

E/P21.1: Uma esfera metálica (de chumbo) de massa $M = 8 \text{ g}$ recebe um excesso de carga elétrica negativa $Q = -3,2 \times 10^{-9} \text{ C}$, através da deposição de elétrons nela. Queremos saber: a) quantos elétrons em excesso há nessa esfera. b) quantos elétrons em excesso há por átomo de chumbo na esfera.

a) A carga elétrica da esfera é $Q = -3,2 \times 10^{-9} \text{ C}$. A carga é negativa porque a esfera possui um excesso de elétrons: mais elétrons do que prótons. A carga elétrica é quantizada, ou seja, ela é sempre um múltiplo inteiro do quantum q , que é a carga elétrica do próton: $q \cong 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. A carga elétrica do elétron é exatamente $-q$. Portanto, para calcular o número N de elétrons em excesso basta fazer:

$$Q = N(-q) \Rightarrow N = \frac{Q}{-q} \cong \frac{-3,2 \times 10^{-9}}{-1,6 \times 10^{-19}} = 2 \times 10^{10}$$

b) Para calcular o número n de elétrons em excesso por átomo de chumbo devemos fazer:

$$n = \frac{N}{N_{CH}}$$

sendo N_{CH} o número de átomos de chumbo nessa esfera. A massa da esfera é $M = 8 \text{ g}$ e a massa atômica do chumbo é $m_{ACH} = 207 \text{ g/mol}$, ou seja, 207 gramas de chumbo tem $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ átomos de chumbo, sendo N_A o número de Avogadro (o número de Avogadro é o número de coisas que tem em um mol dessa coisa). Portanto, o número de átomos de chumbo na esfera é:

$$N_{CH} = \frac{M}{m_{ACH}} N_A \cong 2,3 \times 10^{22}$$

Vemos então que, sendo $Z=82$ o número atômico do chumbo, essa esfera possui $Z N_{CH} \cong 1,89 \times 10^{24}$ prótons localizados nos núcleos dos átomos de chumbo e esse mesmo número de elétrons nas nuvens eletrônicas que circundam esses núcleos. Esse monte de cargas elétricas produz ao final uma esfera eletricamente neutra. Mas, por hipótese, há um número N de elétrons em excesso depositados nessa esfera, por algum processo de eletrização. Dessa forma, a esfera possui $Z N_{CH}$ prótons e $Z N_{CH} + N$ elétrons. Esses elétrons em excesso vagueiam pelo volume da esfera, por entre os átomos, buscando uma posição de equilíbrio. Esse equilíbrio ocorre quando esses elétrons em excesso (que se repelem mutuamente) se localizam todos na superfície da esfera (é o que mostra a lei de Gauss). O número de elétrons em excesso por átomo é:

$$n = \frac{N}{N_{CH}} \cong 8,6 \times 10^{-13}$$

Concluindo, há muitos elétrons em excesso na esfera, mas há muito mais átomos ($\cong 10^{12}$ vezes mais).

E/P21.2: Um raio transfere cargas elétricas entre as nuvens e a Terra. Consideremos que um raio transfere basicamente elétrons das nuvens para a Terra e vice-versa. Dada a taxa de transferência (corrente elétrica) constante igual a:

$$\frac{dQ}{dt} = 20.000 \text{ C/s}$$

e o tempo de duração do raio: $\Delta t = 100 \text{ } \mu\text{s}$ ($\mu = \text{micro} = 10^{-6} \text{ s}$), queremos saber: a) a carga elétrica total que flui em um raio. b) a quantidade de elétrons que flui em um raio.

a) A carga elétrica total transferida em um raio é:

$$Q = \int \frac{dQ}{dt} dt = \frac{dQ}{dt} \int dt = \frac{dQ}{dt} \Delta t = 20.000 \times 100 \times 10^{-6} = 2 \text{ C}$$

b) A quantidade de elétrons que fluiu entre a terra e a nuvem é (q é a carga elétrica de um próton):

$$N = \frac{Q}{q} \cong \frac{2}{1,6 \times 10^{-19}} \cong 1,25 \times 10^{19}$$

Nos cálculos acima não nos preocupamos muito com os sinais das cargas, mas é verdade que se $N \cong 1,25 \times 10^{19}$ elétrons fluírem da A para B, a carga total que fluirá de A para B será $N(-q) \cong -2 \text{ C}$, porque a carga do elétron é negativa. Analogamente: $N = -Q/(-q)$, o que dá no mesmo.

E/P21.5: Uma pessoa “média” possui peso de módulo P . Se duas pessoas “médias” possuem, cada uma, um excesso de carga elétrica Q , qual a distância entre elas para que a força elétrica mútua tenha módulo P .

Basta usar a lei de Coulomb, na aproximação em que as duas pessoas estão bem distantes uma da outra e que podem ser tratadas como duas partículas interagindo entre si.

É bom enfatizar que a lei de Coulomb só vale para duas partículas e o que estamos fazendo aqui é assumir que, sendo a distância entre as duas pessoas grande (depois vamos conferir isso), cada uma vê a outra como um corpo pequeno, que pode ser aproximado como sendo uma partícula.

Então:

$$F^{(elet.)} = k \frac{Q^2}{r^2} = P \Rightarrow \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = P \Rightarrow r = \frac{Q}{\sqrt{4 \pi \epsilon_0 P}}$$

Para $P = m g = 650 \text{ N}$ (massa $\cong 65 \text{ kg}$) e $Q = 1 \text{ C}$, obtemos: $r \cong 3,7 \text{ km}$. Essa distância é razoavelmente grande e a aproximação de duas pessoas = duas partículas separadas por r parece aceitável (tudo depende do grau de precisão almejado).

E/P21.7: Duas esferas possuem cargas positivas (q_1 e q_2) e estão separadas por uma distância d . Se a força de repulsão elétrica entre elas tem módulo $F^{(elet.)}$, quais os valores de q_1 e q_2 ? É bom enfatizar que a lei de Coulomb só vale para duas partículas, mas, nesse caso, podemos apelar para o teorema das cascas: vista de fora, uma esfera (maciça ou casca) com densidade de carga simétrica se comporta como uma partícula concentrando toda a carga em seu centro.

Da lei de Coulomb:

$$F^{(elet.)} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

Portanto, conseguimos determinar o valor do produto: $q_1 q_2 = 4 \pi \epsilon_0 d^2 F^{(elet.)}$.

Para determinar os valores de q_1 e q_2 precisamos de mais uma equação que relaciona essas duas cargas. Por exemplo, suponha que saibamos que $q_1 = \alpha q_2$ sendo $\alpha > 0$ uma constante. Então, as cargas são:

$$q_1 = \sqrt{\alpha 4 \pi \epsilon_0 d^2 F^{(elet.)}} \qquad q_2 = \sqrt{\frac{4 \pi \epsilon_0 d^2 F^{(elet.)}}{\alpha}}$$

Por exemplo, se as cargas são iguais ($\alpha = 1$), segue que:

$$q_1 = q_2 = \sqrt{4 \pi \epsilon_0 d^2 F^{(elet.)}} \cong 7,4 \times 10^{-7} \text{ C}$$

Se $q_1 = 4 q_2$ ($\alpha = 4$) segue que:

$$q_1 = 2 \sqrt{4 \pi \epsilon_0 d^2 F^{(elet.)}} \cong 1,5 \times 10^{-6} \text{ C} \qquad q_2 = \frac{1}{2} \sqrt{4 \pi \epsilon_0 d^2 F^{(elet.)}} \cong 3,7 \times 10^{-7} \text{ C}$$

E/P21.11: Um experimento é feito no vácuo, em que dois prótons se repelem mutuamente e um deles está livre para se afastar do outro, que está fixo. Queremos saber: a) a aceleração inicial do próton. b) esboços de gráficos da aceleração e da velocidade do próton em função do tempo.

a) Os dois prótons se repelem mutuamente com uma força de magnitude (lei de Coulomb):

$$F(r) = k \frac{q^2}{r^2}$$

sendo r a distância entre eles. Portanto, o próton que está livre vai sofrer essa força e adquirir uma aceleração dada por (2ª lei de Newton, desprezando a ação de outras forças):

$$a(r) = \frac{F(r)}{M} = \frac{k q^2}{M r^2}$$

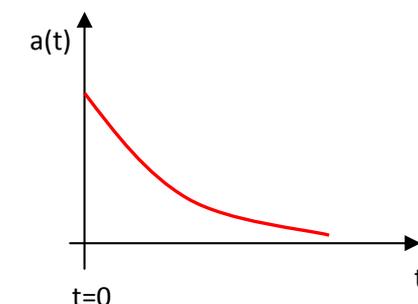
sendo M a massa do próton. O próton que está fixo também sofre uma força elétrica de mesma magnitude, mas não acelera devido à ação de outras forças. Note que a aceleração é função da distância r , quanto maior a distância menor a aceleração. Para $r = 2,5$ mm obtemos a aceleração inicial:

$$a(r = 2,5) = \frac{F(r = 2,5)}{M} = \frac{k}{M} \frac{q^2}{(2,5 \times 10^{-3})^2} \cong 2,2 \times 10^4 \text{ m/s}^2$$

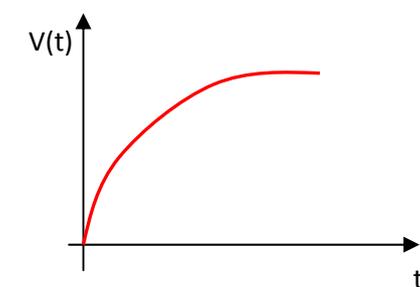
b) Note que à medida que o próton livre se afasta do próton fixo a aceleração vai caindo com $1/r^2$. Esperamos então que a aceleração decaia com o tempo, algo como esboçado no gráfico abaixo. Note que não se trata de um gráfico de $1/t^2$, mas sim de $1/r(t)^2$, com $r(t)$ uma função crescente de t (uma função que não precisamos conhecer para apenas esboçar o gráfico de $a(t)$).

A aceleração é a taxa de variação da velocidade e por isso esperamos que o próton livre inicie seu movimento ganhando velocidade rapidamente, mas que, como o passar do tempo, sua velocidade vá se estabilizando pois $a \rightarrow 0$. Esperamos que a velocidade $V(t)$ varie como esboçado ao lado.

Note que a curva no gráfico de $a(t) \times t$ é a derivada da curva no gráfico de $V(t) \times t$. Note também que a curva de $V(t)$ parte da origem porque o próton foi solto do repouso.



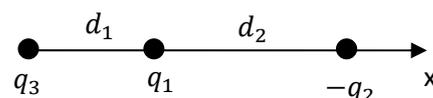
($r_0=2,5$ mm)



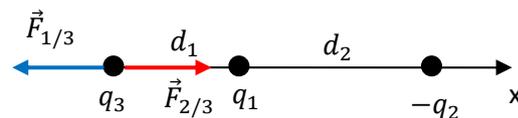
($r_0=2,5$ mm)

E/P21.13:

Três cargas pontuais estão dispostas como na Figura ao lado. Estamos supondo, para deixar os sinais das cargas mais explícitos, $q_3 > 0$ e $-q_2 < 0$ (portanto, $q_2 > 0$). Vamos determinar $q_1 > 0$ na hipótese de que a força elétrica resultante em q_3 é nula.



Note que a carga $-q_2$ atrai a carga q_3 (força $\vec{F}_{2/3}$, seta vermelha) e que, portanto, a carga q_1 terá que repelir q_3 (força $\vec{F}_{1/3}$, seta azul) para que haja a possibilidade de valer $\vec{F}_3 = \vec{0}$.



Portanto, q_1 deve ser positiva. Da lei de Coulomb, obtemos:

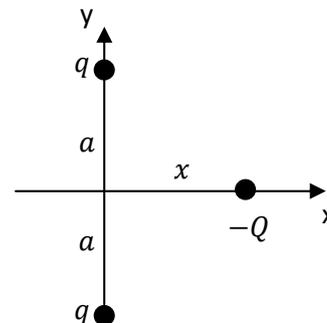
$$\vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{d_1^2} (-\hat{x}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{(d_1 + d_2)^2} (\hat{x}) = \vec{0}$$

Portanto:

$$-\frac{q_1 q_3}{d_1^2} + \frac{q_2 q_3}{(d_1 + d_2)^2} = 0 \Rightarrow q_1 = \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)^2 q_2 \cong 0,8 nC$$

Note que a carga q_1 terá que ser menor que o módulo de $-q_2$ ($3 nC$), pois q_1 está mais próxima de q_3 .

E/P21.22: Três cargas pontuais estão dispostas como na Figura ao lado. Estamos supondo $q > 0$ e $-Q < 0$. A posição x de $-Q$ é uma posição qualquer. Note que há um erro no enunciado: não há carga $-q$.



As cargas q atraem a carga $-Q$, conforme a Figura abaixo.

As forças são tais que:

$$\vec{F}_1 = -F_1 \cos(\theta) \hat{x} + F_1 \sin(\theta) \hat{y}$$

$$\vec{F}_2 = -F_2 \cos(\theta) \hat{x} + F_2 \sin(\theta) \hat{y}$$

Os módulos dessas forças são iguais e, de acordo com a lei de Coulomb:

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q Q}{a^2 + x^2}$$

Podemos ver claramente que as componentes y dessas duas forças sempre se cancelam e que, portanto (notando que $\cos(\theta) = x/\sqrt{a^2 + x^2}$):

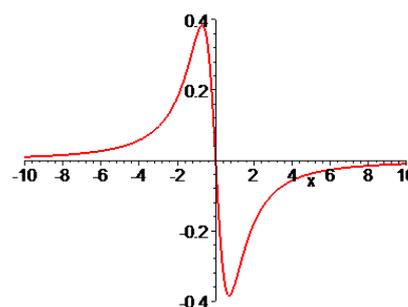
$$\vec{F}_Q = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -2 F_1 \cos(\theta) \hat{x} = -\frac{2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q Q}{a^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \hat{x} = -\frac{q Q}{2 \pi \epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x}$$

O gráfico ao lado (para $a = 1$) mostra o comportamento da magnitude de \vec{F}_Q ($F_Q(x)$), a função que está na frente do \hat{x} em função da posição x ao longo do eixo x da carga $-Q$. Por simetria, a força se anula quando a partícula de carga $-Q$ está na origem. De fato:

$$F_Q(x = 0) = -\frac{q Q}{2 \pi \epsilon_0} \frac{0}{(a^2 + 0^2)^{3/2}} = 0$$

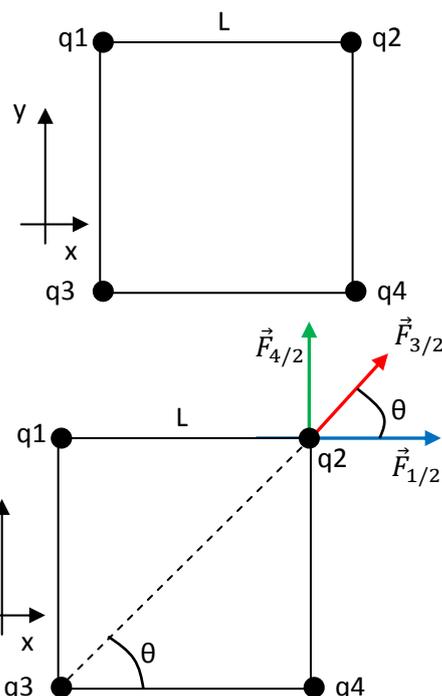
Para $x > 0$ a força é negativa, ou seja, aponta para o sentido de $-x$ e para $x < 0$ a força é positiva, aponta para o sentido de $+x$. Note que antes de se anular a força passa por um máximo em seu módulo. As posições x_M desses máximos podem ser determinadas de:

$$\frac{dF_Q(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow x_M = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$



E/P21.23:

Quatro cargas elétricas estão fixadas nos vértices de um quadrado de lado L . Todas as cargas valem Q e se repelem mutuamente. Se as cargas não estiverem fixadas nesses vértices, através de uma cola, por exemplo, elas irão se afastar mutuamente, como uma espécie de explosão. Note que posicionamos o quadrado no plano xy .



a) Na Figura ao lado mostramos as setas das forças de repulsão que atuam na carga q_2 , de acordo com a lei de Coulomb (forças radiais).

$\vec{F}_{A/B}$ é a força que A faz em B.

b) Usando o referencial xy definido na Figura ao lado, usando a lei de Coulomb e sabendo que $\theta=45^\circ$ obtemos:

$$\vec{F}_{1/2} = k \frac{q_1 q_2}{L^2} \hat{x} = k \frac{Q^2}{L^2} \hat{x}$$

$$\vec{F}_{4/2} = k \frac{q_4 q_2}{L^2} \hat{y} = k \frac{Q^2}{L^2} \hat{y}$$

$$\vec{F}_{3/2} = k \frac{q_3 q_2}{L^2} \cos(\theta) \hat{x} + k \frac{q_3 q_2}{L^2} \sin(\theta) \hat{y} = k \frac{Q^2}{(\sqrt{2}L)^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} + k \frac{Q^2}{(\sqrt{2}L)^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} = k \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Q^2}{L^2} (\hat{x} + \hat{y})$$

A força resultante em q_2 é:

$$\vec{R}_2 = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{3/2} + \vec{F}_{4/2} = \left(k \frac{Q^2}{L^2} + k \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Q^2}{L^2} \right) \hat{x} + \left(k \frac{Q^2}{L^2} + k \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Q^2}{L^2} \right) \hat{y} = k \frac{Q^2}{L^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) (\hat{x} + \hat{y})$$

Note que, como as componentes x e y de \vec{R}_2 são iguais, essa força faz 45° com o eixo x (por simetria). Se a carga q_2 for libertada a partir do repouso, ela vai se afastar das outras cargas seguindo um caminho ao longo da diagonal do quadrado (linha tracejada na Figura).

E/P21.25: Um próton de carga $q_p > 0$ e massa M_p está em uma região do espaço em que existe um campo elétrico uniforme \vec{E} (campo produzido por outras cargas nessa vizinhança).

Um campo elétrico uniforme é um campo que é constante no espaço, ou seja, que não depende de nenhuma coordenada espacial. Por exemplo, um campo $\vec{E} = E_0 \hat{x}$ tem sempre a mesma magnitude E_0 , está sempre na direção que estamos chamando de x e tem sempre o sentido de $+x$ se $E_0 > 0$ ou $-x$ se $E_0 < 0$. Vamos supor que este próton esteja neste campo, com $E_0 > 0$. a) A força elétrica no próton é $\vec{F} = q_p \vec{E} =$

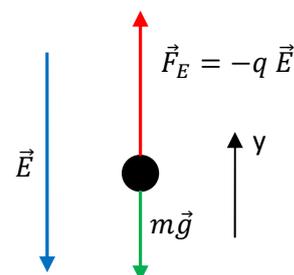
$q_p E_0 \hat{x}$. O próton é empurrado paralelamente ao campo \vec{E} . O módulo dessa força é $q_p E_0$. b) Estando submetido somente a essa força, a aceleração do próton será, da segunda lei de Newton, $\vec{a} = \vec{F}/M_p = q_p \vec{E}/M_p = q_p/M_p E_0 \hat{x}$. c) O próton ficará submetido a uma força constante (posto que o campo é uniforme) e vai descrever um movimento com aceleração constante (MRUV). Da cinemática, obtemos as equações horárias da velocidade e da posição do próton ao longo do eixo x, supondo que ele parta do repouso:

$$v(t) = v_0 + a t \Rightarrow v(t) = \frac{q_p}{M_p} E_0 t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{1}{2} \frac{q_p}{M_p} E_0 t^2$$

E/P21.28:

Um elétron é solto na presença de um campo elétrico uniforme vertical. O elétron está subindo na vertical sob ação do campo elétrico, que deve ser orientado para baixo, porque a carga elétrica do elétron é negativa (vamos chamá-la de $-q$, com $q > 0$):



Da 2ª lei de Newton:

$$-q \vec{E} + m \vec{g} = m \vec{a}$$

Ao longo da vertical (y) obtemos:

$$q E - m g = m a$$

Portanto:

$$a = \frac{q E}{m} - g$$

Note que é uma aceleração constante. Se o elétron parte do repouso e percorre uma distância $\Delta y > 0$ em um tempo T , então vale (da cinemática):

$$y = y_0 + V_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \Delta y = y - y_0 = \frac{1}{2} a T^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{q E}{m} - g \right) T^2$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico nessa região é:

$$E = \frac{m}{q} \left(\frac{2 \Delta y}{T^2} + g \right)$$

Note que os dados numéricos do problema levam a:

$$\frac{2 \Delta y}{T^2} = 10^{12} \text{ m/s}^2$$

Como $g \cong 9,8 \text{ m/s}^2$, fica plenamente justificado desprezarmos a gravidade nesse contexto, pois:

$$\frac{2 \Delta y}{T^2} + g = 10^{12} + 9,8 = 10^{12}$$

Portanto:

$$E = \frac{m}{q} \left(\frac{2 \Delta y}{T^2} \right) \cong 5,7 \text{ N/C}$$

E/P21.33:

Um elétron (de carga $-q$, com $q > 0$) atravessa uma região com campo elétrico vertical uniforme (como no exercício anterior). Ele entra nessa região com a velocidade horizontal \vec{V}_0 (seta verde) na altura $H/2$.

A aceleração vertical (y) do elétron é:

$$a = \frac{q E}{m} - g$$

As equações horárias para as coordenadas do elétron são (note que nas equações abaixo $q > 0$ é o módulo da carga do elétron e que a força elétrica no elétron está para cima e tem módulo $q E$):

$$x(t) = x_0 + V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = V_0 t$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{H}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{q E}{m} - g \right) t^2$$

A trajetória do elétron é então:

$$t = \frac{x}{V_0} \Rightarrow y(x) = \frac{H}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{q E}{m} - g \right) \left(\frac{x}{V_0} \right)^2$$

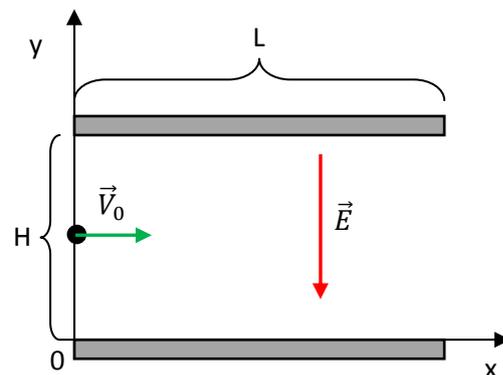
que é uma trajetória parabólica com a boca para cima.

O enunciado diz que o elétron atinge a quina superior do aparelho, ou seja, quando $x = L$, vale $y = H$. Portanto, forçando a trajetória a passar por esse ponto obtemos:

$$y(x = L) = \frac{H}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{q E}{m} - g \right) \left(\frac{L}{V_0} \right)^2 = H \Rightarrow \left(\frac{q E}{m} - g \right) \left(\frac{L}{V_0} \right)^2 = H \Rightarrow E = \left(\frac{m}{q} \right) \left[\left(\frac{V_0}{L} \right)^2 H + g \right]$$

Note que com os dados do problema obtemos $\left(\frac{V_0}{L} \right)^2 H \cong 10^{14}$ o que justifica desprezarmos a gravidade g , como fizemos no exercício 21.28.

Dos dados do problema obtemos: $E \cong 364 \text{ N/C}$.



b) Trocando o elétron por um próton, basta trocar m por M ($M \cong 2.000 m$) e inverter o sentido da força elétrica, ou seja, trocar $q E$ por $-q E$. A trajetória do próton fica (já desprezando g):

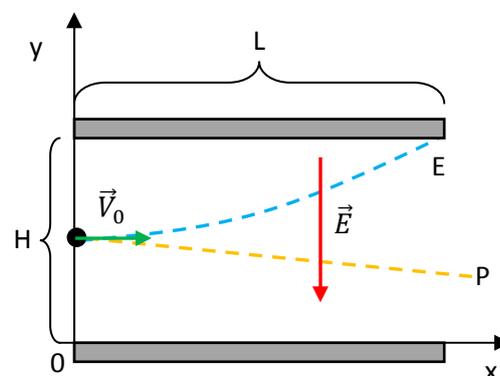
$$y(x) = \frac{H}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{q E}{M} \right) \left(\frac{x}{V_0} \right)^2$$

que é uma trajetória parabólica com a boca para baixo. Note que o próton é mais “pesado” que o elétron e por isso vai sofrer menor aceleração (porque a força elétrica é a mesma, em módulo), o que vai fazer com que sua trajetória curve menos e, portanto, que ele não bata nas paredes do aparelho. Ele anda mais “reto” que o elétron. Quando o próton deixar o aparelho, $x = L$, ele terá percorrido na vertical:

$$y(x = L) = \frac{H}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{q E}{M} \right) \left(\frac{L}{V_0} \right)^2 \cong \frac{H}{2} - 2,7 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Note que $H/2 = 0,5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ e que o próton desceu apenas $2,7 \times 10^{-6} \text{ m}$. Ele passa longe da quina da placa inferior.

A Figura ao lado ilustra as trajetórias do elétron (E) e do próton (P). A trajetória do elétron (azul) é mais curva porque sua inércia é menor. Esse tipo de experimento, se realizado com feixes de partículas com cargas elétricas e massas desconhecidas, permite a determinação desses parâmetros, a partir de uma análise das trajetórias das partículas.



E/P21.39: Uma partícula de carga elétrica q está fixada na origem de um sistema xyz de coordenadas. O campo elétrico (radial) que essa partícula produz no espaço é dado por:

$$\vec{E}(x, y, z) = k \frac{q}{r^2} \hat{r} = k \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

Note que simplesmente trocamos o vetor unitário \hat{r} pelo próprio vetor posição $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ dividido pelo seu módulo r ($\hat{r} = \vec{r}/r$). Portanto:

$$\vec{E}(x, y, z) = k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z})$$

já que $r = |\vec{r}| = |x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

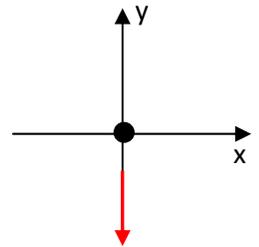
Escolha um ponto de coordenadas (x, y, z) qualquer que a expressão acima dará o campo elétrico nesse ponto. Note que a direção de \vec{E} é simplesmente a direção de $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ (o campo é radial). O exercício se refere apenas a pontos no plano xy e podemos simplificar nossa expressão fazendo logo $z=0$.

$$\vec{E}(x, y) = k \frac{q}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x \hat{x} + y \hat{y})$$

Por exemplo, no ponto $(x=0, y=-1,35 \text{ m})$ obtemos:

$$\vec{E}(x, y, z) = k \frac{q}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x \hat{x} + y \hat{y}) = k q \frac{(-1,35 \hat{y})}{((-1,35)^2)^{3/2}} = -k \frac{q}{(1,35)^2} \hat{y}$$

O campo elétrico nesse ponto está ao longo do eixo y , pois \vec{r} está ao longo de y . O campo elétrico aponta no sentido de $-\hat{y}$ se valer $q > 0$ (o campo aponta para fora da carga nesse caso). A distância desse ponto até a origem, onde está a carga pontual, é $d = |\vec{r}| = r = |y| = 1,35 \text{ m}$ e $\hat{r} = \vec{r}/r = -\hat{y}$. A Figura ao lado ilustra o campo \vec{E} nesse ponto (seta vermelha), supondo que $q > 0$.

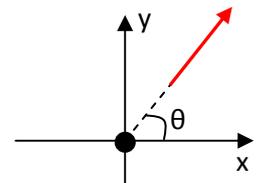


Para o ponto $(x=12 \text{ cm}, y=12 \text{ cm})$ obtemos:

$$\vec{E}(x, y) = k \frac{q}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x \hat{x} + y \hat{y}) = k q \frac{(12/100 \hat{x} + 12/100 \hat{y})}{((12/100)^2 + (12/100)^2)^{3/2}} = k q \left(\frac{100}{12}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{8}} (\hat{x} + \hat{y})$$

Na Figura ao lado ilustramos esse campo (se $q > 0$). O ângulo θ que \vec{E} faz com o eixo x é dado por:

$$\tan(\theta) = \frac{E_y}{E_x} = 1$$



Portanto, $\theta = 45^\circ$. Essa é a mesma direção do vetor posição \vec{r} para esse ponto.

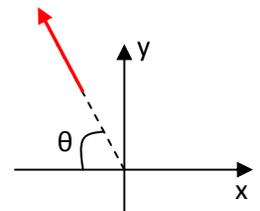
Note que esse ponto está a uma distância $d = |\vec{r}| = r = \sqrt{(12/100)^2 + (12/100)^2} = \sqrt{2}(12/100) \text{ m}$ da carga pontual e $\hat{r} = \vec{r}/r = (12/100 \hat{x} + 12/100 \hat{y})/\sqrt{2}(12/100) = (\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$.

Para o ponto $(x=-1,1 \text{ m}, y=2,6 \text{ m})$ obtemos:

$$\vec{E}(x, y) = k \frac{q}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x \hat{x} + y \hat{y}) = k q \frac{(-1,1 \hat{x} + 2,6 \hat{y})}{((-1,1)^2 + (2,6)^2)^{3/2}} \cong k \frac{q}{22,5} (-1,1 \hat{x} + 2,6 \hat{y})$$

O ângulo θ que esse campo faz com o eixo x , conforme a Figura ao lado ($q > 0$), é dado por:

$$\tan(\theta) = \frac{E_y}{|E_x|} = \frac{2,6}{1,1} \cong 2,36$$



Portanto, $\theta \cong 67^\circ$. Essa é a mesma direção do vetor posição \vec{r} para esse ponto.

Esse ponto está a uma distância de $d = |\vec{r}| = r = \sqrt{(-1,1)^2 + (2,6)^2} \cong 2,82 \text{ m}$ da carga pontual e $\hat{r} = \vec{r}/r \cong (-1,1 \hat{x} + 2,6 \hat{y})/2,82$.

Muitas vezes vemos estudantes errarem a simples avaliação do campo elétrico de uma carga pontual por não saberem calcular corretamente o vetor unitário \hat{r} . Fato é que na avaliação do valor do campo elétrico o cálculo de um vetor unitário \hat{r} é desnecessário e leva a uma perda de tempo. Por essa razão, muitas vezes escrevemos a expressão desse campo elétrico na forma padrão (que deixa mais explícito o decaimento com o quadrado da distância):

$$\vec{E}(x, y, z) = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Mas, quando vamos calcular valores para esse campo preferimos utilizar a forma equivalente:

$$\vec{E}(x, y, z) = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

Assim, nos livramos da necessidade de calcular \hat{r} e diminuimos nossa chance de erro.

E/P21.43: Este exercício é parecido com o 21.22 que já fizemos. Lá consideramos três cargas pontuais dispostas como na Figura ao lado. Fizemos $q > 0$ e $-Q < 0$. A posição x de $-Q$ é uma posição qualquer ao longo do eixo x .

Determinamos a força elétrica resultante na carga $-Q$, dada por:

$$\vec{F}_Q = -\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x}$$

Agora estamos interessados no campo elétrico que as duas carga q criam exatamente no ponto onde a carga $-Q$ está. Portanto, encarando a carga $-Q$ como uma carga de prova, obtemos o campo:

$$\vec{E}(x) = \frac{\vec{F}_Q}{-Q} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x}$$

De fato, podemos obter novamente esse resultado utilizando o princípio da superposição e o campo elétrico de uma carga pontual (que é consequência da lei de Coulomb):

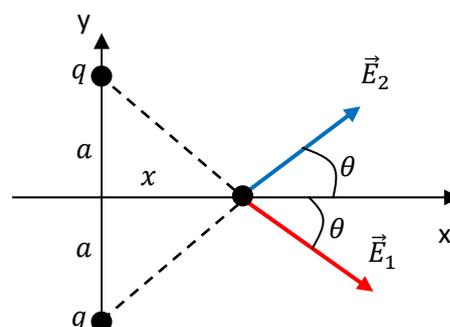
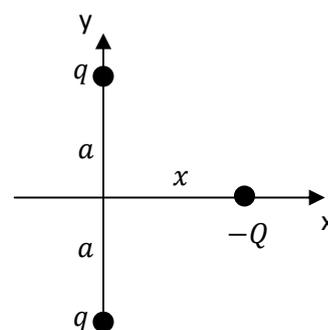
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

A Figura ao lado mostra as setas dos campos elétricos radiais criados pelas duas cargas $q > 0$ na posição de coordenada x sobre o eixo x .

Os campos são tais que:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cos(\theta) \hat{x} - E_1 \sin(\theta) \hat{y}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cos(\theta) \hat{x} + E_2 \sin(\theta) \hat{y}$$



Os módulos desses campos são iguais e, de acordo com a lei de Coulomb:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{a^2 + x^2}$$

Podemos ver claramente que as componentes y desses dois campos sempre se cancelam e que, portanto (notando que $\cos(\theta) = x/\sqrt{a^2 + x^2}$):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2 E_1 \cos(\theta) \hat{x} = \frac{2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{a^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \hat{x} = \frac{q}{2 \pi \epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x}$$

Esse resultado coincide com o anterior, em que aproveitamos o resultado do E/P21.22 e encaramos a carga $-Q$ como uma carga de prova. Agora estamos simplesmente ignorando essa ideia de força sobre uma carga de prova (não há nenhuma carga no ponto considerado) e estamos usando o campo elétrico da carga pontual e o princípio da superposição.

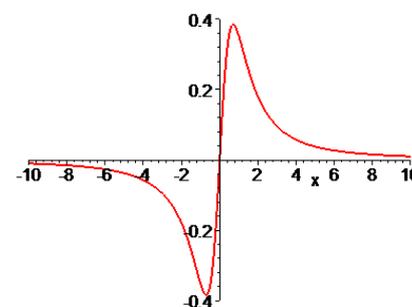
O gráfico ao lado (para $a = 1$) mostra o comportamento da magnitude de \vec{E} ($E(x)$), a função que está na frente do \hat{x} em função da posição x ao longo do eixo x . Por simetria, o campo se anula na origem.

De fato:

$$E(x = 0) = \frac{q}{2 \pi \epsilon_0} \frac{0}{(a^2 + 0^2)^{3/2}} = 0$$

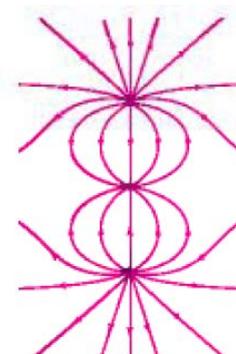
Para $x > 0$ o campo é positivo, ou seja, aponta para o sentido de $+x$ e para $x < 0$ o campo é negativo, aponta para o sentido de $-x$. Note que antes de se anular o campo passa por um máximo em seu módulo. As posições desses máximos podem ser determinadas de:

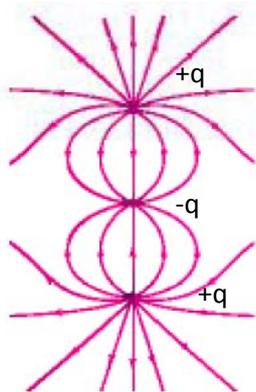
$$\frac{dE(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow x_M = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$



E/P21.62: Três partículas com cargas elétricas de mesma magnitude estão fixadas ao longo de uma linha comum. As linhas de força do campo elétrico resultante no espaço são dadas conforme a Figura ao lado.

As linhas de força emergem das cargas pontuais positivas e mergulham nas cargas pontuais negativas. Então (usando uma lente), concluímos que os sinais das cargas devem ser como mostrados na Figura abaixo:

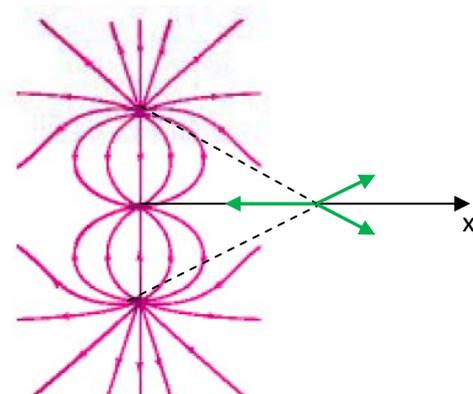
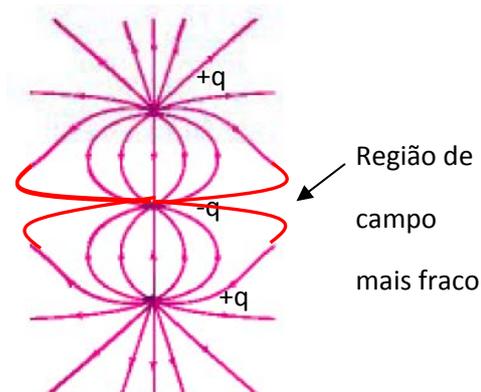




Note que os autores do livro cometem um erro crasso nessa Figura porque se as três cargas possuem a mesma magnitude deveriam “emitir” ou “receber” a mesma quantidade de linhas de força. No entanto, vemos que de cada uma das duas cargas positivas emanam 14 linhas de força enquanto que na carga negativa central mergulham apenas 10 linhas de força. Isso viola a ideia de que a magnitude do campo elétrico é proporcional à densidade de linhas de força por unidade de área (ortogonal). Faltou fechar as 4 linhas centrais, conforme a Figura que segue (meio mal feita).

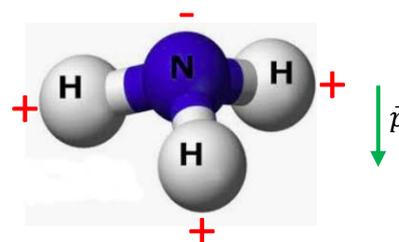
Essa é uma regra básica da representação de campos elétricos por linhas de força: se você desenhar N linhas de força entrando ou saindo de uma carga q , então você deve desenhar $2N$ linhas de força entrando ou saindo de uma carga $2q$ e assim por diante. Essa regra nos permite interpretar nessas representações a magnitude do campo elétrico em termos da densidade de linhas de força no espaço (linhas mais concentradas, maior E).

Com seu erro crasso, os autores do livro pretendem nos convencer mais facilmente que o eixo central (x), a uma certa distância de $-q$, é a região de campo mais fraco, porque nesse lugar as linhas de força estão mais afastadas entre si. Isso porque os três campos “mais ou menos” se cancelam nessa região (eles se cancelam de fato em apenas um ponto sobre o eixo $x > 0$, e simetricamente em um ponto em $x < 0$), conforme podemos ver na Figura ao lado.



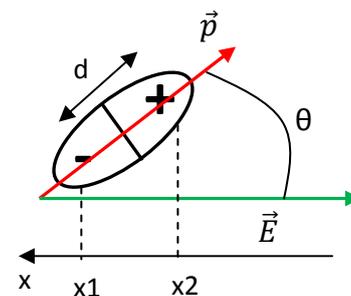
E/P21.64:

Moléculas de amônia (NH_3) possuem dipolaridade elétrica e sofrem, portanto, uma influência forte de campos elétricos externos. Essa dipolaridade ocorre por causa da forma assimétrica da molécula e do fato de que os elétrons compartilhados nas ligações covalentes NH passam mais tempo próximos do N do que dos Hs. Daí a região próxima do átomo N se torna negativa e as regiões próximas dos Hs se tornam positivas. Essa dipolaridade se resume na existência de um momento de dipolo elétrico \vec{p} (seta verde)



apontando do átomo N para a região central entre os três Hs (que é o centro de carga positiva da molécula, análogo ao centro de massa).

A Figura ao lado ilustra uma molécula dipolar imersa em um campo elétrico externo \vec{E} (seta verde). A energia potencial elétrica dessa molécula depende da orientação de seu momento de dipolo \vec{p} em relação ao campo externo. A energia é:



$$U_E(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p E \cos(\theta)$$

Entendemos que esse tópico seria melhor tratado no próximo capítulo, quando estudaremos o conceito de energia potencial elétrica de uma distribuição de cargas qualquer. Lá poderemos deduzir facilmente a expressão de $U_E(\theta)$ dada acima e entender melhor esse conceito de energia. Podemos fazer aqui uma analogia com a energia potencial gravitacional: o peso de (ou força gravitacional em) uma partícula de massa m em um campo gravitacional uniforme \vec{g} é $m\vec{g}$ e sua energia potencial gravitacional é $U_g = m g h$ sendo h a posição vertical (a altura) da partícula (note que a direção vertical é a direção de $-\vec{g}$). Analogamente, a força elétrica em uma partícula de carga elétrica q em um campo elétrico uniforme \vec{E} é $q\vec{E}$ e sua energia potencial elétrica é, portanto, $U_E = q E h$ sendo h a posição da partícula ao longo da direção de $-\vec{E}$ (eixo x na Figura). Portanto, para a molécula dipolar formada por cargas q localizada em x_2 e $-q$ localizada em x_1 , obtemos:

$$U_E = q E x_2 + (-q)E x_1 = -q E (x_1 - x_2) = -q E d \cos(\theta) = -p E \cos(\theta)$$

sendo d a distância entre q e $-q$ ao longo do eixo da molécula e $p = q d$ o módulo do momento de dipolo elétrico da molécula (que sempre aponta do pólo $-$ para o pólo $+$).

Vemos então que ao mudar da orientação paralela ($\theta=0$) para a orientação perpendicular ($\theta=90^\circ$) a mudança na energia potencial elétrica da molécula será:

$$\Delta U_E = U_E(90^\circ) - U_E(0^\circ) = -p E (\cos(90^\circ) - \cos(0^\circ)) = -p E (0 - 1) = p E$$

A energia potencial da molécula dipolar aumenta de $p E \cong 8 \times 10^{-24}$ J. Note que nesse giro a molécula foi tirada de sua posição de equilíbrio estável, em que o vetor \vec{p} era paralelo a \vec{E} , para uma posição de maior energia. Isso poderia ser feito, por exemplo, dando um peteleco na molécula, um peteleco que forneceria para a molécula a energia cinética inicial $p E$. Durante o giro, a molécula vai convertendo essa energia cinética em energia potencial elétrica. Da mesma forma, dando um peteleco vertical para cima em uma massa m que está no chão, podemos elevá-la para uma posição de altura h , desde que esse peteleco forneça uma energia cinética inicial igual a $m g h$ para a massa. Na subida essa energia cinética é convertida em energia potencial gravitacional.

A energia térmica (energia cinética de agitação) de uma molécula em um gás em equilíbrio em uma temperatura (absoluta) T é dada por:

$$U_T(T) = \frac{3}{2} k_B T$$

sendo $k_B \cong 1,38 \times 10^{-23}$ J/K a constante de Boltzmann.

Portanto, as moléculas desse gás estão submetidas a duas influências que competem entre si: a influência do campo elétrico externo que tenta orientar os momentos de dipolo elétrico das moléculas (paralelos a ele) e a influência mútua (basicamente colisões) medida pela energia térmica que tem como resultado o desordenamento aleatório dos dipolos elétricos. Quem vai vencer essa competição? Vai depender das energias que cada influência possui: energia de orientação ($U_E(\theta)$) e energia térmica ($U_T(T)$).

O campo elétrico vai vencer essa competição e conseguir orientar os dipolos se:

$$\Delta U_E \gg U_T(T)$$

Portanto, para que haja um efeito macroscópico de orientação dos dipolos elétricos das moléculas no gás, a temperatura do gás deve ser tal que:

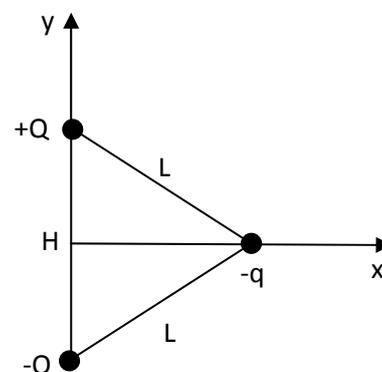
$$\frac{3}{2} k_B T \ll p E \Rightarrow T \ll \frac{2}{3} \frac{p E}{k_B} \cong 0,4 \text{ K}$$

Considerando que a temperatura ambiente (20°C) corresponde a aproximadamente 293 K ($\text{K} = ^\circ\text{C} + 273,15$), vemos que o efeito do campo elétrico sobre a orientação dos dipolos moleculares em um gás é bastante fraco em geral, porque a agitação térmica das moléculas suplanta qualquer tentativa do campo externo de orientar os dipolos. Para que o efeito de orientação seja importante, devemos aumentar bastante a magnitude do campo elétrico externo e/ou baixar bastante a temperatura do gás. No caso de sólidos e líquidos, as moléculas constituintes estão menos soltas/agitadas e o efeito de um campo elétrico externo sobre a orientação dos momentos de dipolo moleculares pode ser bem mais intenso, como acontece em um forno de microondas.

E/P21.71:

Três cargas fixadas nos vértices de um triângulo isósceles (de lados L , L e H), duas delas ($+Q$ e $-Q$) formando um dipolo elétrico.

a) A força elétrica resultante que a carga $-q$ faz no dipolo formado por $+Q$ e $-Q$ pode ser calculada usando como referência a Figura abaixo, usando a lei de Coulomb:



$$\vec{F}_{-/ +} = k \frac{Qq}{L^2} (\cos(\theta)\hat{x} - \sin(\theta)\hat{y}) = k \frac{Qq}{L^2} \left(\frac{\sqrt{L^2 - (H/2)^2}}{L} \hat{x} - \frac{H/2}{L} \hat{y} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{-/-} &= k \frac{Qq}{L^2} (-\cos(\theta)\hat{x} - \sin(\theta)\hat{y}) = \\ &= k \frac{Qq}{L^2} \left(-\frac{\sqrt{L^2 - (H/2)^2}}{L} \hat{x} - \frac{H/2}{L} \hat{y} \right) \end{aligned}$$

As duas forças são iguais em módulo, mas possuem componentes x de sinais opostos, que vão se cancelar.

Superpondo as duas forças obtemos (em newtons):

$$\vec{R} = \vec{F}_{-/ +} + \vec{F}_{-/-} = -k \frac{Qq}{L^2} \frac{H}{L} \hat{y} \cong 1.680(-\hat{y})$$

O dipolo é empurrado para baixo, na direção $-\hat{y}$ (note que você vai ver facilmente a carga $-q$ sendo empurrada para cima, $+\hat{y}$, se desenhar as forças atuando em $-q$, que são as reações às forças atuando em $+Q$ e $-Q$).

b) Considere um eixo z saindo ortogonalmente da página conforme a Figura ao lado:

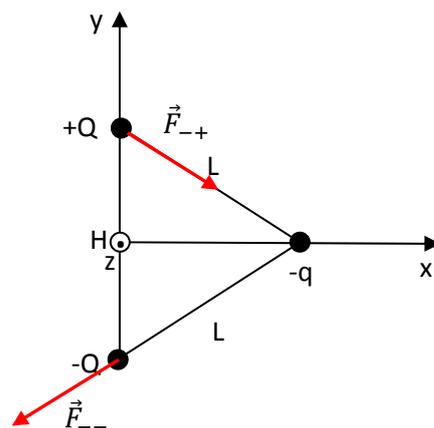
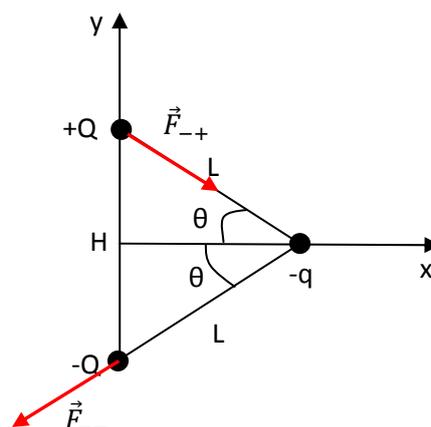
Da regra da mão direita vemos que as duas forças produzem torques para dentro da página ($-z$) e giram o dipolo no sentido horário. Sabemos que o torque de uma força é a soma dos torques das componentes dessa força. Portanto, o cálculo do torque fica facilitado se reconhecermos logo que somente as componentes x das forças produzem torque (ao longo de z), com braço de alavanca $H/2$.

Portanto, levando em conta que essas componentes possuem a mesma magnitude para as duas forças obtemos:

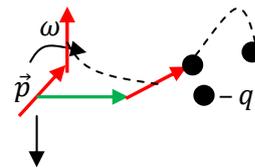
$$\vec{\tau}_{RES} = \vec{\tau}_{-+} + \vec{\tau}_{--} = 2k \frac{Qq}{L^2} \left(\frac{\sqrt{L^2 - (H/2)^2}}{L} \right) \frac{H}{2} (-\hat{z})$$

Numericamente obtemos (em Nm):

$$\vec{\tau}_{RES} \cong 22,3(-\hat{z})$$

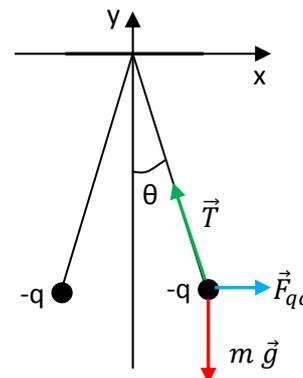


Concluindo: a interação entre esse dipolo elétrico (que poderia ser uma molécula de água) com essa partícula de carga elétrica $-q$ (que poderia ser um íon) vai fazer com que o dipolo seja empurrado para baixo ao mesmo tempo em que gira. A Figura ao lado ilustra essa ideia. Note que o campo elétrico de $-q$ (seta verde) na posição do dipolo \vec{p} aponta para a direita, e que o giro do dipolo vai fazer com que o momento de dipolo \vec{p} (seta vermelha) fique finalmente orientado paralelamente a esse campo elétrico, conforme nossa discussão no exercício 21.64. Lembre-se que o vetor \vec{p} aponta sempre de $-Q$ para Q . O dipolo gira e desce. Ao mesmo tempo a carga $-q$ sobe. Tudo indica que essa dança vai levar o dipolo a grudar seu polo positivo na carga $-q$. Esse é basicamente o mecanismo que leva às ditas “ligações químicas”. A Figura ao lado é apenas um “chute” para ilustrar essa dança porque à medida que esses objetos se movem as forças entre eles vão mudando e a previsão das trajetórias reais que essas partículas vão percorrer no espaço não é tarefa simples.



E/P21.75:

Duas partículas de cargas elétricas iguais (q) estão penduradas por fios leves e se repelindo mutuamente. A Figura ao lado mostra as forças que atuam em uma das cargas: tensão produzida pelo fio, peso e força de repulsão coulombiana. Na outra carga a situação é análoga.



O equilíbrio das forças requer que:

$$\text{Ao longo de } x: F_{q/q} - T \sin(\theta) = 0$$

$$\text{Ao longo de } y: T \cos(\theta) - m g = 0$$

Da lei de Coulomb:

$$F_{q/q} = k \frac{q^2}{(2 L \sin(\theta))^2}$$

sendo L o comprimento do fio e $2 L \sin(\theta)$ a distância entre as cargas, ao longo de x .

Se dividirmos uma equação pela outra eliminamos T , que é desconhecido:

$$\frac{T \sin(\theta)}{T \cos(\theta)} = \frac{F_{qq}}{m g} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{k}{m g} \frac{q^2}{(2 L \sin(\theta))^2}$$

Trata-se de uma equação bastante complicada (em θ), mas, se soubermos o valor de θ , podemos resolver facilmente para a carga q ($\cong 2,8 \times 10^{-6} \text{ C}$ se $\theta = 25^\circ$):

$$q = 2 L \sin(\theta) \sqrt{\frac{m g}{k} \tan(\theta)}$$

b) Para achar o valor da inclinação θ em função dos outros parâmetros devemos resolver a equação numericamente, já que não há solução analítica, ou seja, não há uma fórmula fechada para θ em função dos outros parâmetros k , q , L , m e g . Podemos estimar apenas que se θ for pequeno, a ponto de valer a aproximação $\text{sen}(\theta) = \tan(\theta) = \theta$ (para θ em radianos), obtemos:

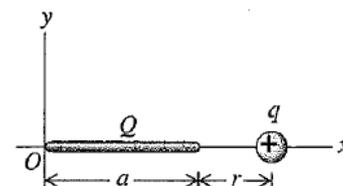
$$\tan(\theta) = \frac{k}{mg} \frac{q^2}{(2L \text{sen}(\theta))^2} \Rightarrow \theta \cong \frac{k}{mg} \frac{q^2}{(2L\theta)^2} \Rightarrow \theta \cong \sqrt[3]{\frac{kq^2}{4mgL^2}}$$

Nessa aproximação, a distância entre as partículas fica (usando $k = 1/4\pi\epsilon_0$):

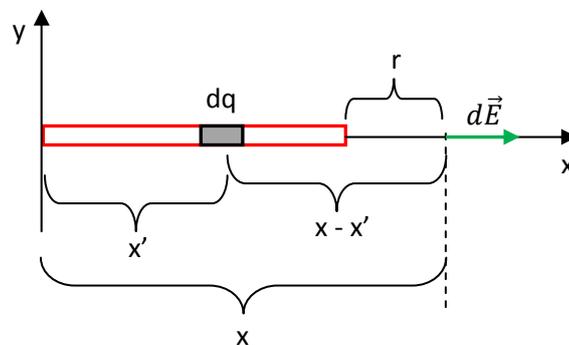
$$d = 2L \text{sen}(\theta) \cong 2L\theta = 2L \sqrt[3]{\frac{kq^2}{4mgL^2}} = \sqrt[3]{\frac{(2L)^3 kq^2}{4mgL^2}} = \sqrt[3]{\frac{2Lkq^2}{mg}} = \sqrt[3]{\frac{Lq^2}{2\pi\epsilon_0 mg}}$$

E/P21.89:

Uma haste de comprimento a com uma carga elétrica $Q > 0$ uniformemente distribuída. Essa haste vai gerar campo elétrico em todo o espaço ao seu redor. Vamos calcular esse campo em um ponto específico, ao longo do eixo x da haste.



a) Na Figura ao lado mostramos um ponto de coordenada x qualquer ($x > a$), um elemento infinitesimal de carga dq localizado em uma posição x' qualquer ($0 \leq x' \leq a$) e a contribuição infinitesimal $d\vec{E}$ que esse elemento de carga dá para o campo elétrico nesse ponto de coordenada x (seta verde).



Da lei de Coulomb, está claro que:

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{(x - x')^2} \hat{x}$$

Estando a carga elétrica Q uniformemente distribuída, segue que a carga infinitesimal dq no elemento infinitesimal de carga é ($\lambda = Q/a$ é a densidade de carga, por unidade de comprimento, na haste):

$$dq = \frac{Q}{a} dl = \frac{Q}{a} dx'$$

sendo dl o comprimento infinitesimal desse elemento de carga, ou seja, $dl = dx'$.

Portanto, do princípio da superposição, o campo elétrico resultante no ponto de coordenada x é:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_{x'=0}^{x'=a} k \frac{\hat{x} dq}{(x-x')^2} = \frac{kQ}{a} \hat{x} \int_{x'=0}^{x'=a} \frac{dx'}{(x-x')^2} = \frac{kQ}{a} \hat{x} \left. \frac{1}{x-x'} \right]_{x'=0}^{x'=a}$$

Finalmente:

$$\vec{E}(x) = \frac{kQ}{a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x} \right) \hat{x}$$

O enunciado pede para considerarmos a distância r da extremidade direita da haste, ou seja: $x = r + a$.

Portanto, em termos da coordenada r definida no enunciado:

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ}{a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+a} \right) \hat{x}$$

b) Se uma carga $q > 0$ for colocada nesse ponto, ela vai sofrer uma força de repulsão produzida pela haste dada por:

$$\vec{F} = q \vec{E}(r) = \frac{kQq}{a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+a} \right) \hat{x}$$

c) Considerando que $\varepsilon = a/r \cong 0$, ou seja, que a carga q está a uma distância r da haste muito maior que o comprimento a da haste, e usando a expansão binomial truncada ($(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$), segue que:

$$\vec{F} = \frac{kQq}{a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+a} \right) \hat{x} = \frac{kQq}{a} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{1+a/r} \right) \hat{x}$$

Portanto:

$$\vec{F} = \frac{kQq}{ar} \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon} \right) \hat{x} = \frac{kQq}{ar} (1 - (1+\varepsilon)^{-1}) \hat{x}$$

Fazendo $(1 + \varepsilon)^{-1} = 1 + (-1)\varepsilon = 1 - \varepsilon$ obtemos:

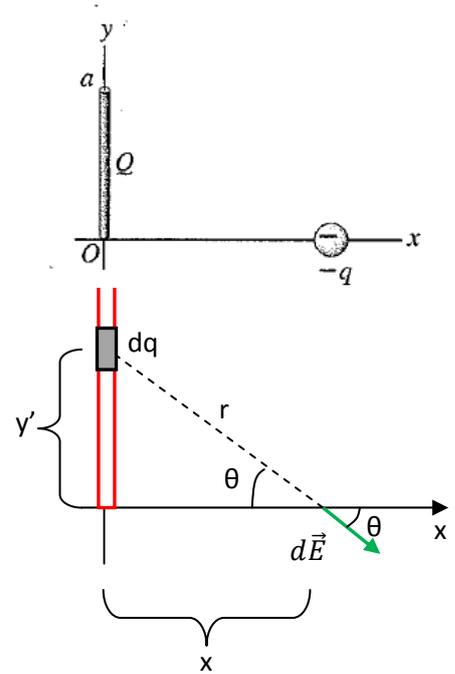
$$\vec{F} = \frac{kQq}{ar} (1 - (1 - \varepsilon)) \hat{x} = \frac{kQq}{ar} \varepsilon \hat{x} = \frac{kQq}{ar} \frac{a}{r} \hat{x} = \frac{kQq}{r^2} \hat{x}$$

Como não poderia deixar de ser, vista de longe ($r \gg a$), a carga q “enxerga” a haste como se ela fosse pontual e a haste se comporta, e faz força em q , como se ela fosse uma carga pontual Q na origem. Note que nesse limite $x = r + a = r$, ou seja, r é a distância de q até a origem, onde a carga q “enxerga” uma haste minúscula.

E/P21.90:

Uma haste de comprimento a com uma carga elétrica $Q > 0$ uniformemente distribuída. Mesma ideia do exercício anterior, mas um ponto diferente no espaço.

a) Na Figura ao lado mostramos um ponto de coordenada x qualquer, um elemento infinitesimal de carga dq localizado em uma posição y' qualquer ($0 \leq y' \leq a$) e a contribuição infinitesimal $d\vec{E}$ que esse elemento infinitesimal de carga dá para o campo elétrico nesse ponto de coordenada x (seta verde).



Da lei de Coulomb, está claro que: $dE = k \frac{dq}{r^2}$.

Estando a carga elétrica Q uniformemente distribuída, segue que a carga infinitesimal dq no elemento infinitesimal de carga é:

$$dq = \frac{Q}{a} dl = \frac{Q}{a} dy'$$

sendo dl o comprimento infinitesimal desse elemento de carga, ou seja, $dl = dy'$.

Sempre é mais fácil somar as componentes de um vetor. Decompondo o campo $d\vec{E}$ em componentes x e y obtemos (dE é o módulo de $d\vec{E}$, o tamanho da seta verde):

$$d\vec{E} = dE \cos(\theta)\hat{x} - dE \sin(\theta)\hat{y}$$

Note que: $\cos(\theta) = x/r$, $\sin(\theta) = y'/r$ e $r = \sqrt{x^2 + (y')^2}$. Então:

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \left[\frac{x}{r}\hat{x} - \frac{y'}{r}\hat{y} \right]$$

Portanto, do princípio da superposição, o campo elétrico resultante no ponto de coordenada x é:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{kQx}{a}\hat{x} \int_{y'=0}^{y'=a} \frac{dy'}{(x^2 + (y')^2)^{3/2}} - \frac{kQ}{a}\hat{y} \int_{y'=0}^{y'=a} \frac{y'dy'}{(x^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

Finalmente, realizando as integrais (consultando uma tabela ou usando o Maple):

$$\vec{E}(x) = \frac{kQ}{a} \left[\frac{a}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\hat{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)\hat{y} \right]$$

b) Se uma carga $q > 0$ for colocada nesse ponto, ela vai sofrer uma força de repulsão dada por $\vec{F} = q\vec{E}(x)$.

c) Considerando que $\varepsilon = a/x \cong 0$ e usando a expansão binomial truncada ($(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$), segue que:

$$\vec{F} = \frac{k Q q}{a} \left[\frac{a}{x^2 \sqrt{1 + (a/x)^2}} \hat{x} - \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a/x)^2}} \right) \hat{y} \right]$$

Introduzindo a variável $\varepsilon = a/x$, fica mais claro onde podemos usar a expansão binomial:

$$\vec{F} = \frac{k Q q}{a} \left[\frac{a}{x^2} (1 + \varepsilon^2)^{-1/2} \hat{x} - \frac{1}{x} (1 - (1 + \varepsilon^2)^{-1/2}) \hat{y} \right] = \frac{k Q q}{a} \left[\frac{a}{x^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \hat{x} - \frac{1}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \right) \hat{y} \right]$$

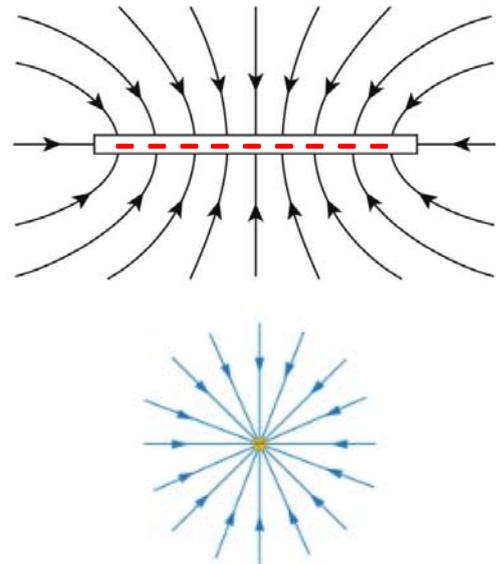
Portanto:

$$\vec{F} = \frac{k Q q}{a} \left[\frac{a}{x^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \hat{x} - \frac{\varepsilon^2}{2x} \hat{y} \right]$$

Note que o termo dominante nessa expressão (quando $\varepsilon \rightarrow 0$) é:

$$\vec{F} = \frac{k Q q}{a} \left[\frac{a}{x^2} (1 - 0) \hat{x} - 0 \hat{y} \right] = \frac{k Q q}{x^2} \hat{x}$$

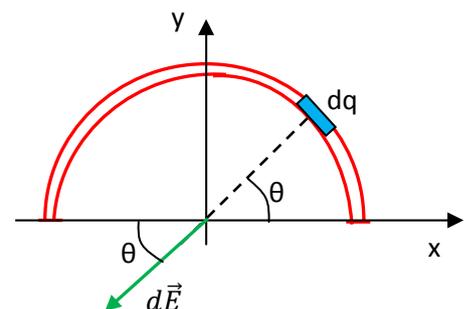
Como não poderia deixar de ser, vista de longe ($r \gg a$), a carga q “enxerga” a haste como se ela fosse pontual e a haste se comporta, e faz força em q , como se ela fosse uma carga pontual Q na origem. Nas Figuras abaixo (encontradas na internet) mostramos as linhas de força do campo elétrico de uma haste com carga elétrica negativa distribuída em sua extensão. Para uma haste de carga positiva basta inverter as orientações das linhas de força. Aqui (nos exercícios 21.89 e 21.90) calculamos o vetor \vec{E} em apenas dois pontos no espaço. Os campos que obtivemos são tangentes às linhas de força que passam por esses pontos. Os cálculos do campo para pontos distantes da haste nos mostram que, vista de longe, a haste é percebida como uma carga pontual, conforme sugerido na Figura ao lado.



E/P21.96: Uma carga elétrica $Q > 0$ está distribuída uniformemente em um arco de círculo de raio a .

Na Figura ao lado mostramos um elemento infinitesimal de carga dq localizado em uma posição arbitrária θ no arco ($0 \leq \theta \leq \pi$) e a contribuição infinitesimal $d\vec{E}$ que esse elemento de carga dá para o campo elétrico no centro do arco (seta verde).

Da lei de Coulomb, está claro que:



$$dE = k \frac{dq}{a^2}$$

Note que todos os elementos infinitesimais de carga contribuem com um campo elétrico de mesma magnitude, pois todos possuem a mesma carga elétrica e todos estão a uma mesma distância do centro do arco. Mas, cada um dos $d\vec{E}$ s tem uma direção diferente, formando um leque no centro do arco.

Estando a carga elétrica Q uniformemente distribuída, segue que a carga infinitesimal dq no elemento de carga (que é um pequeno arco de comprimento $dl = a d\theta$) é:

$$dq = \frac{Q}{\pi a} dl = \frac{Q}{\pi a} a d\theta = \frac{Q}{\pi} d\theta$$

Decompondo o campo $d\vec{E}$ em componentes x e y obtemos:

$$d\vec{E} = -dE \cos(\theta)\hat{x} - dE \sin(\theta)\hat{y}$$

Portanto, do princípio da superposição, o campo elétrico resultante no centro do arco é:

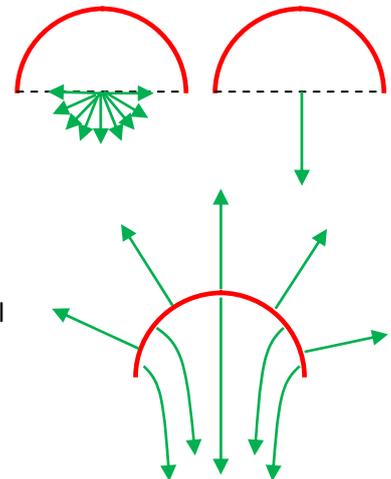
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{k Q}{\pi a^2} \left\{ -\hat{x} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos(\theta) d\theta - \hat{y} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin(\theta) d\theta \right\}$$

Finalmente, realizando as integrais:

$$\vec{E} = 2 \frac{k Q}{\pi a^2} (-\hat{y})$$

A simetria da distribuição de cargas é tal que o campo elétrico no centro do arco é vertical (y) para baixo. A Figura ao lado ilustra o leque de $d\vec{E}$ s no centro do arco e a resultante \vec{E} desse leque, vertical para baixo.

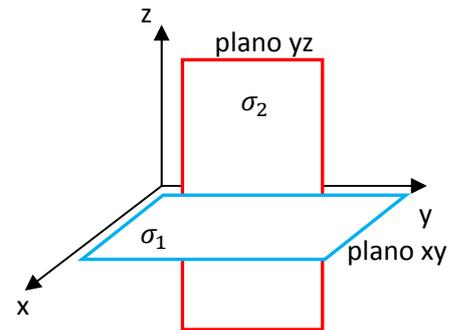
A Figura ao lado tenta ilustrar como seriam as linhas de força do campo elétrico desse arco no plano que contém o arco (o plano do papel). Calculamos o campo \vec{E} apenas no centro do arco, que é onde este é mais fácil de se calcular.



E/P21.103:

Duas superfícies planas infinitas com densidades de carga uniformes σ_1 e σ_2 estão dispostas como na Figura ao lado.

De acordo com o princípio da superposição, o campo elétrico no espaço será a soma dos campos elétricos produzidos por cada um dos dois planos infinitos.



Já vimos que uma superfície plana com densidade de carga uniforme σ gera em sua vizinhança um campo elétrico uniforme de magnitude:

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

O vetor campo elétrico aponta na direção ortogonal à superfície plana, com sentido para fora do plano, se $\sigma > 0$ ou para dentro do plano, se $\sigma < 0$.

Portanto, a superfície plana com σ_1 (que coincide com o plano xy) gera um campo elétrico dado por:

$$\vec{E}_1 = \pm \frac{\sigma_1}{2 \epsilon_0} \hat{z}$$

com o sinal + valendo se $z > 0$ e o sinal – valendo se $z < 0$ (isso vale para qualquer sinal de σ_1).

Analogamente, a superfície plana com σ_2 (que coincide com o plano yz) gera um campo elétrico dado por:

$$\vec{E}_2 = \pm \frac{\sigma_2}{2 \epsilon_0} \hat{x}$$

com o sinal + valendo se $x > 0$ e o sinal – valendo se $x < 0$ (isso vale para qualquer sinal de σ_2).

O campo elétrico no espaço na vizinhança desses dois planos é:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \pm \frac{\sigma_1}{2 \epsilon_0} \hat{z} \pm \frac{\sigma_2}{2 \epsilon_0} \hat{x}$$

A escolha dos sinais, se + ou -, vai depender da região (octante) em que queremos calcular \vec{E} .

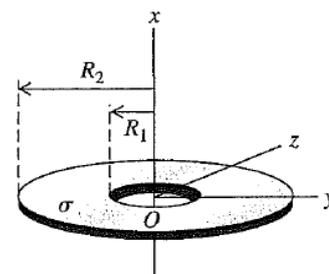
Por exemplo, na região $z > 0$ e $x > 0$ (1º e 4º octantes) o campo elétrico é:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2 \epsilon_0} \hat{z} + \frac{\sigma_2}{2 \epsilon_0} \hat{x} = \frac{1}{2 \epsilon_0} (\sigma_2 \hat{x} + \sigma_1 \hat{z})$$

Exatamente nos pontos localizados sobre os planos carregados o campo \vec{E} é descontínuo, sofrendo um salto quando vamos de um lado para o outro desses planos. O valor de \vec{E} não está definido exatamente sobre os planos carregados (esse é um artifício desses modelos de planos carregados infinitamente finos).

E/P21.104:

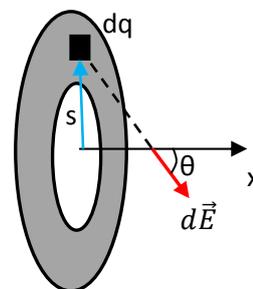
Um disco de raio R_2 tem um buraco central de raio R_1 . O disco furado tem densidade de carga superficial uniforme σ . A Figura ao lado ilustra a situação.



a) A carga elétrica total no disco furado é:

$$Q = \int_{\text{disco}} dq = \int_{\text{disco}} \sigma dA$$

sendo dA um elemento infinitesimal de área no disco furado. Se chamarmos de φ o ângulo de giro em torno do eixo x (que é o eixo de simetria do disco furado), e s o raio em relação a esse eixo x , obtemos:



$$Q = \int_{\text{disco}} \sigma dA = \int_{\text{disco}} \sigma s ds d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{s=R_1}^{s=R_2} \sigma s ds d\varphi = \sigma 2\pi \left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right)$$

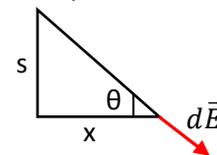
ou seja, sendo σ uniforme, segue que $Q = \sigma A$, sendo A a área do disco furado: $A = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$. Note que $dA = s ds d\varphi$ é a área infinitesimal de um pequeno fragmento de comprimento $s d\varphi$ e espessura ds .

b) Para calcular o campo elétrico sobre o eixo (x) de simetria do disco furado podemos reconhecer logo que, por simetria, esse campo estará ao longo desse eixo, em sentidos opostos nos dois lados do disco. Vemos que, da lei de Coulomb, para um ponto de coordenada x sobre o eixo x vale (tamanho da seta vermelha):

$$dE = k \frac{dq}{s^2 + x^2}$$

e:

$$dE_x = dE \cos(\theta)$$



Portanto:

$$E_x(x) = \int_{\text{disco}} dE_x = \int_{\text{disco}} k \frac{\sigma s ds d\varphi}{s^2 + x^2} \cos(\theta)$$

Note ainda na Figura que:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{s^2 + x^2}}$$

Portanto:

$$E_x(x) = \int_{\text{disco}} k x \frac{\sigma s ds d\varphi}{(s^2 + x^2)^{3/2}}$$

Utilizando os mesmos limites de integração do item (a) obtemos (a integral em $d\varphi$ resulta em 2π):

$$E_x(x) = 2\pi \sigma k x \int_{R_1}^{R_2} \frac{s ds}{(s^2 + x^2)^{3/2}} = 2\pi \sigma k x \left[\frac{-1}{\sqrt{s^2 + x^2}} \right]_{R_1}^{R_2}$$

Finalmente:

$$E_x(x) = 2\pi \sigma k x \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} \right)$$

Note que essa expressão vale para os dois lados do disco furado, para $x > 0$ e para $x < 0$ (há apenas uma inversão de sinal no campo elétrico).

Note que poderíamos obter esse resultado superpondo o campo elétrico de dois discos, um disco maior de raio R_2 (sem furo) com densidade de carga σ e um disco menor de raio R_1 , concêntrico ao primeiro, com densidade de carga $-\sigma$. A densidade de carga $-\sigma$ se superpõe à densidade de carga σ na região do disco menor de raio R_1 resultando em um disco menor eletricamente neutro, que é equivalente a um buraco de raio R_1 na densidade de carga do disco maior. Para o disco maior com σ obtemos:

$$E_{2x}(x) = 2\pi \sigma k \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} \right)$$

Para o disco menor com $-\sigma$ obtemos:

$$E_{1x}(x) = 2\pi (-\sigma) k \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} \right)$$

Portanto, do princípio da superposição:

$$E_x(x) = E_{1x}(x) + E_{2x}(x) = 2\pi \sigma k \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} - 1 + \frac{x}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} \right)$$

Que é o resultado que já obtivemos.

c) Para pontos próximos do centro do disco furado ($x=0$) obtemos (usando $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n \varepsilon$):

$$\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} = \frac{1}{R_1 \sqrt{1 + (x/R_1)^2}} = \frac{1}{R_1} (1 + (x/R_1)^2)^{-1/2} = \frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R_1} \right)^2 + \dots \right)$$

analogamente para o outro termo. Portanto, próximo da origem o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}(x) = 2\pi \sigma k x \left(\frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R_1} \right)^2 + \dots \right) - \frac{1}{R_2} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R_2} \right)^2 + \dots \right) \right) \hat{x}$$

O termo dominante dessa série (para $(x/R_2)^2$ desprezível) é:

$$\vec{E}(x) = 2\pi \sigma k x \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \hat{x}$$

Note que o campo elétrico é linear em x nessa região (é da forma $\vec{E}(x) = K x \hat{x}$, com K uma constante).

d) Uma carga pontual $-q$ (com sinal oposto ao sinal de σ , para que ela seja atraída pelo disco furado), que é colocada sobre o eixo x próxima da origem, vai sofrer uma força:

$$\vec{F}(x) = -q\vec{E}(x) = -2\pi q \sigma k x \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \hat{x}$$

A equação de movimento dessa carga (de massa m) ao longo de x será:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -2\pi q \sigma k \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) x = -K x$$

em que definimos a constante:

$$K = 2\pi q \sigma k \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Essa é a equação do Movimento Harmônico Simples ($x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$) de frequência angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

A carga pontual $-q$, após ser solta sobre o eixo x , próxima da origem, vai oscilar para cá e para lá ao longo do eixo x , em torno do centro do disco furado. Ela vai oscilar com frequência natural ω .

Esse disco furado é o que poderíamos chamar de “armadilha de íons”, pois ele é capaz de aprisionar um íon na região próxima de seu centro. Não se trata de uma armadilha de íons muito prática porque a estabilidade do centro do disco furado só existe para movimentos sobre o eixo x de simetria do disco. Se o íon sair um pouco desse eixo, ele não volta mais, pois esse ponto é instável para perturbações na posição do íon em direções diferentes do eixo x . Por isso as armadilhas de íons são construídas com configurações de cargas elétricas mais complicadas, que garantem maior estabilidade na posição de captura do íon.