Q2.3

Sim, pode. Basta que sua aceleração seja oposta a sua velocidade inicial. Imagine um avião de papel que esteja viajando na horizontal de Norte para Sul com velocidade de módulo V_0. De repente, começa a soprar um vento forte horizontal com sentido de Sul para Norte. O vento empurra o avião para trás e ele começa a frear, reduzindo sua velocidade. Em algum instante o avião para (em relação ao solo) e começa a ser empurrado para trás, ou seja, o avião reverte o sentido de seu movimento.

Utilizando as ferramentas da cinemática (com aceleração constante), podemos dizer que a velocidade do avião ao longo de um eixo x que é horizontal e aponta de Norte para Sul é:

$$V(t) = V_0 - a\,t$$

sendo a o módulo da aceleração constante que o vento imprime no avião. O vetor $\vec{a}$ aponta no sentido oposto ao eixo x (de Sul para Norte) e, portanto, o vetor aceleração do avião é $\vec{a} = -a\,\hat{x}$, enquanto que sua velocidade inicial (em $t = 0$, instante em que o vento inicia) é $\vec{V_0} = V_0\,\hat{x}$.

Vemos que existe um instante t_1 em que a velocidade do avião se anula:

$$V(t_1) = V_0 - a\,t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = V_0/a$$

Depois de t_1, a velocidade do avião se torna negativa, ou seja, ele passa a viajar no sentido oposto ao eixo x, ou seja, de Sul para Norte. Por exemplo, no instante $2\,t_1$ a velocidade do avião vale:

$$V(2t_1) = V_0 - a\,(2t_1) = V_0 - a(2V_0/a) = V_0 - 2\,V_0 = -V_0$$

É claro que, mantendo-se esse vento, ou seja, essa aceleração, o avião nunca reverteria sua velocidade novamente, pelo contrário, ele seria levado pelo vento (para sempre) no sentido de Sul para Norte.

Nessa discussão não nos preocupamos com o movimento de queda do avião. Nos concentramos no movimento horizontal do avião, que é o que importa nessa questão.

Q2.5 (a) Sim, é possível. Vamos continuar com o nosso exemplo da questão 2.3, um avião de papel que estava viajando na horizontal de Norte para Sul com velocidade de módulo V_0 e que é pego por um vento que sopra forte na horizontal com sentido de Sul para Norte. O vento empurra o avião para trás e ele começa a frear, reduzindo sua velocidade. Imagine que nesse intervalo de tempo o vento vai ficando mais forte, acelerando mais o avião para trás, ou seja, agora a não é constante, mas um $a(t)$ que cresce com o tempo. O módulo da aceleração do avião cresce, e ele continua reduzindo sua velocidade, até parar.

b) Sim, é possível. Vamos continuar com o nosso exemplo da questão 2.3, mas agora vamos supor que o vento está no mesmo sentido do movimento inicial do avião: um avião de papel que estava viajando na horizontal de Norte para Sul com velocidade de módulo V_0 e que é pego por um vento que sopra forte na horizontal com sentido de Norte para Sul. O vento empurra o avião para frente e ele começa a acelerar para frente, aumentando sua velocidade. Imagine que nesse intervalo de tempo o vento vai ficando mais fraco, acelerando menos o avião para frente, ou seja, agora a não é constante, mas um $a(t)$ que decresce com o tempo. O módulo da aceleração do avião decresce, e ele continua aumentando sua velocidade, mas aumentando cada vez menos. Ele aumenta de velocidade enquanto sua aceleração vai reduzindo.

Q2.9

Se $\vec{D}(t_i, t_f) = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)$ é o deslocamento no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$, a velocidade média nesse mesmo intervalo de tempo é:

$$\vec{v}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{D}(t_i, t_f)}{t_f - t_i} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i}$$

Para um movimento unidimensional, ao longo de x, segue que:

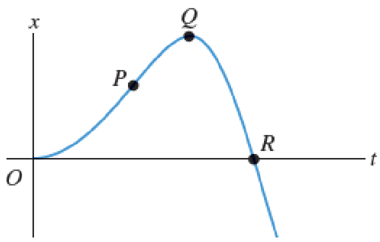
$$\vec{v}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{D}(t_i, t_f)}{t_f - t_i} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i}\hat{x}$$

Portanto, se $\vec{D}(t_i, t_f) = \vec{0}$, segue que $\vec{v}_M(t_i, t_f) = \vec{0}$. Se não há $\vec{D}(t_i, t_f)$, não há $\vec{v}_M(t_i, t_f)$.

Quanto à velocidade instantânea, $\vec{v}(t)$, ela não tem relação com o vetor deslocamento $\vec{D}(t_i, t_f)$. Pelo contrário, $\vec{v}(t)$ está definida pelo que está ocorrendo no momento t, não importando em nada os momentos inicial t_i e final t_f do movimento. Portanto, se $\vec{D}(t_i, t_f) = \vec{0}$, há ainda muitas possibilidades para $\vec{v}(t)$. Para um movimento unidimensional, ao longo de x, sabemos que:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{x}$$

Considere o gráfico ao lado para uma equação horária $x(t)$ de uma partícula. A partícula sai de $x(0) = 0$, se afasta da origem, para instantaneamente (ponto Q), retorna e passa novamente pela origem (ponto R). Portanto, no intervalo de tempo desde $t = 0$ até $t = t_R$ vale:



$$\vec{D}(0, t_R) = [x(t_R) - x(0)]\,\hat{x} = [0 - 0]\hat{x} = \vec{0}$$

Mas, podemos ver que o vetor velocidade instantânea $\vec{v}(t)$ assume vários valores diferentes nesse mesmo intervalo de tempo. A derivada $dx(t)/dt$ começa bem pequena na origem, cresce (positiva), se anula (em Q) e se torna negativa. Portanto, a velocidade instantânea $\vec{v}(t) = [dx(t)/dt]\hat{x}$ começa bem pequena na origem, cresce (positiva), se anula (em Q) e se torna negativa. Ao final: $\vec{D}(0, t_R) = \vec{0}$ e $\vec{v}_M(0, t_R) = \vec{0}$. Nesse intervalo $[0, t_R]$ a partícula foi e voltou ao mesmo lugar. Em média nada aconteceu, mas, em cada instante a partícula estava indo para algum lugar.

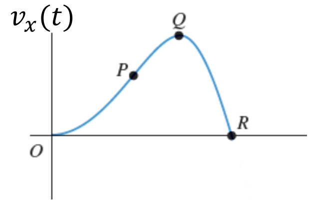
Q2.10 Sim, pode. Note que o MRU (movimento retilíneo uniforme) é exatamente o caso particular em que um corpo se move com aceleração constante nula, ou seja, com velocidade constante, em módulo, direção e sentido.

$\vec{a}(t) = \vec{0}$ para todo t e $\vec{v}(t) = constante \neq \vec{0}$ para todo t

Em termos mais gerais, a aceleração (instantânea) é a taxa de variação da velocidade (instantânea) e uma velocidade (instantânea) pode ter taxa de variação nula em um dado instante (ou mesmo sempre (MRU)):

$\vec{a}(t) = \vec{0}$ em um dado t e $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$ em um dado t

Isso ocorre, por exemplo, quando a velocidade passa por um ponto de máximo ou de mínimo. Nesses instantes o gráfico de $v(t)$ versus t se torna horizontal e $dv(t)/dt = a(t) = 0$.



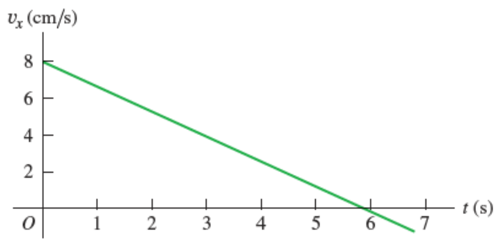
Imagine um automóvel que viaja ao longo de uma estrada reta que se estende ao longo do eixo x. O gráfico ao lado ilustra o comportamento da velocidade $v_x(t)$ desse automóvel em função do tempo. O automóvel sai do repouso (em $t = 0$) e vai ganhando velocidade, até que o motorista tira o pé do acelerador (ponto Q) e o automóvel começa a perder velocidade, pela ação do arraste com o ar. Ao final o automóvel volta ao repouso (ponto R). Portanto, inicialmente vale $dv(t)/dt = a(t) > 0$, no instante t_Q a aceleração se anula, a velocidade está passando por um máximo e depois a aceleração fica negativa: $dv(t)/dt = a(t) < 0$. Portanto, no instante t_Q vale:

$\vec{a}(t_Q) = \vec{0}$ e $\vec{v}(t_Q) \neq \vec{0}$

Q2.11

A aceleração média $\vec{a}_M(t_i, t_f)$ se refere a um intervalo de tempo $[t_i, t_f]$, enquanto que a velocidade (instantânea) $\vec{v}(t)$ se refere a um instante t particular. $\vec{v}(t)$ está definida pelo que está ocorrendo no momento t, não importando em nada os momentos inicial t_i e final t_f do movimento. Posso ter $\vec{v}(t) = \vec{0}$ em um instante $t \in [t_i, t_f]$ particular e

$$\vec{a}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i} \neq \vec{0}$$

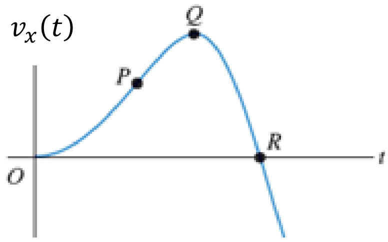


Por exemplo, considere o gráfico ao lado para a velocidade $v_x(t)$ de uma partícula que se move ao longo de x. A velocidade vai caindo, passa pelo zero (em $t = 6$) e reverte, se tornando negativa. Se considerarmos o intervalo total $[t_i = 0, t_f = 7]$, podemos ver que $\vec{a}_M(t_i, t_f)$ vai ser não nula, pois $v_x(t = 0)$ é diferente de $v_x(t = 7)$. Mas, no instante particular $t = 6$ a velocidade instantânea é nula: $v_x(t = 6) = 0$. É claro que se a velocidade fosse sempre nula, para todo t, não haveria aceleração média. A partícula estaria em repouso.

Para a segunda pergunta: sim, pode. A aceleração (instantânea) é a taxa de variação da velocidade (instantânea) e uma velocidade (instantânea) pode estar passando pelo zero e variando ao mesmo tempo.

$\vec{v}(t) = \vec{0}$ e $\vec{a}(t) \neq \vec{0}$

Imagine que você está em um automóvel inicialmente em repouso. Em um dado instante t_0 você pisa no acelerador e logo em seguida o automóvel está se movendo com uma certa velocidade diferente de zero. No instante t_0 o automóvel ainda estava parado, mas ele tinha aceleração, caso contrário ele não teria velocidade não nula logo em seguida, ele continuaria em repouso.



Imagine um automóvel que viaja ao longo de uma estrada reta que se estende ao longo do eixo x. O gráfico ao lado ilustra o comportamento da velocidade $v_x(t)$ desse automóvel em função do tempo. O automóvel sai do repouso (em $t = 0$) e vai ganhando velocidade, até que o motorista tira o pé do acelerador, engata a ré e começa a acelerar novamente. O automóvel começa a perder velocidade (ponto Q) até que ele para (ponto R) e começa a "andar para trás", quando sua velocidade se torna negativa. No ponto R podemos ver que $v_x(t_R) = 0$ e que $dv_x(t)/dt = a_x(t_R) < 0$. No instante t_R o automóvel está revertendo sua velocidade e está instantaneamente parado, mas ele tem aceleração (negativa), senão ele não estaria "andando para trás" logo em seguida (ele continuaria parado).

Outro exemplo: a condição:

$$\vec{v}(t) = \vec{0} \qquad \text{e} \qquad \vec{a}(t) \neq \vec{0}$$

ocorre sempre que um objeto lançado <u>verticalmente</u> para cima atinge sua altura máxima. Nesse caso $\vec{a}(t) = \vec{g}$, a aceleração da gravidade, que atua em todo o percurso do objeto. Na altura máxima: $\vec{v}(t) = \vec{0}$ e $\vec{a}(t) = \vec{g}$. Quando um objeto lançado verticalmente para cima atinge sua altura máxima ele está instantaneamente parado e ao mesmo tempo possui uma aceleração para baixo, a aceleração da gravidade. Se não fosse essa aceleração, esse objeto não cairia logo na sequência de atingir sua altura máxima.

Q2.16

A "queda livre" é o movimento de um objeto qualquer que se move <u>somente</u> sob ação da gravidade. Na queda dos corpos atuam tipicamente a gravidade e a influência do ar circundante: empuxo e o arraste do ar. Se desprezamos os efeitos do ar, segue que o movimento é de queda livre.

O movimento de queda livre de um objeto <u>qualquer</u> é um movimento com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}$. Na proximidade da superfície da Terra a aceleração da gravidade $\vec{g}$ é vertical para baixo de magnitude (média) $g \cong 9{,}8\ m/s^2$. Isso vale para todos os corpos: uma pena de galinha ou uma bola maciça de ferro.

Imagine que lancemos um objeto verticalmente para cima com velocidade inicial de módulo v_0 e que o eixo y é um eixo vertical apontando para cima. Então, a cinemática diz que a velocidade $\vec{v}(t)$ desse objeto obedece à seguinte equação horária:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\, t = v_0 \hat{y} - g\, t\, \hat{y} = (v_0 - g\, t)\hat{y}$$

Essa equação está dizendo que a velocidade do objeto é sempre vertical (por isso o $\hat{y}$) de magnitude que decai, se anula e depois se torna negativa. A velocidade se anula exatamente quando a trajetória de subida acaba e logo depois começa a trajetória de descida. Esse instante t_1 é dado por:

$$\vec{v}(t_1) = \vec{0} \Rightarrow v_0 - g\, t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = v_0/g$$

No instante t_1 o objeto atinge sua altura máxima h_{MAX} e começa a cair. A trajetória de subida se dá no intervalo de tempo $[0, t_1] = [0, v_0/g]$. E quanto à trajetória de descida?

A trajetória de descida começa no instante t_1 e termina no instante t_2 em que o objeto retorna à sua posição inicial y_0 de partida. Para determinar t_2 precisamos da equação horária da posição do objeto que, para o movimento com aceleração constante é:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2}\, t^2 = y_0 \hat{y} + v_0 t\, \hat{y} - \frac{g}{2}\, t^2\, \hat{y} = \left(y_0 + v_0 t - \frac{g}{2}\, t^2\right) \hat{y}$$

Essa equação está dizendo que a posição do objeto está sempre sobre a mesma vertical (por isso o $\hat{y}$) e sua magnitude inicialmente cresce, atinge uma altura máxima h_{MAX} e depois começa a diminuir. A altura h_{MAX} ocorre no instante t_1 e é dada por:

$$h_{MAX} = y_0 + v_0 t_1 - \frac{g}{2}\, t_1^2 = y_0 + v_0 \left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Portanto, partindo da altura y_0, o objeto sobe a altura $v_0^2/2g$.

Para determinar t_2, basta solucionar a equação (a partícula volta à altura inicial y_0):

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}_0 \Rightarrow y_0 + v_0 t_2 - \frac{g}{2}\, t_2^2 = y_0 \Rightarrow v_0 t_2 - \frac{g}{2}\, t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2\, v_0}{g} = 2t_1$$

Conclusão, a trajetória de descida começa no instante t_1 e termina no instante $t_2 = 2\, t_1$, ou seja, a trajetória de descida tem a mesma duração da trajetória de subida: $t_1 = v_0/g$.

A velocidade do objeto ao final da trajetória de descida será:

$$\vec{v}(t) = (v_0 - g\, t)\hat{y} \Rightarrow \vec{v}(t_2) = (v_0 - g\, t_2)\hat{y} = \left(v_0 - g\, \frac{2v_0}{g}\right) \hat{y} = -v_0\, \hat{y}$$

Concluindo: um objeto em queda livre lançado da posição y_0 com velocidade vertical $v_0\, \hat{y}$ no instante $t = 0$ atinge a altura máxima $h_{MAX} = y_0 + v_0^2/2g$ no instante $t_1 = v_0/g$ onde vale $v(t_1) = 0$, começa a cair e retorna à posição de partida y_0 no instante $t_2 = 2t_1 = 2v_0/g$ com a mesma velocidade vertical de partida, em módulo, mas com o sentido invertido: $\vec{v}(t_2) = -v_0\, \hat{y}$.

Q2.17 Vamos considerar que cada gota parte do repouso $v_0 = 0$ e cai em queda livre: $a = g$. Imaginemos um eixo y vertical para baixo com origem na boca da torneira: $y_0 = 0$. A primeira gota "pinga" no instante $t = 0$ e sua coordenada y varia no tempo de acordo com a seguinte equação horária:

$$y_1(t) = y_0 + v_0 t + \frac{g}{2}\, t^2 = \frac{g}{2}\, t^2$$

Após um instante t_1 $(= 1\, s)$ a segunda gota "pinga" e sua coordenada y varia no tempo de acordo com a seguinte equação horária:

$$y_2(t) = y_0 + v_0(t - t_1) + \frac{g}{2}\,(t - t_1)^2 = \frac{g}{2}\,(t - t_1)^2$$

Note que $y_2(t_1) = 0$.

A distância vertical entre as duas gotas, $d(t)$, é dada por:

$$d(t) = y_1(t) - y_2(t) = \frac{g}{2}\,t^2 - \frac{g}{2}\,(t - t_1)^2 = g\,t_1 t - \frac{g}{2} t_1^2$$

Vemos que a distância entre as gotas cresce linearmente com o tempo t. A distância inicial se dá quando a segunda gota "pinga", ou seja, em $t = t_1$:

$$d(t_1) = g\,t_1 t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{g}{2} t_1^2$$

e depois essa distância vai aumentando linearmente com o tempo.

Podemos abordar esse problema de uma forma um pouco diferente, considerando que $t = 0$ é o instante em que a segunda gota "pinga". Nesse instante, a primeira gota já está na posição:

$$y_1(t_1) = \frac{g}{2}\,t_1^2$$

com a velocidade de queda: $v_1(t_1) = v_0 + g\,t_1 = g\,t_1$. Portanto, a coordenada y da primeira gota varia no tempo (após $t = 0$) de acordo com a seguinte equação horária:

$$y_1(t) = y_0 + v_0 t + \frac{g}{2}\,t^2 = \frac{g}{2}\,t_1^2 + g\,t_1\,t + \frac{g}{2}\,t^2$$

enquanto que a coordenada y da segunda gota varia no tempo (após $t = 0$) de acordo com a seguinte equação horária:

$$y_2(t) = y_0 + v_0 t + \frac{g}{2}\,t^2 = \frac{g}{2}\,t^2$$

Portanto, a distância vertical entre as duas gotas, $d(t)$, é dada por:

$$d(t) = y_1(t) - y_2(t) = \frac{g}{2}\,t_1^2 + g\,t_1\,t + \frac{g}{2}\,t^2 - \frac{g}{2}\,t^2 = g\,t_1 t + \frac{g}{2} t_1^2$$

A distância inicial se dá quando a segunda gota "pinga", ou seja, em $t = 0$:

$$d(0) = g\,t_1 0 + \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{g}{2} t_1^2$$

e depois essa distância vai aumentando linearmente com o tempo t.

As duas soluções diferem apenas pela referência do tempo. Na primeira solução o cronômetro é zerado quando a primeira gota "pinga" e só faz sentido se calcular $d(t)$ para $t \geq t_1$, depois que surge a segunda gota. Na segunda solução o cronômetro é zerado quando a segunda gota "pinga" (a primeira gota pingou em um tempo negativo $t = -t_1$) e faz sentido se calcular $d(t)$ para $t \geq 0$.