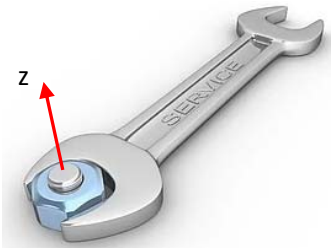
Q10.1



Quando tentamos apertar ou afrouxar um parafuso ou uma porca devemos impor nesses corpos um movimento de rotação em torno de um eixo fixo, como o eixo z ilustrado na Figura ao lado. Para tirar o parafuso ou a porca do repouso devemos impor neles uma aceleração angular α ao longo desse eixo. A lei que governa essa dinâmica de rotação envolve o torque τ_Z aplicado no parafuso ou na porca, e não a força. Por isso o torque τ_Z é importante e ele envolve não apenas a força, mas também o braço de alavanca da força. Para obtermos torques grandes utilizamos a chave de parafuso, que nos permite aumentar o braço de alavanca da força aplicada por nossas mãos. Basicamente, $\tau_z = F\ b$ e $\tau_z = I\ \alpha$, sendo b o braço de alavanca de F (força da mão na chave, no plano xy) e I o momento de inércia (em relação a z) do conjunto chave+parafuso ou chave+porca.

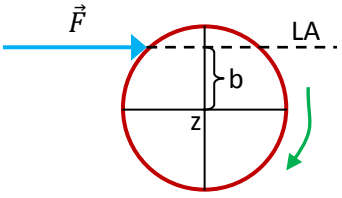
Q10.2

No movimento de translação de um corpo todos os pontos desse corpo descrevem o mesmo movimento do centro de massa (CM) dele. A translação se caracteriza pela ausência de rotação, ou seja, o corpo mantém sua orientação no espaço enquanto translada. A lei que governa a dinâmica de translação é a lei que governa o movimento de uma partícula virtual localizada no centro de massa (CM) do corpo concentrando toda a massa M desse corpo (porque todo o corpo se move como se fosse essa partícula):

$$\vec{R}_{ext} = M\ \vec{a}_{CM}$$

Sendo $\vec{R}_{ext}$ a resultante das forças externas no corpo. Portanto, se há apenas uma força $\vec{F}$ atuando em um corpo, essa será a força resultante no corpo e ela vai alterar (acelerar) seu movimento de translação.

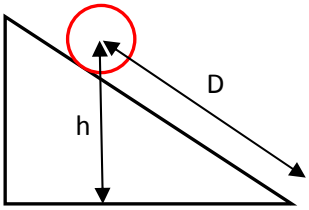
Para alterar (acelerar) o movimento de rotação de um corpo deve atuar nele um torque ao longo de seu eixo de rotação (digamos eixo z): $\tau_z = I\ \alpha$, sendo I o momento de inércia do corpo em relação ao eixo z. Para que uma força $\vec{F}$ tenha torque ao longo de z ela deve: i) não ser uma força apenas ao longo de z (estar também no plano xy, ou seja, possuir uma componente nesse plano) e ii) possuir braço de alavanca b em relação a esse eixo.



A figura ao lado ilustra uma única força externa $\vec{F}$ atuando no corpo com a forma de um disco. Despreze a gravidade. Note que $\vec{F}$ é a força resultante no disco e que essa força vai acelerá-lo para a direita. Ao mesmo tempo, $\vec{F}$ possui braço de alavanca b em relação a um eixo z que passa pelo CM do disco e o torque daí resultante vai acelerar a rotação do disco em torno desse eixo no sentido horário. LA é a linha de ação de $\vec{F}$.

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov./2022) Ver. 1.6

Q10.11



Considere que a bola (de massa M e raio R) role, sem deslizar, para baixo de um plano inclinado, partindo do repouso em uma altura h. A bola percorre uma distância D ao longo do plano inclinado.

Vamos calcular o módulo da velocidade V (de translação) com que a bola chega na base do plano inclinado. Como a força de atrito na bola é estática, pois não há deslizamentos, a energia mecânica da bola se conserva nessa descida. Portanto:

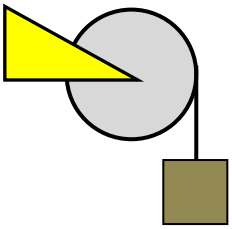
$$E(h) = E(0) \Rightarrow 0 + 0 + M\ g\ h = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} I\ \omega^2 + 0$$

No rolamento sem deslizamento há o vínculo translação/rotação: $V = \omega\ R$. Portanto:

$$M\ g\ h = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} I\ \omega^2 \Rightarrow M\ g\ h = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} I\ \left(\frac{V}{R}\right)^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2\ M\ g\ h}{M + I/R^2}}$$

De acordo com a tabela 9.2, se a bola fosse maciça valeria $I_{MAC} = 2/5\ M\ R^2$, enquanto que se a bola fosse oca valeria $I_{OCA} = 2/3\ M\ R^2$. Como $I_{OCA} > I_{MAC}$ segue que $V_{OCA} < V_{MAC}$. Enfim, precisaríamos medir a velocidade final V da bola (que não depende da massa M) para conferir com qual desses dois casos o valor medido concorda, com V_{OCA} ou com V_{MAC} calculados a partir dos parâmetros da bola (R) e do experimento. Medir velocidade de uma bola que passa não parece ser uma tarefa muito fácil. Por isso essa não parece ser uma experiência muito simples e barata de ser realizada. Mas, enfim, como se trata de uma empresa de engenharia, vamos nos contentar em propor esse experimento.

Q10.13



A Figura ao lado ilustra a ideia. Um bloco de massa m é pendurado em uma corda leve que está enrolada na periferia de uma polia de massa M e raio R. À medida que o bloco cai, com velocidade V (translação), a polia gira com velocidade angular ω. Já podemos ver que a corda (sem deslizar) produz o vínculo $V = \omega\ R$.

Na queda há conservação da energia mecânica do sistema bloco+polia. Mas, como a pergunta se refere a uma força, a tensão na corda, vamos abordar o problema do ponto de vista da segunda lei de Newton, da rotação da polia: $\tau_z = I\ \alpha$, e da translação do bloco: $\vec{R}_{ext} = m\ \vec{a}_{CM}$.

Os diagramas de força são simples e não vamos desenhá-los aqui. No bloco o peso puxa para baixo e a tensão (T) da corda puxa para cima. Considerando um eixo x para baixo obtemos para a aceleração do bloco:

$$\vec{R}_{ext} = m\ \vec{a}_{CM} \Rightarrow m\ g - T = m\ a$$

Na polia a única força com torque ao longo do eixo (z) central de rotação é a tensão da corda que puxa para baixo a periferia direita da polia (braço de alavanca $b = R$). A aceleração angular da polia é tal que:

$$\tau_z = I\ \alpha \Rightarrow T\ R = I\ \alpha$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov./2022) Ver. 1.6

Derivando o vínculo das velocidades em relação ao tempo obtemos: $V = \omega\, R \Rightarrow a = \alpha\, R$. Portanto, a tensão na corda possui módulo (I é o momento de inércia da polia em relação a z):

$$T = m\, g - m\, a = m\, g - m\, \alpha\, R = m\, g - m\, \frac{T\, R}{I} R \Rightarrow T = \frac{m\, g}{1 + m\, R^2/I}$$

Olhando a tabela 9.2 vemos que se a polia for maciça (cilindro maciço) vale $I_{MAC} = \frac{1}{2}\, M\, R^2$ e se a polia for um aro (cilindro oco com paredes finas, casca fina) vale $I_{OCO} = M\, R^2$. Portanto:

$$T_{MAC} = \frac{m\, g}{1 + 2\, m/M} \qquad\qquad T_{OCO} = \frac{m\, g}{1 + m/M}$$

No caso da polia maciça a tensão na corda é menor. A polia maciça oferece menos inércia, ou seja, menos oposição, ao movimento do sistema, e permite uma corda mais frouxa, com menor tensão.

Q10.15

Considere que a bola (de massa M e raio R) role, sem deslizar, para cima da colina com velocidade inicial de módulo V_0 até atingir uma altura máxima h_0 e parar.

Como a força de atrito na bola é estática, pois não há deslizamentos, a energia mecânica da bola se conserva nessa subida. Portanto:

$$E(0) = E(h_0) \Rightarrow \frac{M V_0^2}{2} + \frac{1}{2} I\, \omega_0^2 + 0 = 0 + 0 + M\, g\, h_0$$

No rolamento sem deslizamento há o vínculo translação/rotação: $V = \omega\, R$. Portanto:

$$M \frac{V_0^2}{2} + \frac{1}{2} I\, \omega_0^2 = M\, g\, h_0 \Rightarrow M\, g\, h_0 = \frac{M V_0^2}{2} + \frac{1}{2} I \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 \Rightarrow h_0 = \frac{M + I/R^2}{2\, M\, g}\, V_0^2$$

Sendo $I = \frac{2}{5} M R^2$ o momento de inércia da bola maciça (tabela 9.2) em relação a um eixo que passa pelo CM da bola. Concluindo:

$$h_0 = \frac{M + I/R^2}{2\, M\, g}\, V_0^2 = \frac{7/5}{2\, g}\, V_0^2 = \frac{7}{10}\, \frac{V_0^2}{g}$$

A altura máxima não depende de nenhuma característica da bola, a não ser do fato dela ser maciça, que define o fator numérico 7/5. Se dobrarmos V_0 a altura h_0 quadruplica.

Q10.19

Se a colina for perfeitamente lisa a única força que atuará na bola enquanto ela sobe a colina será o peso da bola. Essa força atua no CM da bola e não produz torque ao longo do eixo (z) que passa pelo CM. Portanto, a bola subiria freando sua translação, mas com velocidade de rotação ao longo de z constante. A bola subiria a colina deslizando (patinando) sem parar, até atingir uma altura máxima e continuar deslizando no mesmo lugar (e cair de volta). A energia cinética de rotação seria constante nessa subida e a energia cinética de translação seria convertida em energia potencial gravitacional.

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov./2022) Ver. 1.6

No rolamento sem deslizamento há o vínculo translação/rotação: $V = \omega\, R$. O peso da bola dará conta de frear a translação, como no caso anterior, e o atrito estático na periferia da bola produzirá um torque que dará conta de frear a rotação da bola ao longo do eixo z pelo CM, mantendo o vínculo $V = \omega\, R$. As energias cinéticas de rotação e de translação seriam convertidas em energia potencial gravitacional. A bola subiria uma altura maior que no caso anterior, até ficar estática (e cair de volta).

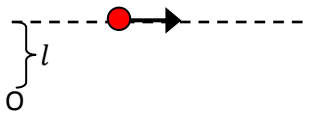
Q10.20 O momento angular L_z de um corpo que gira em torno de um eixo fixo z só pode mudar de valor pela ação de torques externos. No presente caso, enquanto a pessoa caminha no carrossel há forças internas e torques internos ao sistema pessoa+carrossel, forças de atrito com que os pés da pessoa empurram a superfície do carrossel e suas reações. Essas forças e torques não modificam o valor de L_z. Se a pessoa e o carrossel giram juntos com velocidade angular ω ao longo de z, segue que, considerando a pessoa com uma partícula de massa m e raio de giração (distância até o eixo z) r e I o momento de inércia do carrossel em relação ao eixo z:

$$L_z = I\,\omega + m\,r^2\,\omega = (I + m\,r^2)\omega$$

Vemos que se a pessoa caminha para a periferia do carrossel, ou seja, se r aumenta, ω diminui, para manter L_z constante.

À medida que a pessoa vai pisando no carrossel em direção à periferia o carrossel vai sofrendo torques que reduzem sua velocidade angular ω. A grandeza $L_z = I\,\omega + m\,r^2\,\omega$ não muda de valor.

Q10.22 Na Figura ao lado considere um eixo z ortogonal ao plano da tela passando por O e apontando para fora.



O momento angular dessa partícula ao longo desse eixo é (em módulo): $L_z = m\,l\,v$ (momento linear $m\,v$ vezes braço l), sendo m a massa e v a velocidade linear da partícula. l é o "braço de alavanca" de v (por analogia com o torque de uma força). Note que L_z aponta para dentro da tela, dada a regra da mão direita (de novo como no caso do torque de uma força). Portanto, no nosso referencial vale $L_z = -m\,l\,v$.

Vemos que enquanto a partícula percorre esse MRU seu momento angular L_z não muda. Isso é compatível com o fato de que L_z só muda pela ação de torques externos na partícula. Se a partícula está em MRU não há forças externas e nem torque externos (1ª lei de Newton). Então L_z é constante. A "lei da conservação do momento angular" é e tem que ser compatível com as leis de Newton do movimento, posto que uma é conseqüência das outras.

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov./2022) Ver. 1.6