsiderada. O projétil vai percorrer um arco de elipse até cair de volta na superfície do planeta. As setas representam os vetores velocidade \vec{V}_0 e \vec{V}_f . Na expressão acima usamos que a componente tangencial do momento linear inicial do projétil é $m V_0 \cos(\theta)$ (com braço de alavanca R) e que a componente tangencial do momento linear final do projétil é $m V_f$ (com braço de alavanca r_f).



Obtemos então que:

$$V_f = \frac{V_0 R \cos(\theta)}{r_{MAX}}$$

Substituindo na equação da energia obtemos uma equação quadrática para r_{MAX} :

$$(V_{ESC}^2 - V_0^2)r_{MAX}^2 - 2GM r_{MAX} + V_0^2 R^2 \cos^2(\theta) = 0$$

cuja solução (maior) é:

$$r_{MAX} = \frac{GM}{V_{ESC}^2 - V_0^2} + \frac{1}{V_{ESC}^2 - V_0^2} \sqrt{(GM)^2 - (V_{ESC}^2 - V_0^2)V_0^2 R^2 \cos^2(\theta)}$$

Estamos admitindo nessa equação que $V_0 < V_{ESC}$, pois só nesse caso faz sentido em se falar em altura ou raio máximo finito (note que se $V_0 \rightarrow V_{ESC} \Rightarrow r_{MAX} \rightarrow \infty$).

Para $\theta = 90^\circ$ recuperamos o caso do lançamento vertical:

$$r_{MAX} = \frac{2GM}{V_{ESC}^2 - V_0^2}$$

A equação quadrática acima para r_{MAX} tem duas soluções, sendo que r_{MAX} é a maior delas. A outra solução (a menor):

$$r_{MIN} = \frac{GM}{V_{ESC}^2 - V_0^2} - \frac{1}{V_{ESC}^2 - V_0^2} \sqrt{(GM)^2 - (V_{ESC}^2 - V_0^2)V_0^2 R^2 \cos^2(\theta)}$$

corresponde à posição mais próxima do projétil em relação ao centro do planeta, ou seja, ao periastro do projétil (ponto de aproximação máxima de um astro, análogo ao periélio para um planeta orbitando o Sol). Nesse instante também ocorre a condição de que a velocidade do projétil é ortogonal ao raio do projétil ao centro do planeta, que foi nossa hipótese nos cálculos acima.

8.8 Exercícios propostos

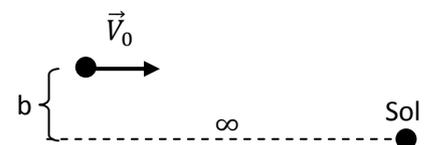
EP 8.1) Supondo que a Terra seja uma esfera maciça de densidade uniforme, raio R_T e massa M_T , calcule a aceleração da gravidade no fundo de um buraco de profundidade P .

EP 8.2) A órbita da Terra é caracterizada por semi-eixo maior a_T e período orbital T_T . A órbita da Lua é caracterizada por semi-eixo maior $a_L = 0,0026 a_T$ e período orbital $T_L = 0,075 T_T$. Com base apenas nessas informações, calcule a razão M_S/M_T entre a massa do Sol e a massa da Terra.

EP 8.3) Sendo M_T (M_L) a massa da Terra (da Lua) e D a distância entre a Terra e a Lua (centro a centro), calcule a distância que uma partícula de massa m deve ficar do centro da Terra para permanecer em equilíbrio estático sob efeito simultâneo da gravidade da Terra e da Lua (supostos estáticos).

EP 8.4) Um cometa possui uma órbita elíptica em torno do Sol de tal forma que sua distância ao Sol no afélio d_A e sua distância ao Sol no periélio d_P obedecem à relação: $d_A/d_P = \alpha$, sendo α uma constante maior que 1. a) Calcule a excentricidade da órbita do cometa. b) Calcule a razão K_A/K_P entre as energias cinéticas do cometa no afélio e no periélio.

EP 8.5) Um asteróide pequeno se aproxima do Sol (massa M_S) vindo de uma distância infinita com velocidade de módulo V_0 , conforme a figura ao lado. A distância inicial b é o “braço de alavanca” do momento linear inicial do asteróide (conhecido como parâmetro de impacto). Calcule a distância mínima r que o asteróide vai se aproximar do Sol (raio do periélio), antes de escapar.



EP 8.6) Um satélite de massa m deve mudar de uma órbita circular de raio R para uma outra órbita circular de raio $R+\Delta$ em torno da Terra (de massa M_T). Calcule o trabalho mínimo necessário para essa mudança de órbita. Considere $\Delta \ll R$.

EP 8.7) Um satélite de massa m deve mudar de uma órbita circular de velocidade orbital V para uma outra órbita circular de velocidade $V+\Delta$ em torno da Terra (de massa M_T). Calcule o trabalho mínimo necessário para essa mudança de órbita. Considere $\Delta \ll V$.

EP 8.8) O Doutor Manhattan, da série de quadrinhos/filme Watchmen, demonstrando poder sobrenatural, afirmou ter caminhado na superfície do Sol. a) Sendo a massa do Sol igual a 330.000 vezes a massa da Terra e o raio do Sol 109 vezes o raio da Terra, calcule a aceleração da gravidade que o Dr. Manhattan enfrentou. b) Se a massa do Dr. Manhattan é 100 kg, calcule a “massa aparente” dele no Sol (lá ele se sente como se tivesse essa massa aparente, mas, obviamente, a massa dele não mudou).

EP 8.9) Suponha que um buraco negro seja um objeto esférico que tem velocidade de escape de sua superfície igual a velocidade da luz $c \cong 300.000$ km/s. a) Sendo a massa do Sol $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg e o raio do Sol $R_S = 696.000$ km, calcule a razão R_{BN}/R_S , sendo R_{BN} o raio que o Sol deveria ter para ser um buraco negro por esse critério. b) Calcule a aceleração da gravidade na superfície desse buraco negro.

EP 8.10) Suponha que aqui na Terra você consiga dar um salto de altura H (sendo H pequeno, você não precisa considerar a variação de g durante esse salto, nem o arraste do ar). Calcule o raio que a Terra deveria ter para, com esse mesmo salto, você conseguir escapar da gravidade da Terra (desprezando a atmosfera). Sua resposta vai ficar expressa em termos do raio atual da Terra (R_T) e de H .

8.9 Respostas dos exercícios propostos

EP 8.1) $\frac{G M_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{P}{R_T}\right)$

EP 8.2) $\left(\frac{T_L}{T_T}\right)^2 \left(\frac{a_T}{a_L}\right)^3 \cong 320.000$

EP 8.3) $D / \left(1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\right) \cong (9/10)D$

EP 8.4) a) $(\alpha - 1)/(\alpha + 1)$ b) $1/\alpha^2$

EP 8.5) $r \cong \sqrt{\alpha^2 + b^2} - \alpha$ com $\alpha \equiv G M_S / V_0^2$

EP 8.6) $\frac{G M m}{2} \frac{\Delta}{R^2}$

EP 8.7) $-m V \Delta$

EP 8.8) a) $\cong 272$ m/s² b) $\cong 2.778$ kg

EP 8.9) a) $4,3 \times 10^{-6}$ b) $1,5 \times 10^{13}$ m/s²

EP 8.10) R_T^2/H

9

Oscilações



9.1 Introdução

Nesse último capítulo estudaremos sistemas simples que apresentam movimentos oscilatórios repetitivos ou periódicos. Trata-se de um movimento bastante comum, que pode ser observado facilmente em muitos corpos que possuem elasticidade. Ao serem tensionados, esses corpos oscilam para cá e para lá, até voltarem ao repouso. Por exemplo, se arquearmos um pouco uma régua e soltarmos, vamos vê-la vibrar por alguns instantes. O mesmo acontece com uma corda de violão dedilhada ou com uma ponte ou um prédio, que podem ser tensionados pela ação de uma ventania. Difícilmente vamos enxergar as vibrações de um prédio ou de uma ponte, mas podemos ter certeza de que elas estão lá. Um exemplo simples de sistema mecânico com elasticidade é o bloco-mola, que consiste em um bloco atado à extremidade livre de uma mola. Após receber um peteleco, o bloco passa a oscilar, enquanto a mola se dilata, relaxa, se comprime, relaxa, e assim por diante. O sistema bloco-mola será nosso protótipo de um sistema mecânico oscilatório simples. Essas oscilações no sistema bloco-mola são chamadas de naturais, ou livres, porque acontecem espontaneamente no sistema, após ele receber um impulso inicial. Em contraste, as oscilações forçadas, que não discutiremos em detalhes aqui, ocorrem em um sistema submetido a um estímulo periódico externo. Por exemplo, quando uma pessoa balança uma criança em um balanço pendurado em uma árvore, empurrando ela periodicamente, as oscilações (pendulares) da criança são oscilações forçadas (forçadas pela pessoa, que é um agente externo nesse caso). Se a criança for deixada balançando sozinha, as oscilações serão naturais (ou livres), amortecidas pelo arraste com o ar.

Um outro exemplo de oscilação forçada é a que é produzida por um forno de microondas, com o objetivo de aquecer os alimentos. Basicamente, dentro do forno de microondas existe uma força oscilatória (um campo elétrico oscilatório) que força oscilações das moléculas de água que existem dentro dos alimentos (pois essas moléculas possuem polaridade elétrica). As moléculas de água transmitem essa vibração/agitação

para o restante do alimento, aumentando sua energia (cinética) interna e, concomitantemente, aumentando sua temperatura. Trata-se de um sistema em que existe um acoplamento entre oscilações eletromagnéticas e oscilações mecânicas, como as que vamos estudar aqui. Muitos fenômenos térmicos podem ser entendidos se pensamos a matéria como um aglomerado de blocos/massas (representando os átomos) e molas (representando as ligações químicas). A Figura 9.1 ao lado ilustra essa ideia/modelo, representando um pedaço de matéria por esferas (átomos) ligadas por molas. Nesse sentido, aquecer a matéria é colocar essas esferas para vibrar mais vigorosamente. O aumento na amplitude das vibrações vai implicar em uma expansão térmica do material (oscilações anarmônicas).

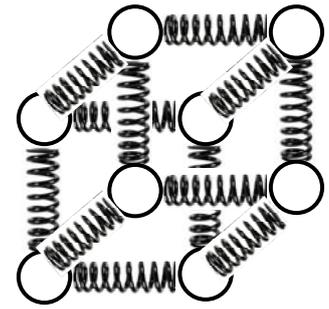


Figura 9.1: Um modelo elástico para a matéria: esferas (átomos) ligadas por molas (ligações químicas).

A presença de elasticidade não é condição para a existência do movimento periódico. Um pêndulo, por exemplo, oscila para lá e para cá, sem que essas oscilações estejam relacionadas com alguma elasticidade no sistema. A condição para que um sistema mecânico apresente movimento oscilatório é que ele possua uma posição/configuração de equilíbrio estável. Podemos definir o equilíbrio estável através de um exemplo simples.

Considere uma bolinha em repouso no fundo de um buraco no chão, como ilustrado na Figura 9.2. Essa posição é de equilíbrio para a bolinha porque o peso (seta verde) e a normal (seta azul) estão se cancelando mutuamente. A posição de equilíbrio é estável? Para responder a essa pergunta precisamos imaginar a bolinha recebendo pequenos petelecos (perturbações), que expulsam ela momentaneamente da posição de equilíbrio no fundo do buraco. Logo após um peteleco, a bolinha vai subir um pouco na parede do buraco e vai atuar nela uma força resultante apontando na direção do fundo do buraco, fazendo com que ela retorne à posição de equilíbrio. A bolinha vai retornar e passar pela posição de equilíbrio, subindo para o outro lado, e caindo de volta, ou seja, após o peteleco ela vai passar a oscilar eternamente em torno da posição de equilíbrio no fundo do buraco. Se houver algum atrito na bolinha, por menor que ele seja, após um tempo a bolinha vai atingir novamente o repouso no fundo do buraco. Essa posição de equilíbrio é estável. Ela é estável porque é circundada por uma força resultante restauradora em sua vizinhança, uma força que aponta sempre para essa posição de equilíbrio, onde quer que a bolinha esteja, tornando-a um ponto atrator da bolinha, ou da órbita da bolinha. Apenas para comparação, considere uma bolinha em repouso no alto de um pequeno

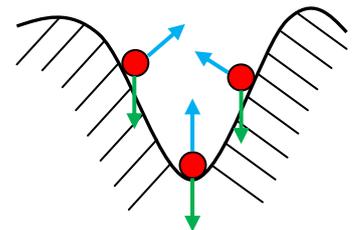


Figura 9.2: Uma bolinha em um buraco no chão: exemplo de equilíbrio estável.

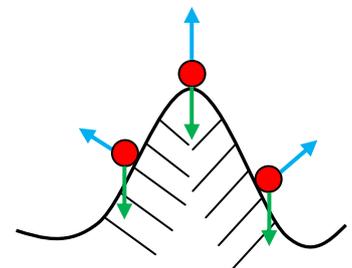


Figura 9.3: Uma bolinha em cima de um montinho de terra: exemplo de equilíbrio instável.

monte de terra, como ilustrado na Figura 9.3. Novamente, essa posição é de equilíbrio para a bolinha porque nela o peso e a normal estão se cancelando mutuamente. A posição de equilíbrio é estável? Imaginamos a bolinha recebendo pequenos petelecos, que expulsam ela momentaneamente da posição de equilíbrio no alto do morro. Logo após um peteleco, a bolinha vai descer acelerando e se afastando do alto do morro, porque atua nela uma força resultante apontando na direção oposta à do alto do morro. A bolinha não vai retornar espontaneamente para a posição inicial. Essa posição de equilíbrio no alto do morro é instável. Ela é instável porque é circundada por uma força repulsora em sua vizinhança, uma força que aponta para longe dessa posição de equilíbrio, onde quer que a bolinha esteja, tornando-a um ponto repulsor da bolinha, ou da órbita da bolinha. Finalmente, podemos considerar um bolinha em repouso apoiada em uma superfície plana, como na Figura 9.4. Nesse caso, a bolinha não é nem atraída nem repelida para a posição inicial, ou seja, o equilíbrio é indiferente. Não há força resultante, nem atratora nem repulsora.

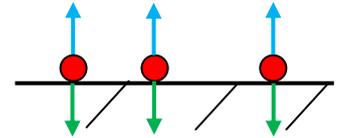


Figura 9.4: Uma bolinha em um piso horizontal: exemplo de equilíbrio indiferente.

Concluindo: só há possibilidade de movimento periódico (oscilações) na vizinhança de um ponto/configuração de equilíbrio estável.

Considere então que adotemos um eixo x na horizontal com origem na posição de equilíbrio estável da bolinha que está no buraco. A Figura 9.5 ilustra esse referencial. Após receber um peteleco, a coordenada x da bolinha vai oscilar, vai assumir valores positivos, passar pelo zero, assumir valores negativos e assim por diante. Na ausência de atritos, a bolinha oscilará eternamente. Um comportamento possível e esperado para a função horária da posição $x(t)$ da bolinha nesse referencial seria como mostrado na Figura 9.6 que segue ($x(t)$ versus o tempo t), supondo que a bolinha recebe um peteleco inicial para a direita (região com $x > 0$). Nessa figura estamos imaginando um buraco assimétrico, em que o lado direito ($x > 0$) fosse mais íngreme que o lado esquerdo ($x < 0$). Como a bolinha sobe a mesma altura máxima dos dois lados (dada a conservação da energia mecânica), ela se afastaria menos da origem ao longo de x no lado mais íngreme. Daí a assimetria na função $x(t)$. Para um buraco simétrico, a função $x(t)$ seria simétrica como mostrado na segunda curva na Figura 9.6. Vamos nos concentrar aqui em movimentos oscilatórios simétricos, que são os mais simples. Usamos as cores nesses gráficos para evidenciar a periodicidade do movimento. Inicialmente a bolinha faz o movimento de ida e volta, representado pela curva vermelha, e em seguida repete esse movimento indefinidamente. Chamamos de ciclo um desses movimentos de ida e volta.

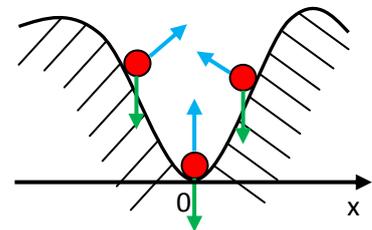


Figura 9.5: Um referencial adequado para descrever as oscilações de uma bolinha em um buraco.

Com base nesse gráfico de $x(t)$ versus t podemos definir as características básicas do movimento periódico, conforme ilustrado na Figura 9.7.

1. O movimento periódico é a repetição contínua de um movimento básico, que chamamos de ciclo. Na figura 9.7 o ciclo seria o movimento representado, por exemplo, pela curva vermelha. A bolinha sai da origem com velocidade $V > 0$, se afasta para $x > 0$, volta, passa pela origem com velocidade $V < 0$, vai para a região com $x < 0$, volta e passa pela origem novamente com $V > 0$. Completou-se então o primeiro ciclo. Depois disso, a bolinha apenas repetirá esse movimento, em uma sucessão de ciclos.

2. Durante um ciclo a bolinha tem um afastamento máximo da origem (que é a posição de equilíbrio estável no nosso referencial), que chamamos de amplitude da oscilação, representado pelo símbolo A . A unidade natural de A é o metro.

3. Um ciclo tem uma duração, que chamamos de período da oscilação, representado por T . A unidade natural de período é o segundo.

4. A repetição do movimento se caracteriza por uma frequência f , que é a taxa de repetição de ciclos por unidade de tempo, ou seja: $f = (\text{número de ciclos em } \Delta t) / \Delta t$. Por exemplo, se um ciclo dura $T = 1$ s, então $f = 1/1 \text{ s}^{-1}$. A unidade s^{-1} é chamada de hertz e representada pelo símbolo Hz. Portanto, se $T = 1$ s, então $f = 1 \text{ Hz}$ (1 ciclo por segundo). Em geral, para uma oscilação de período T , a quantidade de ciclos em Δt é $\Delta t / T$, ou seja:

$$f = \frac{\Delta t / T}{\Delta t} = \frac{1}{T}$$

Analogamente, se $\Delta t = T$, então, o número de ciclos em Δt é igual a 1 (por definição) e, portanto: $f = 1/T$.

Se T é dado em segundos (s), f é dado em hertz (Hz).

5. Já antecipando que as oscilações mais simples serão descritas por funções seno e cosseno, que são funções naturais de ângulos, podemos associar ao movimento oscilatório uma frequência angular ω , que é a

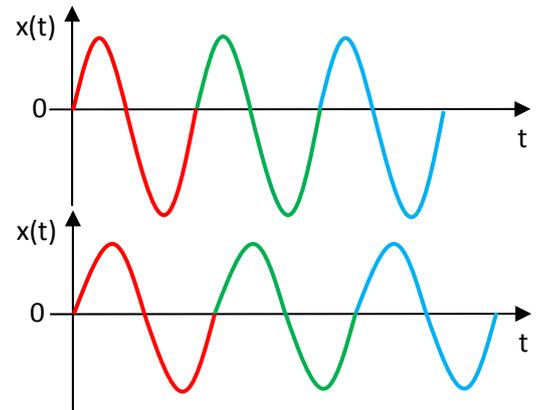


Figura 9.6: Comportamentos esperados para a posição $x(t)$ da bolinha no buraco em função do tempo t : buraco assimétrico e buraco simétrico.

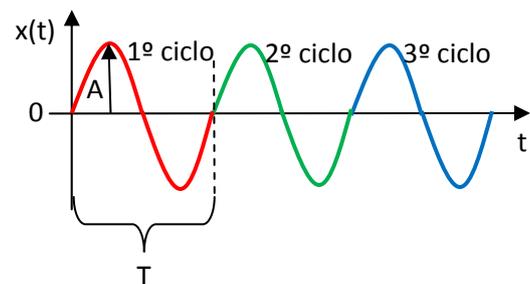


Figura 9.7: As principais características de um movimento periódico: ciclo, amplitude e período.

taxa de repetição de ciclos considerando que a cada ciclo corresponde a varredura de um ângulo 2π rad, ou seja: $\omega = 2\pi(\text{número de ciclos em } \Delta t)/\Delta t$. Portanto:

$$\omega = 2\pi f$$

A unidade natural de ω é o rad/s.

Descrever um movimento oscilatório é basicamente calcular a equação horária $x(t)$ que vai fornecer a amplitude, o período e as frequências f e ω das oscilações de um sistema (note que T , f e ω podem ser obtidos um do outro, e por isso só precisamos calcular/medir apenas um deles). É o que faremos em seguida para alguns sistemas simples.

9.2 Oscilador bloco-mola (ou massa-mola)

Considere um sistema formado por um bloco de massa M atado à extremidade livre de uma mola ideal (sem massa) de constante de mola k . A outra extremidade da mola está fixa em uma parede. O bloco desliza apoiado em uma superfície horizontal sem atrito. A Figura 9.8 ilustra esse sistema. O bloco possui uma posição de equilíbrio, que corresponde à situação em que a mola está relaxada. Nesse caso, a mola não faz força no bloco e o peso e a normal se cancelam mutuamente (esse cancelamento vai acontecer em qualquer posição do bloco). Se puxarmos o bloco um pouco para a direita, a mola dilata e nasce uma força de mola que puxa o bloco de volta para a esquerda. Se empurrarmos o bloco um pouco para a esquerda, a mola comprime e nasce uma força de mola que empurra o bloco de volta para a direita. Vemos assim que a posição central do bloco, com a mola relaxada, é uma posição de equilíbrio estável. A força resultante restauradora é a própria força de mola no bloco.

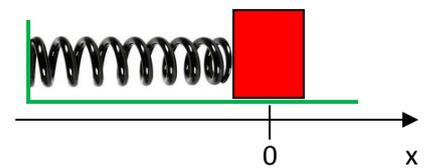


Figura 9.8: Um oscilador bloco-mola: um bloco apoiado em uma superfície horizontal sem atrito e atado à extremidade livre de uma mola ideal.

Para descrever o movimento do bloco, sujeito a essa força restauradora, vamos adotar um eixo x como mostrado na Figura 9.8, com origem $x=0$ na posição de equilíbrio estável do bloco. Esperamos então que, após receber um peteleco, a coordenada $x(t)$ do bloco oscile em torno do valor $x=0$. Nosso objetivo é exatamente encontrar a função $x(t)$ que é a equação horária da trajetória do bloco. Para isso vamos usar a segunda lei de Newton e a lei de Hooke para as molas:

$$R_x = M a \Rightarrow -k x(t) = M \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

Note que há uma coincidência entre a variável x que dá a deformação da mola (em $-k x(t)$) e a coordenada x do bloco (em $\frac{d^2}{dt^2} x(t)$). Se a mola está deformada de x , então o bloco está na posição x , pois o bloco está atado à extremidade livre da mola.

Portanto, a função $x(t)$ é solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{k}{M}x(t)$$

Qual a função real $x(t)$ que satisfaz essa equação? A função $x(t)$ é tal que quando derivada duas vezes resulta nela mesma, multiplicada pela constante negativa $-k/M$. Só há duas funções reais (não constantes) que satisfazem essa propriedade. São as funções $f_1(t) = B \sin(\alpha t)$ e $f_2(t) = C \cos(\beta t)$ sendo B, C, α e β constantes. De fato:

$$\frac{d^2}{dt^2}B \sin(\alpha t) = -\alpha^2 B \sin(\alpha t) \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2}C \cos(\beta t) = -\beta^2 C \cos(\beta t)$$

Vemos então que f_1 e f_2 são soluções da equação diferencial para $x(t)$ somente se:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

A solução geral para $x(t)$ é uma combinação linear de $f_1(t)$ e $f_2(t)$:

$$x(t) = B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t\right) + C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t\right)$$

com B e C constantes arbitrárias.

Podemos fazer uma mudança de variáveis e mostrar que $x(t)$ pode ser escrita na forma mais compacta e elegante:

$$x(t) = \mathcal{A} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t + \varphi\right)$$

sendo \mathcal{A} e φ novas constantes (no lugar de B e C). A mudança de variáveis é simples e se baseia na identidade trigonométrica $\cos(U + V) = \cos(U)\cos(V) - \sin(U)\sin(V)$. De fato:

$$x(t) = \mathcal{A} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t + \varphi\right) = [\mathcal{A} \cos(\varphi)] \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t\right) + [-\mathcal{A} \sin(\varphi)] \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t\right)$$

Portanto, as duas formas para $x(t)$ são iguais se $B = -\mathcal{A} \sin(\varphi)$ e $C = \mathcal{A} \cos(\varphi)$.

É fácil notar que como a função cosseno oscila dentro do intervalo $[-1,1]$, a função $x(t)$ oscila dentro do intervalo $[-\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ e, portanto, o deslocamento máximo do bloco é \mathcal{A} . Logo, a constante \mathcal{A} introduzida acima é exatamente a amplitude do movimento do bloco: $\mathcal{A} = A$. Levando isso em conta, a função horária $x(t)$ fica:

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t + \varphi\right)$$

sendo A a amplitude do movimento e φ o chamado ângulo de fase. Como veremos, essas duas constantes serão definidas pelas condições iniciais do movimento oscilatório. Elas são as constantes que vão ajustar a solução geral do movimento do bloco a um movimento particular.

Qual o período das oscilações do bloco? Sabemos que a função cosseno possui período 2π , ou seja:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \quad \forall \theta$$

Quanto ao período T , é definido por:

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t$$

Portanto:

$$\begin{aligned} x(t + T) &= A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}(t + T) + \varphi\right) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \varphi + \sqrt{\frac{k}{M}}T\right) = x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \varphi\right) \\ &= A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \varphi + 2\pi\right) \end{aligned}$$

O que leva finalmente à igualdade:

$$\sqrt{\frac{k}{M}}T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/M}}$$

Segue também que:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Concluindo: um bloco de massa M atado à extremidade de uma mola ideal de constante k oscila em uma superfície horizontal sem atrito de acordo com a equação horária:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

sendo A a amplitude do movimento, $\omega = \sqrt{k/M}$ a frequência angular e φ o ângulo de fase. As constantes A e φ , podem assumir valores arbitrários, sendo $A > 0$, porque A é um deslocamento máximo, e $\varphi \in [0, 2\pi)$, dada a periodicidade da função cosseno (ou $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$).

Os valores de A e φ estão definidos pelas condições iniciais do movimento do bloco: posição inicial x_0 e velocidade inicial V_0 . De fato:

$$x_0 = x(t = 0) = A \cos(\varphi)$$

A velocidade do bloco é:

$$V(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -A \omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Portanto, a condição inicial sobre a velocidade leva a:

$$V_0 = V(t = 0) = -A \omega \operatorname{sen}(\varphi)$$

Dessas duas equações que envolvem x_0 e V_0 deduzimos que:

$$\tan(\varphi) = -\frac{V_0}{x_0 \omega} \quad \text{e} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2}$$

Por exemplo, considere que o bloco parta da posição $x_0 = X > 0$ do repouso, ou seja, $V_0 = 0$. Isso ocorreria se puxássemos o bloco, dilatando a mola, até a posição X e em seguida soltássemos o bloco do repouso. Qual a equação horária da posição desse bloco? Das equações acima obtemos imediatamente:

$$A = \sqrt{X^2 + (0)^2} = X$$

$$\tan(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

Portanto, esse bloco oscila de acordo com:

$$x(t) = X \cos(\omega t)$$

O gráfico da função $x(t)$ versus t é mostrado na Figura 9.9.

Outro exemplo: considere que o bloco receba um peteleco e parta da origem com velocidade inicial $\mathcal{V} < 0$. Então: $x_0 = 0$ e $V_0 = \mathcal{V} = -|\mathcal{V}|$. Isso ocorreria se déssemos um peteleco no bloco lançando ele no sentido de $x < 0$ (no sentido da compressão da mola), partindo da posição em que a mola está relaxada. Obtemos:

$$A = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\mathcal{V}}{\omega}\right)^2} = \frac{|\mathcal{V}|}{\omega} = -\frac{\mathcal{V}}{\omega}$$

Note que $\sqrt{z^2} = |z|$. Vale também:

$$\tan(\varphi) = -\frac{V_0}{x_0 \omega} \rightarrow \frac{|\mathcal{V}|}{0} \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, esse bloco oscila de acordo com:

$$x(t) = -\frac{\mathcal{V}}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathcal{V}}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)$$

O gráfico da função $x(t)$ versus t é mostrado na Figura 9.10 que segue.

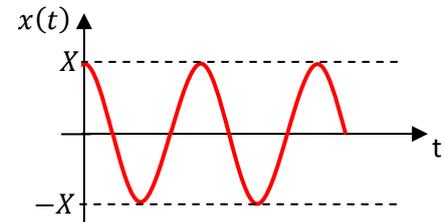


Figura 9.9: Comportamento da posição em função do tempo t de um bloco que partiu do repouso da posição $X > 0$.

Com esses exemplos procuramos enfatizar que os valores específicos da amplitude A e do ângulo de fase φ não são características intrínsecas de um oscilador bloco-mola de massa M e constante de mola k . Pelo contrário, um dado oscilador bloco-mola pode oscilar com amplitude e ângulo de fase arbitrários, conforme a vontade de quem imprime nesse sistema a condição inicial do movimento. Se deformamos mais a mola (aumentamos X) ou aplicamos um peteleco mais forte no bloco (aumentamos \mathcal{V}), a amplitude das oscilações subsequentes aumenta. A única limitação que impomos na amplitude das oscilações está ligada à validade da lei de Hooke. Sabemos que a lei de Hooke só vale no regime de pequenas deformações da mola. Assim sendo, está implícito aqui o pressuposto de que as condições iniciais sejam tais que resultem em uma amplitude das oscilações suficientemente pequena para ser compatível com a validade da lei de Hooke para a mola.

Quanto à frequência ω das oscilações, dada por:

$$\omega = \sqrt{k/M}$$

observamos um caráter totalmente diferente daquele discutido para a amplitude A e o ângulo de fase φ . Acabamos de descobrir que o movimento oscilatório do sistema bloco-mola é isócrona (iso=mesmo, igual e crono=tempo), ou seja, sua frequência (e também o período) está definida somente pelos parâmetros mecânicos do sistema: M e k . Podemos alterar de acordo com nossa vontade a amplitude A e o ângulo de fase φ de um dado oscilador bloco-mola, através da condição que inicia o movimento, mas não podemos alterar a frequência ω . Essa frequência está determinada no momento em que construímos o sistema, escolhendo um bloco (M) e uma mola (k). Se quisermos que o oscilador oscile com frequência diferente, teremos que trocar o bloco, a mola, ou ambos. Esta é a propriedade marcante do movimento que estamos discutindo aqui e que nos permite vislumbrar a fabricação de um relógio mecânico, ou seja, um dispositivo puramente mecânico com um ritmo próprio de TIC-TAC, um ritmo robusto, insensível aos fatores externos incontroláveis.

Galileu Galilei foi quem primeiro descobriu a isocronia no movimento oscilatório, não de um sistema bloco-mola, mas de um pêndulo. Diz a lenda que Galileu estava na catedral de Pisa observando o movimento oscilatório das luminárias penduradas no teto. As luminárias eram basicamente um corpo pesado pendurado em uma corda ou corrente, com a outra extremidade fixada no teto, que é o que chamamos de pêndulo. As luminárias eram iguais, mas uma oscilava com uma amplitude diferente da outra, ao acaso (cada luminária teve uma condição inicial diferente em seu movimento, provocada pelo vento ou algo similar). Galileu mediu os períodos das luminárias, usando sua pulsação cardíaca como relógio, e concluiu que todas as luminárias

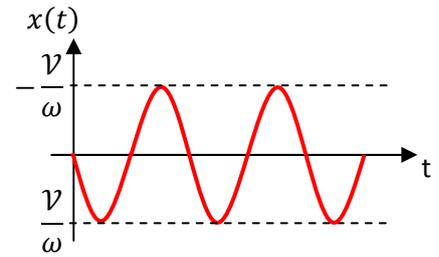


Figura 9.10: Comportamento da posição em função do tempo t de um bloco que estava na origem e recebeu um peteleco lançando-o para o sentido de $x < 0$. Note que \mathcal{V} é negativo.

oscilavam com o mesmo período (dado que eram todas iguais). Daí a isocronia do pêndulo (diferentes amplitudes, mas mesmo período). Galileu teve então a idéia de projetar relógios mecânicos baseados nas oscilações do pêndulo. Os relógios de pêndulo construídos na época proporcionaram um avanço na precisão da medida do tempo, graças à isocronia. De fato, para que um relógio mecânico mantenha seu ritmo, e seu sincronismo com outros relógios similares, ele deve ter uma frequência de oscilações insensível a pequenas perturbações externas no movimento. Por exemplo, um pequeno atrito no movimento pode produzir um decaimento na amplitude das oscilações. Sendo o movimento isócrono, essa variação na amplitude não terá nenhum efeito na frequência das oscilações, já que não existe dependência de ω em A .

Pensando no sistema bloco-mola como um oscilador que define o ritmo de um relógio mecânico, podemos imaginar uma máquina que requer que o oscilador oscile com período T igual a 1 segundo. A cada segundo o bloco deve completar um ciclo, que se traduzirá em um TIC ou um TAC do ponteiro dos segundos desse relógio. Qual a mola e qual o bloco que podemos usar para construir esse oscilador? Sendo $T = 1$ s, segue que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cong 6,28 \Rightarrow \frac{k}{M} \cong (6,28)^2 \cong 39,48 \text{ s}^{-1}$$

Portanto, se começarmos pela mola, que é o componente mais difícil de definir, podemos medir a constante k e escolher um bloco de massa igual a $k/39,48$. Por exemplo, se escolhermos $k = 100$ N/m, podemos construir um bloco com $M = 2,53$ kg e daí obter um oscilador bloco-mola com $T \cong 1$ s. Qualquer que seja a condição inicial que imprimirmos nesse oscilador, ele oscilará com $T = 1$ s. Mesmo que a fonte de energia do relógio (que pode ser uma massa pendurada que vai caindo e liberando energia potencial gravitacional) vá se gastando e acabando, o ritmo do relógio não mudará. Daí sua precisão.

Em um oscilador não-isócrono o período e a frequência dependem da amplitude do movimento. Quanto maior a amplitude, maior o período. O ritmo do TIC-TAC de um relógio construído com esse oscilador ficaria cada vez mais rápido, a medida que sua amplitude de oscilação fosse diminuindo com o passar do tempo. Não seria um relógio confiável.

O movimento que acabamos de estudar, apresentado pelo oscilador bloco-mola, é chamado de movimento harmônico simples (MHS) e não é exclusividade do oscilador bloco-mola. Qualquer sistema que oscile por causa de uma força restauradora proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio estável, como a lei de Hooke, será capaz de se mover em MHS. A principal característica do MHS é, como já mencionamos, a isocronia das oscilações, ou seja, a frequência (ou o período) das oscilações é independente das condições iniciais do movimento, ela depende apenas dos parâmetros mecânicos do sistema: massa e constante de mola (no caso do oscilador bloco/mola).

9.2.1 Energia no oscilador bloco-mola

No oscilador bloco-mola, enquanto o bloco oscila para lá e para cá, ele ganha e perde energia cinética. Ao mesmo tempo, enquanto a mola comprime, relaxa e dilata, ela ganha e perde energia potencial elástica. Podemos enxergar então as oscilações nesse sistema como uma troca constante de energia, entre o bloco e a mola. Quando a mola realiza trabalho no bloco (trabalho positivo da força de mola), ela perde energia elástica e o bloco ganha energia cinética. No caso oposto, quando o bloco realiza trabalho na mola (trabalho negativo da força de mola), o bloco perde energia cinética e a mola ganha energia elástica.

A energia cinética do bloco no instante t é:

$$K(t) = \frac{1}{2} mV(t)^2$$

A energia potencial elástica armazenada na mola no instante t é:

$$U_E(t) = \frac{1}{2} kx(t)^2$$

Na ausência de atrito ou outras forças externas no sistema (além do peso e da normal que não realizam trabalho nesse caso), a energia mecânica é conservada, ou seja:

$$K(t) + U_E(t) = C$$

sendo C uma constante. C é a energia total acumulada no sistema e é definida pela condição inicial das oscilações, já que, em $t=0$:

$$K(0) + U_E(0) = C$$

Por isso, vamos fazer $C = E$, sendo a energia mecânica constante que foi armazenada no sistema no instante ($t=0$) em que suas oscilações iniciaram.

Obtemos então a equação:

$$\frac{1}{2} mV(t)^2 + \frac{1}{2} kx(t)^2 = E$$

Se derivarmos essa equação no tempo, lembrando que a derivada da constante E é igual a zero e que $V(t) = dx(t)/dt$, obtemos novamente a equação fornecida pela segunda lei de Newton:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + k x(t) = 0$$

que leva à solução já conhecida $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

Para encontrar a relação da energia E no sistema com a amplitude A das oscilações, basta considerar os instantes em que $x(t) = A$. Nesses instantes o bloco está momentaneamente parado, ou seja, $V(t) = 0$ e, portanto:

$$0 + \frac{1}{2}kA^2 = E \Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2$$

Vemos então que:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = K(0) + U_E(0) = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

Portanto (lembrando que $k/m = \omega^2$):

$$A^2 = \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2$$

Que é uma relação que já havíamos deduzido em outro contexto.

Nos instantes em que $x(t) = 0$ ocorre o contrário, ou seja, o bloco está com velocidade máxima, em módulo, e a mola está relaxada. Se V_{MAX} é o módulo dessa velocidade máxima, obtemos:

$$\frac{1}{2}mV_{MAX}^2 + 0 = E$$

Portanto:

$$\frac{1}{2}mV_{MAX}^2 = E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow V_{MAX} = \omega A$$

Já tivemos contato com essa relação, quando deduzimos que:

$$V(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

De fato, como a função seno oscila no intervalo $[-1,1]$, a função $V(t)$ oscila no intervalo $[-\omega A, \omega A]$, ou seja, ωA é a amplitude da velocidade do bloco e, portanto, $V_{MAX} = \omega A$.

Apenas para ilustrar os conceitos que discutimos aqui, considere um sistema bloco-mola em que o bloco estava na origem ($x_0 = 0$) e recebeu um peteleco que resultou na velocidade inicial $V_0 = \mathcal{V} > 0$ (o bloco foi empurrado para a direita, no sentido da elongação da mola). Então:

$$A = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\mathcal{V}}{\omega}\right)^2} = \frac{\mathcal{V}}{\omega} \quad \text{e} \quad \tan(\varphi) \rightarrow -\frac{\mathcal{V}}{0} \rightarrow -\infty \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

Portanto, o bloco oscila de acordo com:

$$x(t) = \frac{\mathcal{V}}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\mathcal{V}}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)$$

A velocidade do bloco será dada por:

$$V(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \mathcal{V} \cos(\omega t)$$

A energia cinética do bloco variará de acordo com:

$$K(t) = \frac{1}{2}mV(t)^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2\cos^2(\omega t)$$

A energia potencial elástica acumulada na mola será:

$$U_E(t) = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{\mathcal{V}}{\omega}\right)^2\sin^2(\omega t)$$

Como $\omega^2 = k/m$, obtemos:

$$U_E(t) = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2\sin^2(\omega t)$$

Portanto, como não poderia deixar de ser:

$$K(t) + U_E(t) = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2 = E$$

Essa equação mostra que o peteleco inicial introduz no sistema bloco/mola a energia mecânica inicial $E = m\mathcal{V}^2/2$ e que essa energia permanece constante ao longo do tempo: $E = K(t) + U_E(t) \forall t > 0$.

Na figura 9.11 abaixo ilustramos os comportamentos dessas funções posição, velocidade e energias cinética e potencial elástica ao longo do tempo t .

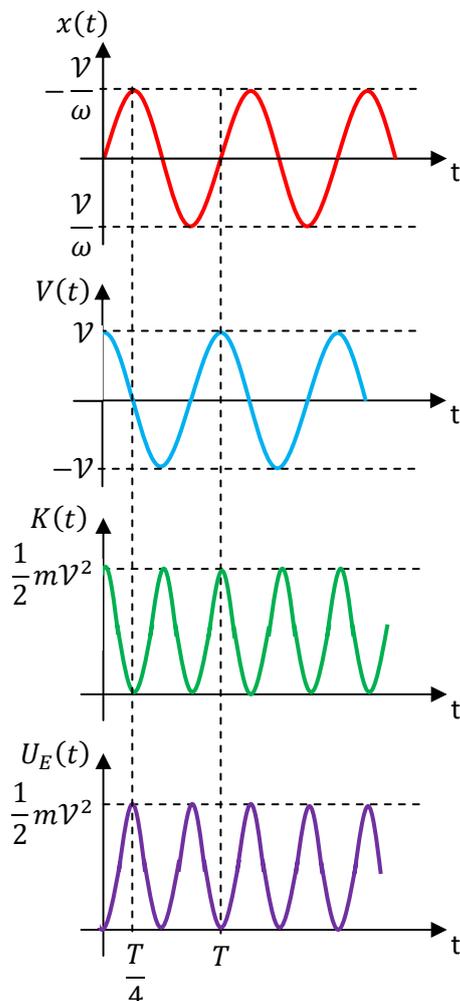


Figura 9.11: Esboço dos comportamentos da posição, da velocidade e das energias cinética e potencial elástica em função do tempo t para o caso em que o bloco, que estava na origem, recebeu um peteleco lançando-o para o sentido de $x > 0$. Considere, por exemplo, o instante $t = T/4$ (um quarto do período). Nesse instante, o bloco está afastado o máximo da origem, com velocidade instantânea nula. A energia cinética é nula e a energia potencial é máxima, pois a mola está dilatada o máximo. Em outro instante, por exemplo, $t = T$, o bloco está passando pela origem, com velocidade positiva de módulo máximo. A energia cinética é máxima e a energia potencial é nula, pois a mola está relaxada.

9.3 O oscilador bloco-mola angular

O oscilador bloco-mola angular é uma versão rotatória do oscilador bloco-mola. A mola cilíndrica helicoidal é substituída por uma mola espiral e o bloco é substituído por um cilindro (ou disco) que pode girar livremente em torno de um eixo fixo (eixo z para fora da página). O sistema fica como ilustrado na figura 9.12. A casca cilíndrica e os quatro raios (em vermelho) formam um corpo rígido (um volante) que pode girar livremente em torno do eixo fixo z . Mas, ao girar, esse volante torce uma mola espiral. A mola espiral deformada aplica um torque restaurador no volante e enfim, este oscila girando alternadamente nos sentido horário e anti-horário. Este oscilador é comumente utilizado para ditar o ritmo de relógios mecânicos.

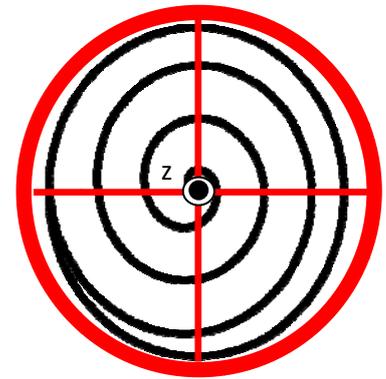


Figura 9.12: Um oscilador bloco-mola rotatório: mola espiral + volante.

Supondo a validade de uma lei de Hooke para a mola espiral, ou seja:

$$\tau_z(\theta) = -k \theta$$

sendo θ (em radianos) o ângulo de giro do volante (positivo no sentido anti-horário), que coincide com a deformação na mola, $\tau_z(\theta)$ o torque restaurador que a mola espiral produz no volante e k a constante elástica da mola (constante de torção). O sinal negativo indica que quando $\theta > 0$, o torque restaurador é negativo e está, portanto, para dentro da página (oposto ao eixo z). Quando $\theta < 0$, a mola força o volante a voltar para a posição de equilíbrio $\theta = 0$. Da mesma forma, quando $\theta < 0$, o volante está deslocado no sentido horário, o torque é positivo (para fora da página) e força o volante de volta para sua posição de equilíbrio.

A equação de movimento para o volante pode ser obtida da segunda lei de Newton da rotação:

$$\tau_z(\theta(t)) = -k \theta(t) = I \alpha(t) = I \frac{d^2}{dt^2} \theta(t)$$

sendo I o momento de inércia do volante em relação ao eixo z .

Portanto, obtemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = -\frac{k}{I} \theta(t)$$

que é uma equação de movimento típica do movimento harmônico simples. Não precisamos solucionar novamente essa equação, já que isso já foi feito para o sistema bloco-mola linear. Concluímos imediatamente que:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

com:

$$\omega = \sqrt{k/I}$$

e as constante A e φ definidas pelas condições iniciais. Note que nesse caso a amplitude $A = \Theta$ é dada em radianos, para que θ seja dado também em radianos: $\theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \varphi)$. A velocidade angular (oscilatória) do volante é dada por:

$$\Omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t) = -\Theta \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

As condições iniciais θ_0 e Ω_0 definem:

$$\tan(\varphi) = -\frac{\Omega_0}{\theta_0 \omega} \quad \text{e} \quad \Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)^2}$$

Se quisermos um oscilador bloco mola angular oscilando com período igual a 1 segundo, por exemplo, devemos escolher uma mola e um volante tais que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{k/I} = 2\pi \cong 6,28 \Rightarrow \frac{k}{I} \cong 39,48$$

A isocronia do MHS garante que qualquer que seja o peteleco inicial nesse volante, ele oscilará com período igual a 1 segundo (admitindo que seja um peteleco que mantém a mola dentro dos limites de validade da lei de Hooke). A figura ao lado mostra o oscilador bloco/mola angular de um relógio-despertador *made in China*.



9.4 O pêndulo simples

Um pêndulo consiste basicamente em um objeto de massa M que pode oscilar em torno de um eixo fixo de apoio. Por exemplo, um corpo atado à extremidade de uma corda, ou barbante, que tem a outra extremidade fixa no teto. No pêndulo simples o objeto é uma partícula de massa M e a corda possui massa desprezível (e é inextensível). Iniciaremos desprezando qualquer atrito. Conforme podemos ver na figura 9.13, a posição central mais baixa da partícula, para a qual a corda assume a direção vertical, é uma posição de equilíbrio estável (se colocada em repouso aí, a partícula permanece em repouso). Para qualquer lado que a partícula vá, a resultante do peso (seta azul) e da tensão (seta verde) a empurra de volta para a

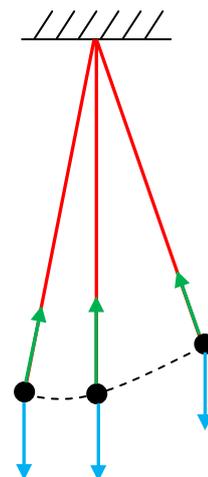


Figura 9.13: Em um pêndulo simples uma partícula oscila em torno da posição central mais baixa, que é uma posição de equilíbrio estável.

posição central. A partícula oscila percorrendo um arco de círculo, de raio l , sendo l o comprimento da corda.

Para descrever as oscilações da partícula no pêndulo simples devemos escrever a equação de movimento da partícula, dada pela segunda lei de Newton. Para isso vamos utilizar o referencial mostrado na figura 9.14. O eixo x é horizontal e o eixo y é vertical. A origem, como de praxe, está na posição de equilíbrio estável da partícula. Vamos utilizar o ângulo θ de inclinação da corda com a vertical para decompor a tensão $\vec{\tau}$. Note que à medida que a partícula oscila, o ângulo θ muda, ou seja: $\theta = \theta(t)$. Obtemos:

Ao longo de x :

$$R_x = -\tau \sin(\theta) = M a_x = M \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

Ao longo de y :

$$R_y = \tau \cos(\theta) - M g = M a_y = M \frac{d^2}{dt^2} y(t)$$

Portanto, explicitando o tempo, para deixar claro o que é constante e o que não é:

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\tau(t) \sin(\theta(t))$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \tau(t) \cos(\theta(t)) - M g$$

Note que podemos eliminar o ângulo θ se reconhecermos na figura 9.14 que:

$$x(t) = l \sin(\theta(t)) \Rightarrow \sin(\theta(t)) = \frac{x(t)}{l}$$

$$y(t) = l [1 - \cos(\theta(t))] \Rightarrow \cos(\theta(t)) = 1 - \frac{y(t)}{l}$$

Portanto, as equações para o pêndulo ficam:

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\frac{\tau(t)}{l} x(t)$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \tau(t) \left(1 - \frac{y(t)}{l}\right) - M g$$

As duas equações são acopladas através da função $\tau(t)$, que é o módulo da tensão no barbante, e do vínculo $[x(t)/l]^2 + [1 - y(t)/l]^2 = 1$. A tensão $\tau(t)$ é variável no tempo, pois ela é uma componente da

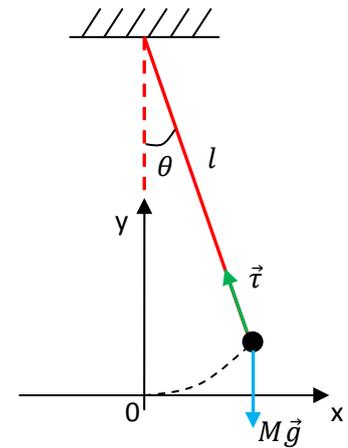


Figura 9.14: referencial xy para descrever o movimento da partícula em um pêndulo simples.

força centrípeta na partícula. Ela é máxima quando a partícula está passando pela posição mais baixa, com velocidade máxima, e mínima quando a partícula está nos extremos do movimento, onde a velocidade é nula.

Note que a equação diferencial para $x(t)$ até que lembra a equação típica do MHS, com a diferença de que o fator que multiplica a função $x(t)$ do lado direito não é uma constante. Portanto, concluímos que o pêndulo simples não apresenta, em geral, o movimento harmônico simples.

Se pensarmos bem, essa conclusão não é diferente da que tivemos para o oscilador bloco-mola. Esse oscilador só apresenta MHS no regime de validade da lei de Hooke para a mola. Se a mola deixar de obedecer à lei de Hooke, as oscilações deixam de ser harmônicas simples e passam a ser oscilações mais complicadas, não-harmônicas e não-isócronas. O regime de validade da lei de Hooke é o regime de pequenas deformações da mola, ou seja, de baixas amplitudes. Portanto, o oscilador bloco-mola só apresenta MHS no regime de baixas amplitudes das oscilações.

Concluímos então que não há nada de novo no fato do pêndulo simples não oscilar em MHS em geral. Podemos investigar então como são as oscilações do pêndulo simples no regime de baixas amplitudes. Olhando a figura 9.14 percebemos logo que quando a amplitude for pequena, a variável $\theta(t)$ ficará restrita a valores pequenos (em radianos). Portanto, concluímos que:

$$A \cong 0 \Rightarrow \theta(t) \cong 0$$

De fato nada é absolutamente pequeno e, portanto, podemos expressar melhor essa ideia tomando o comprimento l do barbante como referência e definir o regime de baixas amplitudes como o regime tal que: $A \ll l$. Note que nesse caso, sendo θ_{MAX} o maior valor de θ , correspondente a um deslocamento máximo da partícula ($x=A$), obtemos:

$$\text{sen}(\theta_{MAX}) = \frac{A}{l} \cong 0$$

o que leva a $\theta(t) \cong 0$, já que $\theta(t) \leq \theta_{MAX}$.

Nesse limite podemos usar as expressões assintóticas das funções seno e cosseno próximas da origem (com $\theta(t)$ em radianos), que são:

$$\text{sen}(\theta(t)) \cong \theta(t) - \frac{[\theta(t)]^3}{6} \quad \text{e} \quad \text{cos}(\theta(t)) \cong 1 - \frac{[\theta(t)]^2}{2}$$

Dessas expressões aproximadas vemos que no regime de baixas amplitudes:

$$y(t) = l [1 - \text{cos}(\theta(t))] = \frac{l}{2} [\theta(t)]^2$$

Enquanto que:

$$x(t) = l \theta(t)$$

Note então que:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\theta(t)}{2}$$

Como estamos supondo que $\theta(t) \cong 0$, o que a equação acima está expressando é a ideia de que o deslocamento da partícula do pêndulo na vertical (y) é sempre muito menor que o deslocamento na horizontal (x). Por exemplo, se $\theta(t) = 0,1 \text{ rad} (\cong 6^\circ)$, então:

$$x(t) = \frac{l}{10} \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{l}{200}$$

Quanto menor o valor de $\theta(t)$ mais verdadeiro será que $y(t) \ll x(t)$.

Concluimos que nesse regime de baixas amplitudes a partícula se move na horizontal apenas, ao longo do eixo x , ou seja, podemos assumir desde já que:

$$y(t) = 0$$

A equação de movimento em y fica (considerando que a derivada da função constante $y(t) = 0$ é nula):

$$M \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \tau(t) \left(1 - \frac{y(t)}{l}\right) - M g \Rightarrow 0 = \tau(t)(1 - 0) - M g$$

ou seja:

$$\tau(t) = M g$$

No regime de baixas amplitudes o módulo da tensão na corda é constante e sempre igual ao peso da partícula. Portanto, a equação no eixo x fica:

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\frac{\tau(t)}{l} x(t) \Rightarrow M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\frac{M g}{l} x(t)$$

Concluindo: no regime de baixas amplitudes a partícula do pêndulo simples oscila na horizontal apenas, de acordo com a equação de movimento:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\frac{g}{l} x(t)$$

que é a equação típica do MHS. Não precisamos resolver essa equação. Já sabemos que:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Com:

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

e as constante A e φ definidas pelas condições iniciais. Note que a frequência (e o período) independe da massa da partícula.

Supondo, por exemplo, que queiramos construir um relógio de pêndulo que exija um pêndulo simples oscilando com período igual a 1 segundo, o comprimento da corda deverá ser:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi \cong 6,28 \Rightarrow \frac{g}{l} \cong 39,48 \Rightarrow l \cong 25 \text{ cm}$$

Se você pendurar um corpo pequeno na extremidade de um barbante de comprimento 25 cm e der um pequeno peteleco nele, ele vai oscilar em MHS com período igual a 1 segundo (qualquer que seja o peteleco, desde que pequeno).

É interessante registrar que a isocronia do pêndulo simples é uma propriedade do regime de baixas amplitudes, ou seja, do regime em que os valores de $[\theta(t)]^2$, $[\theta(t)]^3$ etc. são desprezíveis quando comparados ao valor de $\theta(t)$. Para o pêndulo em um regime de amplitudes A maiores, pode-se mostrar que o período das oscilações é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{1}{16} \left(\frac{A}{l}\right)^2 + \frac{11}{3072} \left(\frac{A}{l}\right)^4 \dots \right)$$

ou seja, quanto maior a amplitude A do movimento, maior o tempo que o pêndulo leva para completar um ciclo. O regime de baixas amplitudes corresponde exatamente a desprezar no movimento todos os termos proporcionais a $(A/l)^2$, $(A/l)^3$, etc. Nesse regime:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$$

O pêndulo simples oferece a possibilidade de se medir a aceleração da gravidade g com um simples cronômetro. Basta construir um pêndulo com comprimento l conhecido e medir o período com um cronômetro. A aceleração g é dada por:

$$g = l \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cong 39,48 \frac{l}{T^2}$$

Levando um pêndulo e um cronômetro no bolso, podemos avaliar a redução no valor de g no alto de uma montanha, testando a validade da lei da gravitação de Newton. Comparando as oscilações de um pêndulo no pólo norte com as de outro na linha do equador, podemos concluir que a Terra não é esférica, mas achatada nos pólos (elipsóide oblato). Em 1851 Jean Foucault usou um pêndulo (hoje conhecido como pêndulo de Foucault) para demonstrar que a Terra gira em torno de si mesma, o que parecia absurdo para muitas pessoas naquela época (talvez hoje não seja muito diferente). Enfim, se nos debruçarmos um pouco sobre a história, veremos que o pêndulo, esse sistema simples composto de um barbante e uma bolinha, teve um papel marcante no desenvolvimento da ciência.

9.5 O Pêndulo físico

Se você olhar um relógio de pêndulo, como o mostrado na Figura 9.15, vai ver que o pêndulo está longe de ser um pêndulo simples. No caso da figura, ele se parece mais com uma haste rígida com um disco fixado na ponta, mais alguns ornamentos. Podemos calcular o período das oscilações desse pêndulo, que podemos chamar, em um contexto mais geral, de pêndulo físico, ou pêndulo composto. Um pêndulo físico é constituído de um corpo rígido qualquer que pode oscilar em torno de um eixo fixo horizontal. Na figura 9.16 que segue ilustramos esse pêndulo. O eixo de rotação/oscilação horizontal da massa M é o eixo z , ortogonal ao plano da página e orientado para fora da página. Note que, conforme já vimos quando estudamos o equilíbrio dos corpos rígidos, a posição de equilíbrio estável dessa massa pendurada é a posição em que seu centro de gravidade (CG) está sobre a linha tracejada vermelha, que é a vertical que passa pelo eixo z de rotação. Na figura 9.16 mostramos a massa M na posição medida pela variável $\theta(t)$ (positiva no sentido anti-horário), de tal forma que na posição de equilíbrio estável vale exatamente $\theta = 0$. Só há um torque ao longo do eixo z , que é o torque do peso. A força de apoio (não mostrada na figura) não possui torque ao longo de z , pois atua junto ao eixo. O braço de alavanca do peso é $b(t)$ e o torque do peso é dado por:

$$\tau_{RZ}(t) = -M g b(t)$$

O sinal negativo indica que o torque é para dentro da página no instante mostrado (torque restaurador que quer girar o corpo no sentido horário para que ele retorne à posição de equilíbrio estável). Chamando de l a distância do eixo z ao CG obtemos ara o braço de alavanca do peso:

$$b(t) = l \sin(\theta(t))$$

Note que para $\theta(t) < 0$, a função braço de alavanca $b(t)$ será negativa (pois $\sin(\theta(t)) < 0$), invertendo o sentido do torque restaurador.

Portanto, aplicando a segunda lei de Newton da rotação para esse corpo rígido obtemos:

$$\tau_{RZ} = I \alpha \Rightarrow -M g l \sin(\theta(t)) = I \frac{d^2}{dt^2} \theta(t)$$

sendo I o momento de inércia do corpo rígido em relação ao eixo z .

Resumindo, a massa M oscila de acordo com a seguinte equação de movimento:



Figura 9.15: Um relógio de pêndulo.

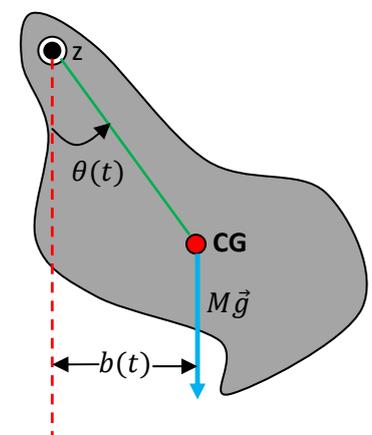


Figura 9.16: Um pêndulo físico consiste em uma massa de forma rígida arbitrária que pode girar/oscilar livremente em torno de um eixo fixo horizontal z .

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = -\frac{M g l}{I} \text{sen}(\theta(t))$$

Comparando essa equação com aquela do MHS, concluímos que o pêndulo físico não apresenta, em geral, um movimento harmônico simples, o que não é novidade. Assim sendo, em analogia ao que fizemos para o pêndulo simples, vamos analisar o movimento do pêndulo físico no regime de baixas amplitudes, para o qual vale a aproximação:

$$\text{sen}(\theta(t)) \cong \theta(t)$$

com $\theta(t)$ em radianos.

Portanto, nesse regime o pêndulo físico obedece à equação:

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = -\frac{M g l}{I} \theta(t)$$

que é a equação típica do MHS. Sabemos então que:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

com

$$\omega = \sqrt{M g l / I}$$

e as constante A e φ definidas pelas condições iniciais. Note que, como no caso do oscilador bloco-mola rotatório, a amplitude $A = \theta$ é dada em radianos, para que θ seja dado também em radianos.

O pêndulo simples é um caso particular de um pêndulo físico com $I = M l^2$ e, portanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{M g l}{I}} = \sqrt{\frac{M g l}{M l^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Como exemplo, consideremos um pêndulo físico parecido com o mostrado na figura 9.15, cujo modelo representamos na figura 9.17 ao lado. Ele consiste em uma haste delgada e rígida de massa m e comprimento L com um disco de massa M e raio R fixado na sua ponta. A outra ponta da haste pode girar livremente em torno do eixo z .

Para calcular a frequência ω das oscilações desse pêndulo precisamos calcular I , o momento de inércia do conjunto haste+disco em relação ao eixo z , e l , a distância de z ao CG do sistema haste+disco.

Quanto ao momento de inércia, será dado pela soma do momento de inércia da haste com o momento de inércia do disco:

$$I = I_{\text{haste}} + I_{\text{disco}}$$

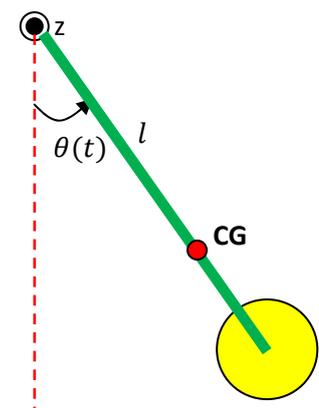


Figura 9.17: Um exemplo de pêndulo físico: uma haste com um disco na ponta.

O momento de inércia de uma haste girando em torno de um eixo que passa por sua extremidade é:

$$I_{haste} = \frac{1}{3}mL^2$$

No caso do disco, teremos que usar o teorema dos eixos paralelos, pois sabemos apenas que para um disco girando em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa (CM) vale:

$$I_{CMdisco} = \frac{1}{2}MR^2$$

Portanto, para o disco girando em torno do eixo z obtemos:

$$I_{disco} = I_{CMdisco} + ML^2$$

já que L é a distância entre o eixo z e o CM do disco. Portanto:

$$I = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}MR^2 + ML^2$$

Quanto ao comprimento l , que é a distância do CG do conjunto haste+disco até o eixo z , este pode ser obtido através do cálculo da posição do CM desse conjunto, admitindo que $CM=CG$. Considere então a Figura 9.18 onde adotamos um eixo x ao longo da haste, com origem no eixo z . No CM da haste ($x=L/2$) posicionamos uma partícula de massa m e no CM do disco ($x=L$) posicionamos uma partícula de massa M . O CM desse sistema de duas partículas (um haltere) está em:

$$x_{CM} = l = \frac{m(L/2) + M L}{m + M} = \frac{m + 2 M L}{m + M} \frac{L}{2}$$

Concluindo, a frequência angular de oscilações desse pêndulo físico é:

$$\omega = \sqrt{\frac{(m + M) g l}{I}} = \sqrt{\frac{(m + 2M) g L}{2 \left(\frac{1}{3} m + M \right) L^2 + MR^2}}$$

Note que para $R \rightarrow 0$ e $m \rightarrow 0$ recuperamos o resultado do pêndulo simples:

$$\omega = \sqrt{\frac{(0 + 2M) g L}{2 \left(\frac{1}{3} 0 + M \right) L^2 + M 0^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Para $R \rightarrow 0$ e $M \rightarrow 0$ resta apenas uma haste delgada de massa m oscilando em torno de um eixo que passa por uma extremidade e obtemos:

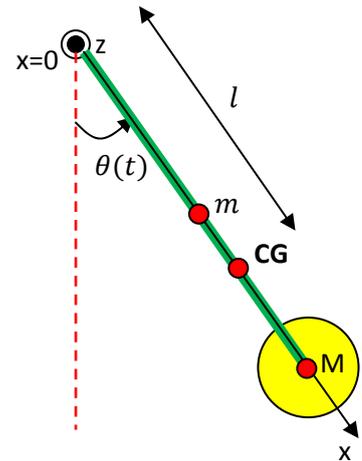


Figura 9.18: Cálculo da posição do $CM=CG$ do conjunto haste+disco.

$$\omega = \sqrt{\frac{(m+0)gL}{2\left(\frac{1}{3}m+0\right)L^2+00^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

que é compatível com o resultado geral que obtivemos para o pêndulo físico:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I}}$$

fazendo: $M = m$, $l = L/2$ e $I = mL^2/3$.

É interessante registrar que a expressão para a frequência do pêndulo composto sugere um método experimental para a determinação do momento de inércia de um corpo qualquer, de forma arbitrária. Por exemplo, considere que vamos colocar uma cadeira para girar em torno de um eixo fixo (z) e precisamos saber o momento de inércia I da cadeira em relação a z (para calcular sua energia cinética, por exemplo). A Figura 9.19 ilustra essa situação. Em princípio podemos pensar que é só calcular a soma:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

dos produtos das massas pelos raios de giração ao quadrado de cada partícula i que compõe a cadeira. Mas, não é muito difícil perceber que fazer essa conta para um objeto com a forma dessa cadeira é algo impraticável. Podemos medir então o momento de inércia I . Para isso colocamos a cadeira para oscilar em torno de z , como um pêndulo físico, e medimos o período T dessas oscilações (no regime de baixas amplitudes) com um cronômetro. Podemos usar também um método experimental para determinar a posição do CM da cadeira, conforme discutimos no capítulo 6, para conhecer a distância l desse CM ao eixo z . Portanto, conhecendo T (em s), a distância l (em m), a gravidade g (em m/s^2) e a massa M (em kg) da cadeira obtemos (em $kg\ m^2$):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Mgl}{I}} \Rightarrow I = \frac{MglT^2}{4\pi^2}$$

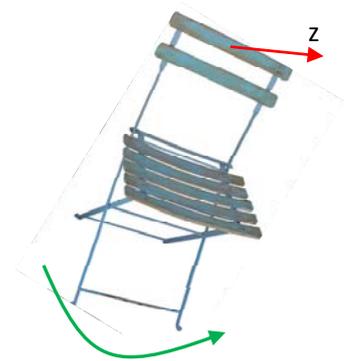


Figura 9.19: Uma cadeira vai ser colocada para girar livremente em torno do eixo z . Queremos saber quanto vale o momento de inércia da cadeira em relação a esse eixo.

9.6 Oscilações amortecidas

Observando o movimento oscilatório de um pêndulo ou sistema bloco-mola reais, notamos logo que as oscilações não duram para sempre. O sistema oscila por um intervalo de tempo e as oscilações vão se tornando cada vez mais curtas, até que terminam. Esse decaimento se deve à dissipação da energia mecânica do oscilador, geralmente produzida por algum atrito/arraste. No caso de um sistema bloco-mola real, por exemplo, haveria atrito cinético entre o bloco e a superfície horizontal e também atrito (arraste) do bloco (e um pouco da mola) com o ar. No caso do pêndulo real, o atrito principal é devido à influência do ar (arraste). Na Figura 9.20 mostramos um esboço do comportamento que esperamos para a coordenada $x(t)$ de um oscilador na presença de atrito.

O que chamamos de amplitude A no oscilador sem atrito (o deslocamento máximo da posição de equilíbrio) diminui progressivamente no oscilador com atrito, ou seja, de certa forma, $A=A(t)$ nesse caso. O sistema continua sendo oscilatório, mas deixa de ser periódico, pois o movimento não se repete mais com o passar do tempo, ele vai se tornando cada vez mais restrito.

Vamos analisar o oscilador mais simples, o bloco-mola, na presença de atrito. Apenas para lembrar, mostramos na Figura 9.21 esse sistema. O bloco de massa M desliza em uma superfície horizontal e podemos considerar, então, que ele sofre um atrito cinético ao longo de x com magnitude dada por:

$$F_A^{(c)} = \mu_c \eta = \mu_c M g$$

Em princípio, para calcular o movimento do bloco na presença desse atrito, basta adicionar essa força na segunda lei de Newton, que para o sistema sem atrito é:

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -k x(t)$$

A inclusão do atrito implica que:

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -k x(t) + F_A^{(c)}$$

Em princípio, se formos muito apressados, podemos achar que a equação acima fica:

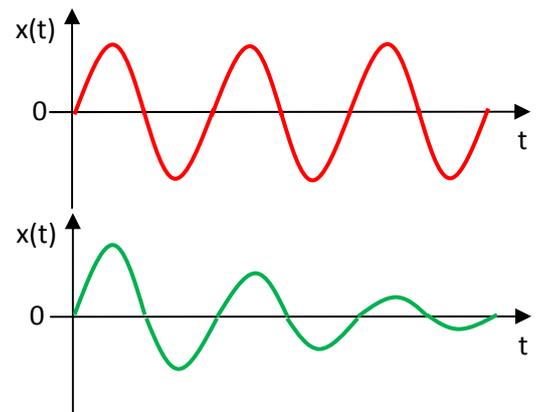


Figura 9.20: Comparação entre uma oscilação sem nenhuma dissipação de energia (curva vermelha) com uma oscilação na presença de atrito (curva verde).

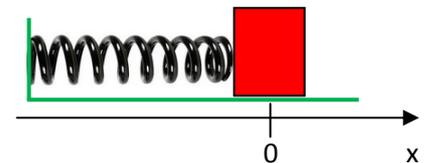


Figura 9.21: Um oscilador bloco-mola.

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -k x(t) + \mu_c M g$$

Fica claro que nessa última equação a força de atrito não tem nenhuma dependência no tempo. Se pensarmos mais um pouco vamos concluir que isso é absurdo pois a força de atrito deve sempre se opor ao sentido de movimento do bloco e o bloco se move para lá e para cá. Concluímos então que há um erro grosseiro na equação acima. De fato, quando o bloco estiver se movendo para a direita, a força de atrito deverá estar apontando para a esquerda, e assim por diante. A força de atrito, se representada corretamente, deve ser, ela mesma, uma função oscilatória.

O sentido do movimento do bloco é o sentido da velocidade $V(t)$ e, portanto, podemos introduzir uma espécie de função sinal da velocidade dada por:

$$\text{sinal}(V(t)) = \frac{V(t)}{|V(t)|}$$

Essa função assume o valor +1 quando a velocidade é positiva, ou seja, para a direita e o valor -1 no caso oposto (a função sinal definida acima não está definida na origem $V = 0$ e por isso devemos incluir ainda a definição $\text{sinal}(0) = 0$). Portanto, podemos corrigir a equação de movimento do bloco na presença do atrito cinético, obtendo:

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -k x(t) - \left(\frac{V(t)}{|V(t)|} \right) \mu_c M g$$

Quando a velocidade estiver para a direita ($V > 0$), a força de atrito estará para a esquerda e assim por diante. Note que $V(t) = dx(t)/dt$ e que a equação diferencial acima envolve então as derivadas segunda e primeira da função $x(t)$. É fácil ver que essa equação diferencial é bastante complicada e por isso geralmente não encontramos nos livros de mecânica a solução (não encontramos nem a simples descrição) desse caso para esse problema aparentemente simples, de um oscilador bloco-mola na presença de um atrito cinético. A solução analítica para essa equação pode ser encontrada na referência *Oscillator damped by a constant-magnitude friction force*, A. Marchewka, D. S. Abbott, and R. J. Beichner, *American Journal of Physics* **72** (2004), págs. 477-483.

Tendo em vista a complexidade da equação de movimento obtida acima, preferimos tentar uma outra abordagem para discutir o oscilador na presença de atrito. De fato, só há uma possibilidade, tentar outra lei de atrito. Para o pêndulo, por exemplo, a presença de um atrito cinético do tipo $\mu_c \eta$ não faz sentido, já que a partícula não desliza em nenhuma superfície (não há força normal). Nesse caso, faz sentido em falarmos em atrito, ou arraste, com o ar, ou com qualquer que seja o fluido no ambiente em que o pêndulo oscila. Mesmo no caso do oscilador bloco-mola, podemos supor que não há atrito na superfície onde o bloco está apoiado, mas que este sofra um arraste com um fluido circundante, como o ar, por exemplo. Nesses casos, devemos incluir nas equações a lei da força de arraste com um fluido. O comportamento básico da força de arraste é

que se a velocidade do corpo é nula não há força e quanto maior a velocidade, maior a força. Para um corpo pequeno se movendo com velocidade V pequena dentro de um fluido, a força de arraste que o fluido faz no corpo é linear em V e é dada por:

$$F_{AR} = -b V$$

sendo b uma constante (constante de arraste) que depende do corpo (tamanho e forma) e do fluido. O sinal negativo torna a força oposta à velocidade. Em um oscilador usual não esperamos que a velocidade do corpo seja muito alta e por isso podemos adotar aqui esse comportamento para a lei do arraste, o que já fizemos, no capítulo 1, para discutir o movimento de projéteis na presença do ar.

Vamos supor então um oscilador bloco-mola em que o bloco oscila dentro de um fluido com constante de arraste b . Podemos imaginar o oscilador bloco mola oscilando dentro de um aquário vedado, que podemos encher com um fluido arbitrário, um gás ou mesmo um líquido. Se preenchermos o aquário com um gás rarefeito, como o ar, por exemplo, esperamos que o coeficiente de arraste b seja pequeno e que as oscilações, uma vez iniciadas, demorem muito para cessar. Por outro lado, se preenchermos o aquário com um óleo grosso, o coeficiente de arraste será grande e as oscilações devem durar muito pouco. Para descrever essa riqueza de comportamentos precisamos resolver a equação de movimento do bloco na presença desse fluido que se caracteriza por um coeficiente de arraste b (consideraremos que a forma e tamanho do bloco estão fixos e que b estará, portanto, definido pelo fluido que poderá ser escolhido arbitrariamente). Incluindo então a lei do arraste na equação do movimento obtemos:

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -k x(t) - b \frac{d}{dt} x(t)$$

em que usamos a relação $V(t) = dx(t)/dt$.

Essa é uma equação diferencial ordinária comum, cuja solução pode ser facilmente encontrada nos livros de cálculo diferencial e integral. Não nos preocuparemos aqui em obter essa solução. Fato é que a solução depende da relação entre os coeficientes M , k e b .

Quando b é pequeno, no caso do ar, por exemplo, a solução dessa equação é:

$$x(t) = A e^{-b t / 2M} \cos(\omega_b t + \varphi)$$

com A e φ constantes arbitrárias definidas pelas condições iniciais e a frequência dada por:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{b}{2M}\right)^2}$$

Note que para $b = 0$ recuperamos a solução do MHS sem atrito, com $\omega_b = \omega_0 = \sqrt{k/M}$. Em geral vale $\omega_b \leq \omega_0$, por causa do sinal – dentro da raiz. A equação horária $x(t)$ para a posição do bloco é

composta do produto de duas funções, uma exponencial que decai no tempo (por causa do expoente negativo) e uma função cosseno, que oscila no tempo. Portanto, o comportamento de $x(t)$ é oscilatório decrescente. Não faz muito sentido em se definir amplitude para um movimento que decai no tempo, mas, fazendo analogia com o movimento para $b = 0$, podemos pensar que o bloco oscila de acordo com:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_b t + \varphi)$$

sendo $A(t) = A e^{-b t / 2M}$ uma espécie de amplitude decrescente com o tempo. Para $b = 0$ recuperamos $A(t) = A$. Toda essa discussão só vale no caso em que:

$$\frac{k}{M} - \left(\frac{b}{2M}\right)^2 > 0$$

ou seja:

$$b < 2\sqrt{Mk} \quad (\text{ou } b < 2M\omega_0)$$

pois só assim garantimos que ω_b é um número real. Portanto, quando dissemos que b é pequeno, entendemos agora que essa hipótese se traduz em $b < 2\sqrt{Mk}$, pois nada é absolutamente pequeno.

Apenas para simplificar as contas, nos limitaremos daqui para diante ao caso particular em que o ângulo de fase é $\varphi = 0$, ou seja:

$$x(t) = A e^{-b t / 2M} \cos(\omega_b t)$$

que corresponde a uma condição inicial particular $x_0 = X \neq 0$ e $V_0 = -Xb/2M$.

A função $x(t)$ obtida acima é o produto de uma função exponencial decrescente $e^{-b t / 2M}$ e uma função oscilatória periódica $\cos(\omega_b t)$, resultando em uma função oscilatória de amplitude decrescente no tempo, como a curva na cor verde na figura 9.20 (uma função que não é de fato periódica). Em um fluido de pouco arraste o bloco oscila e vai parando de oscilar lentamente. Matematicamente, ele vai demorar um tempo infinito para chegar ao repouso. Na prática, isso vai ocorrer em um tempo finito, pois quando a equação disser que $x(t) = 10^{-100}$ m, isso significa de fato que $x(t) = 0$, pois não há aparelho que meça uma distância de 10^{-100} m. Esse oscilador com arraste fraco é chamado de subamortecido.

Podemos usar a solução do oscilador subamortecido para discutir as outras possibilidades de amortecimento (apenas no caso $\varphi = 0$, para o caso mais geral devemos resolver a equação diferencial de movimento em cada uma das possibilidades). Por exemplo, se o fluido for caracterizado por um b grande, mais especificamente:

$$b > 2\sqrt{Mk} \quad (\text{ou } b > 2M\omega_0)$$

a frequência ω_b se torna imaginária e pode ser escrita como:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{b}{2M}\right)^2} = \sqrt{-\left(\left(\frac{b}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M}\right)} = \sqrt{-1} \sqrt{\left(\frac{b}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M}} = i \omega'_b$$

com ω'_b real e dada por:

$$\omega'_b = \sqrt{\left(\frac{b}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M}}$$

(note que $i = \sqrt{-1}$).

Portanto, ainda no caso particular $\varphi = 0$, a solução para $x(t)$ se torna:

$$x(t) = A e^{-b t / 2M} \cos(i \omega'_b t) = A e^{-b t / 2M} \cosh(\omega'_b t)$$

Nessa equação, \cosh é a função cosseno hiperbólico, que, apesar do nome, não apresenta um comportamento parecido com a função cosseno. Pelo contrário, a função cosseno hiperbólico não é uma função oscilatória periódica, ela é uma função monótona crescente para $t \geq 0$. Ela se comporta como ilustrado na Figura 9.22 abaixo. Portanto, no caso em que o amortecimento é grande, o bloco não chega nem a oscilar, ele simplesmente se move lentamente em direção à sua posição de equilíbrio. A função $x(t)$ nesse caso é o produto de uma função monótona decrescente ($e^{-b t / 2M}$) por uma função monótona crescente ($\cosh(\omega'_b t)$). Mas, como $\omega'_b < b / 2M$ conforme podemos ver na definição de ω'_b , segue que o decaimento é mais rápido que o crescimento e a função $x(t)$ finalmente decai no tempo.

Damos o nome de superamortecido a esse regime de amortecimento. Esperamos que ele seja observado no caso do sistema oscilar imerso em um tanque de óleo grosso, por exemplo.

A fronteira entre os regimes subamortecido ($b < 2\sqrt{Mk}$) e superamortecido ($b > 2\sqrt{Mk}$) ocorre exatamente quando:

$$b = b_{\text{critico}} = 2\sqrt{Mk} \quad (\text{ou } b = 2M\omega_0)$$

e é chamado de regime crítico. Nesse caso vale:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{b}{2M}\right)^2} = 0$$

e a equação horária do bloco se torna:

$$x(t) = A e^{-b t / 2M} \cos(0) \Rightarrow x(t) = A e^{-b t / 2M} = A e^{-\omega_0 t}$$

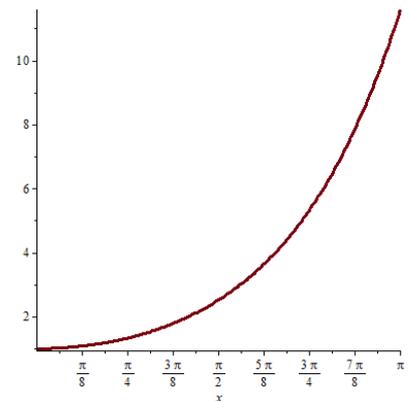


Figura 9.22: Comportamento da função $\cosh(x)$ com x variando no intervalo $[0, \pi]$.

Nesse caso o bloco se aproxima exponencialmente e lentamente de sua posição de equilíbrio, sem oscilar. Trata-se de um comportamento parecido com o caso superamortecido, mas o movimento do bloco é mais rápido no caso crítico, tendo em vista o fato de que no caso superamortecido a função exponencial decrescente está multiplicada pela função \cosh , que é uma função crescente em t . Isso torna o movimento do bloco mais lento no caso superamortecido do que no caso crítico. Se queremos um decaimento rápido nas oscilações, devemos projetar um sistema no regime crítico.

Na figura 9.23 abaixo esboçamos o comportamento da posição do bloco $x(t)$ em função do tempo nos três regimes diferentes discutidos aqui. As curvas foram feitas adotando $M=10$ kg e $k=10$ N/m, de tal forma que o valor do coeficiente de arraste crítico é $b_{\text{critico}} = 2\sqrt{Mk} = 20$ kg/s. A condição inicial é a mesma para todas as curvas, e corresponde ao caso mais simples $\varphi = 0$: o bloco foi lançado da posição inicial $x_0 = X = 1$ m com velocidade inicial $V_0 = -Xb/2M = -b/2M$. A curva vermelha, obtida com $b=5$ kg/s, corresponde ao regime subamortecido, em que o bloco oscila algumas vezes em torno da sua posição de equilíbrio e vai parando lentamente. A curva azul, obtida com $b=40$ kg/s, corresponde ao regime superamortecido, em que o bloco vai se aproximando lentamente da posição de equilíbrio. Finalmente, a curva verde, obtida com $b=20$ kg/s, corresponde ao caso crítico, em que o bloco se aproxima mais rapidamente da posição de equilíbrio, sem ultrapassá-la. Apenas para comparação, a curva cinza mostra o caso em que não houvesse nenhum amortecimento ($b=0$).

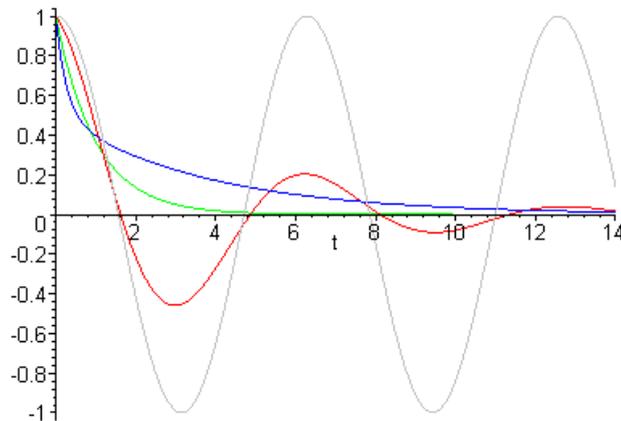


Figura 9.23: Posição $x(t)$ em função do tempo de um bloco de um oscilador bloco mola com amortecimento proporcional à velocidade. Curva cinza apenas para comparação: sem amortecimento ($b=0$); curva vermelha: subamortecimento; curva verde: amortecimento crítico; curva azul: superamortecimento. Condição inicial correspondente a $\varphi = 0$, conforme discutido no texto.

É interessante notar que a constante $b/2M$ tem unidade de frequência (digamos, ω_{DEC} , DEC de decaimento), ou seja, o inverso de uma unidade de tempo (rad/s, por exemplo), pois o expoente $b t / 2M$ tem que ser necessariamente adimensional (já discutimos isso no capítulo 1). De fato, o fator de decaimento:

$$e^{-b t / 2M}$$

define um tempo característico para esse decaimento, que podemos chamar de τ_{DEC} , tal que:

$$e^{-b t / 2M} = e^{-\omega_{DEC} t} = e^{-2\pi t / \tau_{DEC}}$$

Portanto:

$$\tau_{DEC} = \frac{2\pi}{\omega_{DEC}} = 2\pi \frac{2M}{b}$$

Quanto maior o tempo de decaimento τ_{DEC} , ou seja, quanto menor o arraste b , mais lentamente decaem as oscilações descritas pela função $x(t)$. Quando $b \rightarrow 0$, segue que $\tau_{DEC} \rightarrow \infty$, ou seja, as oscilações não decaem nunca (oscilador sem amortecimento).

Analogamente, a frequência $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ define um tempo característico para as oscilações no sistema, que é o período das oscilações do sistema sem arraste:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

A frequência ω_b das oscilações amortecidas, por sua vez, define um tempo característico para as oscilações no sistema, que é o período das oscilações do sistema com arraste:

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b}$$

Quanto maior a frequência ω_b , menor o tempo de oscilação T_b , significando que o sistema oscila mais rapidamente.

Note que:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{b}{2M}\right)^2} \Rightarrow \omega_b^2 = \omega_0^2 - \omega_{DEC}^2$$

ou seja:

$$\frac{1}{T_b^2} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{\tau_{DEC}^2}$$

Vemos então que o regime subamortecido é caracterizado por:

$$\frac{b}{2M} < \omega_0 \Rightarrow \tau_{DEC} > T_0 \text{ e } T_b \text{ real (pois } T_b^2 > 0).$$

Interpretamos esse resultado da seguinte forma: o sistema oscila, porque T_b é real, e o decaimento das oscilações é mais lento que as próprias oscilações, pois $\tau_{DEC} > T_0$.

No regime crítico vale:

$$\frac{b}{2M} = \omega_0 \Rightarrow \tau_{DEC} = T_0 \text{ e } T_b \rightarrow \infty \text{ (pois } \frac{1}{T_b^2} \rightarrow 0).$$

O sistema deixa de oscilar, pois $T_b \rightarrow \infty$ e $x(t)$ decai em um tempo característico $\tau_{DEC} = T_0$.

Para o regime superamortecido obtemos algo um pouco mais complicado:

$$\frac{b}{2M} > \omega_0 \Rightarrow \tau_{DEC} < T_0 \text{ e } T_b \text{ é imaginário (pois } T_b^2 < 0).$$

O sistema não oscila, porque o tempo de oscilação T_b é imaginário, e o decaimento das oscilações é mais lento que no caso crítico, porque o que era a parte oscilatória de $x(t)$ (o termo $\cos(\omega_b t)$) se tornou uma função crescente no tempo (o termo $\cosh(\omega'_b t)$), atrasando o decaimento de $x(t)$. Nesse caso o decaimento não é caracterizado apenas por τ_{DEC} mas por um novo tempo de decaimento τ'_{DEC} dado por:

$$\frac{1}{\tau'_{DEC}} = \frac{1}{\tau_{DEC}} - \sqrt{\frac{1}{\tau_{DEC}^2} - \frac{1}{T_0^2}}$$

Note então que no limite do caso crítico vale $\tau'_{DEC} = \tau_{DEC} = T_0$ e que $\tau'_{DEC} > \tau_{DEC}$ em geral (pois $\frac{1}{\tau'_{DEC}} - \frac{1}{\tau_{DEC}} < 0$). No limite $b \rightarrow \infty$ (um amortecimento gigantesco) vale $\tau_{DEC} \rightarrow 0$ mas o decaimento de $x(t)$ é de fato muito lento pois $\tau'_{DEC} \rightarrow \infty$.

O gráfico na Figura 9.24, que mostra $\tau_{DEC} \times T_0$, ilustra essas idéias. A reta $\tau_{DEC} = T_0$ que divide o gráfico em duas regiões iguais corresponde ao caso do oscilador crítico.

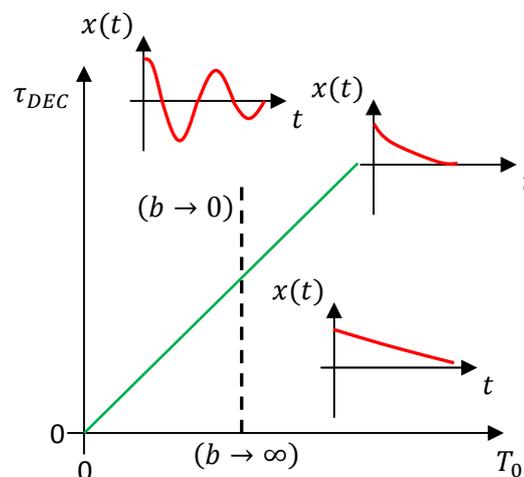


Figura 9.24: Gráfico de $\tau_{DEC} \times T_0$ que mostra os diferentes comportamentos do oscilador amortecido. O eixo horizontal representa o tempo característico das oscilações e o eixo vertical representa o tempo característico do decaimento das oscilações. Se fixarmos M e k e formos aumentando o arraste do fluido (a constante b), seguimos a linha tracejada vertical (no sentido de cima para baixo). Partimos de $b=0$ (oscilador sem arraste), passamos pelo caso subamortecido, pelo caso crítico e finalmente pelo caso superamortecido. Note que no caso superamortecido o decaimento de $x(t)$ não é dado por τ_{DEC} (que vai para zero com o aumento de b) mas por τ'_{DEC} (que vai para infinito).

As soluções gerais para o oscilador amortecido, com condições iniciais arbitrárias, nos casos sub, crítico e superamortecidos estão mostradas na Tabela 9.1 que segue. Não vamos entrar em detalhe aqui sobre como essas soluções foram obtidas, a partir da equação de movimento do bloco. Os detalhes podem ser encontrados nos livros de cálculo diferencial e integral.

Amortecimento	Solução
$b = 0$	$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ <p>com</p> $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ <p>A e φ definidos pelas condições iniciais x_0 e V_0 através de:</p> $x_0 = A \cos(\varphi) \quad \text{e} \quad V_0 = -A \omega \sin(\varphi)$
Sub $b < 2\sqrt{Mk}$ $(\frac{b}{2M} < \omega_0)$	$x(t) = A e^{-b t / 2M} \cos(\omega_b t + \varphi)$ <p>com</p> $\omega_b = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{b}{2M}\right)^2}$ <p>A e φ definidos pelas condições iniciais x_0 e V_0 através de:</p> $x_0 = A \cos(\varphi) \quad \text{e} \quad V_0 = -A \left[\frac{b}{2M} \cos(\varphi) + \omega_b \sin(\varphi) \right]$
Crítico $b = 2\sqrt{Mk}$ $(\frac{b}{2M} = \omega_0)$	$x(t) = [C_1 + C_2 t] e^{-\omega_0 t}$ <p>C_1 e C_2 definidos pelas condições iniciais x_0 e V_0 através de:</p> $x_0 = C_1 \quad \text{e} \quad V_0 = C_2 - \omega_0 C_1$
Super $b > 2\sqrt{Mk}$ $(\frac{b}{2M} > \omega_0)$	$x(t) = \left[D_1 e^{\omega'_b t} + D_2 e^{-\omega'_b t} \right] e^{-b t / 2M}$ <p>com</p> $\omega'_b = \sqrt{-\frac{k}{M} + \left(\frac{b}{2M}\right)^2}$ <p>D_1 e D_2 definidos pelas condições iniciais x_0 e V_0 através de:</p> $x_0 = D_1 + D_2 \quad \text{e} \quad V_0 = \left[\omega'_b - \frac{b}{2M} \right] D_1 - \left[\omega'_b + \frac{b}{2M} \right] D_2$

Tabela 9.1: Soluções gerais para o oscilador amortecido com arraste proporcional à velocidade. O caso $b=0$ é mostrado apenas para comparação.

Na sequência, as figuras 9.25 e 9.26 mostram a posição do bloco em função do tempo para os casos em que o bloco parte do repouso de uma posição em que a mola está inicialmente dilatada ($x_0 = 1$ m) e em que o bloco parte da origem após receber um peteleco que imprime nele uma velocidade inicial $V_0 = 1$ m/s . As diferentes condições iniciais determinam os valores das constantes nas soluções mostradas na tabela 9.1.

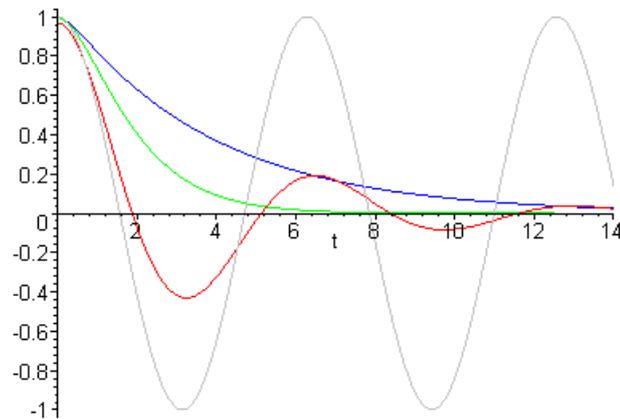


Figura 9.25: Posição $x(t)$ em função do tempo de um bloco de um oscilador bloco mola com amortecimento proporcional à velocidade. Curva cinza apenas para comparação: sem amortecimento ($b=0$); curva vermelha: subamortecimento; curva verde: amortecimento crítico; curva azul: superamortecimento. Condição inicial: $x_0 = 1$ m e $V_0 = 0$ (o bloco parte do repouso).

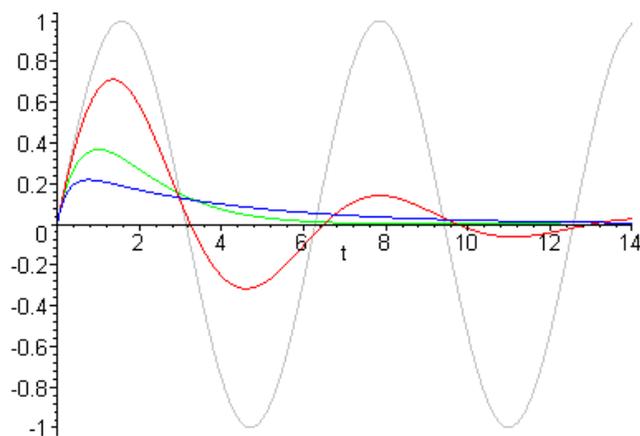


Figura 9.26: Posição $x(t)$ em função do tempo de um bloco de um oscilador bloco mola com amortecimento proporcional à velocidade. Curva cinza apenas para comparação: sem amortecimento ($b=0$); curva vermelha: subamortecimento; curva verde: amortecimento crítico; curva azul: superamortecimento. Condição inicial: $x_0 = 0$ e $V_0 = 1$ m/s (o bloco parte da origem com um peteleco no sentido $x > 0$).

Em um sistema típico de suspensão de automóvel, por exemplo, são usadas molas que se unem ao corpo do automóvel e ao conjunto dos eixos das rodas e pneus, de tal forma que o corpo principal do automóvel fica suspenso pelas molas. A idéia está ilustrada na Figura 9.27 que segue (apenas para um pneu). Se fosse apenas isso, o sistema seria subamortecido, já que haveria apenas o ar circundante para amortecer as oscilações para baixo e para cima do automóvel. Após passar por um buraco na pista, ou por um quebra-molas, por exemplo, o automóvel oscilaria várias vezes até parar, o que causaria desconforto/náuseas nos passageiros. Para modificar a constante de arraste b , um componente é adicionado ao sistema, o amortecedor. Um amortecedor consiste basicamente em um pistão (ou êmbolo), que se move dentro de um cilindro preenchido com um óleo ou um gás. O amortecedor é conectado em paralelo (lado a lado) com a mola, de tal forma que quando a mola se deforma, o pistão do amortecedor se move dentro do fluido, amortecendo as oscilações do corpo do automóvel. Selecionando o fluido do amortecedor, podemos modificar livremente o regime de amortecimento do sistema. Na prática essa escolha é ditada por vários fatores, como conforto e segurança. Tipicamente, um regime subamortecido próximo ao regime crítico é desejável, pois corresponde ao caso em que o veículo oscila poucas vezes e retorna rapidamente à posição de equilíbrio. Nos casos práticos em que se quer eliminar as oscilações, os osciladores em regime crítico e superamortecido podem ser utilizados. O oscilador crítico é aquele que retorna mais rapidamente para a posição de equilíbrio, sem oscilações. A mola de porta, por exemplo, usada para fechar automaticamente uma porta, é ajustada para o regime crítico (através de um amortecedor), pois ela pretende fechar a porta em um tempo mais curto possível, sem que a porta oscile.



Figura 9.27: Ilustração da suspensão de um automóvel.

9.7 Exercícios Resolvidos

ER 9.1) Considere uma pequena massa fixa em uma mola que oscila como um oscilador harmônico simples. A posição x (em metros) dessa massa ao longo do eixo de vibração, em função do tempo t (em segundos), é dada por:

$$x(t) = 0,1 \operatorname{sen}(2 \pi t)$$

a) Faça um gráfico de $x(t)$ em função do tempo t .

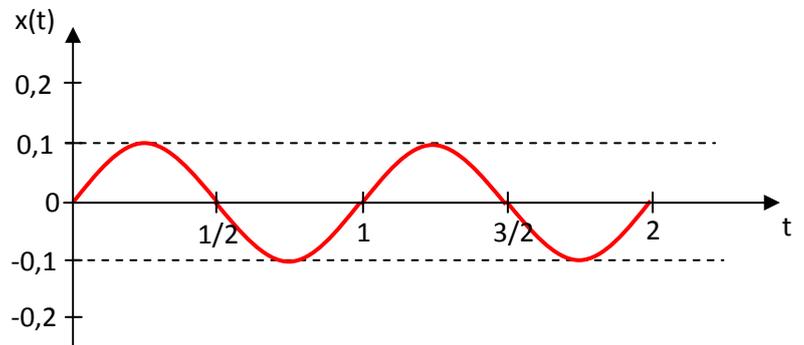
Sabemos que para o bloco-mola em MHS, a solução geral para $x(t)$ é:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Vemos então que nesse caso, vale que a amplitude é $A = 0,1$ m, a frequência angular é $\omega = 2 \pi$ rad/s e o ângulo de fase é $\varphi = 3\pi/2$ (pois $\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(\theta) \forall \theta$). O período das oscilações é:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 1 \text{ s}$$

A função seno é tal que $\text{sen}(0) = 0$, $\text{sen}(\pi/2) = 1$, $\text{sen}(\pi) = 0$, $\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$ e assim por diante. Levando tudo isso em conta, obtemos o gráfico ao lado.



b) Faça um gráfico da força de mola que atua na massa em função do tempo t . Considere o valor da constante de mola $k = 2 \text{ (N/m)}$.

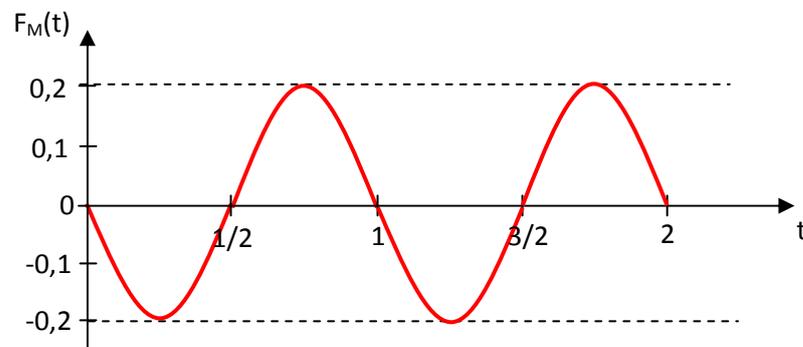
De acordo com a lei de Hooke, pressuposta para o oscilador bloco-mola em MHS, a força de mola tem magnitude ao longo do eixo x dada por:

$$F_M = -k x$$

Portanto, a força de mola em newtons é:

$$F_M(t) = -k x(t) = -2 [0,1 \text{ sen}(2\pi t)] = -0,2 \text{ sen}(2\pi t)$$

Obtemos então o gráfico que segue para a força de mola em função do tempo.



c) Faça um gráfico da energia elástica armazenada no sistema em função do tempo t .

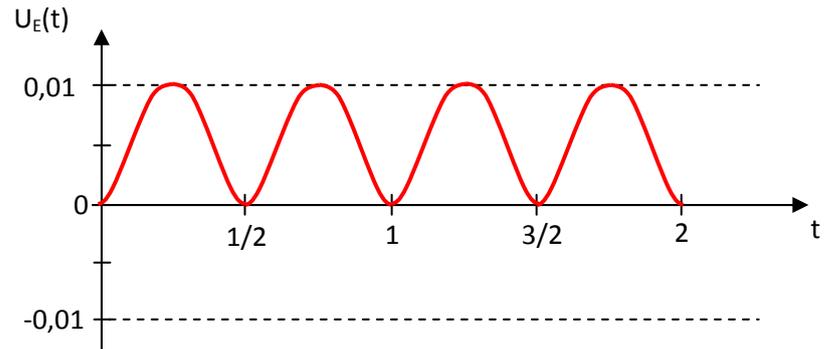
A energia potencial elástica armazenada na mola é:

$$U_E = \frac{1}{2} k x^2$$

Portanto, a energia elástica em joules é dada por:

$$U_E(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} 2 [0,1 \text{ sen}(2\pi t)]^2 = 0,01 \text{ sen}^2(2\pi t)$$

Obtemos o gráfico ao lado para $U_E(t)$ versus t :



d) Faça um gráfico da energia cinética da massa em função de t .

Sabemos que a energia mecânica do sistema é conservada, ou seja:

$$K(t) + U_E(t) = \frac{1}{2}MV(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = \text{constante}$$

sendo a constante igual à energia mecânica total armazenada no sistema. Nos instantes em que o bloco está parado, a energia mecânica é somente potencial elástica. Isso ocorre sempre que o bloco atinge os pontos de deslocamento máximo e mínimo, ou seja, $x(t) = \pm A$. Portanto, nesses instantes vale:

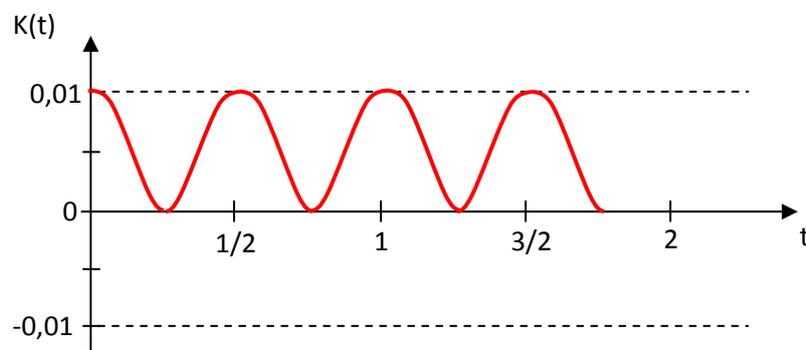
$$U_E(t) = \frac{1}{2}kA^2$$

Olhando então o comportamento de $U_E(t)$, que já calculamos, vemos que a constante acima vale 0,01 J, que é a amplitude (valor máximo) da função $U_E(t)$, que ocorre nos instantes em que o bloco está momentaneamente parado.

Portanto:

$$K(t) + U_E(t) = 0,01 \Rightarrow K(t) = 0,01 - U_E(t) = 0,01 [1 - \text{sen}^2(2\pi t)]$$

Obtemos o gráfico abaixo para $K(t)$ versus t :



Note que podemos escrever:

$$K(t) = 0,01 [1 - \text{sen}^2(2\pi t)] = 0,01 \cos^2(2\pi t)$$

o que torna mais evidente a conservação da energia mecânica, já que:

$$K(t) + U_E(t) = 0,01 \cos^2(2\pi t) + 0,01 \sin^2(2\pi t) = 0,01$$

Alternativamente, podemos deduzir a expressão da energia cinética calculando diretamente a velocidade do bloco em função do tempo:

$$V(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}0,1 \sin(2\pi t) = 0,1 (2\pi) \cos(2\pi t) = 0,2\pi \cos(2\pi t)$$

Portanto:

$$K(t) = \frac{1}{2}MV(t)^2 = \frac{1}{2}M(0,2\pi \cos(2\pi t))^2$$

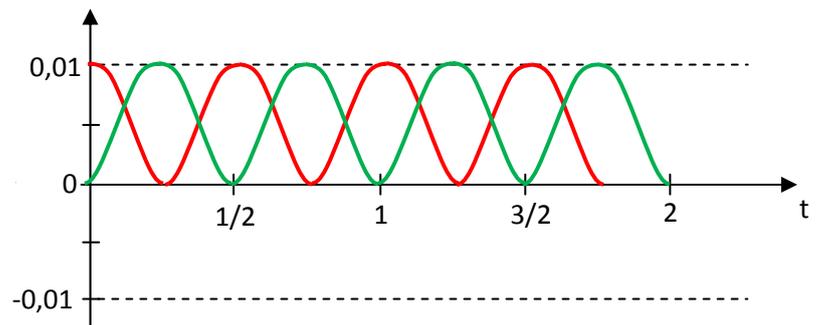
A massa M do bloco não foi dada, mas sabemos que:

$$\omega^2 = (2\pi)^2 = \frac{k}{M} = \frac{2}{M} \Rightarrow M = \frac{1}{2\pi^2} \text{ kg}$$

Concluindo:

$$K(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi^2} (0,2\pi \cos(2\pi t))^2 = 0,01 \cos^2(2\pi t)$$

Sobrepondo no mesmo gráfico as curvas de $K(t)$ (curva vermelha) e $U_E(t)$ (curva verde) podemos visualizar a troca de energia entre o bloco (cinética) e a mola (potencial elástica), que é realizada através do trabalho da força de mola.



ER 9.2) Considere um pêndulo simples, formado por uma bolinha de massa $M=0,1$ kg fixa na extremidade de uma corda leve e inextensível de comprimento $L=1$ m. Despreze o atrito. A bolinha é solta (em $t=0$) do repouso de um ponto que está a uma distância $d=0,1$ m à esquerda da posição de equilíbrio da bolinha. Considere válida a aproximação de pequenas oscilações e $g=10$ m/s².

a) Escreva a equação da coordenada horizontal $x(t)$ da bolinha em função do tempo (adote um eixo x horizontal, com origem na posição de equilíbrio da bolinha e orientado da esquerda para a direita).

Sabemos que para um pêndulo simples em MHS vale:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Os dados do problema levam aos seguintes valores para os parâmetros da oscilação:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{10}{1}} = \sqrt{10} \text{ rad/s}$$

Vale também, $x_0 = -0,1$ m (o sinal negativo se deve ao fato da bolinha partir de um ponto à esquerda da origem de um eixo x que está apontando para a direita) e $V_0 = 0$ (repouso). Portanto, a amplitude do movimento pendular é:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2} = |x_0| = 0,1 \text{ m}$$

O ângulo de fase é:

$$x_0 = -0,1 = A \cos(\varphi) = 0,1 \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = -1 \Rightarrow \varphi = \pi$$

Concluindo, esse pêndulo oscila de acordo com a seguinte equação horária (x em metros):

$$x(t) = 0,1 \cos(\sqrt{10} t + \pi) = -0,1 \cos(\sqrt{10} t)$$

b) Calcule a velocidade máxima da bolinha, em m/s.

A velocidade da bolinha é dada por:

$$V(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} [-0,1 \cos(\sqrt{10} t)] = 0,1 \sqrt{10} \sin(\sqrt{10} t) \text{ m/s}$$

Como a função seno oscila no intervalo $[-1,1]$, é fácil ver que a função $V(t)$ vai oscilar no intervalo $[-0,1 \sqrt{10}, 0,1 \sqrt{10}]$, ou seja, a velocidade máxima é:

$$V_{MAX} = 0,1 \sqrt{10} \text{ m/s}$$

que é a amplitude da função $V(t)$.

c) Calcule o tempo, em segundos, que demora para a bolinha sair da posição $x = -0,1$ m e chegar em seguida na posição $x = +0,1$ m.

A bolinha demora um tempo igual ao período T das oscilações para completar um ciclo. Um ciclo corresponde a, por exemplo, a bolinha sair da posição $x = -0,1$, ir até a posição $x = +0,1$ (que é a amplitude) e retornar à posição $x = -0,1$. Portanto, essa questão pergunta sobre o tempo que leva para completar meio ciclo, que é $T/2$. Sabemos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \text{ s}$$

Portanto, para ir na sequência de $x = -0,1$ até $x = +0,1$ a bolinha demora um tempo:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \cong 1 \text{ s}$$

ER 9.3) Um bloco de massa M está fixo na extremidade de uma mola de constante elástica k . O bloco oscila harmonicamente e sua posição $x(t)$ é dada por:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

a) Calcule a energia cinética $K(t)$ do bloco em função do tempo (em termos de k , A , ω e t).

A velocidade do bloco é dada por:

$$V(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} [A \operatorname{sen}(\omega t)] = A \omega \cos(\omega t)$$

Portanto, sua energia cinética é:

$$K(t) = \frac{1}{2} M V(t)^2 = \frac{1}{2} M A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)$$

b) Calcule a energia cinética $K(x)$ do bloco em função de x .

Obtivemos a função horária $K(t)$ e agora queremos calcular a função $K(x)$. Para isso, devemos usar a relação entre x e t , que é dada por:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

Note que $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ para todo θ . Portanto:

$$A^2 \cos^2(\omega t) = A^2 [1 - \operatorname{sen}^2(\omega t)] = A^2 - x^2(t)$$

Segue que:

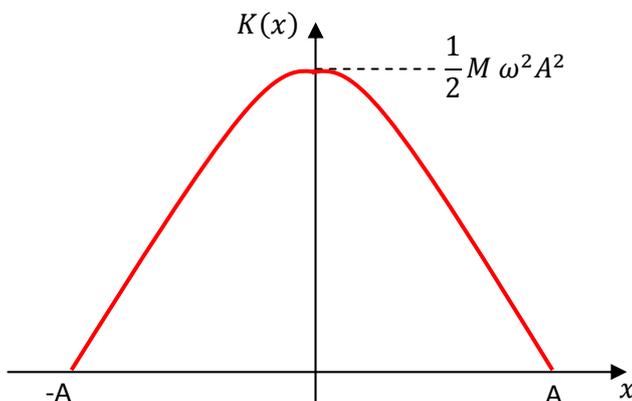
$$K(t) = \frac{1}{2} M A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} M \omega^2 [A^2 - x^2(t)]$$

Ou seja:

$$K(x) = \frac{1}{2} M \omega^2 (A^2 - x^2)$$

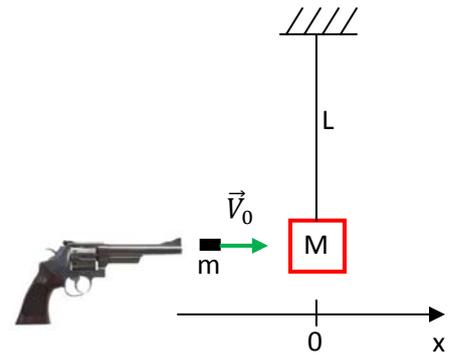
c) Esboce um gráfico de $K(x)$ em função de x .

Note que x varia no intervalo $[-A, A]$ e que $K(x)$ é uma função positiva que varia no intervalo $[0, \frac{1}{2} M \omega^2 A^2]$. A função $K(x)$ tem como gráfico uma parábola, com a “boca” para baixo de raízes $x = \pm A$.



O gráfico de $K(x)$ versus x reflete o que já aprendemos: nos extremos do movimento oscilatório, quando $x = \pm A$, o bloco para momentaneamente, enquanto que na posição de equilíbrio $x = 0$, o bloco passa com velocidade de módulo máximo.

ER 9.4) Um pêndulo balístico é um sistema simples para medição da velocidade de um projétil de arma de fogo. Um bloco de massa M é pendurado em uma corda leve e inextensível de comprimento L formando um pêndulo simples (na aproximação em que o bloco é pequeno). O projétil, cuja velocidade queremos medir, é direcionado para esse bloco, que está inicialmente em repouso em sua posição de equilíbrio, de tal forma que o projétil bate no bloco e fica incrustado nele (colisão completamente inelástica). O impacto do projétil dá origem às oscilações do pêndulo, cuja amplitude permite determinar a velocidade de incidência do projétil. Com base na figura ao lado, determine a relação entre a amplitude das oscilações e a velocidade V_0 do projétil.



Para o pêndulo simples em MHS, a solução geral para a posição horizontal $x(t)$ do bloco é:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Com:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \left| \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad \left| \quad x_0 = A \cos(\varphi) \quad \left| \quad v_0 = -A\omega \sin(\varphi)\right.\right.\right.$$

Note que nessas equações v_0 é a velocidade inicial do pêndulo.

Notamos então que para determinar a amplitude das oscilações, e sua relação com a velocidade do projétil, devemos determinar as condições iniciais x_0 e v_0 das oscilações, que são impostas pelo projétil.

Da figura vemos logo que $x_0 = 0$, pois o impacto projétil/bloco se dá quando o bloco está parado na origem e a partir daí iniciam-se as oscilações do bloco (com a bala incrustada nele).

Para determinar v_0 vamos recorrer à conservação do momento linear ao longo do eixo x do sistema projétil+bloco. De fato, sabemos que:

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{R}_{EXT}$$

E que, portanto:

$$\frac{d}{dt} P_x = R_{EXTx}$$

No momento da colisão do projétil no bloco, as forças externas que atuam nesse sistema são os pesos e a força que a corda faz no bloco (tensão). Essas forças são todas verticais e concluímos que, sendo o eixo x horizontal e na ausência de atritos/arrastes importantes:

$$\frac{d}{dt}P_x = R_{EXTx} = 0 \Rightarrow P_x^{(ANTES)} = P_x^{(DEPOIS)}$$

Trata-se de uma colisão completamente inelástica e, portanto:

$$m V_0 + 0 = (m + M)v_0$$

Ou seja:

$$v_0 = \frac{m}{m + M} V_0$$

A amplitude das oscilações iniciadas pela colisão projétil/bala é:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \frac{v_0}{\omega} = \sqrt{\frac{L}{g}} \left(\frac{m}{m + M}\right) V_0$$

Para garantir a validade do regime de baixas amplitudes, e a descrição em termos do MHS, devemos escolher uma massa M suficientemente grande.

Concluindo: conhecendo-se os parâmetros L , g , m e M , podemos determinar V_0 através de uma medida de A :

$$V_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \left(1 + \frac{M}{m}\right) A$$

ER 9.5) Considere os dados: R_T (raio da Terra), R_L (raio da Lua), M_T (massa da Terra), M_L (massa da Lua).

a) Um pêndulo simples construído aqui na Terra é levado para a Lua. Calcule a razão ω_T / ω_L entre as frequências angulares desse pêndulo oscilando na Terra (ω_T) e oscilando na Lua (ω_L). Despreze os atritos e considere MHS.

Para um pêndulo simples de comprimento L em MHS vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Portanto:

$$\frac{\omega_T}{\omega_L} = \sqrt{\frac{g_T}{L}} \sqrt{\frac{L}{g_L}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}}$$

Da teoria da gravitação de Newton (capítulo 8) sabemos que a aceleração da gravidade g na superfície de um corpo esférico de massa M e raio R é:

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Portanto:

$$\frac{\omega_T}{\omega_L} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{G M_T R_L^2}{R_T^2 G M_L}} = \frac{R_L}{R_T} \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}$$

Se quisermos uma estimativa numérica dessa razão podemos assumir que a massa da Terra é aproximadamente 81 vezes a massa da Lua ($M_T \cong 81 M_L$) e que o raio da Terra é aproximadamente 3,7 vezes o raio da Lua ($R_T = 3,7 R_L$). Obtemos:

$$\frac{\omega_T}{\omega_L} \cong \frac{R_L}{3,7 R_L} \sqrt{\frac{81 M_L}{M_L}} = \frac{9}{3,7} \cong 2,4$$

b) Um oscilador do tipo bloco-mola construído aqui na Terra é levado para a Lua. Calcule a razão ω_T / ω_L entre as freqüências angulares desse sistema oscilando na Terra (ω_T) e oscilando na Lua (ω_L). Despreze os atritos e considere MHS.

Sabemos que para o bloco-mola em MHS, vale:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

com:

$$\omega = \sqrt{k/M}$$

Portanto:

$$\frac{\omega_T}{\omega_L} = \sqrt{\frac{k}{M}} \sqrt{\frac{M}{k}} = 1$$

O oscilador bloco mola em MHS não sofre nenhuma modificação na sua freqüência de oscilação. Lá na Lua, ele vai oscilar da mesma forma que aqui na Terra.

ER 9.6) Considere um oscilador bloco-mola em que a mola é assimétrica, ou seja, quando comprimida, a constante de mola é k_1 , quando dilatada, a constante de mola é diferente, é k_2 (uma mola simétrica é aquela em que $k_1 = k_2 = k$). O bloco tem massa M . Calcule a freqüência ω das oscilações desse bloco.

A equação de movimento do bloco será dada por (com o eixo x padrão):

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -k_1 x(t) \text{ se } x(t) < 0$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -k_2 x(t) \text{ se } x(t) > 0$$

Portanto, enquanto o bloco está comprimindo a mola ($x(t) < 0$) o sistema vai se comportar como um oscilador bloco-mola em MHS com freqüência:

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/M}$$

e período:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k_1}}$$

Enquanto o bloco está dilatando a mola ($x(t) > 0$) o sistema vai se comportar como um oscilador bloco-mola em MHS com frequência:

$$\omega_2 = \sqrt{k_2/M}$$

e período:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k_2}}$$

Note que durante um ciclo das oscilações a mola passa metade do percurso sendo comprimida e a outra metade sendo dilatada. A metade do ciclo em que a mola está sendo comprimida vai durar um tempo:

$$\Delta t_1 = \frac{T_1}{2} = \pi \sqrt{\frac{M}{k_1}}$$

pois esse movimento corresponde à metade do ciclo do oscilador com $k = k_1$.

A outra metade do ciclo, em que a mola está sendo dilatada vai durar um tempo:

$$\Delta t_2 = \frac{T_2}{2} = \pi \sqrt{\frac{M}{k_2}}$$

Portanto, a duração total do ciclo do oscilador assimétrico, que é o período desse oscilador, é:

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{T_1 + T_2}{2} = \pi \left(\sqrt{\frac{M}{k_1}} + \sqrt{\frac{M}{k_2}} \right)$$

A frequência será então:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{\sqrt{\frac{M}{k_1}} + \sqrt{\frac{M}{k_2}}} = \frac{2}{\sqrt{M}} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} = \sqrt{\frac{\bar{k}}{M}}$$

onde definimos uma constante de mola efetiva tal que:

$$\sqrt{\bar{k}} = 2 \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}$$

Note que se $k_1 = k_2 = k$, então $\bar{k} = k$. As oscilações são isócronas, pois ω é independente das condições iniciais, só depende da mola e da massa.

Note também que as oscilações serão assimétricas, ou seja, o menor valor de x atingido na compressão, digamos X_C , será diferente do maior valor de x atingido na dilatação, digamos X_D . De fato, igualando as energias mecânicas do sistema nessas duas configurações, em que o bloco está instantaneamente parado, obtemos:

$$\frac{1}{2}k_1X_C^2 = \frac{1}{2}k_2X_D^2$$

Ou seja:

$$\frac{|X_C|}{X_D} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

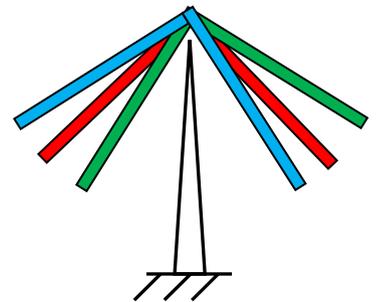
O módulo apareceu nessa expressão porque $X_C < 0$ e $\sqrt{X_C^2} = |X_C|$. Por exemplo, se $k_1 > k_2$, ou seja, se a mola for mais dura para comprimir do que para dilatar, então:

$$X_D > |X_C|$$

A mola vai dilatar mais do que comprimir.

Oscilações assimétricas podem ser observadas em moléculas cujos átomos vibram com “constantes de mola” diferentes conforme as nuvens eletrônicas de diferentes átomos se superpõem, quando eles se aproximam, ou não se superpõem, quando eles se afastam. As “constantes de mola” diferentes correspondem, nesse caso, à assimetria na energia potencial elétrica associada aos dois átomos que vibram.

ER 9.7) Uma haste em forma de L é composta da união de duas hastes retas de comprimento B e massa M , formando um ângulo de 90° entre elas. Essa haste é apoiada pelo vértice em uma cunha aguda e posta a oscilar. A figura ao lado ilustra a situação. A posição em vermelho seria a posição de equilíbrio estável da haste e as posições em azul e verde seriam posições arbitrárias atingidas durante a oscilação da haste. Calcule a frequência das oscilações da haste.



Trata-se de um pêndulo físico, cuja frequência das oscilações é:

$$\omega = \sqrt{\frac{m g d}{I}}$$

sendo: m a massa do corpo oscilante (nesse caso $m = 2M$), g a aceleração da gravidade na superfície da Terra, d a distância do CG do corpo oscilante até o eixo de rotação e I o momento de inércia do corpo oscilante em relação ao eixo de rotação.

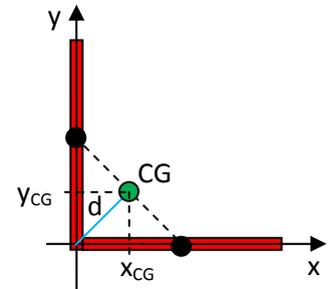
Nesse caso, o corpo é composto de duas hastes girando em torno de um eixo que passa pelas suas extremidades. Sabemos que para uma haste nessa configuração vale para o momento de inércia:

$$I_1 = \frac{1}{3} M B^2$$

Portanto:

$$I = 2 I_1 = \frac{2}{3} M B^2$$

Falta então determinar a distância do CG da haste em L até o eixo de rotação (o vértice da haste). Na figura ao lado mostramos essa distância d (linha azul). Cada haste reta pode ser representada por uma partícula de massa M em seu centro (CM). O CG da haste em L (ponto verde) está no meio entre essas duas “partículas”, como em um haltere.



Note que no referencial xy mostrado (admitindo que $CG=CM$):

$$x_{CG} = \frac{M \cdot 0 + M \cdot \frac{B}{2}}{M + M} = \frac{B}{4}$$

$$y_{CG} = \frac{M \cdot 0 + M \cdot \frac{B}{2}}{M + M} = \frac{B}{4}$$

Concluindo:

$$d = \sqrt{x_{CG}^2 + y_{CG}^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} B$$

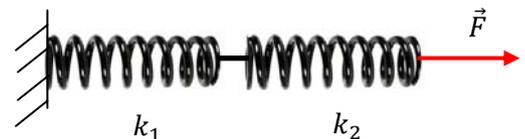
Juntando nossos resultados obtemos finalmente:

$$\omega = \sqrt{\frac{m g d}{I}} = \sqrt{\frac{2M g \frac{\sqrt{2}}{4} B}{\frac{2}{3} M B^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{\sqrt{2} g}{B}} \cong 1,03 \sqrt{\frac{g}{B}}$$

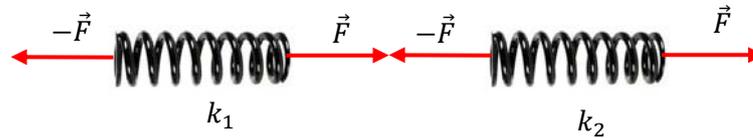
Essa frequência não é muito diferente da frequência de um pêndulo simples de comprimento B .

ER 9.8) Uma mola ideal de constante k é cortada ao meio. Qual o valor da constante de mola k' de uma das metades?

Para responder a essa pergunta vamos pensar em duas molas ideais de constantes k_1 e k_2 conectadas em série, como na figura ao lado. Qual a constante de mola equivalente dessa associação de molas? Se soubermos responder essa pergunta, saberemos responder à pergunta sobre o corte de uma mola, pois a mola original pode ser pensada como a associação em série de suas duas metades iguais.



Puxando a extremidade livre da associação de duas molas através de uma força de magnitude F , cada mola fica tensionada por forças de magnitude F em suas extremidades, conforme os diagramas de forças abaixo. Isso porque estamos desprezando as massas das molas e, portanto, elas se comportam como uma corda leve e livre e a tensão é a mesma em qualquer ponto das molas.



Cada mola dilata de uma quantidade própria, de tal forma que:

$$F = k_1 x_1$$

$$F = k_2 x_2$$

A constante de mola equivalente k_{eq} é definida por:

$$F = k_{eq} x$$

sendo x a dilatação total da associação de molas. É fácil ver que:

$$x = x_1 + x_2$$

Portanto:

$$F = k_{eq} x \Rightarrow F = k_{eq} (x_1 + x_2) = k_{eq} \left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \right)$$

Concluindo:

$$F = k_{eq} \left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \right) \Rightarrow 1 = k_{eq} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

Finalmente:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Voltando então à pergunta original, sobre o corte da mola, vemos que a associação de duas molas iguais de constante k em série equivale a uma mola apenas de constante:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_{eq} = \frac{k}{2}$$

Ou seja, uma mola inteira tem constante elástica que é metade da constante elástica de sua metade. Reciprocamente, a metade da mola tem constante elástica que é o dobro da constante elástica da mola inteira. Concluindo:

$$k' = k_{metade} = 2 k_{mola}$$

Um pedaço de uma mola é mais duro que a própria mola.

Esse resultado está de acordo com o comportamento esperado:

$$k \propto \frac{1}{N}$$

para molas helicoidais com N voltas, já que cortar a mola ao meio equivale a produzir duas molas com $N/2$ voltas e, portanto, duas molas com o dobro da constante de mola da mola original.

9.8 Exercícios propostos

ER 9.1) Calcule o comprimento (em metros) do barbante de um pêndulo simples para que ele oscile em MHS com período $T=10$ s.

ER 9.2) Calcule a massa (em kg) de um oscilador bloco-mola cuja mola possui $k = 5$ N/m para que ele oscile em MHS com período $T=10$ s.

ER 9.3) Calcule o comprimento de uma haste fina e reta para que ela oscile (pendurada) em torno de um eixo que passa por uma de suas extremidades como um pêndulo físico em MHS com $T=10$ s.

ER 9.4) Um oscilador bloco-mola (bloco com $M=0,1$ kg) oscila em MHS com amplitude $A=0,03$ m após receber a seguinte condição inicial em seu movimento:

$$x_0 = 0,010 \text{ m} \quad \text{e} \quad V_0 = -0,10 \text{ m/s}$$

- Calcule a frequência ω das oscilações (em rad/s).
- Calcule a constante de mola.
- Calcule a equação horária $x(t)$ da posição do bloco (x em metros).
- Calcule a velocidade máxima do bloco (em m/s).

ER 9.5) Um pêndulo simples oscila em MHS com amplitude $A=0,030$ m após receber a seguinte condição inicial em seu movimento:

$$x_0 = 0,010 \text{ m} \quad \text{e} \quad V_0 = 0,10 \text{ m/s}$$

- Calcule a frequência ω das oscilações (em rad/s).
- Calcule o comprimento do barbante do pêndulo (em metros).
- Calcule a equação horária $x(t)$ da posição horizontal da partícula (x em metros).
- Calcule a velocidade máxima da partícula (em m/s).

ER 9.6) Uma haste fina e reta oscila (pendurada) em torno de um eixo que passa por uma de suas extremidades como um pêndulo físico em MHS com amplitude $\theta = \pi/10$ rad após receber a seguinte condição inicial em seu movimento:

$$\theta_0 = \pi/30 \text{ rad} \quad \text{e} \quad \Omega_0 = \pi \text{ rad/s}$$

- Calcule a frequência ω das oscilações (em rad/s).
- Calcule o comprimento da haste (em metros).
- Calcule a equação horária $\theta(t)$ da posição angular da haste (θ em radianos).
- Calcule a velocidade angular máxima da haste (em rad/s).

ER 9.7) Calcule a razão h/A entre a altura máxima que a partícula de um pêndulo simples em MHS sobe (em relação a sua posição mais baixa) e a amplitude desse movimento. Considere que o comprimento do barbante é L . Convença-se de que essa razão é muito pequena no MHS, o que justifica a ideia de que a partícula oscila basicamente na horizontal ($y=0$).

ER 9.8) Um oscilador bloco-mola (bloco com $M=0,10$ kg) oscila em MHS de acordo com a seguinte equação horária da posição (em metros):

$$x(t) = 0,020 \cos(3,0 t + \pi)$$

- Calcule a constante de mola (em N/m).
- Calcule a equação horária $V(t)$ da velocidade do bloco (em m/s).
- Calcule a energia potencial elástica máxima armazenada na mola (em joules).
- Esboce um gráfico de $x(t) \times t$.

ER 9.9) Um pêndulo simples é formado por uma bolinha pendurada em um barbante leve. A bolinha estava inicialmente parada em sua posição mais baixa e recebe um peteleco que imprime nela uma velocidade de $0,30$ m/s. A bolinha passa a oscilar em MHS com frequência $f = 1,50$ Hz.

- Calcule a amplitude do movimento (em metros).
- Repetindo o experimento com velocidade inicial de $0,2$ m/s, calcule a nova frequência e a nova amplitude.

ER 9.10) Considere um oscilador bloco-mola amortecido no caso crítico, com a condição inicial mais simples correspondente a $\varphi = 0$ (conforme discutido no texto). Calcule o tempo (em segundos) que leva para a energia mecânica no sistema cair à metade do seu valor inicial. Considere $M = 1,0$ kg e $k = 100$ N/m.

ER 9.11) Um relógio possui um oscilador bloco-mola angular formado por uma mola espiral de constante de torção $k = 0,010$ Nm/rad e por um volante que é um pequeno disco de massa $M=10$ g e raio $R=1$ cm. Calcule quantos ciclos o oscilador completa em um tempo de 4 s.

9.9 Respostas dos exercícios propostos

ER 9.1) $\cong 24,8$ m

ER 9.2) $\cong 12,7$ kg

ER 9.3) $\cong 37,2 \text{ m}$

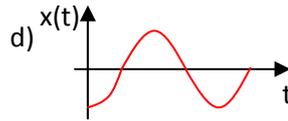
ER 9.4) a) $\cong 3,54 \text{ rad/s}$ b) $\cong 1,25 \text{ N/m}$ c) $\cong 0,030 \cos(3,54 t + \pi/2,55)$ d) $\cong 0,11 \text{ m/s}$

ER 9.5) a) $\cong 3,54 \text{ rad/s}$ b) $\cong 0,78 \text{ m}$ c) $\cong 0,030 \cos(3,54 t - \pi/2,55)$ d) $\cong 0,11 \text{ m/s}$

ER 9.6) a) $15\sqrt{2}/2 \text{ rad/s}$ b) $\cong 0,13 \text{ m}$ c) $(\pi/10) \cos(15\sqrt{2}/2 t - \pi/2,55)$ d) $3\sqrt{2} \pi/4 \text{ rad/s}$

ER 9.7) $A/(2L) \cong \theta_{MAX}/2$ (igualamos $K(\theta = 0) = m g h_{MAX}$)

ER 9.8) a) $0,90 \text{ N/m}$ b) $0,06 \text{ sen}(3,0 t)$ c) $0,00018 \text{ J}$



ER 9.9) a) $\cong 0,032 \text{ m}$ b) $1,50 \text{ Hz}$ e) $\cong 0,021 \text{ m}$

ER 9.10) $\ln(2)/(2 \omega_0) \cong 0,035 \text{ s}$

ER 9.11) $\cong 90$