Q1.5 Suponha uma altura H de "um metro e setenta e dois", ou seja, 1 metro mais 72 centímetros. Como:

$$1\ cm = \frac{1}{100} m = 10^{-2}\ m \qquad\qquad 1\ m = 100\ cm = 10^{2}\ cm$$

Segue que:

$$H = 1\ m + 72\ cm = 100\ cm + 72\ cm = \ 172\ cm$$

Quando subimos em uma balança de farmácia ela indica nossa massa (em kg) e não nosso peso. Através da medida do peso $\vec{P}$, que é uma força (de atração gravitacional), a balança infere a massa M, posto que o módulo P da força peso é:

$$P = M\ g$$

sendo g o módulo da aceleração da gravidade naquele local onde está a balança. Próximo da superfície da Terra podemos adotar o valor (médio) aproximado $g = 9{,}8\ m/s^2$. Portanto, se alguém sobe em uma balança de farmácia e ela indica uma massa $M = 69\ kg$, segue que o peso dessa pessoa é uma força vertical para baixo de módulo:

$$P = 69 \times 9{,}8 = 676{,}2\ kg\ m/s^2$$

A unidade "newton", de medida de força (de símbolo N), é definida pela relação:

$$1\ N = 1\ kg\ m/s^2$$

Segue que esse peso tem módulo $P = 676{,}2\ N$.

Q1.9 É verdade, o número π é exatamente a razão entre o comprimento C da circunferência e o diâmetro $D = 2R$ de um círculo qualquer ($C = 2\,\pi\,R = \pi\,D$):

$$\pi = \frac{C}{D}$$

Portanto, π é a razão entre duas grandezas de mesma dimensão, de "comprimento". Segue que as dimensões no numerador e no denominador "cortam" e sobra um número adimensional. Simbolicamente:

$$[\pi] = \frac{[C]}{[D]} = \frac{L}{L} = 1$$

Entenda que o símbolo $[x]$ significa a dimensão de x e que L é o símbolo para a dimensão de comprimento.

Três dimensões básicas muito usadas na mecânica são: comprimento (L), tempo (T) e massa (M). No SI essas dimensões são expressas nas unidades (e seus múltiplos): $L =$metro (m), $T =$ segundo (s) e $M =$quilograma (kg). Uma grandeza adimensional pode ter uma unidade. Um exemplo é o ângulo θ que pode ser definido (no SI) por:

$$\theta = \frac{C'}{R}$$

sendo C' o comprimento de arco subentendido pelo ângulo θ em um círculo de raio R. Dada essa definição, vemos logo que θ é adimensional. Mas, essa é exatamente a definição de θ na unidade "radiano" (rad). Por exemplo, para $\theta = 2\,\pi$ rad recuperamos a definição do π dada acima, posto que nesse caso $C' = C$.

Posto que um ângulo de $2\,\pi$ rad corresponde a 360°, segue que um ângulo pode ser expresso também na unidade "grau" (símbolo °) através de (considere que θ é sempre dado em rad e $\theta°$ é dado em graus):

$$\theta° = \frac{360}{2\,\pi}\,\theta = \frac{360}{2\,\pi}\frac{C'}{R} = \frac{360}{\pi}\frac{C'}{D}$$

Em princípio qualquer grandeza que é definida pela razão entre duas outras grandezas de mesma dimensão será adimensional. Por exemplo, em mecânica podemos ter interesse na razão entre a velocidade v de um corpo e a velocidade do som (v_S) no meio em que esse corpo se desloca:

$$\beta = \frac{v}{v_S}$$

β (beta) é exatamente o que chamamos de "número de Mach" (em homenagem a Ernst Mach). Objetos supersônicos possuem número de Mach $\beta > 1$. Aviões comerciais de passageiros costumam voar com velocidades subsônicas ($\beta < 1$), enquanto que aviões militares, como o francês Mirage, atingem velocidades supersônicas ($\beta > 1$). Considere que no ar $v_S \cong 340$ m/s, ou seja, $v_S \cong 1.200$ km/h.

É importante lembrar do "Princípio da homogeneidade dimensional": só podemos somar termos que possuem a mesma dimensão. Por exemplo, se Δt é um tempo e Δl é um comprimento, o que seria:

$$S = \Delta t + \Delta l$$

Nada, S não faz sentido, esqueça esse S. Por outro lado, um $S' = c\,\Delta t + \Delta l$, em que c é a velocidade da luz no vácuo ($c \cong 300.000\ km/s$), faz sentido.

Q1.10 Um volume V é o produto de três comprimentos:

$$V = L_1\,L_2\,L_3$$

sendo L_i um comprimento. Então, a dimensão de V é:

$$[V] = [L_1][L_2][L_3] = L^3$$

No SI uma unidade possível de V é $metro^3 = m^3$. Outra unidade comum é:

$$cm^3 = \left(\frac{m}{100}\right)^3 = (10^{-2}\,m)^3 = 10^{-6}\,m^3$$

O litro (símbolo l) também é uma unidade muito comum de volume, usada no dia-a-dia. Um litro é exatamente o volume de um cubo de lado $10\ cm$. Portanto:

$$1\,l = 10 \times 10 \times 10\,cm^3 = 1.000\,cm^3 = 10^3\,cm^3 = 10^3\,10^{-6}\,m^3 = 10^{-3}\,m^3 = 0{,}001\,m^3$$

Quantos metros cúbicos de água cabem em uma caixa d'água de volume $V = 1.000\ l$?

$$V = 1.000\,l = 10^3\,l = 10^3\,10^{-3}\,m^3 = 1\,m^3$$

Uma caixa d'água de $1.000\ l$ poderia ser uma caixa cúbica de lado $L = 1\,m$.

Se alguém diz que um volume é $V = \pi\, r^3\, h$, sendo r um raio e h uma altura, essa pessoa só pode estar errada. Isso porque a dimensão desse V não é a dimensão de volume:

$$[V] = [\pi][r]^3[h] = 1 \times L^3 \times L = L^4$$

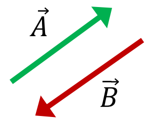
Conclusão: não sei o que seria esse V, mas com certeza ele não é um volume. Volumes têm dimensão L^3. Na matemática poderíamos facilmente aceitar que V é o hipervolume de um objeto geométrico que existe em um espaço 4-dimensional. Não é a isso que essa questão se refere.

Q1.13 Sejam $\vec{A}$ e $\vec{B}$ dois vetores quaisquer. Suponha que $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$. Portanto:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} = -\vec{B}$$

Segue que: $A = |\vec{A}| = B = |\vec{B}| = |-\vec{B}|$. Concluindo: dois vetores só podem se anular se eles forem opostos, daí o sinal de "−" em $\vec{A} = -\vec{B}$ (dois vetores opostos têm a mesma direção, mas sentidos opostos), e de mesmo módulo ($A = B$).

Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ não possuem o mesmo módulo (mesmo comprimento), então esqueça a validade da relação $\vec{A} = -\vec{B}$ ou de $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$. Isso porque se $\vec{A} = -\vec{B}$ segue que (como ilustrado ao lado):



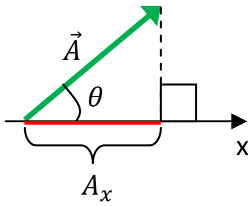
1. $\vec{A}$ e $\vec{B}$ têm a mesma direção.
2. $\vec{A}$ e $\vec{B}$ têm sentidos opostos.
3. $A = B$.

Q1.16 Seja $\vec{A}$ um vetor qualquer, com componentes (projeções) ao longo dos eixos x, y e z de um referencial cartesiano dadas por A_x, A_y e A_z. O módulo de $\vec{A}$, em termos dessas componentes fica:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Portanto, se o módulo de $\vec{A}$ é igual a zero, segue que: $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = 0$. A única maneira dessa equação ser satisfeita, supondo que A_x, A_y e A_z não são nulas, é, por exemplo, $A_x^2 = -(A_y^2 + A_z^2)$. Essa equação é claramente absurda, pois A_x é um número real e seu quadrado tem que ser positivo. O mesmo vale para A_y e A_z. Enfim, concluímos que: se $A = 0$, segue que $A_x = A_y = A_z = 0$. O vetor $\vec{A}$ é um vetor nulo: $\vec{A} = \vec{0}$. Ele tem tamanho (módulo) nulo e, portanto, suas projeções em quaisquer eixos são nulas.

A componente de um vetor é sua projeção ao longo de um eixo. Essa projeção (sombra) não pode ser maior que o próprio vetor. É verdade que a sombra de um corpo pode ser maior que o próprio corpo, como podemos ver na Figura ao lado. Mas, devemos nos lembrar que as projeções de um vetor são "sombras" projetadas ortogonalmente aos eixos, algo como a sombra de um corpo ao meio-dia, com o Sol a pino (no zênite).

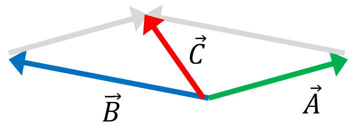


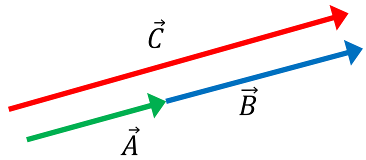
A Figura ao lado ilustra a ideia. A projeção de um vetor é o comprimento de sua sombra ao longo de um eixo, sombra projetada com a "luz" incidindo ortogonalmente ao eixo.

Podemos ver na Figura acima que $A_x = A\cos(\theta)$. Portanto, nunca vai valer $A < |A_x|$, posto que $|\cos(\theta)| \leq 1$. Pelo contrário, sempre vai valer $|A_x| \leq A$. A igualdade $|A_x| = A$ só vai valer no caso particular em que o vetor $\vec{A}$ estiver ao longo do eixo x, ou seja: $\vec{A} = \pm A\,\hat{x}$ (se $\vec{A} = A\,\hat{x}$ então $A_x = A\cos(0°) = A$ e se $\vec{A} = -A\,\hat{x}$, então $A_x = A\cos(\pi) = -A$).

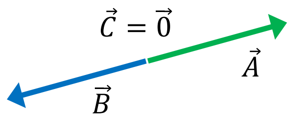
Q1.18

Se $\vec{C}$ é a soma de $\vec{A}$ e $\vec{B}$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, você acha que $C = A + B$? Obviamente que não. A Figura ao lado mostra um exemplo de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ bem grandes que se somam e dão um vetor $\vec{C}$ bem pequeno. O tamanho de $\vec{C}$ está longe de ser a soma dos tamanhos de $\vec{A}$ e de $\vec{B}$. Mas, existe um caso particular em que $C = A + B$. É o caso em que $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são paralelos entre si, como ilustrado na Figura ao lado. De fato, se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são paralelos entre si, podemos dizer que $\vec{A} = A\,\hat{x}$ e $\vec{B} = B\,\hat{x}$, de onde segue que: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A + B)\,\hat{x}$. Portanto: $C = |(A + B)\,\hat{x}| = A + B$.





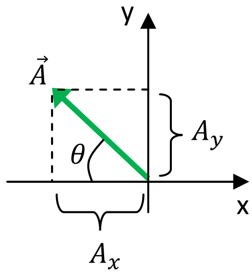
Se vale $C = 0$, então vale $\vec{C} = \vec{0}$, ou seja, $\vec{C}$ é um vetor nulo. Sendo $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, segue que os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão se cancelando mutuamente. Isso só pode ocorrer se eles forem dois vetores opostos, ou seja: tiverem a mesma direção, mesmo módulo e sentidos opostos, como ilustrado ao lado. Isso já foi discutido na questão Q1.13: se $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$, então $\vec{A} = -\vec{B}$. Segue que $\vec{A}$ e $\vec{B}$ diferem apenas em seus sentidos, que são opostos.



Q1.26

Se $\vec{A} = \vec{0}$, segue que $\vec{A}$ é um vetor nulo. Um vetor nulo tem tamanho nulo: $A = 0$. Portanto, ele não pode ter projeções (sombras) de tamanho não nulo em nenhum eixo, ou seja: $A_x = A_y = A_z = 0$. Já discutimos isso na questão Q1.16: a projeção (sombra) de um vetor não pode ser maior que seu módulo. Para um vetor qualquer no plano xy não há componente z ($A_z = 0$), pode haver apenas componentes A_x e A_y. Mas, se sabemos que esse vetor é nulo, segue que $A_x = A_y = 0$.

Um vetor com componentes tais que $A_x = -A_y$ tem módulo $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{A_x^2 + (-A_x)^2} = \sqrt{2\,A_x^2} = \sqrt{2}\,|A_x|$. Portanto, esse vetor está longe de ser um vetor nulo.



A Figura ao lado ilustra um vetor $\vec{A}$ (seta verde) com $A_x = -A_y$. A componente y é positiva, $A_y > 0$, enquanto que a componente x é negativa, $A_x < 0$. Se o ângulo θ for tal que $\theta = 45° = \frac{\pi}{4} rad$, segue que $A_x = -A_y$: $A_x = -A\cos(\theta)$ e $A_y = A\,\text{sen}(\theta)$. Portanto:

$$\frac{A_y}{A_x} = \frac{A\,\text{sen}(\theta)}{-A\cos(\theta)} = -\tan(\theta) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

O módulo desse vetor é: $A = \sqrt{2}\,|A_x|$, posto que $|A_x| = A\cos(\pi/4) = A/\sqrt{2}$. Portanto, $\vec{A}$ não é um vetor nulo, está longe disso, basta olhar para a seta verde que o representa geometricamente.

Se $\vec{A} = \vec{0}$, então $\vec{A}$ não tem uma seta correspondente, não tem componente (projeção) em nenhum eixo e vale $A = 0$.