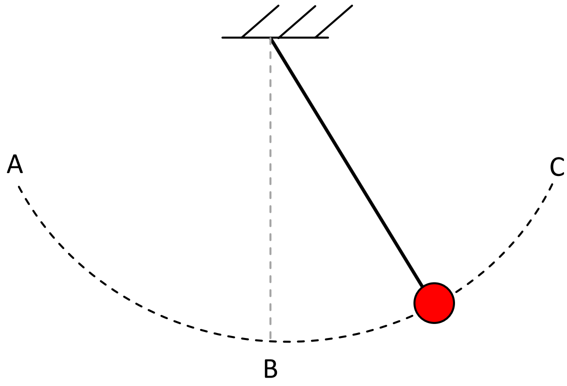
Q3.1



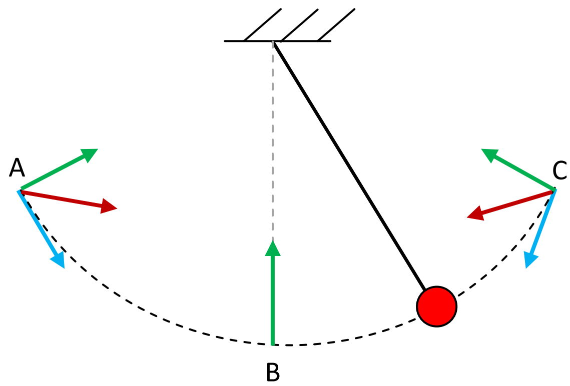
A Figura ao lado ilustra algo que se aproxima de um pêndulo simples. Uma bolinha presa na extremidade de um barbante leve preso ao teto. A bolinha, após ser solta do repouso do ponto A (por exemplo), descreve um movimento periódico ABCBABCB.... O pêndulo simples propriamente dito é um modelo simplificado em que a bolinha é uma partícula e o barbante é inextensível e de massa nula.

A aceleração $\vec{a}$ de uma partícula pode ser (sempre) dividida em duas componentes: uma ortogonal à velocidade $\vec{v}$, $\vec{a}_{\perp}$, "responsável" pela variação na direção de $\vec{v}$ e outra paralela à velocidade $\vec{v}$, $\vec{a}_{\parallel}$, "responsável" pela variação no módulo de $\vec{v}$ (v).

No caso da bolinha do pêndulo, sua velocidade (tangente ao arco de círculo) está sempre mudando de direção, posto que ela percorre uma trajetória curva. Portanto, em A, B e C existe uma $\vec{a}_{\perp}$, apontando para dentro do raio e, por isso, chamada de aceleração centrípeta. Existe uma $\vec{a}_{\perp}$ centrípeta em todos os pontos da trajetória (onde a velocidade $\vec{v}$ da bolinha é diferente de zero, posto que $a_{\perp} = v^2/R$).

No ponto B a velocidade v da bolinha está passando por um máximo (ponto mais baixo) e, por isso, não há $\vec{a}_{\parallel}$, posto que $dv/dt = 0$ em pontos de máximo e mínimo da função $v(t)$.

Nos extremos A e C a velocidade v da bolinha é nula (pontos de altura máxima) e logo que sai desses pontos a bolinha ganha velocidade. Portanto, há $\vec{a}_{\parallel}$ tanto em A (para a direita) quanto em C (para a esquerda).



A Figura ao lado ilustra essas idéias, e também a aceleração $\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel}$ nos pontos A, B e C. Setas de $\vec{a}_{\perp}$ em verde, setas de $\vec{a}_{\parallel}$ em azul e setas de $\vec{a}$ em vermelho (regra do paralelogramo). Note que no ponto B: $\vec{a} = \vec{a}_{\perp}$.

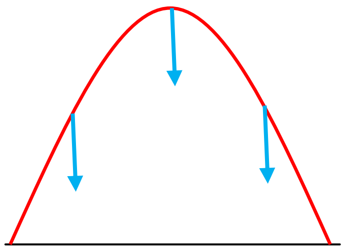
Quanto aos tamanhos das setas, os módulos dessas acelerações, considere que foram arbitrados. Mas, é verdade que, por simetria, em A e C as setas correspondentes têm tamanhos iguais e em B a seta de $\vec{a}_{\perp}$ é maior, porque $a_{\perp} = v^2/R$ e em B v é máxima (R, o raio, é o comprimento fixo do barbante).

É verdade que exatamente em A e em C vale $v = 0$ e, por isso, $a_{\perp} = v^2/R = 0$ nesses pontos da trajetória da bolinha. Portanto $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel}$ (setas azuis) em A e C e $\vec{a} = \vec{a}_{\perp}$ em B. Na figura acima considere que as acelerações correspondem aos instantes em que a bolinha acabou de sair de A e C ($v \neq 0$) e passa por B.

Q3.3 A aceleração $\vec{a}$ de uma partícula pode ser (sempre) dividida em duas componentes: uma ortogonal à velocidade $\vec{v}$, $\vec{a}_\perp$, "responsável" pela variação na direção de $\vec{v}$ e outra paralela à velocidade $\vec{v}$, $\vec{a}_\parallel$, "responsável" pela variação no módulo de $\vec{v}$ (dv/dt).

a) A aceleração $\vec{a}$ será paralela a $\vec{v}$ quando não houver $\vec{a}_\perp$, ou seja, quando $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel = \vec{a}_\parallel$. Um movimento parabólico é um movimento em uma curva e, portanto, a velocidade da partícula estará sempre mudando de direção. Existe uma $\vec{a}_\perp$ em todos os pontos da trajetória. Concluindo: é impossível na queda livre (não vertical, portanto parabólica) de um projétil valer $\vec{a} = \vec{a}_\parallel$. Para o caso especial de um corpo em queda livre vertical é claro que $\vec{a} = \vec{a}_\parallel$ sempre, pois ambos $\vec{a} = \vec{g}$ e $\vec{v}$ são sempre verticais.

b) A aceleração $\vec{a}$ será ortogonal a $\vec{v}$ quando não houver $\vec{a}_\parallel$, ou seja, quando $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel = \vec{a}_\perp$. Em um movimento parabólico de queda livre a velocidade v da partícula é mínima no ponto de altura máxima. Portanto, nesse ponto vale $\vec{a}_\parallel = \vec{0}$ ($dv/dt = 0$ em pontos de máximo e mínimo da função $v(t)$). Concluindo: na queda livre (não vertical) de um projétil vale $\vec{a} = \vec{a}_\perp$ exatamente no ponto em que o projétil atinge sua altura máxima.

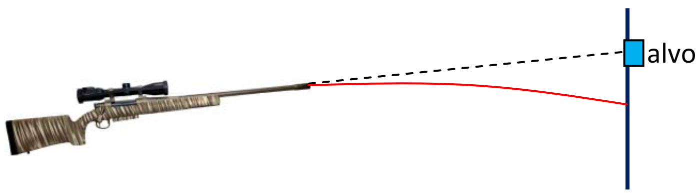


A Figura ao lado ilustra a trajetória (em vermelho) parabólica de um projétil em queda livre. Note que $\vec{a} = \vec{g} =$ constante em toda a trajetória (setas azuis, verticais para baixo) e que essas setas nunca serão tangentes à trajetória. No ponto de altura máxima a seta de $\vec{g}$ é vertical enquanto que a trajetória se torna horizontal. Portanto, nesse ponto, $\vec{a} = \vec{a}_\perp = \vec{g}$. Em todos os outros pontos vale $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$.

Q3.4 A bala sai do cano do rifle com velocidade inicial $\vec{v}_0$ paralela ao cano. Se a direção do cano coincidir com a direção do alvo, fatalmente a bala vai incidir abaixo do alvo, tendo em vista a queda da bala devido à ação (inexorável) da gravidade.

Se desprezarmos a ação do arrasta do ar na bala, sua queda será parabólica. Mas, enfim, há arraste do ar na bala e isso não muda o fato de que ela cai, enquanto viaja do rifle até o alvo.

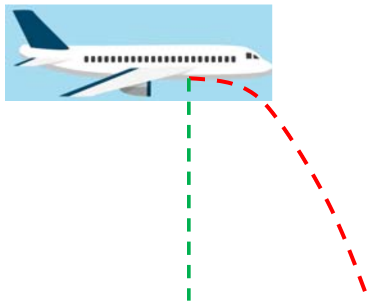
Devemos sempre apontar o rifle para um ponto acima do alvo, tão mais acima quanto mais distante estiver o alvo do rifle.



A Figura ao lado ilustra a ideia. Apontando o cano do rifle diretamente para o alvo vai levar fatalmente a um erro. Quanto mais distante o alvo, maior o erro.

Na prática, rifles podem vir de fábrica com alguma correção na mira, para compensar essa queda da bala. Por exemplo, um rifle pode ter a mira fixa posicionada para acertar um alvo a 100 m de distância, quando se "mira" diretamente no alvo, que está a 100 m de distância (a mira vai estar alinhada com o alvo, mas o cano não). Nesses rifles, para atirar em um alvo mais próximo, devemos mirar em um ponto abaixo do alvo e não acima. Dessa forma "compensamos a compensação" que já vem de fábrica.

Q3.6 Considere um referencial com eixos x horizontal e y vertical para cima. Suponha que a velocidade do avião seja constante $\vec{v} = v\,\hat{x}$. Portanto, após ser largado, o pacote vai descrever uma trajetória de queda livre com velocidade inicial $\vec{v}_0 = v\,\hat{x}$. A Figura ao lado ilustra a trajetória (em vermelho) vista de um observador fixo, que vê o avião e o pacote passar. Na ausência de arraste, o pacote continua com velocidade horizontal $\vec{v}_0 = v\,\hat{x}$, acompanhando o avião, ao mesmo tempo em que cai na vertical com aceleração $\vec{g}$. Se o avião estivesse parado ($v = 0$), flutuando no ar, e soltasse o mesmo pacote, a trajetória seria a mostrada em verde, apenas uma queda livre vertical, que corresponde ao caso particular $v_0 = v = 0$.



Conclusão, do ponto de vista de uma pessoa no solo há $\vec{v}_0 = v\,\hat{x}$ no pacote e ele tem uma trajetória de queda parabólica (curva vermelha). Do ponto de vista do piloto do avião, que também se move com $\vec{v} = v\,\hat{x}$, não há $\vec{v}_0 = v\,\hat{x}$ no pacote (a velocidade inicial relativa pacote/piloto é nula) e ele tem uma trajetória de queda vertical (curva verde). A visão do piloto seria a de ver o pacote logo abaixo dele apenas caindo na vertical, ou seja, para o piloto a trajetória do pacote seria apenas um ponto. Ele veria o pacote diminuindo de tamanho, à medida que se afasta do avião (sempre desprezando a ação do arraste do ar no pacote).

Essa discussão pode ser colocada em termos quantitativos através das leis da cinemática para a queda livre (supondo que o pacote parta da origem no avião, com $v_{y0} = 0$). As coordenadas x e y do pacote são:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= -\frac{1}{2} g\, t^2 \end{aligned}\right\} \; y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

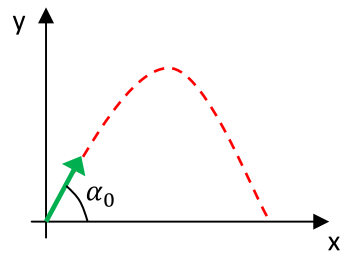
Parábola com a "boca para baixo".

Para $v_0 = 0$ (visto do avião):

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= -\frac{1}{2} g\, t^2 \end{aligned}\right\}$$

Queda vertical.

Q3.7 Considere um referencial com eixos x horizontal e y vertical para cima. Um projétil é lançado (da origem) com velocidade inicial $\vec{v}_0$ de módulo v_0 que faz um ângulo α_0 com a horizontal. A Figura ao lado ilustra a trajetória parabólica do projétil. O movimento de queda livre é o movimento com aceleração constante $\vec{a} = \vec{g}$. A aceleração da gravidade $\vec{g}$ é vertical para baixo com módulo $g \cong 9{,}8\; m/s^2$. Portanto, nesse referencial obtemos:



Para a aceleração:

$$a_x(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad a_y(t) = -g$$

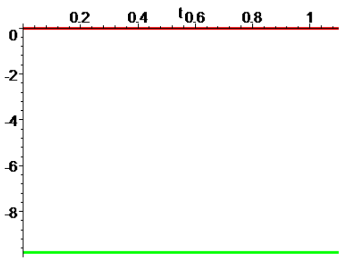
Das leis da cinemática (com aceleração constante) obtemos para a velocidade:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t = v_0 \cos(\alpha_0) \qquad \text{e} \qquad v_y(t) = v_{0y} + a_y t = v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0) - g\, t$$

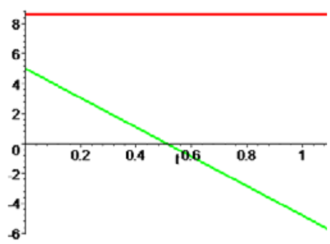
Das mesmas leis da cinemática (com aceleração constante) obtemos para a posição:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + a_x t^2/2 = \\ = v_0 \cos(\alpha_0)\, t \qquad \text{e} \qquad y(t) = y_0 + v_{0y} t + a_y t^2/2 \\ = v_0 \operatorname{sen}(\alpha_0)\, t - g\, t^2/2$$

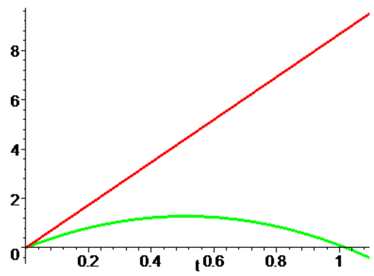
Os gráficos dessas funções ficam como mostrados abaixo. Para fazer esses gráficos (no Maple) fixamos valores numéricos para v_0, g e α_0. Componentes x em vermelho e componentes y em verde.



Não há aceleração em x e em y a aceleração é constante e para baixo (negativa nesse referencial).



A velocidade em x é constante enquanto que em y a velocidade varia linearmente e muda de sinal no instante da altura máxima.



A posição em x cresce linearmente enquanto que a posição em y cresce (sobe) e depois diminui (desce). No instante $t \cong 1$ o projétil volta para a altura $y = 0$.

Q3.11 No movimento circular uniforme (MCU) uma partícula descreve uma trajetória circular (de raio R) com velocidade de módulo constante v (vetor $\vec{v}$ sempre tangente ao círculo) e com aceleração centrípeta $\vec{a}_{cen}$ de módulo constante $a_{cen} = v^2/R$. Não há aceleração tangencial, posto que $dv/dt = 0$.

Em geral, se $\vec{D}(t_i, t_f) = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)$ é o deslocamento de uma partícula no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$, a velocidade média nesse mesmo intervalo de tempo é:

$$\vec{v}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{D}(t_i, t_f)}{t_f - t_i} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i}$$

A aceleração média da partícula nesse intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ é:

$$\vec{a}_M(t_i, t_f) = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i}$$

Em uma volta completa no movimento circular a partícula sai e retorna para o mesmo ponto, portanto: $\vec{r}(t_f) = \vec{r}(t_i)$ e $\vec{D}(t_i, t_f) = \vec{0}$. Concluímos que, para uma volta completa: $\vec{v}_M(t_i, t_f) = \vec{0}$.

Analogamente, ao voltar para o mesmo ponto a partícula assume a mesma velocidade, ou seja: $\vec{v}(t_f) = \vec{v}(t_i)$ e concluímos que, para uma volta completa: $\vec{a}_M(t_i, t_f) = \vec{0}$.

Uma volta completa tem a duração que chamamos de período T do movimento:

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v}$$

Portanto, na discussão acima considere que $t_f = t_i + T$ com t_i um tempo inicial qualquer.

As grandezas médias têm essa característica, de serem "grosseiras", elas não olham o que ocorre no meio do intervalo de tempo $[t_i, t_f]$. Elas apenas comparam o que ocorre no instante t_f com o que ocorre no instante t_i. Portanto, se $t_f = t_i + T$, segue que a partícula "não saiu do lugar", ela "não fez nada", e é isso o que dizem os resultados: $\vec{v}_M(t_i, t_i + T) = \vec{0}$ e $\vec{a}_M(t_i, t_i + T) = \vec{0}$ para todo t_i. O que a partícula fez no meio, entre t_i e t_f, a curva toda que ela descreveu, não importa.

Concluindo: Considerando o intervalo de tempo $[t_i, t_i + T]$, qual a velocidade média com que essa partícula se moveu? Zero. Ela não saiu do lugar. Considerando o intervalo de tempo $[t_i, t_i + T]$, qual a aceleração média que essa partícula sofreu, ou seja, com que taxa média sua velocidade mudou? Zero. Ela manteve a mesma velocidade (em módulo, direção e sentido).