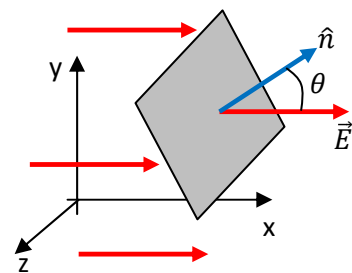


E/P22.1:

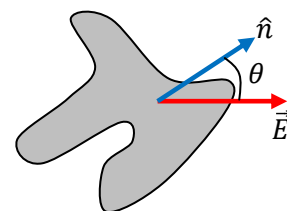
Considere um campo elétrico uniforme no espaço $\vec{E} = E_0 \hat{x}$ (um campo uniforme é aquele que assume o mesmo valor, módulo, direção e sentido, em todos os pontos do espaço). Nessa região do espaço há uma folha de papel plana de área A , cuja direção normal \hat{n} forma um ângulo θ com \vec{E} . A Figura ao lado ilustra essa ideia (setas de \vec{E} vermelhas). A folha de papel é uma superfície aberta de área A . O conceito de fluxo ϕ de um campo vetorial se aplica a superfícies abertas ou fechadas. A lei de Gauss, em particular, se refere ao fluxo ϕ do campo elétrico \vec{E} somente em superfícies fechadas. Aqui não estamos utilizando a lei de Gauss.



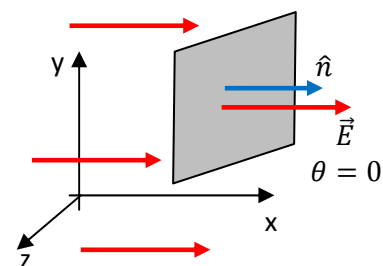
a) O fluxo de \vec{E} (note que E e θ são constantes em S) através da superfície aberta S (a folha de papel) é:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_S E \cos(\theta) dA = E \cos(\theta) \int_S dA = E \cos(\theta) A$$

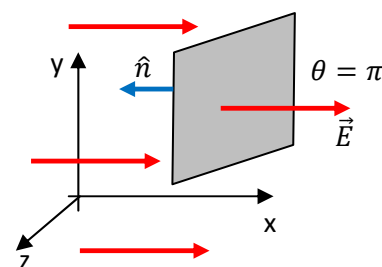
b) Na nossa figura acima desenhamos uma folha retangular, por conveniência, mas esse resultado para o fluxo ϕ independe da forma do contorno da folha, depende apenas do fato da folha ser plana e de área A . A folha poderia ter a forma “maluca” (plana e de área A) representada ao lado e o fluxo seria o mesmo.



c) Tendo em vista que $\phi = E A \cos(\theta)$, vemos que para E e A fixos, o ângulo θ que dá o fluxo máximo é aquele para o qual $\cos(\theta) = 1$, ou seja, $\theta = 0$. Isso corresponde a um campo \vec{E} que “fura” a superfície S ortogonalmente em todos os pontos de S : $\phi_{MAX} = E A$. A Figura ao lado ilustra essa situação em que S foi girada até ser atravessada ortogonalmente por \vec{E} (\vec{E} e \hat{n} paralelos entre si).

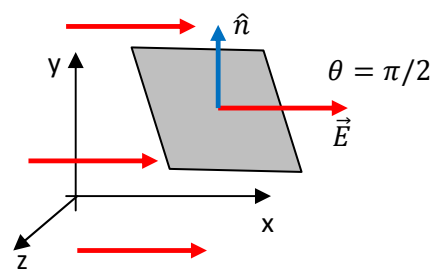


O fluxo mínimo (pensando que ϕ pode ser positivo ou negativo) seria dado pelo caso $\theta = 180^\circ$ (π rad) e $\phi_{MIN} = E A \cos(\pi) = -EA$. Nesse caso o campo \vec{E} “furaria” a superfície S ortogonalmente em todos os pontos de S , mas a seta da normal \hat{n} estaria invertida, apontando ao longo de $-x$ (note que as duas normais \hat{n} e $-\hat{n}$ são igualmente válidas para uma superfície aberta e a escolha é arbitrária. Somente para superfícies fechadas devemos sempre escolher \hat{n} apontando para fora da superfície, por convenção).



A Figura acima ilustra essa situação em que S foi girada até que \hat{n} ficasse oposto ao campo \vec{E} .

Finalmente, o fluxo seria nulo no caso $\theta = 90^\circ$ ($\pi/2$ rad), pois $\cos(\pi/2) = 0$. Nesse caso o campo \vec{E} tangenciaria a superfície S em todos os pontos de S e não haveria fluxo através de S . A Figura ao lado ilustra essa situação em que S foi girada até que \vec{E} ficasse tangente à S (\vec{E} e \hat{n} ortogonais entre si). Um campo \vec{E} que tangencia uma superfície S em todos os pontos dessa superfície não “fura” a superfície e possui, portanto, fluxo $\phi = 0$ em S .

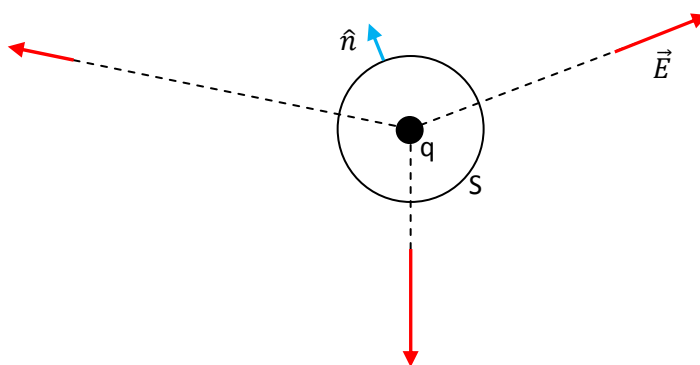


E/P22.3:

Considere uma carga pontual q . Sabemos que esta carga pontual gera em sua vizinhança um campo elétrico radial dado por:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

sendo r a distância (raio) até a carga pontual e \hat{r} um vetor unitário ao longo do raio que nasce em q (apontando no sentido do crescimento do raio). A Figura ao lado ilustra algumas setas do campo \vec{E} , para uma carga q positiva. Conhecemos o valor $E(R)$ em um dado raio $r = R$.



A Figura mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma casca esférica de raio R arbitrário (note, não é um círculo, é uma casca esférica no espaço tridimensional com a carga q em seu centro, como se fosse um balão esférico que tem q no centro, mas trata-se de uma superfície imaginária). \hat{n} é um campo de vetores normais a essa superfície, apontando para fora dela. Não é difícil obter o fluxo do campo elétrico através de S :

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dA = \oint_S k \frac{q}{r^2} dA = k \frac{q}{R^2} \oint_S dA = k \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi k q$$

Levamos em conta que a direção normal à superfície da esfera é a direção radial, ou seja: $\hat{n} = \hat{r}$. Como $k = 1/4\pi\epsilon_0$, segue a lei de Gauss que já conhecemos: $\phi = q/\epsilon_0$.

a) No presente exercício está dito que a intensidade de \vec{E} sobre a superfície da esfera de raio R é:

$$E(R) = k \frac{q}{R^2} = 1,25 \times 10^6 \text{ N/C}$$

e que $R = 0,150$ m. Portanto:

$$\phi = E(R)4\pi R^2 \cong 3,5 \times 10^5 \text{ Nm}^2/\text{C}$$

b) Segue que, da lei de Gauss:

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow q = \epsilon_0 \phi \cong 3,1 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Poderíamos também obter o valor de q diretamente da lei de Coulomb, pois:

$$E(R) = k \frac{q}{R^2} \Rightarrow q = E(R) \frac{R^2}{k}$$

Concluindo: o fluxo do campo \vec{E} de uma carga pontual q através de uma superfície gaussiana esférica de raio $r = R$ (superfície S) que contém essa carga é $\phi = q/\epsilon_0$. Isso vale mesmo que a carga pontual não esteja no centro de S . Se q está no centro de S , então o campo \vec{E} possui módulo constante ($E(R)$) em S e vale também $\phi = E(R)4\pi R^2$. Portanto, para essa superfície particular vale a igualdade:

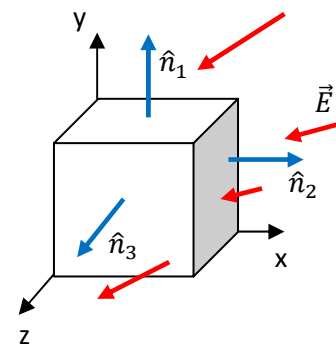
$$\phi = E(R)4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

E/P22.4:

Considere um campo elétrico não-uniforme no espaço $\vec{E}(x, z)$ (um campo não-uniforme é aquele que assume valores diferentes, módulo, direção e/ou sentido, nos diferentes pontos do espaço). O campo é dado por:

$$\vec{E}(x, z) = -K_1 x \hat{x} + K_2 z \hat{z}$$

com K_1 e K_2 constantes positivas. Colocamos nessa região do espaço uma superfície fechada (imaginária) cúbica de lado L , com um vértice na origem, de acordo com a Figura acima. Mostramos algumas setas de $\vec{E}(x, z)$ (em vermelho) e algumas setas de \hat{n} nas faces do cubo. Note que as setas de $\vec{E}(x, z)$ não possuem projeção (componente) ao longo de y . Note também que na face 1 vale $\hat{n} = \hat{n}_1 = \hat{y}$. Na face 2 vale $\hat{n} = \hat{n}_2 = \hat{x}$ e assim por diante. Vemos que a face 1 está na posição (no plano) $y = L$ e a face oposta está na posição (no plano) $y = 0$. A face 2 está na posição (no plano) $x = L$ e a face oposta está na posição (no plano) $x = 0$. Finalmente, a face 3 está na posição (no plano) $z = L$ e a face oposta está na posição (no plano) $z = 0$.



Para calcular o fluxo de $\vec{E}(x, z)$ através de S (superfície fechada) podemos calcular separadamente o fluxo através de cada face do cubo (superfícies abertas). De fato, sendo a integral uma soma:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} dA = \int_{\text{FACE 1}} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} dA + \dots + \int_{\text{FACE 6}} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} dA$$

Na face 1:

$$\int_{FACE\ 1} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} \, dA = \int_{FACE\ 1} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{y} \, dA = \int_{FACE\ 1} [-K_1 x \hat{x} + K_2 z \hat{z}] \cdot \hat{y} \, dA = 0$$

posto que $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{y} = 0$ (vetores ortogonais entre si). O campo $\vec{E}(x, z)$ apenas tangencia a face 1. A mesma ideia vale para a face oposta. Isso pode ser visto facilmente na figura acima.

Na face 2:

$$\int_{FACE\ 2} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} \, dA = \int_{FACE\ 2} \vec{E}(x = L, z) \cdot \hat{x} \, dA = \int_{FACE\ 2} [-K_1 L \hat{x} + K_2 z \hat{z}] \cdot \hat{x} \, dA = \int_{FACE\ 2} [-K_1 L] \, dA$$

posto que $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$ e $\hat{z} \cdot \hat{x} = 0$. Portanto:

$$\int_{FACE\ 2} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} \, dA = \int_{FACE\ 2} [-K_1 L] \, dA = -K_1 L \int_{FACE\ 2} dA = -K_1 L A = -K_1 L L^2 = -K_1 L^3$$

Analogamente, na face oposta à face 2 vale:

$$\int_{FACE\ 02} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} \, dA = \int_{FACE\ 02} \vec{E}(x = 0, z) \cdot (-\hat{x}) \, dA = \int_{FACE\ 02} [-K_1 0 \hat{x} + K_2 z \hat{z}] \cdot (-\hat{x}) \, dA = 0$$

A componente de $\vec{E}(x, z)$ que “furaria” esta face seria a componente x , mas esta componente se anula nesta face do cubo, posto que esta face está em $x = 0$.

Na face 3:

$$\int_{FACE\ 3} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} \, dA = \int_{FACE\ 3} \vec{E}(x, z = L) \cdot \hat{z} \, dA = \int_{FACE\ 3} [-K_1 x \hat{x} + K_2 L \hat{z}] \cdot \hat{z} \, dA = \int_{FACE\ 3} [K_2 L] \, dA$$

posto que $\hat{z} \cdot \hat{z} = 1$ e $\hat{x} \cdot \hat{z} = 0$. Portanto:

$$\int_{FACE\ 3} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} \, dA = \int_{FACE\ 3} [K_2 L] \, dA = K_2 L \int_{FACE\ 3} dA = K_2 L A = K_2 L L^2 = K_2 L^3$$

Analogamente, na face oposta à face 3 vale:

$$\int_{FACE\ 03} \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} \, dA = \int_{FACE\ 03} \vec{E}(x, z = 0) \cdot (-\hat{z}) \, dA = \int_{FACE\ 03} [-K_1 x \hat{x} + K_2 0 \hat{z}] \cdot (-\hat{z}) \, dA = 0$$

A componente de $\vec{E}(x, z)$ que “furaria” esta face seria a componente z , mas esta componente se anula nesta face do cubo, posto que esta face está no plano $z = 0$.

Concluindo, o fluxo de \vec{E} através da superfície fechada S é:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} dA = -K_1 L^3 + K_2 L^3 = (K_2 - K_1)L^3$$

Como há um fluxo não-nulo através dessa superfície cúbica S , podemos concluir, dada a lei de Gauss, que há um saldo de carga elétrica dentro de S . Essa carga q_{INT} é dada por:

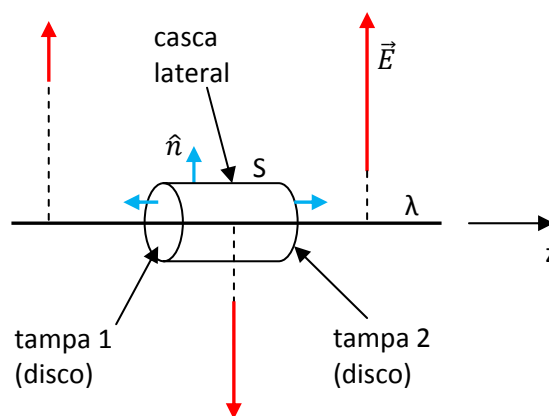
$$\phi = \oint_S \vec{E}(x, z) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0}$$

Portanto:

$$q_{INT} = \epsilon_0(K_2 - K_1)L^3$$

E/P22.7:

O enunciado está um tanto confuso. Carga elétrica está distribuída em uma linha reta infinita (um fio com densidade de carga linear uniforme λ). Uma superfície imaginária cilíndrica de raio R e comprimento L , coaxial à linha, abraça essa linha (a superfície é imaginária, existe apenas no mundo das ideias). Não há carga na superfície, posto que ela é imaginária. As cargas estão concentradas na linha reta.



O campo elétrico produzido por uma linha reta infinita (coincidente com o eixo z) com densidade de carga elétrica uniforme λ é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

sendo s o raio das coordenadas cilíndricas (distância ao eixo z , ou à linha carregada) e \hat{s} o vetor unitário ao longo desse raio, apontando no sentido do crescimento do raio. A Figura acima ilustra algumas setas do campo \vec{E} (para $\lambda > 0$). Tente imaginar essas setas no espaço 3D, definidas em todos os pontos do espaço, apontando na direção radial \hat{s} que passa por cada ponto. Em módulo, o campo decai com $1/s$.

A Figura mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma “lata” cilíndrica (uma casca cilíndrica lateral (CL) de raio R e comprimento L e duas tampas (T1 e T2) que são discos de raio R). \hat{n} é um campo de vetores normais a essa superfície (setas azuis), apontando para fora dela. A “lata” é coaxial à linha carregada. Note que na casca cilíndrica lateral (CL) $\hat{n} = \hat{s}$, na tampa 1 (T1), $\hat{n} = -\hat{z}$ e na tampa 2 (T2), $\hat{n} = \hat{z}$.

Não é difícil obter o fluxo do campo elétrico (gerado pela linha carregada) através de S . A ideia é que a superfície cilíndrica fechada (S =lata) pode ser decomposta em três superfícies abertas que se colam através de

suas bordas: $S=lata=CL+T1+T2$. Como a integral é uma operação linear, segue que o fluxo na lata é a soma dos fluxos em CL, em T1 e em T2. Portanto:

$$\begin{aligned}\phi &= \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s} \cdot \hat{n} dA = \oint_{T1+T2+CL} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s} \cdot \hat{n} dA = \\ &= \int_{T1} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s} \cdot (-\hat{z}) dA + \int_{T2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s} \cdot \hat{z} dA + \int_{CL} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s} \cdot \hat{s} dA\end{aligned}$$

Fazendo os produtos escalares, lembrando que $\hat{s} \cdot \hat{z} = 0$, pois eles são ortogonais entre si, obtemos:

$$\phi = \int_{CL} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} dA = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \int_{CL} dA = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} 2\pi R L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Só há fluxo de \vec{E} na casca cilíndrica (CL), pois o campo \vec{E} é tangente às tampas da superfície gaussiana. Esse é o resultado que já conhecemos da lei de Gauss, pois λL é a carga elétrica da linha carregada que está contida no interior da superfície S , que tem comprimento L . De fato, essa superfície engloba dentro dela um segmento de linha carregada de comprimento L e, portanto, de carga elétrica $q_{INT} = \lambda L$. Concluindo:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

a) O enunciado informa que $R = 0,25$ m, $L = 0,4$ m e $\lambda = 6 \mu\text{C}/\text{m} = 6 \times 10^{-6}$ C/m. Obtemos o fluxo:

$$\phi = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \cong 2,7 \times 10^5 \text{ N m}^2/\text{C}$$

b) Se aumentarmos o raio R nada muda no fluxo, pois ele só depende da carga interna (λL) e da constante ϵ_0 . Aumentando R aumentamos a superfície, mas o campo elétrico sobre essa superfície fica mais fraco. O fluxo não muda, pois o aumento da área da superfície gaussiana é compensado pela redução na magnitude do campo elétrico sobre essa área. Resumindo, o campo decai com $1/r$ e a área lateral de S cresce com r . Portanto, o fluxo independe de r .

c) Se esticarmos a superfície S , aumentando L , vai haver mais carga elétrica no interior dessa superfície e o fluxo do campo elétrico em S vai aumentar. Aumentando L aumentamos a superfície S , mantendo a mesma intensidade do campo elétrico em S , o fluxo aumenta. Resumindo, o campo não depende de L (nem poderia, pois L é propriedade de uma superfície imaginária) e a área cresce com L . Portanto, o fluxo cresce com L . Tudo se resume em:

$$\phi = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

O fluxo do campo elétrico nessa superfície cilíndrica S que consideramos aqui não depende do raio R e é proporcional ao comprimento L da superfície S .

E/P22.11: Considere uma região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme $\vec{E} = \vec{E}_0$ (um campo uniforme em uma região do espaço é aquele que assume o mesmo valor, módulo, direção e sentido, em todos os pontos dessa região).

a) Vamos mostrar que não há excesso de carga em nenhum ponto dessa região, ou seja:

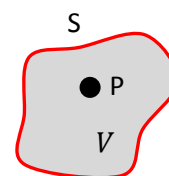
$$\rho(P) = 0 \text{ para todo ponto } P \text{ nessa região.}$$

ρ é a função densidade de carga (C/m^3) definida para distribuições de carga densamente concentradas em um volume do espaço.

Considere uma superfície S fechada que engloba o ponto P . Da lei de Gauss, o fluxo de \vec{E} através da superfície S é o excesso de carga dentro dela:

$$\phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Nessa expressão acima o volume V é o volume dentro de S e a integral da função ρ nesse volume deve dar exatamente a carga elétrica total contida dentro de S , ou seja, q_{INT} . A Figura ao lado ilustra essa ideia (tente imaginar essa Figura em 3 dimensões): o ponto P é englobado pela superfície fechada S (em vermelho) que delimita um volume V (em cinza). Note, S não é uma curva, é algo como um balão que envolve o ponto P , mas apenas uma superfície imaginária.



Tudo que temos que fazer agora é reconhecer que se \vec{E} é uniforme, $\vec{E} = \vec{E}_0$ com \vec{E}_0 uma constante, então

$$\phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dA = 0$$

qualquer que seja a superfície S . Isso é verdade porque, sendo \vec{E}_0 uma constante:

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dA = \vec{E}_0 \cdot \oint_S \hat{n} dA = \vec{E}_0 \cdot \vec{0} = 0$$

Poderíamos provar que $\oint_S \hat{n} dA = 0$ para qualquer superfície fechada S , mas preferimos contar com a razoabilidade desse resultado. De fato, ao fazer a soma $\oint_S \hat{n} dA$ estamos somando vetores \hat{n} em todas as direções e eles se anulam mutuamente.

Conclusão, da lei de Gauss:

$$\phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dA = 0 = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Portanto:

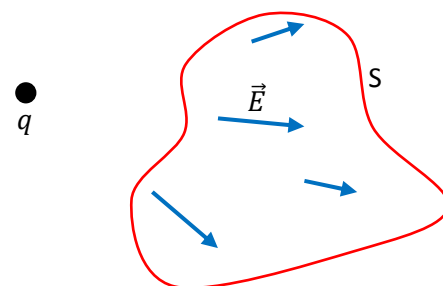
$$\int_V \rho \, dV = 0$$

para qualquer superfície fechada S que engloba o volume V nessa região do espaço. Daí, só podemos concluir que vale $\rho = 0$ em todos os pontos dentro de S , ou seja, $\rho(P) = 0$ para todos os pontos P nessa região do espaço onde existe (apenas) um campo elétrico uniforme. Não há nenhum excesso de cargas nessa região do espaço.

b) Suponha agora uma região do espaço onde vale $\rho(P) = 0$ para todos os pontos P nessa região, ou seja, não há nenhum excesso de cargas nessa região do espaço. Podemos concluir que se há campo elétrico nessa região então esse campo é uniforme?

A resposta é não e é fácil mostrar exemplos que confirmam isso. Considere uma região do espaço na vizinhança de uma carga pontual q no vácuo. Nessa região, como já afirmamos, não há nenhuma carga, é o vácuo. Mas, nessa região há o campo elétrico dessa carga pontual, que é dado por:

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$



A Figura ao lado ilustra essa ideia, em que a região que estamos considerando está delimitada pela superfície fechada imaginária S (tente imaginar essa Figura em 3 dimensões, não é uma curva, é algo como um balão delimitando uma região na vizinhança, vazia, de q). Não há cargas dentro de S (a carga q está longe de S) e, no entanto, dentro da região delimitada por S há um campo elétrico não-uniforme (não-constante), o campo elétrico de q (setas azuis), que está definido em todo o espaço. Portanto, vale $\rho(P) = 0$ para todos os pontos P nessa região e o campo elétrico que existe nessa região não é uniforme.

Da lei de Gauss, podemos mostrar que para qualquer superfície fechada S' dentro de S vale:

$$\phi_{S'} = \oint_{S'} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} \rho \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} 0 \, dV = 0$$

mesmo com o campo \vec{E} sendo não-uniforme.

Concluindo: em uma região do espaço onde \vec{E} é uniforme não há nenhum excesso de cargas. Trata-se de uma região eletricamente neutra. Se houvesse algum excesso de cargas nessa região haveria uma alteração no campo \vec{E} , ele deixaria de ser uniforme. Em uma região onde não há nenhum excesso de cargas, uma região eletricamente neutra, o campo elétrico \vec{E} não tem que ser uniforme. Por exemplo, na vizinhança de uma carga pontual, onde há, por hipótese, apenas o vácuo, existe o campo \vec{E} da carga pontual e este campo está longe de ser uniforme. Ele tem módulo, direção e sentido que dependem do ponto do espaço.

E/P22.20:

Trata-se do mesmo sistema do exercício 22.7. Uma linha carregada com uma densidade de carga uniforme λ (C/m) ao longo de toda sua extensão. O campo elétrico na vizinhança dessa linha (estendida sobre o eixo z) é:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 s} \hat{s}$$

sendo s o raio das coordenadas cilíndricas (distância ao eixo z ou à linha carregada) e \hat{s} o vetor unitário ao longo desse raio, apontando no sentido do crescimento do raio.

O enunciado informa que quando $s = s_0 = 0,4$ m, o campo elétrico possui magnitude $E_0 = 840$ N/C. Portanto:

$$E_0 = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 s_0} \Rightarrow \lambda = E_0 2 \pi \epsilon_0 s_0 \cong 1,87 \times 10^{-8} \text{ C/m}$$

A carga elétrica em um segmento de linha de comprimento $L = 2$ cm (0,02 m) é:

$$q = \lambda L = \lambda 0,02 \cong 3,74 \times 10^{-10} \text{ C}$$

Poderíamos resolver este exercício utilizando o conceito de fluxo do campo elétrico. Da lei de Gauss:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0}$$

Na discussão do exercício anterior (22.7) percebemos que para uma superfície gaussiana (em verde) do tipo “lata” cilíndrica, coaxial à linha carregada (ver Figura ao lado) só há fluxo do campo elétrico na superfície lateral, de área $A = 2 \pi R L$ (sendo R o raio da lata e L seu comprimento). Nas tampas da lata vale $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ e não há fluxo (campo tangenciando). Como o módulo do campo elétrico só depende da distância à linha e sobre essa superfície lateral esse módulo é constante (pois ela é equidistante da linha), digamos $E(R)$, segue que:

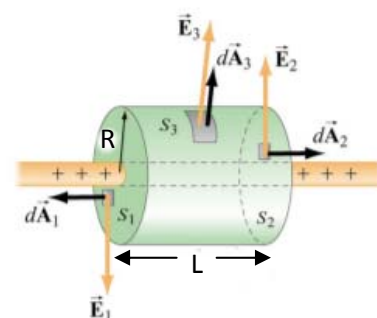
$$\phi = E(R) 2 \pi R L$$

Portanto, da lei de Gauss, a carga elétrica em um segmento de linha de comprimento L , interior a essa superfície gaussiana é:

$$\phi = E(R) 2 \pi R L = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{INT} = E(R) 2 \pi \epsilon_0 R L$$

Trata-se do mesmo resultado que obtivemos acima se lembrarmos que:

$$E(R) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 R}$$



A vantagem dessa última forma de resolver é que não precisamos lembrar desta expressão para E , precisamos saber apenas que o campo elétrico é constante sobre a superfície lateral de uma “lata” coaxial à linha carregada (uma simetria do sistema) e assumir a validade da lei de Gauss.

E/P22.23: Uma casca esférica condutora (de metal) de raios a e b ($b > a$) possui uma densidade de carga elétrica superficial uniforme $\sigma_A > 0$. Uma carga elétrica $-q$ vai ser introduzida na parte oca da casca (uma cavidade).

Note que antes de a carga $-q$ ser introduzida na cavidade, os excessos de carga estão concentrados simetricamente na superfície externa da casca condutora. Isso significa que σ_A está distribuída uniformemente na superfície externa (de raio b) da casca, ou seja, $\sigma_{ext}^{(ant)} = \sigma_A$. A notação $\sigma_{ext}^{(ant)}$ significa a densidade de carga superficial na superfície externa da casca esférica antes de se introduzir uma carga na parte oca da casca (que vai ser feito em seguida). Note que $\sigma_{int}^{(ant)} = 0$, ou seja, não há nenhuma carga depositada na superfície interna da casca (a superfície da cavidade). Para provar que não há cargas na parede interna da casca (de raio a) usamos apenas a lei de Gauss e o fato de que, no equilíbrio eletrostático, $\vec{E} = \vec{0}$ no interior do condutor. Portanto, se abraçarmos a cavidade com uma superfície gaussiana toda contida dentro do material condutor, não há fluxo de campo elétrico nessa superfície, pois $\vec{E} = \vec{0}$ em todos os pontos dela. Da lei de Gauss, concluímos que a carga total dentro dessa superfície é nula. Segue que não há nenhuma carga na parede da cavidade, que é o único lugar onde os excessos de carga dentro dessa superfície gaussiana poderiam estar.

Podemos calcular a carga em excesso Q que existe na casca condutora, pois se σ_A é uniforme (por simetria) segue que:

$$Q = \int_{SUP.b} \sigma_{ext}^{(ant)} dA = \sigma_A \int_{SUP.b} dA = \sigma_A A = \sigma_A 4 \pi b^2$$

sendo $SUP.b$ a superfície esférica de raio b (cuja área superficial é $A = 4 \pi b^2$).

a) Ao introduzir a carga $-q$ no interior da casca, ou seja, na cavidade, uma carga $+q$ vai ser atraída para a superfície interna da casca (de raio a), para produzir o equilíbrio eletrostático, ou seja, para anular o campo elétrico no interior do material condutor. Podemos chamar essa densidade interna de carga, na superfície de raio a ($SUP.a$), de $\sigma_{int}^{(dep)}$ (dep de depois da introdução da carga na cavidade). Note que $\sigma_{int}^{(dep)}$ não precisa ser uniforme, ela apenas tem que ser tal que:

$$\int_{SUP.a} \sigma_{int}^{(dep)} dA = q$$

Note que a posição de $-q$ no interior da cavidade não está especificada e o resultado acima vale qualquer que seja essa posição. Para provar que há uma carga $+q$ na parede interna da casca (de raio a) usamos novamente

a lei de Gauss e o fato de que $\vec{E} = \vec{0}$ no interior do condutor. Se abraçarmos a cavidade com uma superfície gaussiana toda contida dentro do material condutor, não há fluxo de campo elétrico nessa superfície, pois $\vec{E} = \vec{0}$ em todos os pontos dela. Da lei de Gauss, concluímos que a carga total dentro dessa superfície é nula. Havendo $-q$ no interior da cavidade, segue que deve haver q na parede da cavidade, que é o único lugar onde essa carga poderia estar. Isso porque excessos de carga elétrica depositados em condutores se concentram apenas nas superfícies desses condutores, supondo que eles estejam em equilíbrio eletrostático. Se a carga $-q$ for fixada no centro da cavidade, a simetria das cargas se torna mais simples (simétrica) e nesse caso $\sigma_{int}^{(dep)}$ fica uniforme sobre a parede da cavidade. Segue também que:

$$\int_{SUP. a} \sigma_{int}^{(dep)} dA = q \Rightarrow \sigma_{int}^{(dep)} \int_{SUP. a} dA = \sigma_{int}^{(dep)} 4 \pi a^2 = q \Rightarrow \sigma_{int}^{(dep)} = \frac{q}{4 \pi a^2}$$

Continuando, se q' é a carga que sobra na superfície externa da casca (de raio b) após a introdução de $-q$ na cavidade, levando em conta que a carga elétrica na casca continua sendo Q , obtemos:

$$Q = q + q' \Rightarrow q' = Q - q = \sigma_A 4 \pi b^2 - q$$

A densidade de carga na superfície externa da casca condutora continua uniforme (por causa da blindagem produzida pela carga $+q$ na superfície interna) e passa a ser:

$$\sigma_{ext}^{(dep)} = \frac{q'}{4 \pi b^2} = \sigma_A - \frac{q}{4 \pi b^2}$$

Note que $\sigma_{ext}^{(dep)}$ é sempre uniforme, não importa a posição da carga $-q$ dentro da cavidade. Isso ocorre porque a carga $+q$ induzida na parede da cavidade blinda o efeito de $-q$ em toda a região fora da cavidade, e sua posição, central ou não, passa a ser irrelevante nessa região. Com relação à densidade de carga na superfície interna da cavidade, $\sigma_{int}^{(dep)}$, conforme já discutimos, a situação é diferente. $\sigma_{int}^{(dep)}$ será uniforme apenas se a carga $-q$ estiver no centro da cavidade.

Resumindo: com a cavidade vazia, toda a carga Q em excesso na esfera fica concentra uniformemente em sua superfície externa de raio b (estas cargas se repelem entre si). Introduzindo a carga $-q$ na cavidade, uma carga q é atraída e se concentra na parede da cavidade. Na superfície externa da esfera sobra ainda a carga $q' = Q - q$ que se distribui uniformemente nesta superfície.

b) (esqueça a palavra “força” no enunciado) O campo elétrico fora da esfera é apenas o campo produzido por q' , como se essa carga estivesse no centro da casca condutora (teorema das cascas). Isso porque o campo da carga $-q$ colocada dentro da cavidade está cancelado (blindado) pelo campo da carga $+q$ depositada na superfície interna da casca ($\sigma_{int}^{(dep)}$) (para pontos fora da cavidade). Assim, da lei de Coulomb, na região exterior da esfera vale:

$$\vec{E} = \frac{q'}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{Q - q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\sigma_A 4 \pi b^2 - q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

sendo r o raio em relação ao centro da casca condutora.

Note o caso particular: se havia uma carga Q na casca condutora e uma carga $-q = -Q$ for colocada dentro da cavidade (seque que $q = Q$), então, fora da esfera vale $\vec{E} = \vec{0}$. Isso ocorre porque ao colocar $-Q$ na cavidade, a carga Q depositada na esfera condutora vai fluir para sua superfície interior (de raio a) e vai blindar a carga $-Q$. A superfície exterior (de raio b) vai ficar totalmente descarregada (neutra). Portanto, o campo elétrico externo é, apenas, a soma do campo de $-Q$, com o campo de Q na parede da cavidade, que se cancelam mutuamente, ou seja, $\vec{E} = \vec{0}$ nessa região.

Para qualquer valor de $-q$ colocado dentro da cavidade podemos obter campo elétrico nulo na região fora da esfera, desde que aterremos a superfície exterior da esfera. Aterrizar significa conectar eletricamente à Terra. A Terra é uma bola condutora gigante e quando a esfera condutora for conectada à Terra haverá uma troca de carga elétrica entre elas, produzindo um novo equilíbrio eletrostático. A carga que havia na superfície exterior da esfera vai se redistribuir na superfície da esfera e na superfície da Terra. Como a superfície da Terra é gigantesca, segue que não sobra nenhuma carga na parede externa da esfera condutora, e $\vec{E} = \vec{0}$ no seu exterior. Um objeto metálico aterrado blinda o mundo exterior das influências das cargas elétricas depositadas em uma cavidade dentro dele.

c) (o enunciado continua um pouco confuso) Se imaginarmos uma superfície esférica com raio $a < R < b$, ou seja, toda contida no material condutor, é claro que não haverá fluxo do campo elétrico nessa superfície, pois ela está em uma região onde o campo elétrico é nulo, pela própria definição de equilíbrio eletrostático. Isso já era verdade antes de se introduzir $-q$ na cavidade e continua sendo verdade após introduzir $-q$ (deixa de ser verdade apenas durante um pequeno transiente, que não estamos considerando aqui). Por outro lado, se imaginarmos uma superfície esférica com raio $R < a$, ou seja, toda contida (e concêntrica) dentro da cavidade onde está a carga $-q$ (no centro), o fluxo do campo elétrico nessa superfície será, de acordo com a lei de Gauss:

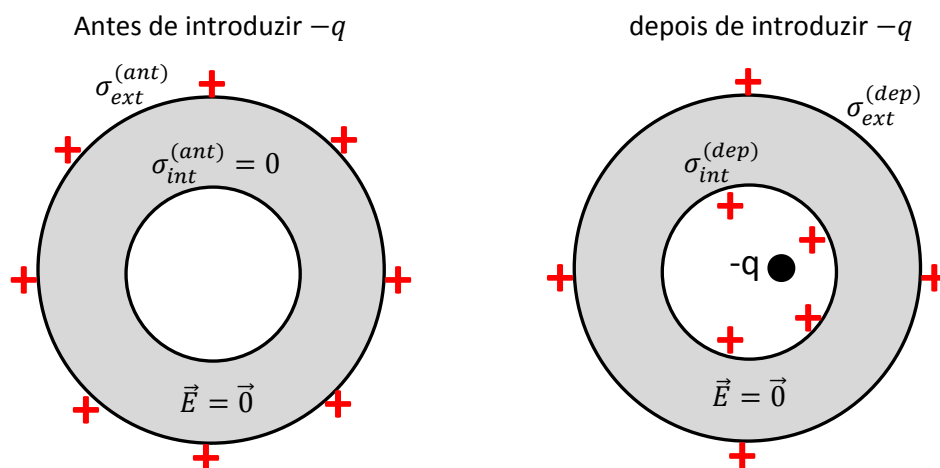
$$\phi = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

posto que a carga $-q$ (somente) estará englobada por essa superfície gaussiana. Finalmente, se imaginarmos uma superfície esférica com raio $R > b$, ou seja, toda contida (e concêntrica) fora da esfera, o fluxo do campo elétrico nessa superfície será, de acordo com a lei de Gauss:

$$\phi = \frac{-q + Q}{\epsilon_0}$$

posto que a carga $-q$ (na cavidade) e a carga Q na esfera metálica estarão englobadas por essa superfície gaussiana.

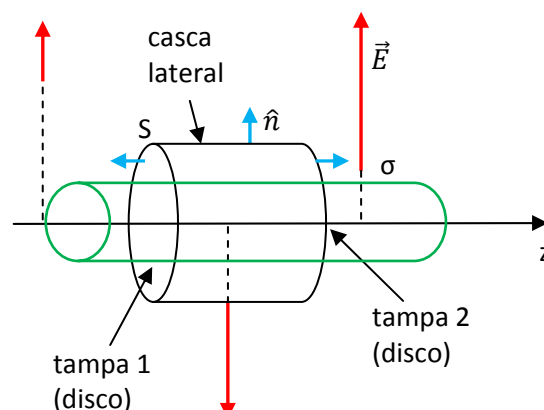
Note que os argumentos acima valem qualquer que seja a posição de $-q$ dentro da cavidade. Nesse caso, a densidade de carga na superfície interna da casca ($\sigma_{int}^{(dep)}$) não precisa ser uniforme, mas a densidade de carga na superfície externa ($\sigma_{ext}^{(ant)}$ e $\sigma_{ext}^{(dep)}$) é sempre uniforme, dada a blindagem de $-q$ produzida por $\sigma_{int}^{(dep)}$. A Figura abaixo ilustra essas idéias.



Resumindo: antes de se introduzir $-q$ na cavidade a carga Q estava distribuída uniformemente na superfície externa da esfera metálica. A densidade de carga nessa superfície era $\sigma_{ext}^{(ant)} = \sigma_A$ e só havia campo elétrico no exterior da esfera. Após introduzir $-q$ na cavidade (em uma posição qualquer), uma carga q se deposita na parede da cavidade e blinda os efeitos de $-q$ na região exterior da cavidade. Uma densidade de carga $\sigma_{int}^{(dep)}$ não necessariamente uniforme se forma nessa superfície. Na superfície externa a carga se ajusta, de tal forma que a carga total depositada na esfera continua sendo a mesma de antes da introdução de $-q$, ou seja, continua sendo Q . A densidade de carga na superfície externa passa a ser $\sigma_{ext}^{(dep)}$ e ela continua sendo uniforme, pois qualquer assimetria dentro da cavidade não é comunicada para o exterior da cavidade, por causa da blindagem produzida por $\sigma_{int}^{(dep)}$. Agora há campo elétrico dentro da cavidade e na região externa à esfera. Nunca há campo elétrico dentro do volume do metal, estando ele em equilíbrio eletrostático. Esse campo elétrico na região do metal só existe por tempos muito curtos (transientes) enquanto o sistema muda de uma situação de equilíbrio (sem $-q$) para outra (com $-q$).

E/P22.29:

Um condutor cilíndrico maciço de raio R e comprimento muito longo com uma densidade de carga em sua superfície σ (uniforme). A Figura ao lado ilustra esse condutor (em verde).



O condutor é algo parecido com um cano de PVC, mas de espessura desprezível.

A Figura mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma “lata” cilíndrica (formada pela junção de uma casca cilíndrica lateral (CL) de raio s qualquer e comprimento L e de duas tampas (T1 e T2) que são discos de raio s qualquer). \hat{n} é um campo de vetores normais a essa superfície (setas azuis), apontando para fora dela. A “lata” é coaxial ao cilindro carregado. Note que na casca cilíndrica lateral $\hat{n} = \hat{s}$, na tampa 1, $\hat{n} = -\hat{z}$ e na tampa 2, $\hat{n} = \hat{z}$. Mostramos também (em vermelho) algumas setas do campo \vec{E} que esperamos que exista (dada a simetria) fora do cilindro, supondo $\sigma > 0$. Tente imaginar essas setas de \vec{E} no espaço tridimensional, em pontos fora do plano da página, apontando na direção radial \hat{s} .

a) Se σ é a densidade de carga (uniforme) na superfície do cilindro, então, um segmento do cilindro de comprimento L possui a carga total:

$$Q = \sigma A = \sigma (2 \pi R L)$$

Portanto, a densidade de carga por unidade de comprimento no cilindro condutor é:

$$\lambda = \frac{Q}{L} = 2 \pi R \sigma$$

b) Para calcular o campo elétrico fora do cilindro vamos usar a superfície gaussiana S definida na Figura acima. Precisamos lembrar que a simetria da distribuição de carga nos leva a concluir, sem nenhum cálculo, que o campo elétrico que essa distribuição de cargas gera no espaço possui a simetria:

$$\vec{E} = E(s) \hat{s}$$

ou seja, o módulo do campo só depende da distância s ao eixo do cilindro (eixo z) e ele tem a direção ortogonal a esse eixo (direção \hat{s}). Falta apenas determinar a função $E(s)$. Portanto, calculando o fluxo desse campo na superfície S mostrada na figura obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E(s) \hat{s} \cdot \hat{n} dA = \int_{T1} E(s) \hat{s} \cdot (-\hat{z}) dA + \int_{T2} E(s) \hat{s} \cdot \hat{z} dA + \int_{CL} E(s) \hat{s} \cdot \hat{s} dA$$

Concluindo, como $\hat{s} \cdot \hat{z} = 0$, segue que:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0 + 0 + \int_{CL} E(s) \hat{s} \cdot \hat{s} dA = E(s) \int_{CL} dA = E(s) 2 \pi s L$$

Agora, da lei de Gauss, sabemos que ($A = 2 \pi R L$ é a área da superfície do cilindro que está dentro de S):

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(s) (2 \pi s L) = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} = \frac{(2 \pi R \sigma)L}{\epsilon_0} \Rightarrow E(s) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 s}$$

Note que o campo diminui com $1/s$ quando nos afastamos do cilindro condutor. Trata-se de um decaimento lento, característico de um objeto de tamanho (artificialmente) infinito.

c) Para expressar $E(s)$ em termos da densidade de carga λ basta fazer:

$$\lambda = 2 \pi R \sigma \Rightarrow R \sigma = \frac{\lambda}{2 \pi}$$

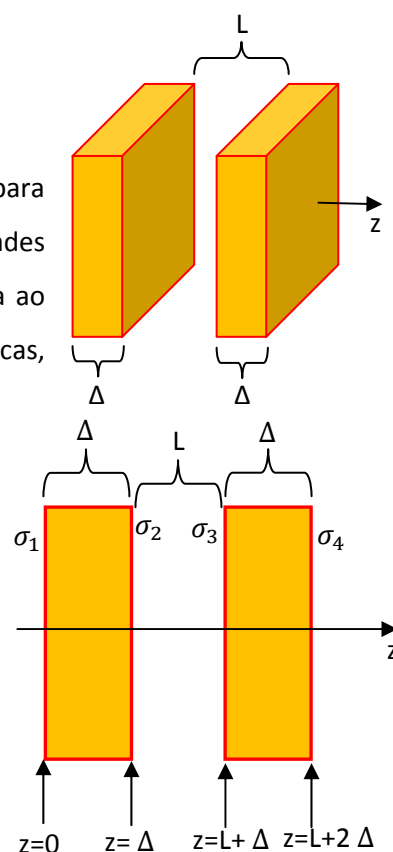
Portanto:

$$E(s) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 s} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 s}$$

Concluindo, o campo elétrico fora desse cilindro condutor é o mesmo campo produzido por uma linha infinita com densidade de carga $\lambda = 2 \pi R \sigma$ localizada no eixo do cilindro condutor (eixo z). Um medidor de campo elétrico colocado em uma posição tal que $s > R$ não distingue esse cilindro grosso com densidade de carga σ de um filamento coaxial ao cilindro com densidade de carga $\lambda = 2 \pi R \sigma$. Trata-se de uma espécie de “teorema das cascas” para densidades de cargas com simetria cilíndrica. Visto de fora, é como se toda a carga do cilindro se concentrasse em um filamento ao longo de seu eixo de simetria (eixo z).

E/P22.30:

Duas placas planas grossas (espessura Δ) isolantes, muito largas (infinitas para todos os efeitos), e paralelas entre si (distanciadas de L) possuem densidades de carga superficiais uniformes em suas faces maiores, conforme a Figura ao lado (visão oblíqua). A Figura seguinte mostra uma visão de perfil das placas, que facilita o entendimento dos cálculos. Vamos definir um eixo z ortogonal às placas, com origem ($z=0$) na face esquerda da placa da esquerda.



Note que são quatro distribuições de carga do mesmo tipo, ou seja, distribuições uniformes σ em superfícies planas. Se soubermos o campo elétrico produzido por apenas uma distribuição de carga uniforme σ em uma superfície plana infinita, podemos apelar para o princípio da superposição e somar os quatro campos elétricos produzidos pelas quatro faces carregadas. Vamos nos concentrar então, inicialmente, em uma única superfície plana infinita com densidade de carga σ uniforme.

A Figura abaixo ilustra apenas uma placa plana (em verde) carregada com densidade de carga uniforme σ (visão de perfil). Vamos definir um eixo z ortogonal à placa, com origem ($z=0$) na placa. A placa é infinita e coincide com o plano xy . A Figura mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma “lata” cilíndrica (composta da junção de uma casca cilíndrica lateral (CL) de raio s qualquer e comprimento L e

de duas tampas (T1 e T2) que são discos de raio s . \hat{n} é um campo de vetores normais a essa superfície (setas azuis), apontando para fora dela. Note que na casca cilíndrica lateral $\hat{n} = \hat{s}$, na tampa 1, $\hat{n} = -\hat{z}$ e na tampa 2, $\hat{n} = \hat{z}$. Mostramos também (em vermelho) algumas setas do campo \vec{E} que esperamos que exista na vizinhança desse plano (dada a simetria), supondo $\sigma > 0$. A simetria da distribuição de cargas nos leva a concluir, sem nenhum cálculo, que esse campo elétrico deve ter a simetria:

$$\vec{E} = E(|z|)(\pm\hat{z})$$

ou seja, a intensidade do campo deve depender apenas da distância ao plano, $|z|$, deve apontar ao longo do eixo z e deve ter o sentido $+\hat{z}$ no lado direito e $-\hat{z}$ no lado esquerdo do plano (supondo $\sigma > 0$). Falta apenas determinar a função $E(|z|)$.

Portanto, calculando o fluxo desse campo na superfície S obtemos (note que $\hat{z} \cdot \hat{s} = 0$):

$$\begin{aligned} \phi &= \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \oint_S \pm E(|z|) \hat{z} \cdot \hat{n} \, dA = \\ &= \int_{T1} E(|-z|)(-\hat{z}) \cdot (-\hat{z}) \, dA + \int_{T2} E(|z|) \hat{z} \cdot \hat{z} \, dA + \int_{CL} E(|z|) \hat{z} \cdot \hat{s} \, dA \end{aligned}$$

Concluindo, sendo as tampas superfícies com z constante ($\pm z$) e área A obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = E(|-z|) A + E(|z|) A + 0 = 2 E(|z|) A$$

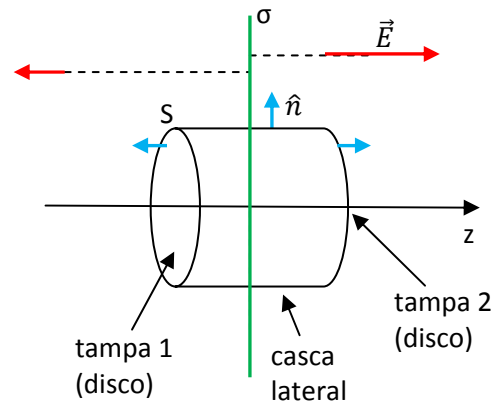
já que $|-z| = |z|$, pois as "lata" está colocada, por hipótese, simetricamente em relação ao plano carregado. Lembre-se que $\hat{z} \cdot \hat{s} = 0$, pois esses dois vetores são ortogonais entre si.

Agora, da lei de Gauss, sabemos que (a superfície S engloba um disco no plano carregado, com carga σA):

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2 E(|z|) A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E(|z|) = E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

Note que o campo não depende de fato da distância $|z|$, ele é uniforme no espaço (de cada lado da placa, pois o campo tem sentidos opostos dos dois lados da placa). Essa ausência de decaimento com a distância no campo se deve ao tamanho (artificialmente) infinito da placa carregada. Note também que se $\sigma > 0$ o campo está apontando para fora do plano, como na Figura acima e se $\sigma < 0$ o campo elétrico aponta para dentro do plano.

Voltando agora ao exercício original, o campo elétrico formado pelas 4 faces carregadas será, de acordo com o princípio da superposição:



$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2 \varepsilon_0} (\pm \hat{z}) + \frac{\sigma_2}{2 \varepsilon_0} (\pm \hat{z}) + \frac{\sigma_3}{2 \varepsilon_0} (\pm \hat{z}) + \frac{\sigma_4}{2 \varepsilon_0} (\pm \hat{z})$$

Os sinais dos unitários devem ser escolhidos de acordo com o lado da placa, se o ponto onde avaliamos o campo está do lado esquerdo (-) ou do lado direito (+) de cada placa. Por exemplo, o ponto A definido no enunciado, que está na região $z < 0$, está à esquerda de todas as placas, ou seja:

$$\vec{E}_A = \frac{\sigma_1}{2 \varepsilon_0} (-\hat{z}) + \frac{\sigma_2}{2 \varepsilon_0} (-\hat{z}) + \frac{\sigma_3}{2 \varepsilon_0} (-\hat{z}) + \frac{\sigma_4}{2 \varepsilon_0} (-\hat{z}) = -\frac{1}{2 \varepsilon_0} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \hat{z}$$

Note que não sabemos de fato o sentido do campo em A, pois isso vai depender dos sinais e das magnitudes das densidades de carga. A expressão acima vale quaisquer que sejam essas densidades.

Para o ponto B, que está na região entre as placas ($\Delta < z < L + \Delta$), ele está à esquerda de σ_3 e σ_4 e à direita de σ_1 e σ_2 . Então:

$$\vec{E}_B = \frac{\sigma_1}{2 \varepsilon_0} (+\hat{z}) + \frac{\sigma_2}{2 \varepsilon_0} (+\hat{z}) + \frac{\sigma_3}{2 \varepsilon_0} (-\hat{z}) + \frac{\sigma_4}{2 \varepsilon_0} (-\hat{z}) = \frac{1}{2 \varepsilon_0} (\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4) \hat{z}$$

A ideia é a mesma para qualquer ponto no espaço na vizinhança dessas duas placas. Para o ponto C que está dentro da placa da direita, ele está à esquerda de σ_4 e à direita de σ_1, σ_2 e σ_3 . Então:

$$\vec{E}_C = \frac{\sigma_1}{2 \varepsilon_0} (+\hat{z}) + \frac{\sigma_2}{2 \varepsilon_0} (+\hat{z}) + \frac{\sigma_3}{2 \varepsilon_0} (+\hat{z}) + \frac{\sigma_4}{2 \varepsilon_0} (-\hat{z}) = \frac{1}{2 \varepsilon_0} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4) \hat{z}$$

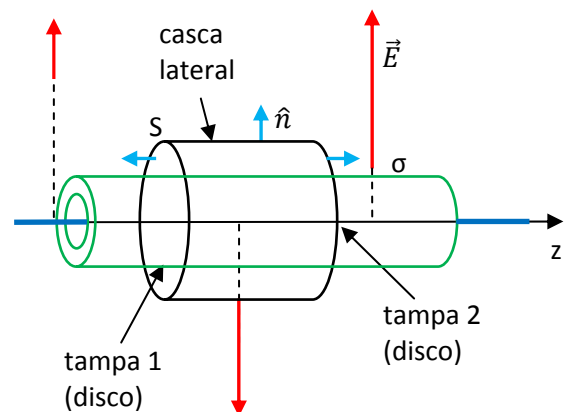
E/P22.38:

Uma casca cilíndrica oca condutora muito longa possui raios a e b ($b > a$) e uma linha carregada ao longo do seu eixo (z).

A casca condutora é como um tubo cilíndrico metálico com espessura $b - a$.

O cilindro possui carga por unidade de comprimento com densidade α e a linha carregada possui também essa mesma densidade de carga. Para tornar o problema um pouco mais geral, vamos assumir que a densidade de carga na casca é α_C e na linha carregada é α_L , não necessariamente iguais. Ao final podemos fazer $\alpha_L = \alpha_C = \alpha$.

A Figura acima mostra esses dois corpos (o cilindro oco condutor em verde e a linha coaxial em azul) e mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma “lata” cilíndrica (composta da junção de uma casca cilíndrica lateral (CL) de raio s qualquer e comprimento L e de duas tampas (T1 e T2) que são discos de raio s). \hat{n} é um campo de vetores normais a essa superfície (setas azuis), apontando para fora dela. A “lata” é



coaxial ao cilindro carregado e à linha carregada. Note que na casca cilíndrica lateral $\hat{n} = \hat{s}$, na tampa 1, $\hat{n} = -\hat{z}$ e na tampa 2, $\hat{n} = \hat{z}$. Mostramos também (em vermelho) algumas setas do campo \vec{E} que esperamos que exista (dada a simetria) no espaço fora do condutor (fora da região $a < s < b$), supondo uma carga positiva depositada na superfície externa do cilindro.

a) Não precisamos calcular o campo elétrico dentro do cilindro ($a < s < b$), pois ele é feito de material condutor e $\vec{E} = \vec{0}$ nessa região. Para calcular o campo elétrico dentro da parte oca ($s < a$) e fora ($s > b$) do cilindro vamos usar a superfície gaussiana S definida na Figura acima. Precisamos lembrar que a simetria da distribuição de carga nos leva a concluir, sem nenhum cálculo, que o campo elétrico que essa distribuição de cargas gera no espaço possui a simetria cilíndrica dada por:

$$\vec{E} = E(s) \hat{s}$$

ou seja, o módulo do campo só depende da distância s ao eixo do cilindro (eixo z) e ele tem a direção ortogonal a esse eixo (direção \hat{s}). Falta apenas determinar a função $E(s)$. Portanto, calculando o fluxo desse campo na superfície S obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E(s) \hat{s} \cdot \hat{n} dA = \int_{T1} E(s) \hat{s} \cdot (-\hat{z}) dA + \int_{T2} E(s) \hat{s} \cdot \hat{z} dA + \int_{CL} E(s) \hat{s} \cdot \hat{s} dA$$

Concluindo (lembrando que $\hat{z} \cdot \hat{s} = 0$):

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0 + 0 + \int_{CL} E(s) \hat{s} \cdot \hat{s} dA = E(s) \int_{CL} dA = E(s) 2 \pi s L$$

Agora, da lei de Gauss, sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(s) (2 \pi s L) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(s) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 2 \pi s L}$$

Vamos agora considerar superfícies gaussianas de diferentes raios s , para calcular o campo elétrico nas diferentes regiões do espaço: $s < a$ e $s > b$. A carga q_{INT} depende de qual região, qual superfície S , estamos considerando.

Na região dentro do oco do cilindro condutor ($s < a$) a carga dentro da superfície S é apenas a carga da linha carregada, ou seja, $q_{INT} = \alpha_L L$. Portanto:

$$E(s) = \frac{\alpha_L L}{\epsilon_0 2 \pi s L} = \frac{\alpha_L}{2 \pi \epsilon_0 s}$$

Na região fora do cilindro condutor ($s > b$) a carga dentro da superfície S é a carga da linha carregada e a carga depositada no cilindro condutor, ou seja, $q_{INT} = \alpha_L L + \alpha_C L$. Portanto:

$$E(s) = \frac{\alpha_L L + \alpha_C L}{\epsilon_0 2 \pi s L} = \frac{\alpha_L + \alpha_C}{2 \pi \epsilon_0 s}$$

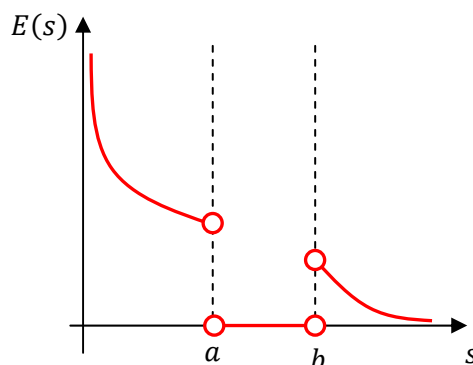
No caso particular $\alpha_L = \alpha_C = \alpha$, segue que:

$$E(s) = \frac{\alpha}{\pi \epsilon_0 s}$$

c) Vamos esboçar um gráfico de $E(s)$ versus s .

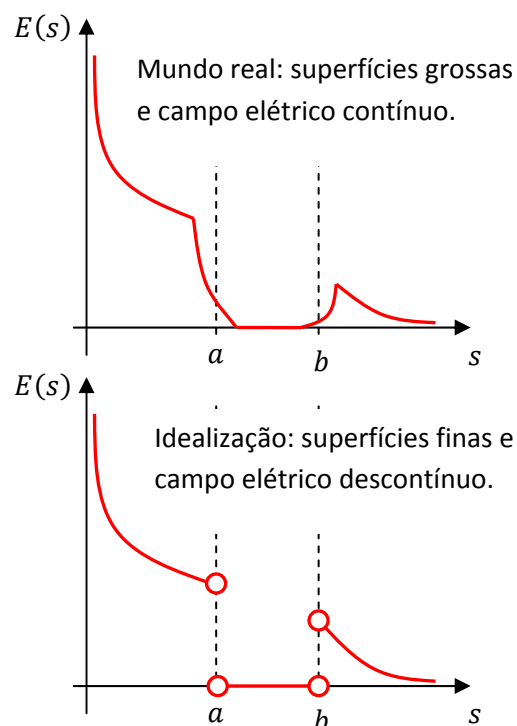
O campo diverge quando nos aproximamos da linha carregada ($s=0$) e decai com $1/s$ na região dentro do oco do cilindro condutor ($s < a$). No próprio condutor ($a < s < b$) o campo é nulo (equilíbrio eletrostático). Fora do condutor ($s > b$) o campo decai novamente com $1/s$. Note que as bolinhas vazadas servem para indicar que o campo elétrico é descontínuo nas paredes do condutor ($s = a$ e $s = b$). Essas descontinuidades são causadas pelas densidades de carga (artificialmente) superficiais que existem nessas paredes, e que

serão calculadas no próximo item. Em $s = a$, por exemplo, o campo elétrico não vale nem $\alpha_L/2\pi\epsilon_0 a$ e nem 0 (zero). Apenas podemos dizer que no limite $s \rightarrow a^-$ o campo assume o valor $\alpha_L/2\pi\epsilon_0 a$ e no limite $s \rightarrow a^+$ o campo elétrico é nulo. Exatamente em $s = a$ o campo elétrico não está definido.



Na natureza não há descontinuidades. No mundo real as densidades de cargas superficiais sempre ocupam uma certa espessura, de alguns átomos. Elas não são de fato matematicamente superficiais, são apenas fisicamente superficiais, ou seja, definidas em regiões com a espessura de poucos átomos, próximos das superfícies dos corpos. Assim sendo, nessas superfícies reais o campo elétrico não é de fato descontínuo, mas tem sim uma variação abrupta, quando percorremos a direção que atravessa a superfície. A Figura ao lado ilustra essa ideia: no mundo real as superfícies são meio “grossas” e o campo elétrico varia continuamente, mas bruscamente. Na idealização que estamos fazendo aqui as superfícies são de fato superfícies matemáticas, de espessura nula, e o campo elétrico é descontínuo nelas. Ao considerarmos densidades de carga superficiais (no sentido matemático),

estamos adotando um modelo simplificado para a natureza, um modelo em que não estamos preocupados com a verdadeira espessura em que ocorrem os fenômenos superficiais (não estamos interessados no que acontece dentro dessas superfícies, pois elas são de fato muito finas).



b) Voltando à Figura no início desse texto, podemos imaginar uma superfície S que tem um raio s tal que $a < s < b$, ou seja, a superfície S tem sua casca lateral toda localizada na região condutora onde o campo elétrico é nulo. Portanto o fluxo do campo elétrico em S é:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E(s) 2\pi s L = 0$$

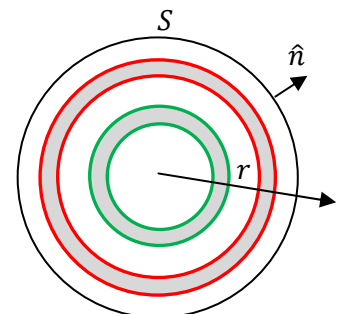
Da lei de Gauss sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow 0 = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{INT} = 0$$

Vemos então que, dentro da superfície S deve haver, além da carga da linha carregada, uma outra carga que anula com a primeira. Essa carga só pode estar concentrada na superfície interna ($s = a$) do cilindro condutor. Como a linha carregada possui densidade de carga por unidade de comprimento α_L , então, uma densidade linear $-\alpha_L$ deve estar concentrada na superfície interna do cilindro condutor. De fato, pensando em um segmento de cilindro de comprimento L , a presença da carga $\alpha_L L$ na linha carregada vai atrair cargas de sinal oposto para a parede interna do cilindro condutor. Uma carga $-\alpha_L L$ vai se concentrar nessa parede ($s = a$), blindando o volume condutor do campo elétrico da linha carregada. Como a carga total no cilindro condutor é $\alpha_C L$, deve restar ainda na parede externa do cilindro ($s = b$) o restante da carga (que podemos chamar de q'), que somada com $-\alpha_L L$, na parede interna, vai dar $\alpha_C L$, ou seja: $q' - \alpha_L L = \alpha_C L \Rightarrow q' = (\alpha_L + \alpha_C) L$. Uma carga $q' = (\alpha_L + \alpha_C) L$ estará distribuída na parede externa ($s = b$) do cilindro condutor. Concluindo: como a densidade de carga no cilindro condutor é α_C e já tem $-\alpha_L$ na superfície interna (atraída pela linha carregada), deve haver uma densidade $\alpha_L + \alpha_C$ na superfície externa ($s = b$) de tal forma que $\alpha_L + \alpha_C + (-\alpha_L) = \alpha_C$. No caso particular $\alpha_L = \alpha_C = \alpha$, uma densidade de carga $-\alpha$ se deposita na parede de dentro do cilindro condutor e uma densidade de carga 2α fica depositada na parede externa do cilindro condutor. A densidade de carga total no cilindro condutor continua sendo $2\alpha + (-\alpha) = \alpha$.

E/P22.45:

Duas cascas condutoras concêntricas, uma de raios a e b ($b > a$) e outra de raios c e d ($d > c$). A casca menor tem excesso de carga $2q$ e a casca maior tem excesso de carga $4q$. Vamos generalizar um pouco o problema, chamando de Q_1 o excesso de cargas na casca menor e de Q_2 o excesso de carga na casca maior. Ao final podemos fazer $Q_1 = 2q$ e $Q_2 = 4q$.



A Figura acima mostra essas duas cascas (em vermelho e em verde, a parte cinza é o material condutor) e mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma “casca esférica” de raio r qualquer. \hat{n} é um campo de vetores normais a essa superfície, apontando para fora dela. Note, não são círculos, são

objetos esféricos no espaço tridimensional. Imagine duas bolas de pingue-pongue (mas feitas de metal) concêntricas, uma dentro da outra. Algo parecido com o mostrado na Figura ao lado.



a) Não precisamos calcular o campo elétrico dentro das cascas condutoras ($a < r < b$ e $c < r < d$), pois $\vec{E} = \vec{0}$ nessas regiões. Para calcular o campo elétrico dentro do oco da casca menor ($r < a$), entre as cascas ($b < r < c$) e fora da casca maior ($r > d$) vamos usar a superfície gaussiana S definida na Figura acima. Precisamos lembrar que a simetria da distribuição de carga nos leva a concluir, sem nenhum cálculo, que o campo elétrico que essa distribuição de carga gera no espaço possui a simetria esférica dada por:

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

ou seja, o módulo do campo só depende da distância r ao centro comum das cascas e este tem a direção radial (direção \hat{r}). Essa simetria está dizendo que não existe direção privilegiada no espaço. As cargas elétricas vão se distribuir uniformemente nas superfícies das cascas condutoras e vão gerar campos elétricos com simetria esférica. Falta apenas determinar a função $E(r)$. Portanto, calculando o fluxo desse campo na superfície S obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} dA = E(r) \int_S dA = E(r) (4 \pi r^2)$$

Agora, da lei de Gauss, sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) (4 \pi r^2) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 4 \pi r^2}$$

Vamos considerar agora superfícies gaussianas com diferentes raios, para calcular o campo elétrico nas diferentes regiões do espaço. A carga q_{INT} depende da superfície S que consideramos.

Na região dentro do oco da casca menor ($r < a$) não há nenhuma carga e, portanto:

$$E(r) = \frac{0}{\epsilon_0 4 \pi r^2} = 0$$

Na região entre as cascas ($b < r < c$) a carga dentro da superfície S é (toda) a carga da casca menor e, portanto:

$$E(r) = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

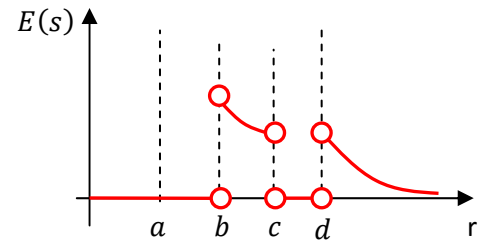
Na região fora da casca maior ($r > d$) a carga dentro da superfície S é (toda) a carga da casca menor e (toda) a carga da casca maior, portanto:

$$E(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Note que os dois campos que calculamos tem o comportamento do tipo carga pontual, o que está de acordo com o teorema das cascas. A carga Q_1 se distribui uniformemente na superfície externa da casca menor ($r = b$) e produz campo nulo no interior dela e o mesmo campo de uma carga pontual Q_1 (localizada em $r=0$) fora dela. A carga Q_2 se distribui uniformemente nas superfícies da casca maior ($r = c$ e $r = d$) e produz campo nulo no interior dela e o mesmo campo de uma carga pontual Q_2 (localizada em $r=0$) fora dela. O campo elétrico resultante, que foi calculado acima via lei de Gauss, é a superposição desses campos de “carga pontual”.

b) Vamos esboçar um gráfico de $E(r)$ versus r .

O campo é nulo no interior do oco e dentro (metal) da casca menor, decai com $1/r^2$ na região entre as cascas, é nulo dentro da casca maior (metal) e decai com $1/r^2$ na região fora da casca maior. Note que as bolinhas vazadas servem para indicar que o campo elétrico é descontínuo nas paredes dos condutores ($r = b$, $r = c$ e $r = d$)



que possuem densidade de carga elétrica superficial. Essas densidades de carga superficiais que existem nessas paredes serão calculadas no próximo item.

c) Voltando à Figura no início desse texto podemos imaginar uma superfície S que tem um raio s tal que $a < s < b$, ou seja, a superfície S está toda localizada na região condutora dentro da casca menor onde o campo elétrico é nulo. Portanto o fluxo do campo elétrico em S é:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E(s) (4 \pi r^2) = 0 (4 \pi r^2) = 0$$

Da lei de Gauss sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow 0 = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{INT} = 0$$

Vemos então que, dentro da superfície S não há nenhum excesso de carga. Esse excesso, se houvesse, estaria na superfície $r = a$. Portanto, nessa superfície não há nenhum acúmulo de cargas (como na há nada na cavidade da esfera menor, nenhuma carga foi atraída ou repelida da superfície $s = a$ dessa cavidade). A carga Q_1 que existe em excesso na casca menor deve estar concentrada na superfície externa com raio $r = b$. Concluindo: nessa superfície com raio $r = b$ a densidade de carga é uniforme e vale $\sigma_1 = Q_1/4\pi b^2$.

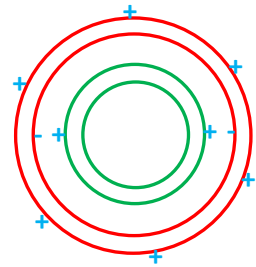
Podemos imaginar agora que a superfície S tem um raio r tal que $c < r < d$, ou seja, a superfície S está toda localizada na região condutora dentro da casca maior onde o campo elétrico é nulo (metal). Portanto o fluxo do campo elétrico em S é:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E(s) (4 \pi r^2) = 0 (4 \pi r^2) = 0$$

Da lei de Gauss sabemos que:

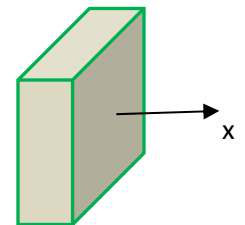
$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow 0 = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{INT} = 0$$

Vemos então que, dentro da superfície S não há nenhum excesso de carga. Como existe um excesso Q_1 na superfície $r = b$, deve haver então um excesso $-Q_1$ na superfície $r = c$, de tal forma que $Q_1 + (-Q_1) = 0$. Portanto, na superfície $r = c$ há um acúmulo uniforme de cargas igual a $-Q_1$. Concluindo: nessa superfície a densidade de carga é uniforme e vale $\sigma_2 = -Q_1/4\pi c^2$ (na cavidade da casca maior há uma carga Q_1 , que atrai uma carga $-Q_1$ para a parede dessa cavidade). Como a carga total na casca maior é Q_2 e existe $-Q_1$ na superfície $r = c$, concluímos que na superfície $r = d$ há um excesso de carga $Q_2 + Q_1$ de tal forma que $Q_2 + Q_1 + (-Q_1) = Q_2$. Portanto, na superfície $r = d$ há um acúmulo de cargas igual a $Q_2 + Q_1$. Concluindo: nessa superfície a densidade de carga é uniforme e vale $\sigma_3 = (Q_2 + Q_1)/4\pi d^2$. A Figura ao lado ilustra essas densidades de carga. A carga Q_1 na casca menor (em $r = b$) atrai (e é atraída por) uma carga $-Q_1$ na superfície interna da casca maior ($r = c$) e sobra ainda $Q_2 + Q_1$ na superfície externa ($r = d$) da casca maior para totalizar a carga Q_2 concentrada nessa casca.

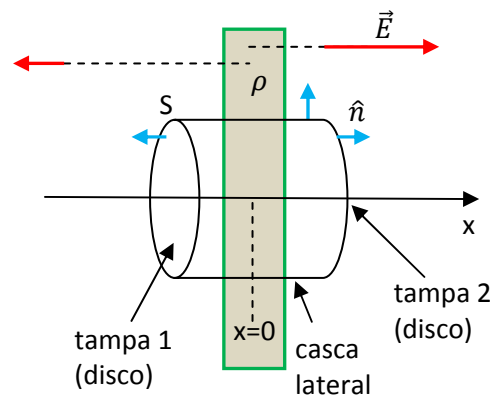


E/P22.54:

Uma placa plana grossa (espessura $2d$) isolante, muito larga (infinita para todos os efeitos) possui densidade de carga volumétrica uniforme ρ , conforme a Figura acima (visão oblíqua). Vamos definir um eixo x ortogonal à placa, com origem ($x=0$) no plano central da placa (as faces maiores da placa estão em $x = \pm d$).



A Figura que segue ilustra a placa plana (em verde) carregada com densidade de carga uniforme ρ em todo seu volume (visão de perfil). A Figura mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma "lata" cilíndrica (composta de uma casca cilíndrica lateral (CL) de raio s qualquer e comprimento L e de duas tampas (T1 e T2) que são discos de raio s). \hat{n} é um campo de vetores normais (setas azuis) a essa superfície, apontando para fora dela. Note que na casca cilíndrica lateral $\hat{n} = \hat{s}$, na tampa 1, $\hat{n} = -\hat{x}$ e na tampa 2, $\hat{n} = \hat{x}$. Mostramos também (em vermelho) algumas setas do campo \vec{E} que esperamos que exista na vizinhança desse plano, dada a simetria da distribuição de cargas., supondo $\rho > 0$. Essa simetria nos leva a concluir, sem nenhum cálculo, que esse campo elétrico deve ter a simetria:



$$\vec{E} = E(|x|)(\pm\hat{x})$$

ou seja, a intensidade do campo deve depender apenas da distância ao plano $|x|$ e este deve apontar ao longo do eixo x e deve ter o sentido $+\hat{x}$ no lado direito e $-\hat{x}$ no lado esquerdo do plano (supondo $\rho > 0$). Falta apenas determinar a função $E(|x|)$.

a) Note que como o campo elétrico ao longo de x inverte de sinal/sentido em $x=0$ e é contínuo nesse lugar (o campo elétrico só é descontínuo em pontos onde existe uma densidade de carga infinitamente concentrada em um ponto, uma linha ou uma superfície). Portanto, deve valer $E(x=0) = 0$ (uma função contínua f que muda de sinal em um ponto x_0 só pode estar passando pelo zero em x_0 , ou seja, $f(x_0) = 0$). No nosso cálculo do campo elétrico poderíamos tirar proveito desse fato, mas não vamos fazê-lo, para deixar claro que esse conhecimento prévio não é necessário.

b) Calculando o fluxo do campo elétrico na superfície S obtemos:

$$\begin{aligned}\phi &= \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E(|x|) \hat{x} \cdot \hat{n} dA = \\ &= \int_{T1} E(|-x|)(-\hat{x}) \cdot (-\hat{x}) dA + \int_{T2} E(|x|) \hat{x} \cdot \hat{x} dA + \int_{CL} E(|x|) \hat{x} \cdot \hat{s} dA\end{aligned}$$

Concluindo, sendo as tampas superfícies com x constante ($\pm x$) e área A obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E(|-x|) A + E(|x|) A + 0 = 2 E(|x|) A$$

já que $|-x| = |x|$. Note que $\hat{x} \cdot \hat{s} = 0$.

Agora, da lei de Gauss, sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2 E(|x|) A = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(|x|) = \frac{q_{INT}}{2 \epsilon_0 A}$$

Há aqui duas possibilidades:

1) se as tampas da superfície S estão dentro do plano carregado. Segue que a carga dentro dessa superfície será:

$$q_{INT} = 2 |x| A \rho$$

que é a carga no volume de um cilindro de altura $2|x|$ e área da base A . Portanto, o módulo do campo elétrico dentro da placa ($-d < x < d$) é:

$$E(|x|) = \frac{q_{INT}}{2 \epsilon_0 A} = \frac{2 |x| A \rho}{2 \epsilon_0 A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} |x|$$

A magnitude do campo cresce com x . Note que, como se já não soubéssemos: $E(0) = 0$.

2) se as tampas da superfície S estão fora do plano carregado, segue que a carga dentro dessa superfície será:

$$q_{INT} = 2 d A \rho$$

que é a carga no volume de um cilindro de altura $2d$ e área da base A . Portanto, o módulo do campo elétrico fora da placa ($x < -d$ e $x > d$) é:

$$E(|x|) = \frac{q_{INT}}{2 \varepsilon_0 A} = \frac{2 d A \rho}{2 \varepsilon_0 A} = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}$$

O campo é uniforme fora da placa, não depende de x (mas inverte de sentido em lados diferentes da placa).

Poderíamos ter tirado proveito do conhecimento prévio de que $E(x = 0) = 0$, colocando a tampa 1 (T1) da superfície gaussiana exatamente sobre o plano $x=0$ e a tampa T2 em uma posição $x > 0$ qualquer. Dessa forma, repetindo os cálculos para essa nova superfície gaussiana obtemos:

O fluxo do campo elétrico na superfície S é:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E(|x|) \hat{x} \cdot \hat{n} dA = \int_{T1} \vec{0} \cdot (-\hat{x}) dA + \int_{T2} E(|x|) \hat{x} \cdot \hat{x} dA + \int_{CL} E(|x|) \hat{x} \cdot \hat{s} dA$$

Concluindo, sendo a tampa T2 uma superfície com x constante e área A obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0 + E(x) A + 0 = E(x) A$$

Agora, da lei de Gauss, sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(x) A = \frac{q_{INT}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{q_{INT}}{\varepsilon_0 A}$$

Novamente, há duas possibilidades:

1) se a tampa T2 da superfície S está dentro do plano carregado ($x < d$), segue que a carga no volume dentro dessa superfície será:

$$q_{INT} = x A \rho$$

que é a carga no volume de um cilindro de altura x e área da base A . Portanto, o módulo do campo elétrico dentro da placa é:

$$E(x) = \frac{q_{INT}}{\varepsilon_0 A} = \frac{x A \rho}{\varepsilon_0 A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x$$

Que é o mesmo resultado que já tínhamos obtido, só que agora nos restringimos ao caso $x > 0$. Na região $x < 0$ a magnitude do campo se comporta da mesma forma, por simetria.

2) se a tampa T2 da superfície S está fora do plano carregado ($x > d$), segue que a carga dentro dessa superfície será:

$$q_{INT} = d A \rho$$

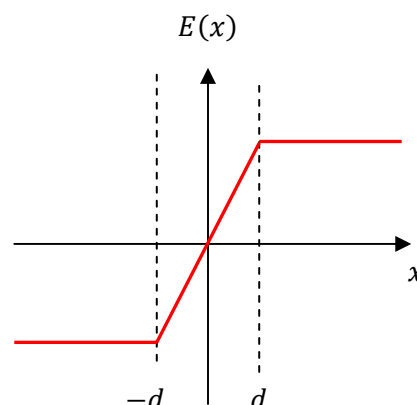
que é a carga no volume de um cilindro de altura d e área da base A . Portanto, o módulo do campo elétrico fora da placa é:

$$E(x) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 A} = \frac{d A \rho}{\epsilon_0 A}$$

Novamente recuperamos o resultado que já havíamos obtido.

O gráfico ao lado ilustra o comportamento do campo elétrico ao longo de x em função de x .

O campo elétrico é nulo no centro da placa, aumenta de magnitude quando nos afastamos do centro e atinge um valor constante (independente de x) fora da placa. Note que o campo elétrico é contínuo nas faces da placa. $E(x) > 0$ significa que o campo está apontando ao longo de x positivo e $E(x) < 0$ significa um campo ao longo de $-x$ (que é o caso se $\rho > 0$).

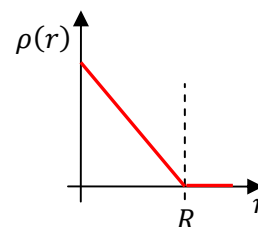


O campo elétrico não apresenta nenhuma descontinuidade. Descontinuidades ocorreriam apenas se houvesse densidades de carga superficiais (ou seja, de espessura nula) depositadas nas superfícies da placa carregada. Isso ocorreria se fizéssemos $d \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$ para obtermos uma placa infinita de espessura nula com densidade de carga uniforme (finita) $\sigma = 2 d \rho$. Nesse caso, o gráfico de $E(x) \times x$ apresentaria uma descontinuidade em $x = 0$.

E/P22.57:

Uma esfera maciça isolante de raio R possui uma densidade de carga volumétrica não uniforme dada por:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$



sendo r o raio medido em relação ao centro da esfera e ρ_0 uma constante dada por:

$$\rho_0 = \frac{3Q}{\pi R^3}$$

A carga está mais concentrada no centro da esfera, onde $\rho(r = 0) = \rho_0$ e vai ficando menos concentrada à medida que nos aproximamos da superfície da esfera, onde $\rho(r = R) = 0$. A Figura acima ilustra o comportamento (linear) da densidade de carga em função do raio. Note que fora da esfera ($r > R$) não há carga.

a) A carga elétrica total depositada na esfera é:

$$q_T = \int_{VOL} \rho(r) dV = \int_{r=0}^{r=R} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{4}\right) = \frac{\pi}{3} \rho_0 R^3 = Q$$

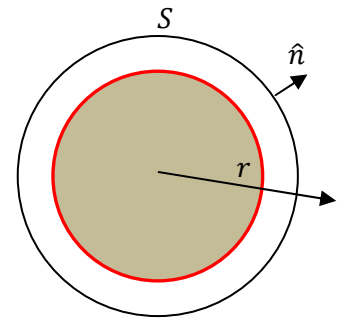
Note, não podemos usar aqui a relação mais simples $q_T = \rho V$, sendo V o volume da esfera, porque a densidade de cargas ρ não é constante, ela é uma função do raio r .

b) A Figura abaixo mostra a esfera carregada (em vermelho) e mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma “casca esférica” de raio r qualquer. \hat{n} é um campo de vetores normais a essa superfície, apontando para fora dela. Note, não são círculos, são objetos esféricos no espaço tridimensional. A esfera carregada existe mesmo, no mundo real, mas a superfície gaussiana só existe no mundo das idéias.

Para calcular o campo elétrico dentro ($r < R$) e fora da esfera ($r > R$), vamos usar a superfície gaussiana S definida na Figura. Precisamos lembrar que a simetria da distribuição de carga nos leva a concluir, sem nenhum cálculo, que o campo elétrico que essa distribuição de carga gera no espaço possui a simetria esférica dada por:

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

ou seja, o campo só depende, em módulo, da distância r ao centro da esfera e tem a direção radial (direção \hat{r}). Não há nenhuma direção privilegiada no espaço. Falta apenas determinar a função $E(r)$.



Portanto, calculando o fluxo desse campo na superfície S obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} dA = E(r) \int_S dA = E(r) 4\pi r^2$$

Agora, da lei de Gauss, sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) (4\pi r^2) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

Vamos considerar agora superfícies gaussianas com diferentes raios, para calcular o campo elétrico nas diferentes regiões do espaço.

Na região dentro da esfera ($r < R$) a carga elétrica interna à superfície S será:

$$q_{INT}(r) = \int_{VOL} \rho(r) dV = \int_{r=0}^{r=r} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) = 12 \frac{Q}{R^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R}\right) r^3$$

Note que para $r = R$ obtemos novamente a carga total na esfera: $q_{INT}(r = R) = Q$.

Portanto, o campo elétrico no interior da esfera é:

$$E(r) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 4 \pi r^2} = \frac{1}{\epsilon_0 4 \pi r^2} 12 \frac{Q}{R^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R} \right) r^3 = \frac{3Q}{\pi \epsilon_0 R^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R} \right) r$$

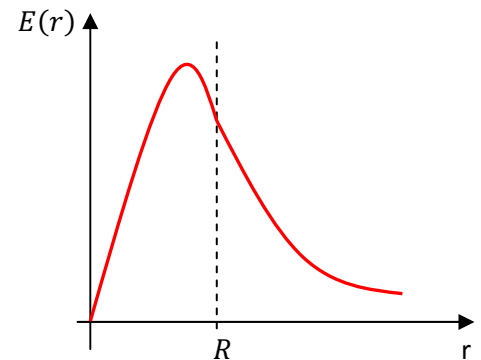
Na região fora da esfera ($r > R$) a carga elétrica interna à superfície S será ($q_{INT}(r = R) = Q$):

$$q_{INT} = Q$$

Portanto, o campo elétrico no exterior da esfera é:

$$E(r) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 4 \pi r^2} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

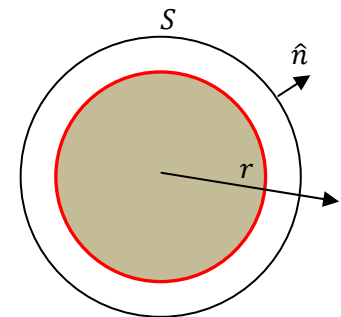
A Figura ao lado ilustra o comportamento de $E(r)$ versus r . Vemos que o campo elétrico é nulo no centro da esfera, cresce à medida que nos afastamos da origem, atinge um valor máximo dentro da esfera, em $r = 2R/3$ (onde $dE(r)/dr = 0$), e passa a decair com $1/r^2$ na região fora da esfera. O comportamento fora é exatamente o esperado tendo em vista o teorema das cascas: uma distribuição de cargas esfericamente simétrica se comporta como uma carga pontual localizada no centro dessa distribuição, para pontos fora dela. Note que o campo elétrico é contínuo na superfície da esfera ($r=R$) (pois não há σ nessa superfície).



E/P22.61:

Considere uma esfera maciça isolante de raio a com uma densidade de carga elétrica uniforme ρ .

a) A Figura acima mostra a esfera carregada (em vermelho) e mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma “casca esférica” de raio r qualquer. \hat{n} é um campo de vetores normais a essa superfície, apontando para fora dela. Note, não são círculos, são objetos esféricos no espaço tridimensional.



Para calcular o campo elétrico dentro da esfera ($r < a$) e fora da esfera ($r > a$) vamos usar a superfície gaussiana S definida na Figura. Precisamos lembrar que a simetria da distribuição de cargas nos leva a concluir, sem nenhum cálculo, que o campo elétrico que essa distribuição de carga gera no espaço possui a simetria esférica dada por:

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

ou seja, o campo só depende, em módulo, da distância r ao centro da esfera e tem a direção radial (direção \hat{r}). Falta apenas determinar a função $E(r)$. Portanto, calculando o fluxo desse campo na superfície S obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} dA = E(r) \int_S dA = E(r) (4 \pi r^2)$$

Agora, da lei de Gauss, sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) (4 \pi r^2) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 4 \pi r^2}$$

Vamos considerar agora superfícies gaussianas com diferentes raios para calcular o campo elétrico nas diferentes regiões do espaço.

Na região dentro da esfera ($r < a$) a carga elétrica interna à superfície S será:

$$q_{INT}(r) = \int_{VOL} \rho dV = \int_{r=0}^{r=r} \rho 4 \pi r^2 dr = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$$

Note, aqui podemos usar a relação mais simples $q = \rho V$, sendo V o volume da esfera delimita por S (de raio r), porque a densidade de cargas ρ é constante/uniforme, ela não é uma função do raio r , ou de qualquer outra coordenada espacial. É apenas uma constante (que sai da integral).

Portanto, o campo elétrico no interior da esfera é:

$$E(r) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 4 \pi r^2} = \frac{1}{\epsilon_0 4 \pi r^2} \rho \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Na região fora da esfera ($r > a$) a carga elétrica interna à superfície S será:

$$q_{INT} = \int_{VOL} \rho dV = \int_{r=0}^{r=a} \rho 4 \pi r^2 dr = \rho \frac{4\pi}{3} a^3$$

Portanto, o campo elétrico no exterior da esfera é:

$$E(r) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 4 \pi r^2} = \frac{1}{\epsilon_0 4 \pi r^2} \rho \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

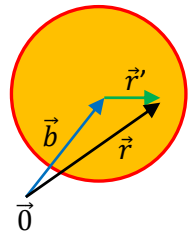
O campo elétrico cresce linearmente dentro da esfera e decai com $1/r^2$ fora dela. Fora da esfera, tudo se dá como se a carga da esfera estivesse toda concentrada em uma carga pontual localizada no centro, de acordo com o teorema das cascas.

O vetor campo elétrico dentro da esfera é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

sendo \vec{r} o vetor posição (do ponto onde o campo está sendo avaliado) em relação ao centro da esfera.

Imaginemos agora que essa esfera esteja com seu centro deslocado da origem, em uma posição \vec{b} . Qual a nova expressão do campo elétrico dentro dessa esfera deslocada? A Figura ao lado ilustra essa ideia. Note que \vec{r} não é mais um vetor que nasce no centro da esfera, pois ela foi deslocada de \vec{b} . Se chamarmos de \vec{r}' a posição em relação ao centro da esfera, então, do nosso resultado anterior (apenas trocando \vec{r} por \vec{r}'):



$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}'$$

Vemos na Figura que, da regra do paralelogramo: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{b}$. Portanto: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{b}$ e, voltando para a variável \vec{r} (mas com outra origem, não mais no centro da esfera) obtemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{b})$$

Fizemos apenas uma mudança de referencial. Essa mudança não trás nenhuma vantagem na descrição do sistema e não seria feita se não fosse o caso aqui, em que ela é necessária. Resumindo, o campo elétrico dentro de uma esfera com densidade de carga ρ uniforme é:

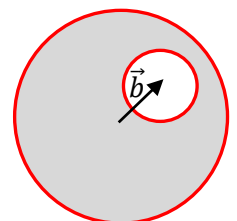
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

sendo \vec{r} um vetor posição medido em relação ao centro dessa esfera (a origem do sistema de coordenadas está no centro da esfera, o que é a referência mais conveniente e comumente usada). Note que, em $\vec{r} = \vec{0}$, que é o centro da esfera, vale, por simetria, $\vec{E} = \vec{0}$. Se deslocarmos o centro da esfera da origem, para uma posição \vec{b} (não sabemos ainda para quê), então, a expressão do campo tendo como referência essa nova origem é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{b})$$

Note agora que, em $\vec{r} = \vec{b}$, que é o centro da esfera (nesse referencial), vale $\vec{E} = \vec{0}$.

b) Agora vamos entender o objetivo dessa mudança de referência. Considere uma esfera maciça isolante de raio R (em cinza) carregada com uma densidade de carga uniforme ρ . Dentro dessa esfera há uma cavidade vazia de raio a (em branco), com centro em uma posição \vec{b} (em relação ao centro da esfera isolante, $b < R$), conforme a Figura ao lado. Vamos calcular o campo elétrico no interior da cavidade.



Para isso usaremos o princípio da superposição e o nosso resultado anterior: essa esfera de raio R e densidade ρ com cavidade vazia de raio a é equivalente a uma esfera completa de raio R , sem cavidade, superposta a uma esfera de raio a com densidade de carga $-\rho$ na posição da cavidade. A densidade $-\rho$ se

superpõe à densidade ρ na região da cavidade, funcionando de fato como uma densidade de carga nula, ou seja, uma cavidade vazia ($\rho + (-\rho) = 0$).

Portanto, dentro da cavidade vale: $\vec{E}_{CAV} = \vec{E}_{R\rho} + \vec{E}_{a(-\rho)}$.

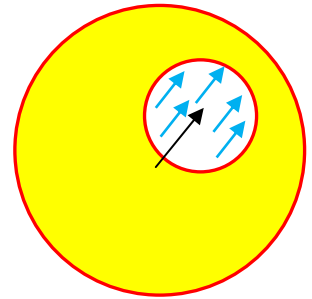
Dos nossos resultados anteriores concluímos que (note que \vec{r} nasce no centro da esfera de raio R):

$$\vec{E}_{R\rho} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \qquad \vec{E}_{a(-\rho)} = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{b})$$

Portanto:

$$\vec{E}_{CAV} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{b}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{b}$$

que é um campo uniforme, ou seja, independente da posição no espaço dentro da cavidade. A Figura ao lado ilustra esse campo (setas azuis). Tente imaginar essa figura no espaço 3D. O vetor \vec{b} é a seta preta e as setas azuis são as setas do campo elétrico dentro da cavidade (que são paralelas a \vec{b}). Note que se $\vec{b} = \vec{0}$, ou seja, se a cavidade for concêntrica à esfera, então $\vec{E}_{CAV} = \vec{0}$, ou seja, não haveria campo elétrico no interior da cavidade. Esse último resultado está de acordo com o teorema das cascas.

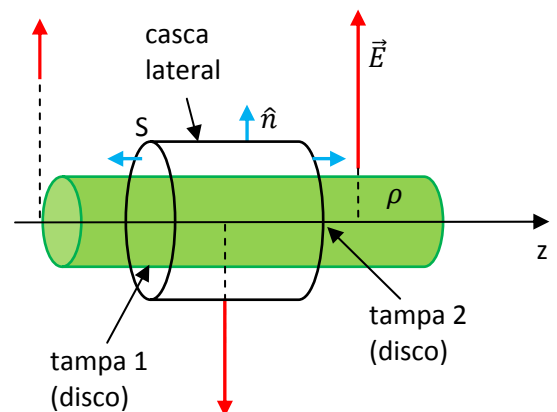


E/P22.62:

Esse exercício trás uma situação parecida com a do exercício anterior, mas agora com simetria cilíndrica. Um cilindro maciço isolante muito longo de raio R possui uma densidade de carga volumétrica uniforme ρ .

A Figura ao lado mostra esse cilindro (em verde) e mostra também uma superfície fechada S com a forma de uma “lata” cilíndrica (composta de uma casca cilíndrica lateral (CL) de raio s qualquer e comprimento L e de duas tampas (T1 e T2) que são discos de raio s).

\hat{n} é um campo de vetores normais a essa superfície (setas azuis), apontando para fora dela. A “lata” é coaxial ao cilindro carregado. Note que na casca cilíndrica lateral $\hat{n} = \hat{s}$, na tampa 1, $\hat{n} = -\hat{z}$ e na tampa 2, $\hat{n} = \hat{z}$. Mostramos também (em vermelho) algumas setas do campo \vec{E} que esperamos que exista no espaço, dada a simetria da distribuição de cargas, para $\rho > 0$.



a) Precisamos lembrar que a simetria da distribuição de carga nos leva a concluir, sem nenhum cálculo, que o campo elétrico que essa distribuição de cargas gera no espaço possui a simetria cilíndrica:

$$\vec{E} = E(s) \hat{s}$$

ou seja, o campo só depende, em módulo, da distância s ao eixo do cilindro (eixo z) e tem a direção ortogonal a esse eixo (direção \hat{s}). Falta apenas determinar a função $E(s)$. Portanto, calculando o fluxo desse campo na superfície S obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E(s) \hat{s} \cdot \hat{n} dA = \int_{T1} E(s) \hat{s} \cdot (-\hat{z}) dA + \int_{T2} E(s) \hat{s} \cdot \hat{z} dA + \int_{CL} E(s) \hat{s} \cdot \hat{s} dA$$

Concluindo (lembrando que $\hat{s} \cdot \hat{z} = 0$):

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0 + 0 + \int_{CL} E(s) \hat{s} \cdot \hat{s} dA = E(s) \int_{CL} dA = E(s) (2 \pi s L)$$

Agora, da lei de Gauss, sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(s) (2 \pi s L) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(s) = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0 2 \pi s L}$$

Vamos considerar agora superfícies gaussianas com diferentes raios para calcular o campo elétrico nas diferentes regiões do espaço.

Na região dentro do cilindro isolante, a carga dentro da superfície S é dada por:

$$q_{INT} = \rho \pi s^2 L$$

que é a carga dentro de um cilindro de comprimento L e área da base πs^2 (com ρ uniforme). Portanto, o campo elétrico na região dentro do cilindro isolante é:

$$E(s) = \frac{\rho \pi s^2 L}{\epsilon_0 2 \pi s L} = \frac{\rho s}{2 \pi \epsilon_0}$$

Na região fora do cilindro isolante a carga dentro da superfície S é:

$$q_{INT} = \rho \pi R^2 L$$

que é a carga dentro de um cilindro de comprimento L e área da base πR^2 (com ρ uniforme). Portanto:

$$E(s) = \frac{\rho \pi R^2 L}{\epsilon_0 2 \pi s L} = \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0 s}$$

Dentro do cilindro o campo cresce linearmente como raio s e fora do cilindro ele decai com $1/s$. Fora do cilindro tudo se dá como se toda a carga do cilindro estivesse concentrada em uma linha fina ao longo do eixo z (teorema das cascas, das cascas cilíndricas). O vetor campo elétrico dentro do cilindro é:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2 \pi \epsilon_0} s \hat{s}$$

Imaginemos agora que esse cilindro esteja com seu eixo deslocado do eixo z , deslocado de \vec{b} . Qual a expressão do campo elétrico dentro desse cilindro deslocado? A Figura abaixo ilustra essa ideia, em uma visão

de frente (seção transversal). Obviamente, se $\vec{r}' = s' \hat{s}'$ é um vetor posição em relação ao eixo do cilindro isolante (que não é mais o eixo z), então, do nosso resultado anterior:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2 \pi \epsilon_0} s' \hat{s}'$$

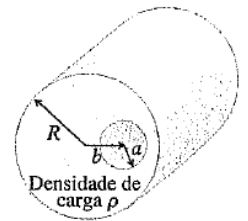
Apenas trocamos a variável $\vec{r} = s \hat{s}$, que era o raio medido em relação ao eixo do cilindro, pela nova variável $\vec{r}' = s' \hat{s}'$, que passou a fazer o papel de raio medido em relação ao eixo do cilindro.

Vemos na Figura que, da regra do paralelogramo: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{b}$. Portanto: $\vec{r}' = s \hat{s} - \vec{b}$ e:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2 \pi \epsilon_0} (s \hat{s} - \vec{b})$$

Note que o campo elétrico se anula no eixo do cilindro, ou seja, em $\vec{r} = s \hat{s} = \vec{b}$.

b) Considere agora um cilindro maciço isolante de raio R com uma densidade de carga uniforme ρ . Dentro desse cilindro há uma cavidade cilíndrica vazia de raio a , com eixo paralelo ao eixo z em uma posição deslocada de \vec{b} (em relação ao eixo z do cilindro isolante). Algo como na figura ao lado. Vamos calcular o campo elétrico no interior da cavidade cilíndrica.



Para isso usaremos o princípio da superposição: esse cilindro de raio R e densidade ρ com cavidade vazia de raio a é equivalente a um cilindro completo, sem cavidade, superposto a um cilindro de raio a com densidade de carga $-\rho$ na posição da cavidade. A densidade $-\rho$ se superpõe à densidade ρ funcionando de fato como uma densidade de carga nula, ou seja, uma cavidade vazia.

Portanto, dentro da cavidade vale:

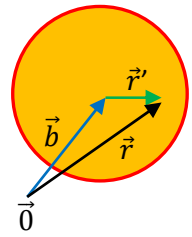
$$\vec{E}_{CAV} = \vec{E}_{R\rho} + \vec{E}_{a(-\rho)}$$

Dos nossos resultados anteriores concluímos que:

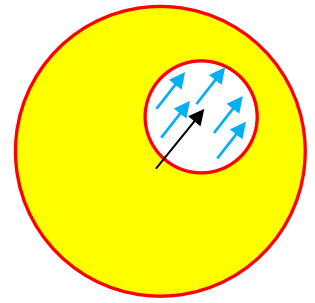
$$\text{Portanto: } \vec{E}_{R\rho} = \frac{\rho}{2 \pi \epsilon_0} s \hat{s} \quad \vec{E}_{a(-\rho)} = \frac{-\rho}{2 \pi \epsilon_0} (s \hat{s} - \vec{b})$$

$$\vec{E}_{CAV} = \frac{\rho}{2 \pi \epsilon_0} s \hat{s} + \frac{-\rho}{2 \pi \epsilon_0} (s \hat{s} - \vec{b}) = \frac{\rho \vec{b}}{2 \pi \epsilon_0}$$

que é um campo uniforme, ou seja, independente da posição no espaço dentro da cavidade. A Figura ao lado ilustra esse campo, em uma visão frontal do cilindro (seção transversal). O vetor \vec{b} é a seta preta e as setas azuis são as setas do campo elétrico dentro da cavidade (que são paralelas ao vetor \vec{b}). Note que se $\vec{b} = \vec{0}$, ou

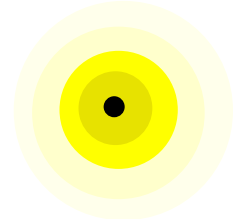


seja, se a cavidade for coaxial ao cilindro, então $\vec{E}_{CAV} = \vec{0}$, ou seja, não haveria campo elétrico no interior da cavidade. Esse último resultado está de acordo com o teorema das cascas (das cascas cilíndricas).



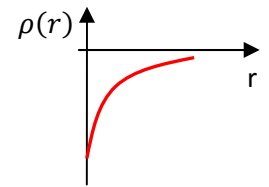
E/P22.65:

Um modelo eletrostático para o átomo de Hidrogênio (ver Figura ao lado): o próton é uma carga pontual $+Q$ na origem (bolinha preta). O elétron é uma nuvem de carga negativa (bola amarela que vai ficando cada vez mais rarefeita quando nos afastamos do núcleo) espalhada no espaço todo conforme a distribuição volumétrica não uniforme (a_0 é uma constante e r é o raio em relação ao próton):



$$\rho(r) = -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

A Figura ao lado esboça o comportamento da densidade de carga eletrônica $\rho(r)$ em função do raio r (a distância ao núcleo). A densidade de carga eletrônica é (obviamente) negativa e decai exponencialmente à medida que nos afastamos do núcleo em $r = 0$. Exatamente em $r=0$ vale $\rho(r) = -\frac{Q}{\pi a_0^3}$ e vale também $\rho(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. A constante a_0 define a taxa de decaimento de $\rho(r)$, ou seja, define uma espécie de raio atômico.



a) Trata-se de uma distribuição de cargas esfericamente simétrica. Imaginemos uma superfície esférica S de raio r qualquer com centro exatamente sobre o próton (ou seja, na origem $r=0$). A carga elétrica interna a essa superfície imaginária é:

$$q_{INT}(r) = Q + \int_{r=0}^r \rho(r) dV$$

já que dentro de S está o próton e uma parte da nuvem de carga correspondente ao elétron. Portanto:

$$q_{INT}(r) = Q + \int_{r=0}^r \rho(r) 4\pi r^2 dr = Q + \int_{r=0}^r -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr$$

De uma tabela de integrais sabemos que se $f(x) = x^2 e^{-kx}$ então:

$$\int f(x) dx = -\frac{e^{-kx}}{k^3} (k^2 x^2 + 2kx + 2) + C = F(x)$$

Segue que:

$$q_{INT}(r) = Q - \frac{4Q}{a_0^3} [F(r) - F(0)]$$

Portanto, sendo $k = 2/a_0$, obtemos:

$$q_{INT}(r) = Q + \frac{4Q}{a_0^3} \frac{1}{(2/a_0)^3} \left[e^{-\frac{2r}{a_0}} \left((2/a_0)^2 r^2 + 2(2/a_0)r + 2 \right) - 2 \right]$$

Simplificando:

$$q_{INT}(r) = Q e^{-\frac{2r}{a_0}} \left(2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 + 2 \frac{r}{a_0} + 1 \right)$$

Note que quando $r \rightarrow 0$ só sobra o próton dentro de S e $q_{INT}(r \rightarrow 0) \rightarrow Q$. Por outro lado, se $r \rightarrow \infty$, a superfície S engloba toda a carga elétrica do átomo que é $q_{INT}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, pois todos os átomos são eletricamente neutros (eles deixam de ser neutros quando perdem ou ganham elétrons e se transformam em íons).

b) Para calcular o campo elétrico desse átomo vamos usar a superfície S definida acima como uma superfície gaussiana na lei de Gauss. Precisamos lembrar que a simetria da distribuição de carga nos leva a concluir, sem nenhum cálculo, que o campo elétrico que essa distribuição de carga gera no espaço possui a simetria esférica dada por:

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

ou seja, o campo só depende, em módulo, da distância r ao centro da esfera e tem a direção radial (direção \hat{r}). Não há direções privilegiadas no espaço. Falta apenas determinar a função $E(r)$. Portanto, calculando o fluxo desse campo na superfície gaussiana S (uma esfera de raio r) obtemos:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} dA = E(r) \int_S dA = E(r) 4 \pi r^2$$

Agora, da lei de Gauss, sabemos que:

$$\phi = \frac{q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) (4 \pi r^2) = \frac{q_{INT}(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q_{INT}(r)}{\epsilon_0 4 \pi r^2}$$

Substituindo $q_{INT}(r)$ calculado anteriormente obtemos:

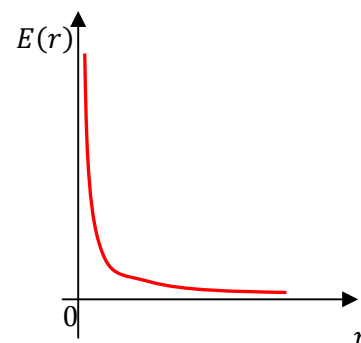
$$E(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \left(2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 + 2 \frac{r}{a_0} + 1 \right)$$

Note que quando $r \rightarrow 0$ só sobra o próton e o campo elétrico é o campo de uma carga pontual positiva Q:

$$E(r \rightarrow 0) \rightarrow \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

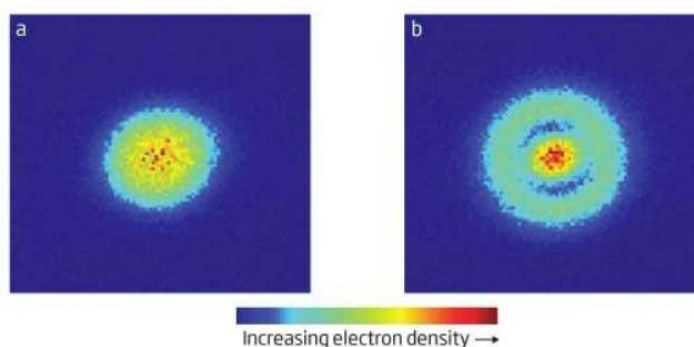
Por outro lado, se $r \rightarrow \infty$, o campo elétrico se anula, significando que a influência elétrica do átomo deixa de existir, ou seja, ele deixa de atrair ou repelir outras cargas elétricas na sua vizinhança.

c) Esboçamos ao lado um gráfico de $E(r)$ versus r . O campo diverge quando nos aproximamos do núcleo (em $r=0$) e vai ficando cada vez mais fraco quando nos afastamos dele. Trata-se de um comportamento razoável, pois esperamos que um átomo interaja mais fortemente com outras partículas carregadas que estejam mais próximas dele. À medida que r aumenta a nuvem eletrônica vai blindando o núcleo e o campo elétrico resultante, do núcleo e da nuvem eletrônica (ou seja, o campo elétrico do átomo), vai se anulando. O decaimento de $E(r)$ com r é muito rápido (exponencial), definindo basicamente um tamanho finito para o átomo.



Pode parecer estranho representar o elétron através de uma nuvem de cargas elétricas que se espalha por todo o espaço, mas esse é basicamente o cenário que se revela na mecânica quântica. Nesse formalismo as partículas não assumem posições bem definidas no espaço, pois seus comportamentos são descritos por ondas que se propagam nesse espaço. Assim sendo, um elétron no átomo de Hidrogênio pode ser encontrado em qualquer posição ao redor do núcleo, mas com maior probabilidade na região próxima dele. O elétron se encontra, portanto, espalhado no espaço todo, pois nunca podemos afirmar que ele está assumindo uma posição exata, ou mesmo uma trajetória bem definida, como as trajetórias circulares definidas no modelo de Bohr para o átomo de Hidrogênio. No formalismo da mecânica quântica essas trajetórias dão lugar às nuvens eletrônicas, pois apenas a probabilidade de se encontrar o elétron em uma posição qualquer do espaço está definida, mesmo na descrição do que seria uma partícula. Essa é a interpretação de Max Born para a função de onda, comumente aceita na mecânica quântica.

As Figuras ao lado mostram resultados experimentais que nos permitem visualizar as nuvens eletrônicas no átomo de Hidrogênio: (a) estado fundamental e (b) 1º estado excitado (Ref. Direct measurement of the quantum wavefunction, J. S. Lundeen et al. *Nature* 474 (2011)). Note que a região em vermelho, próxima ao próton, é a região de maior probabilidade de se encontrar o elétron. Nas regiões mais distantes, em azul, a probabilidade vai decaindo suavemente a zero.



A mecânica quântica é o conjunto de leis de governa o mundo microscópico onde “vivem” as moléculas, os átomos, os núcleos atômicos, os prótons e os elétrons.