Q9.1

Seja ω a velocidade angular (em módulo) de um objeto rígido que gira em torno de um eixo fixo. Sua aceleração angular (ao longo desse eixo) possui módulo $\alpha = d\omega/dt$. Se $\omega = \omega(t)$ e $\alpha = d\omega/dt = \alpha(t)$, como, por exemplo, se $\omega(t) = K\, t^2$ com K constante e $\alpha(t) = 2\, K\, t$, segue que a aceleração angular desse objeto não é constante. a) a relação $v(t) = \omega(t)r$ para um ponto desse objeto com raio de giração r (distância ao eixo de rotação) vale, pois essa é basicamente uma relação geométrica entre comprimento de arco l e ângulo θ em radianos: $l = r\,\theta$. Derivando essa relação dos dois lados e considerando o raio r constante obtemos $v(t) = r\,\omega(t)$. b) a relação $a_{tg} = r\,\alpha$ para a aceleração tangencial desse ponto vale, pois é obtida da derivação da relação anterior: $v(t) = r\,\omega(t) \Rightarrow\ dv(t)/dt = r\, d\omega(t)/dt \Rightarrow a_{tg}(t) = r\,\alpha(t)$. c) a relação $\omega(t) = \omega_0 + \alpha\, t$ só vale se α for constante, pois ela é obtida da integral de $d\omega/dt = \alpha = constante$ (é a relação análoga a $v(t) = v_0 + a\, t$ do MRUV). Em geral não vale a relação $\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t)\, t$. d) a relação $a_{tg} = r\,\omega^2$ não vale nunca. Há uma confusão entre a aceleração tangencial (ao longo do círculo) a_{tg} com a aceleração centrípeta a_{cen} (ao longo do raio). É verdade que $a_{cen} = v^2/r = r\,\omega^2$ (dado que $v = \omega\, r$) para um ponto desse objeto com raio de giração r (distância ao eixo de rotação) e que em geral $a_{cen}(t) = [v(t)]^2/r = r\,[\omega(t)]^2$. e) a energia cinética de rotação de um objeto que gira é $K = I\,\omega^2/2$ e isso vale sempre: $K(t) = I\,[\omega(t)]^2/2$.

Q9.2 O momento de inércia de um corpo rígido é dado por:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

sendo m_i a massa e r_i o raio de giração (distância ao eixo de rotação) da partícula i que compõe esse corpo. Para corpos maciços contínuos, substituímos o somatório por uma integral de volume $\mathcal{V}$, fazendo $dm = \rho\, d\mathcal{V}$.

Nessa molécula diatômica com a forma de um haltere, vamos chamar de r a distância de cada partícula até a origem (ao longo do eixo y). Se a molécula gira em torno do eixo x (então as partículas percorrem um círculo de raio r centrado no eixo x), segue que os raios de giração são ambos r e $I = I_x = (m_1 + m_2)r^2$. A energia cinética de rotação da molécula girando com velocidade angular ω em torno de x será:

$$K_x = K = \frac{1}{2}\, I_x\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)r^2\,\omega^2$$

a) Se a molécula girar em torno do eixo z (então as partículas percorrem um círculo de raio r centrado no eixo z) nada muda, os raios de giração das partículas são os mesmos: $K_z = K$, para uma mesma ω em torno de z.

b) Se a molécula girar em torno de y (as partículas giram em torno delas mesmas) segue que $r_1 = r_2 = 0$ e $I_y = (m_1 + m_2)0^2 = 0$, pois as partículas estão sobre o eixo y. Portanto, a energia cinética de rotação dessa molécula será desprezível, para qualquer ω:

$$K_y = \frac{1}{2}\, I_y\,\omega^2 = 0\ \ \omega^2 = 0$$

Note que nossa notação I_x, I_z, K_y etc. não representa componentes de vetores (como usualmente). Trata-se apenas de uma forma de associar a grandeza calculada ao eixo de rotação específico (x, y ou z) da rotação. Para cada eixo de rotação há um I e uma K. Ambos, I e K são grandezas escalares. I_x não é a componente x de um suposto vetor I. I_x é o I para o caso específico em que o eixo de rotação do corpo é o eixo que chamamos de x.

Q9.3

Aceleração é taxa de variação da velocidade $\vec{v}$: $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. Se a velocidade muda com o tempo, então há aceleração. Considere um ponto P qualquer que pertence a um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, mais especificamente um ponto que está fora do eixo de rotação, ou seja, um ponto que possui um raio de giração (distância ao eixo de rotação) $r \neq 0$. Qual o movimento desse ponto? Ele percorre um círculo de raio r centrado no eixo de rotação. Portanto, a velocidade $\vec{v}$ desse ponto é sempre tangente a esse círculo: movimento circular. Essa velocidade $\vec{v}$ muda de direção? Sim, isso ocorre em qualquer caso e para que isso ocorra esse ponto P deve ter uma aceleração centrípeta (radial) $\vec{a}_{cen}$ cujo módulo é $a_{cen} = v^2/r = \omega^2 r$. Essa velocidade $\vec{v}$ muda de módulo (fica maior ou menor)? Talvez. Se a velocidade angular ω do corpo mudar no tempo, ou seja $\omega = \omega(t)$, segue que $v = \omega\, r = \omega(t) r$ também muda e para que isso ocorra esse ponto P deve ter uma aceleração tangencial (paralela à trajetória circular) $\vec{a}_{tg}$, cujo módulo é $a_{tg} = dv/dt = r\, d\omega/dt = r\, \alpha$. Concluindo, sempre há uma $\vec{a}_{cen}$, mas pode haver ou não uma $\vec{a}_{tg}$, dependendo do caso, se a velocidade angular ω do corpo que gira é constante (não há) ou não (há).

Já tivemos oportunidade de discutir a diferença entre essas acelerações. $\vec{a}_{tg}$ é a aceleração paralela à velocidade no movimento circular e é responsável pela variação no módulo de $\vec{v}$. Por sua vez, $\vec{a}_{cen}$ é a aceleração ortogonal à velocidade no movimento circular e é responsável pela variação na direção de $\vec{v}$.

Q9.9 O momento de inércia de um corpo rígido é dado por:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

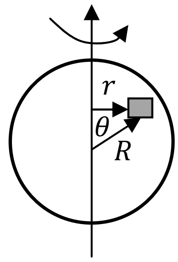
sendo m_i a massa e r_i o raio de giração (distância ao eixo de rotação) da partícula i que compõe esse corpo.

Existem infinitos eixos possíveis de rotação para um corpo qualquer e não há como imaginar um caso em que desenhamos um eixo qualquer na vizinhança de um corpo (simplesmente traçando uma reta) e sempre obtemos os mesmos raios de giração para suas partículas e o mesmo momento de inércia.

Por outro lado, se só podemos considerar eixos que passam necessariamente por um mesmo ponto específico, já podemos imaginar um corpo que terá sempre o mesmo momento de inércia, para qualquer eixo de rotação. Considere uma distribuição esférica de massa (maciça ou do tipo casca) e todos os (infinitos) eixos possíveis que passam pelo centro dessa distribuição. No caso mais simples, de uma casca esférica fina de raio R e massa M, o momento de inércia será sempre $I = 2/3\ M\ R^2$ (ver tabela 9.2), para qualquer eixo de rotação que passa pelo centro da casca. Apenas para ilustrar, esse valor de I é obtido da seguinte forma:

Primeiramente tomamos o limite do contínuo:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int_{casca} r^2\, dm$$



Na Figura ao lado o quadradinho cinza representa um fragmento infinitesimal da casca esférica, de massa infinitesimal dm. O raio de giração desse fragmento é $r = R\,\mathrm{sen}(\theta)$ e isso vale para qualquer fragmento. O fragmento é uma casquinha de área infinitesimal $dA = R^2\, sen(\theta) d\theta d\phi$ (em coordenadas esféricas) e massa $dm = \rho\, dA$, sendo ρ a densidade de massa da casca (por unidade de área). Portanto:

$$I = \int_{casca} r^2\, dm = \int_{casca} [R\,\mathrm{sen}(\theta)]^2\, \rho\, R^2\, \mathrm{sen}(\theta) d\theta d\phi = \rho\, R^4 \int_0^{\pi} [\mathrm{sen}(\theta)]^3 d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

Concluindo:

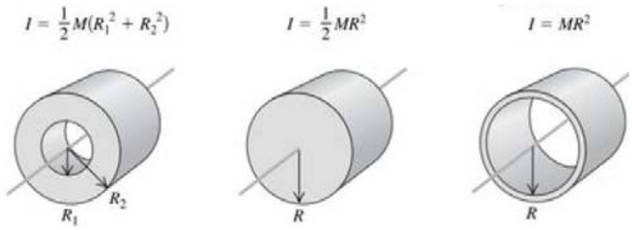
$$I = \rho\, R^4\, (4/3)(2\pi) = \frac{2}{3}(\rho\, 4\pi\, R^2)\, R^2 = \frac{2}{3} M\, R^2$$

Esse é o momento de inércia em relação a um eixo de rotação qualquer que passa pelo centro de massa da casca. O momento de inércia não é uma propriedade intrínseca de um corpo (como sua massa), pois ele depende do eixo de rotação arbitrário em torno do qual esse corpo gira.

Q9.10 Um volante é basicamente um disco, ou uma roda, que gira juntamente com o eixo de rotação de uma máquina. Ele pode ser pensado como um simples acumulador de energia cinética de rotação. O momento de inércia de um corpo rígido qualquer é dado por:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

sendo m_i a massa e r_i o raio de giração (distância ao eixo de rotação) da partícula i que compõe esse corpo. Para minimizar o peso do corpo devemos reduzir as massas m_i. Por outro lado, se queremos maximizar I, devemos aumentar os raios de giração r_i dessas massas. Portanto, um volante leve com grande momento de inércia deve basicamente concentrar sua massa o mais longe possível do eixo de rotação.



Olhando na tabela 9.2 (ver ao lado) podemos ver que se fizermos um volante que é apenas um disco com a massa M distribuída uniformemente (figura central), seu momento de inércia será $I = 1/2\, M\, R^2$. Na primeira figura, se mantivermos o raio maior $R_2 = R$ e concentrarmos a massa mais na periferia, produzindo uma casca cilíndrica (cilindro oco), o momento de inércia cresce para $I = 1/2\, M\, R^2 + 1/2\, M\, R_1^2$ (o volante teria que ficar um pouco mais longo para ter a mesma massa, mas note que I não depende do comprimento do cilindro). Na terceira figura, se mantivermos o raio maior $R_2 = R$ e concentrarmos ainda mais a massa na periferia, produzindo uma casca cilíndrica fina, o momento de inércia cresce para $I = 1/2\, M\, R^2 + 1/2\, M\, R^2 = M\, R^2$ (o volante teria que ficar um pouco mais longo para manter a massa M). Dessa forma, concentrando a massa na periferia de raio R vamos obtendo volantes de mesmo raio (externo), mesma massa e momento de inércia cada vez maior.

Q9.12 A mesma figura mostrada na questão anterior já responde essa pergunta. O eixo de rotação em consideração aqui é o mesmo que está definido na figura, um eixo coaxial que passa pelo CM do cilindro.

O máximo que podemos fazer é transformar esse corpo cilíndrico em uma casca cilíndrica fina de massa M e raio R, cujo momento de inércia é $I = M\, R^2$. Qualquer outra distribuição de massa, que aproxime as massas do eixo de rotação, vai levar a um momento de inércia menor.

Q9.18

Seja I_{POL} o momento de inércia dessa polia esquisita. Esse momento de inércia é a composição dos momentos de inércia de suas partes:

$$I_{POL} = \sum_{POLIA} m_i r_i^2 = I_{TAMBOR} + 4\, I_{HASTE} + 4\, I_{BOLA}$$

sendo I_{TAMBOR} o momento de inércia do tambor, I_{HASTE} o momento de inércia de uma haste (os raios) que gira em torno de um eixo que passa por uma extremidade e I_{BOLA} o momento de inércia de uma pequena bola (uma partícula) fixada na extremidade de uma haste. Se o tambor é um cilindro maciço de massa M_1 e raio R, uma haste (raio) possui massa M_h e comprimento r e uma bola possui massa M_b, segue que (da tabela 9.2):

$$I_{POL} = \frac{1}{2} M_1 R^2 + 4 \frac{1}{3}\, M_h\, r^2 + 4\, M_b\, r^2$$

Note que se aproximamos as bolas do eixo de rotação, diminuímos o valor de r em I_{BOLA} e diminuímos o momento de inércia I_{POL} da polia.

Para determinar a velocidade V da caixa após ela cair uma altura d podemos usar o teorema do trabalho energia para o sistema caixa+polia. Na posição inicial A do sistema: $K_{caixa} = 0$, $K_{polia} = 0$ e $U_g = m\, g\, d$, sendo m a massa da caixa. Na posição final B do sistema, em que a caixa já está com velocidade V e a polia gira com velocidade angular ω: $K_{caixa} = m\, V^2/2$, $K_{polia} = 1/2\, I_{POL}\omega^2$ e $U_g = 0$. Da conservação da energia (ausência de atritos):

$$E(A) = E(B) \Rightarrow 0 + 0 + mgd = m\, V^2/2 + 1/2\, I_{POL}\omega^2 + 0$$

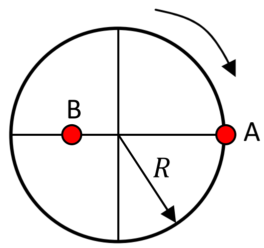
Para determinar V falta ainda impor o vínculo entre o movimento de translação da caixa e o movimento de rotação da polia. Vemos que a corda leve impõe o vínculo de que se a caixa cai uma altura d, a periferia do tambor (de raio R) deve girar um arco de mesmo comprimento d. Portanto, a velocidade linear periférica do tambor, $\omega\, R$, deve ser igual a V. Concluindo:

$$mgd = m\frac{V^2}{2} + \frac{1}{2}I_{POL}\omega^2 \Rightarrow mgd = m\frac{V^2}{2} + \frac{1}{2}I_{POL}\left(\frac{V}{R}\right)^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2\,m\,g\,d}{m + I_{POL}/R^2}}$$

Portanto, se as bolas se aproximam do eixo da polia, I_{POL} diminui e V aumenta. A ideia básica é que a energia potencial gravitacional inicial da caixa é convertida em energia cinética da caixa e da polia. Se a polia possui momento de inércia menor, ela terá menos energia cinética e sobrará mais energia cinética para a caixa.

Q9.21

A Figura ao lado ilustra essa roda que gira em torno de um eixo ortogonal ao plano da página que passa pelo seu centro com velocidade angular $\omega(t)$ que cresce no tempo com uma taxa constante, ou seja, a roda possui uma aceleração angular α constante.



a) Qualquer ponto dessa roda (fora do eixo de rotação) descreve uma trajetória circular com um raio de giração (distância ao eixo de rotação) $0 < r \le R$. Para o ponto A vale $r = R$ e para o ponto B vale $r = R/2$. A velocidade de rotação ω (velocidade angular) é a mesma para todos os pontos da roda (todos os pontos dão a mesma quantidade de voltas no mesmo tempo): $\omega_A = \omega_B = \omega_{RODA}$.

b) A velocidade linear (tangencial, com que ele percorre o arco de círculo) de um ponto em movimento circular de raio r é $v = \omega\, r$. Como a velocidade de rotação ω é a mesma para todos os pontos da roda (item a), segue que $v_A = \omega\, R > v_B = \omega\, R/2$. O ponto A percorre um círculo maior no mesmo tempo e deve ter, portanto, velocidade linear maior.

c) Como a velocidade de rotação ω é a mesma para todos os pontos da roda, segue que $\alpha = d\omega/dt$ também é: $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_{RODA}$.

d) A aceleração tangencial (ao longo do arco de círculo) de um ponto em movimento circular de raio r é $a_{tg} = dv/dt$. Como $v_A = \omega\, R \Rightarrow a_{tgA} = dv_A/dt = \alpha\, R$ e $v_B = \omega\, R/2 \Rightarrow a_{tgB} = dv_B/dt = \alpha\, R/2$. Portanto: $a_{tgA} > a_{tgB}$. Se a rotação da roda acelera, o ponto A deve acelerar mais ao longo do círculo, pois ele percorre um círculo maior.

e) A aceleração radial (centrípeta) de um ponto em movimento circular de raio r é $a_{cen} = \omega^2 r$. Como a velocidade de rotação ω é a mesma para todos os pontos da roda e para o ponto A vale $r = R$ e para o ponto B vale $r = R/2$, segue que $a_{cenA} = \omega^2 R > a_{cenB} = \omega^2 R/2$.