Q8.2 Suponha que a bola de beisebol possui massa m e velocidade de módulo v e a bola de boliche (mais pesada) possui massa $M > m$ e velocidade de módulo V .

Se as duas bolas possuem o mesmo momento linear inicial, então: $P_0 = p_0 = M V_0 = m v_0$. A bola de boliche (mais pesada) deverá estar viajando mais lentamente, para que tenha o mesmo momento linear da bola de beisebol. Para levar qualquer uma dessas bolas ao repouso ($p_f = 0$), devemos aplicar nela uma força (resultante) média de módulo F tal que:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0 - p_0}{\Delta t} = -\frac{p_0}{\Delta t}$$

O sinal de $-$ diz apenas que a força deveria ser oposta ao p_0 . Vemos que, considerando o mesmo tempo de reação Δt , dá no mesmo qual bola pretendemos parar. Vamos fazer e sentir a mesma força de impacto.

As energias cinéticas K_0 e k_0 seriam tais que:

$$K_0 = \frac{M V_0^2}{2} = \frac{M}{2} \left(\frac{m}{M} v_0 \right)^2 = \frac{m}{M} m \frac{v_0^2}{2} = \frac{m}{M} k_0 < k_0$$

A bola de boliche terá energia cinética menor e exigirá, portanto, um menor trabalho (em módulo) da força F para ser levada ao repouso (do que a bola de beisebol). Lembrando do teorema W-K: $W_F = \Delta K = -K_0$.

Se, por outro lado, as bolas possuem a mesma energia cinética inicial K_0 : $M V_0^2/2 = m v_0^2/2$. Portanto: $\sqrt{M} V_0 = \sqrt{m} v_0$. A bola de boliche (mais pesada) deverá estar viajando mais lentamente. Agora os momentos lineares iniciais serão diferentes:

$$P_0 = M V_0 = M \sqrt{\frac{m}{M}} v_0 = \sqrt{M m} v_0 = \sqrt{\frac{M}{m}} m v_0 = \sqrt{\frac{M}{m}} p_0 > p_0 \qquad p_0 = m v_0$$

Ou, equivalentemente:

$$K_0 = \frac{P_0^2}{2M} = \frac{p_0^2}{2m}$$

Vemos que a bola de boliche possui momento linear inicial P_0 maior ($M/m > 1$). Portanto, ela requererá uma força média F maior para levá-la ao repouso. Do teorema W-K ($W_F = \Delta K = -K_0$), vemos que o trabalho da força F será o mesmo para levar ao repouso a bola de boliche ou a bola de beisebol.

Concluindo, para levar ao repouso da bola de boliche com mesmo P_0 , sinto a mesma força de impacto (mesmo impulso) e realizo um trabalho menor (porque $K_0 < k_0$) que no caso de levar ao repouso a bola de beisebol. Essa situação seria melhor que levar ao repouso a bola de boliche com mesmo K_0 , que exigiria o mesmo trabalho e uma força de impacto maior que no caso de levar ao repouso a bola de beisebol.

Eu escolheria parar a bola de boliche com mesmo momento linear da bola de beisebol.

Q8.4

Momento linear é uma grandeza vetorial, enquanto que energia cinética é uma grandeza escalar. Portanto, para um mesmo módulo v de velocidade, a energia cinética é a mesma e também os módulos dos momentos lineares. Mas, se a direção da velocidade muda, o momento linear muda também:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Momentos lineares em direções diferentes, ou simplesmente em sentidos opostos, são diferentes entre si.

Q8.7

A senhora de massa m lança uma pedra de massa M em uma direção oblíqua. Considere um referencial com eixo x horizontal e eixo y vertical para cima.

A camada de gelo deve tornar o possível atrito entre a senhora e o solo, que atuaria ao longo de x , desprezível.

Ao longo de y atuam na senhora o peso $\vec{P}_S$ e a força normal $\vec{\eta}$ que o solo faz nela (forças externas, ou seja, produzidas pela vizinhança, ao sistema senhora+pedra).

Vamos considerar agora o sistema senhora+pedra. No lançamento da pedra, a senhora faz força na pedra e a pedra faz força na senhora (ação e reação) e essas duas forças são internas ao sistema, elas não variam o momento linear total $\vec{P}$ do sistema. Somente forças externas ao sistema senhora+pedra (forças exercidas pela vizinhança) podem alterar o valor de $\vec{P} = \vec{P}_{sen} + \vec{P}_{pedra}$.

Não havendo forças externas ao longo de x (possíveis atritos na senhora), segue a conservação de P_x .

Ao longo de y , no momento do lançamento da pedra a senhora é empurrada em direção ao piso (pela pedra) e o piso rígido reage com um incremento na força $\vec{\eta}$ (o gelo poderia até quebrar nesse momento). A resultante das forças ao longo de y deixa de ser nula nesse instante (há ainda o peso da pedra nessa direção) e há um impulso vertical para cima no sistema. Portanto, P_y não se conserva durante o lançamento da pedra. Pelo contrário, nasce um $P_y > 0$ nesse momento, graças ao impulso do solo sobre a senhora.

Concluindo, o momento linear total $\vec{P}$ do sistema não se conserva, mas sua componente x se conserva (continua sendo nula). Poderíamos dizer que as velocidades (opostas) v da senhora e V da pedra ao longo de x seriam tais que: $mv - MV = 0 = P_x$. A pedra vai em um sentido e a senhora recua no sentido oposto.

Q8.9

Em uma colisão completamente inelástica (pelo menos) dois corpos de massas m_1 e m_2 se unem e passam a se deslocar juntos como um corpo só de massa $m_1 + m_2$ e velocidade de módulo v_f .

A energia cinética final após a colisão fica:

$$K_f = \frac{(m_1 + m_2)v_f^2}{2}$$

Não há nada que impeça o caso particular $v_f = 0$ e $K_f = 0$ (corpo final em repouso). Por exemplo, duas bolas molengas de massas iguais M e velocidades opostas (ao longo de x) de módulo v_0 . O momento linear inicial do sistema é $P_0 = M v_0 - M v_0 = 0$. Imagine que essas bolas colidam e se unam formando uma massa $2M$ em repouso. O momento linear final é $P_f = 2M \cdot 0 = 0$. O momento linear se conservou na colisão e a energia cinética “sumiu”. Na colisão completamente inelástica parte da (ou toda) energia cinética inicial é convertida em energia interna dos corpos que colidem, elevando suas temperaturas, além de possíveis energias elásticas associadas a deformações permanentes dos corpos (como em molas que ficam deformadas).

Se vale $K_f = 0$, então o momento linear total final também é nulo, pois não sobra nada se movendo.

Da conservação do momento linear, concluímos que os corpos colidem com momento linear total inicial nulo (como no nosso exemplo que demos acima):

$$m_1 v_{10} - m_2 v_{20} = 0$$

A energia cinética inicial disponível seria:

$$K_i = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2}$$

Há energia cinética inicial e parte dela (ou toda ela) vai ser convertida em outras formas de energia durante a colisão.

Q8.10

De acordo com o teorema do impulso-momento linear (teorema J-P), a variação do momento linear de uma partícula é ditada pelo impulso da força externa resultante que atua nessa partícula. De acordo com o teorema do trabalho-energia cinética (teorema W-K), a variação da energia cinética de uma partícula é ditada pelo trabalho da força externa resultante que atua nessa partícula.

Considere uma bolinha (uma partícula) que quica no chão. Ela chega com velocidade vertical $-v \hat{y}$ e sobe com velocidade $v \hat{y}$. Seu momento linear variou de $\Delta \vec{p} = 2mv \hat{y}$ por causa do impulso da força normal $\vec{\eta}$ que o piso faz no quique da bola. Essa força $\vec{\eta}$ não realiza trabalho, pois ela atua enquanto a bola está em contato com o piso rígido e não há, portanto, deslocamento do ponto de contato bola/piso. Por isso a energia cinética da bola não varia. Em uma bolinha real, não uma partícula, forças internas dissipativas poderiam converter parte da energia cinética da bola em energia interna e calor. Essa seria uma colisão (quique) inelástica.

Considere um sistema com apenas duas partículas de massa m .

O momento linear total do sistema é:

$$\vec{P} = m (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

A energia cinética total do sistema é:

$$K = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2)$$

Posso mudar o valor de K sem mudar o valor de $\vec{P}$? Isso ocorre em uma colisão inelástica. Nessa colisão atuam apenas forças internas (que não mudam $\vec{P}$) que são forças dissipativas e mudam (diminuem) o valor de K . Essas forças internas podem elevar a energia interna do sistema, redundando em uma dissipação de calor para o ambiente: uma parte de K é dissipada na forma de calor.

Suponha, para simplificar, que inicialmente valha $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$. Então:

$$\vec{P}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$$

$$K_i = \frac{p^2}{m}$$

Vamos supor que ocorra uma colisão de tal forma que os momentos lineares se tornam:

$$\vec{p}_{1f} = (-1 + \alpha)\vec{p} \qquad \vec{p}_{2f} = (1 - \alpha)\vec{p}$$

Com $\alpha \geq 0$ uma constante. Cada partícula inverteu seu movimento e perdeu um pouco de momento linear.

Note que o momento linear total do sistema se conserva:

$$\vec{P}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = (-1 + \alpha)\vec{p} + (1 - \alpha)\vec{p} = \vec{0}$$

Quanto à energia cinética final, diminuiu:

$$K_f = \frac{1}{2m} [(-1 + \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2] p^2 = (1 - \alpha)^2 K_0$$

Enfim, K e $\vec{P}$ são funções diferentes das massas e velocidades e uma pode variar independentemente da outra. Além disso, uma grandeza é vetorial e a outra é escalar.

Q8.14

Suponha que $\vec{R}$ seja a força resultante em uma partícula e que $\vec{p}$ seja o momento linear dessa partícula. O teorema do impulso ($\vec{J}$) - momento linear ($\vec{p}$) (teorema J-P) diz que no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ de atuação da força $\vec{R}$ vale:

$$\vec{J}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}(t) dt = \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \Delta\vec{p}$$

O impulso de $\vec{R}$ no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ é igual à variação do momento linear da partícula nesse mesmo intervalo de tempo.

Uma força média é definida como o valor equivalente constante da força que produz o mesmo impulso $\vec{J}$ e, portanto, o mesmo $\Delta\vec{p}$. Para uma força constante no tempo vale:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \vec{F} \Delta t = \vec{F} (t_f - t_i)$$

Portanto, do teorema J-P, a força resultante média $\vec{R}_m$ é definida por:

$$\vec{J}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}(t) dt = \vec{R}_m (t_f - t_i) = \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \Delta\vec{p} \Rightarrow \vec{R}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Suponha que a bala de massa m incida na placa de aço com velocidade inicial horizontal v_0 . O momento linear inicial (horizontal) da bala é $p_0 = m v_0$.

Se a bala reflete com velocidade $-v_f$ (oposta à v_0), seu momento linear final fica: $p_f = -m v_f$. A variação de momento linear na reflexão foi: $\Delta p = p_f - p_0 = -m(v_0 + v_f)$.

Para que isso ocorra, a placa deve aplicar na bala uma força média (horizontal) de módulo F tal que:

$$F_{reflex} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{m(v_0 + v_f)}{\Delta t}$$

O sinal de $-$ diz apenas que a força deveria ser oposta ao p_0 .

Se a bala fica incrustada na placa, então $v_f = 0$ e seu momento linear final é $p_f = 0$. A variação de momento linear nesse caso foi: $\Delta p = p_f - p_0 = -m v_0$.

Para que isso ocorra, a placa deve aplicar na bala uma força média (horizontal) de módulo F tal que:

$$F_{incrust} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{m v_0}{\Delta t}$$

O sinal de $-$ diz apenas que a força deveria ser oposta ao p_0 .

Aqui temos que fazer alguma hipótese sobre os tempos Δt de interação entre a bala e a placa. Por exemplo, se considerarmos o mesmo tempo de interação, fica claro que a reflexão da bala exige uma força mais intensa (de maior módulo) por parte da placa de aço.

Mas, esses dois tempos não têm que ser iguais e imaginamos que o tempo de incrustação pode ser maior que o tempo de ricochete. A bala leva um tempo penetrando no aço até parar e nesse tempo a força vai agindo na bala. Na reflexão, o evento é mais superficial e mais rápido. Isso nos leva à conclusão que a força exigida na reflexão seria bem maior, o que exigiria um aço bem mais duro.

Q8.15 O teorema do impulso ($\vec{J}$) - momento linear ($\vec{p}$) (teorema J-P) diz que no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ de atuação da força resultante $\vec{R}$ em uma partícula vale:

$$\vec{J}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}(t) dt = \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \Delta \vec{p}$$

Para uma força $\vec{R}$ constante o impulso se torna mais simples e obtemos:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{R} dt = \vec{R} \Delta t = \Delta \vec{p}$$

Para um corpo inicialmente em repouso ($\vec{p}(t_i) = \vec{0}$) podemos escrever $\Delta \vec{p} = M \vec{v}_f$ e, portanto:

$$\vec{R} \Delta t = M \vec{v}_f$$

A ideia é simples: quanto mais tempo a força $\vec{R}$ atua no corpo, mais tempo ele acelera e maior velocidade final ele adquire. Se a força cai à metade, ela deverá atuar o dobro do tempo para produzir o mesmo impulso, o mesmo $\Delta \vec{p}$ e a mesma velocidade final da partícula.

Q8.20

De acordo com o teorema do impulso-momento linear (teorema J-P), a variação do momento linear de uma partícula é ditada pelo impulso da força externa resultante que atua nessa partícula.

$$\vec{J}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{R}(t) dt = \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i) = \Delta\vec{p}$$

Considere que a senhora é a partícula e que ela, inicialmente em repouso, quer se deslocar na horizontal para a direita.

Se houvesse atrito entre a senhora e o piso não haveria dificuldade. Ela empurraria o piso para a esquerda e o piso a empurraria para a direita. A cada empurrão haveria um impulso $\vec{J}$ na senhora e ela adquiriria um pouco de momento linear $\Delta\vec{p}$ para a direita.

Na ausência de atrito, que deve ser a ideia do lago gelado, a senhora poderia lançar algo para a esquerda e esse algo a empurraria para a direita (ação e reação) produzindo um impulso e um incremento de momento linear na senhora para a direita. Na ausência de atrito, em cada lançamento o momento linear horizontal do sistema senhora+algo seria conservado e poderíamos escrever $mv - MV = 0$, sendo m e v a massa e a velocidade horizontal do algo e M e V a massa e a velocidade horizontal adquirida pela senhora. As velocidades seriam opostas e daí o sinal de $-$. Dessa forma a senhora teria um sistema de propulsão, como um foguete que vai emitindo gás e se deslocando no espaço vazio.

Sem nada para atirar e sem atrito com o solo ou mesmo uma ventania, a senhora não teria como se locomover na superfície do lago. No máximo ela poderia ficar se debatendo sem parar, no mesmo lugar.

A ideia central aqui é que somente forças externas à senhora podem modificar o momento linear da senhora. Essa força externa poderia ser o atrito com o solo, uma ventania, alguém que empurra ou a força de reação de algo que a própria senhora lançasse no ar. Se a senhora lança uma bola para a esquerda, a bola empurra a senhora para a direita (ação e reação), o que produz um impulso e um $\Delta\vec{p}$ na senhora. A senhora poderia tentar soprar ou abanar o ar para a esquerda (como em um foguete). Isso funcionaria porque se ela empurra o ar para a esquerda o ar empurra a senhora para a direita. Mas talvez isso não seria algo muito eficiente.

Se, por outro lado, a senhora tenta “se empurrar”, algo como suas mãos pressionando sua barriga para a direita, ou algo similar, isso não terá nenhum efeito sobre o momento linear da senhora. Isso porque a força mão/barriga e a força (reação) barriga/mão são forças internas à senhora e seus impulsos se anulam (graças à terceira lei de Newton) não produzindo nenhum $\Delta\vec{p}$ na senhora. Se ela estava parada, ela vai tentar se empurrar de todas as formas possíveis e vai continuar parada, pois $\Delta\vec{p} = \vec{0}$. No máximo ela vai parecer uma pessoa que enlouqueceu.