

E/P23.1:

Uma carga pontual q_1 está fixa na origem de um sistema de eixos xyz. Uma outra carga pontual q_2 se desloca do ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ para o ponto $B = (x_B, y_B, z_B)$. Qual o trabalho realizado pela força elétrica (feita por q_1) em q_2 ? Vamos assumir que q_1 permaneça fixa na origem, enquanto q_2 se move.

A carga q_1 gera em sua vizinhança um campo elétrico dado por:

$$\vec{E}_1 = k \frac{q_1}{r^2} \hat{r}$$

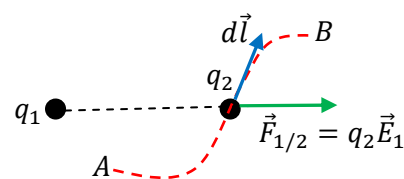
sendo r a distância (raio) até a carga pontual q_1 e $\hat{r}$ um vetor unitário ao longo do raio que nasce em q_1 (apontando no sentido do crescimento do raio). A carga q_2 , estando na presença desse campo elétrico, vai sofrer uma força dada por (lei de Coulomb):

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \vec{E}_1 = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Ao se deslocar de A até B o trabalho dessa força sobre q_2 será:

$$W = \int_A^B \vec{F}_{1/2} \cdot d\vec{l} = q_2 \int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

Note que essa integral pressupõe um caminho que conecta os pontos A e B, sendo $d\vec{l}$ um campo de vetores tangentes a esse caminho, apontando de A para B. A Figura ao lado ilustra os conceitos envolvidos no cálculo de W (supondo que q_1 e q_2 se repelem). A carga q_1 está fixa enquanto q_2 percorre a curva vermelha, entre A e B. Os vetores $d\vec{l}$ são deslocamentos infinitesimais tangentes a esse caminho. A força $\vec{F}_{1/2}$ é radial, com centro em q_1 .



Não precisamos resolver a integral que fornece W , pois já sabemos que $\vec{E}_1$ é um campo conservativo e que, portanto, existe a função escalar V_1 tal que:

$$V_1(A) - V_1(B) = \int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

V_1 é o potencial elétrico no espaço devido à presença da carga q_1 na origem. Concluindo: sendo $\vec{E}_1$ um campo conservativo, sua integral de caminho entre dois pontos A e B independe do caminho que conecta esses pontos, ela depende apenas dos extremos A e B. Portanto:

$$W = q_2 (V_1(A) - V_1(B))$$

Sabemos que para uma carga pontual vale:

$$V_1(\vec{r}) = k \frac{q_1}{r}$$

Finalmente:

$$W = q_2 \left(k \frac{q_1}{r_A} - k \frac{q_1}{r_B} \right) = k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

sendo r a distância entre as cargas, ou seja, a distância de q_2 até a origem, que é dada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Portanto, em termos das coordenadas de A e B obtemos:

$$W = k q_1 q_2 \left(\frac{1}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}} \right)$$

Podemos escrever também:

$$W = U_{12}(A) - U_{12}(B)$$

sendo $U_{12}(\vec{r})$ a energia potencial elétrica das cargas q_1 e q_2 :

$$U_{12}(\vec{r}) = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Note que r_{12} é a distância entre as cargas.

A energia potencial elétrica U de um sistema de cargas elétricas é exatamente a capacidade que as forças elétricas entre elas têm de realizar trabalho nessas cargas. Nesse caso, quando q_2 vai de A para B, a energia potencial elétrica do sistema de (duas) cargas varia de (final menos inicial):

$$\Delta U = U_{12}(B) - U_{12}(A)$$

Por que essa energia variou? Porque ela é a capacidade das forças elétricas mútuas em q_1 e q_2 de realizar trabalho e foi realizado trabalho enquanto q_2 foi de A para B, portanto essa capacidade mudou. Quando q_2 estava em A, a capacidade era $U_{12}(A)$. Quando q_2 passou para B, a capacidade mudou para $U_{12}(B)$. Qual o valor de ΔU ? Sendo ΔU uma capacidade de realizar trabalho, sua variação é o trabalho realizado, com o sinal trocado. Por que o sinal trocado? Se as forças elétricas realizam um trabalho positivo (negativo), então a capacidade de realizar trabalho diminui (aumenta), ou seja: $\Delta U = -W$. De fato, já vimos que:

$$\Delta U = U_{12}(B) - U_{12}(A) = -(U_{12}(A) - U_{12}(B)) = -W$$

Lembrando do teorema do trabalho-energia, fica claro como essas idéias se encaixam. Considere que somente as forças elétricas mútuas atuam em q_1 e q_2 (enquanto q_2 vai de A para B). Então:

$$\Delta K = K(B) - K(A) = W = U_{12}(A) - U_{12}(B)$$

sendo K a energia cinética apenas de q_2 nesse caso, pois estamos supondo q_1 fixa. Se q_1 não estivesse fixa, K seria a energia cinética total das duas cargas: $K = K_1 + K_2$.

Portanto, definindo a energia total do sistema $E = K + U$ (cinética mais potencial), obtemos:

$$K(B) - K(A) - (U_{12}(A) - U_{12}(B)) = E(B) - E(A) = 0$$

sendo $E = K + U$. Resumindo:

$$\Delta K = W = -\Delta U \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta(K + U) = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$$

Esse conceito estendido de energia nos leva a ver esse sistema como um sistema conservativo: q_2 flui de A para B, e a quantidade E (a energia total do sistema) se conserva nessa transição.

Concluindo:

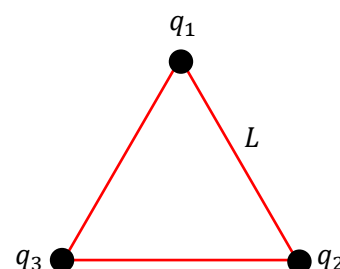
$$W = kq_1q_2 \left(\frac{1}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}} \right)$$

Com os dados numéricos do problema obtemos:

$$W \cong -0,36 \text{ J}$$

A energia potencial elétrica é uma energia posicional (a distância r_{12} é uma posição relativa), assim como a energia potencial gravitacional $U_g = m g h$ (h é uma posição). À medida que as partículas carregadas mudam de posição dentro de um sistema, suas energias potenciais elétricas mudam, sendo transformadas em outras formas de energia, como energia cinética ou calor. A energia potencial elétrica é a principal energia envolvida nas reações químicas e no funcionamento dos circuitos elétricos.

E/P23.3: Considere um modelo eletrostático para um núcleo de **Lítio** ($Z=3$): três prótons (carga q) localizados nos vértices de um triângulo equilátero de lado L . Qual a energia eletrostática desse núcleo?



Sabemos que a energia eletrostática de um par de cargas q_1 e q_2 é:

$$U_{12}(r_{12}) = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

sendo r_{12} a distância entre as cargas. Portanto para essas três cargas equidistantes entre si obtemos:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = k \frac{q_1 q_2}{L} + k \frac{q_1 q_3}{L} + k \frac{q_2 q_3}{L}$$

Como são três prótons, segue que: $q_1 = q_2 = q_3 = q$. Portanto:

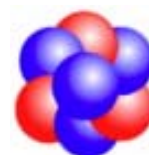
$$U = 3 k \frac{q^2}{L} > 0$$

Com os dados numéricos do problema obtemos: $U \cong 2,16 \text{ MeV}$ ($M=\text{mega}=10^6$). Essa é a quantidade de energia que devemos gastar para construir esse núcleo (no contexto desse modelo) partindo de três prótons separados por distâncias mútuas infinitas (ou seja, que inicialmente não interagem entre si). Os prótons se repelem mutuamente e devemos gastar energia, ou seja, realizar trabalho positivo sobre o núcleo, para aproximar e juntar essas partículas. Na natureza esse “trabalho” é realizado no interior das estrelas, onde as altas temperaturas são capazes de produzir colisões entre prótons ao ponto de juntá-los formando os núcleos. Núcleos mais pesados, com maior quantidade de prótons (maior número atômico Z), podem requerer maiores energias, como as produzidas em explosões de estrelas.

Essa energia U também é a quantidade de energia que esse núcleo liberaria (na forma de energia cinética) se ele se desfizesse, ou seja, se ele explodisse (devido à repulsão mútua entre os prótons) ao ponto dos três prótons se afastarem infinitamente um do outro. Enquanto os núcleos se afastassem ($L \rightarrow \infty$), a energia potencial elétrica iria diminuindo, ou seja, ela seria convertida em energia cinética dos prótons:

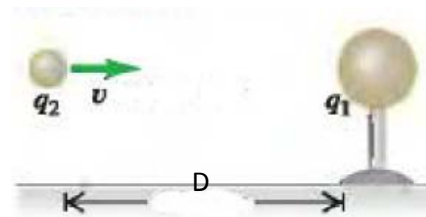
$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Esse é basicamente o princípio de funcionamento de uma bomba nuclear e de um reator nuclear usado em usinas de produção de energia elétrica. Note que nesse modelo, e mesmo no mundo real, os prótons dentro de um núcleo estão se repelindo mutuamente de forma intensa. Pressupõe-se que exista outra força atrativa que equilibre essa repulsão. Aqui poderíamos imaginar simplesmente que os três prótons estão “pregados” nos vértices do triângulo. No mundo real a força atrativa responsável pela estabilidade do núcleo é a chamada força “forte” ou força nuclear. Através da força forte/nuclear os prótons e nêutrons se atraem mutuamente, tornando os núcleos atômicos estáveis. Vemos então o papel dos nêutrons no núcleo: ajudar na “cola” dos prótons que, sem essa “cola”, simplesmente se separariam instantaneamente por causa da repulsão mútua. No caso do núcleo de Lítio, que consideramos aqui, sua estrutura (do isótopo mais abundante) seria algo como ilustrado na Figura ao lado: três prótons (em vermelho) e quatro nêutrons (em azul) aglomerados no espaço formando uma estrutura estável. Não se trata de uma estrutura estática: prótons e neutros “orbitam” dentro do núcleo.



Alguns núcleos encontrados na natureza e/ou criados em laboratórios são instáveis e vão se fragmentando com o tempo. Esses são os núcleos radioativos e seus fragmentos viajando no espaço constituem a radiação nuclear.

E/P23.5: Uma pequena esfera de carga q_2 e massa M é lançada em rota de colisão contra uma segunda esfera (também pequena) de carga q_1 que está fixa. q_2 tem o mesmo sinal de q_1 , de tal forma que as esferas se repelem. Quando a distância entre os centros das esferas é D a velocidade de q_2 tem módulo V_0 .



a) Qual o módulo da velocidade de q_2 quando a distância entre as esferas for $L < D$?

Vamos considerar que as esferas são partículas e desprezar a ação da gravidade e de arraste com o ar (o experimento pode ser feito no vácuo). Então, a única força em q_2 é a força elétrica de repulsão produzida por q_1 . Essa força é repulsiva e vai freando q_2 . Em princípio poderíamos pensar em abordar esse problema utilizando a segunda lei de Newton para a esfera que se move, mas, note que a força de repulsão entre as esferas é uma força variável, pois, à medida que as esferas se aproximam, a força aumenta de magnitude. De fato, se $r(t)$ é a distância entre as esferas no instante t , segue que a magnitude da força de repulsão é (da lei de Coulomb e do teorema das cascas: “esfera = partícula”):

$$F_{2/1}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{1}{r(t)^2}$$

Portanto, assumindo um movimento retilíneo, que ocorrerá se a velocidade inicial de q_2 estiver ao longo da linha que conecta os centros das esferas (a linha de ação de $\vec{F}_{2/1}$, como sugerido na Figura), a segunda lei de Newton diz que a velocidade $V(t)$ da esfera com carga q_2 varia de acordo com:

$$M \frac{d}{dt} V(t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{1}{r(t)^2}$$

Note que essa é uma equação diferencial difícil de resolver.

Partimos então para uma abordagem via conceitos de energia. É para isso que esses conceitos servem. Não havendo outras forças na esfera móvel segue a conservação da energia (cinética mais potencial):

$$K(L) + U_E(L) = K(D) + U_E(D)$$

Portanto:

$$\frac{1}{2} M V_L^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{L} = \frac{1}{2} M V_0^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{D}$$

Concluindo:

$$V_L = \sqrt{V_0^2 - \frac{2 q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 M} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{D} \right)}$$

Note que, sendo $L < D$, segue que $V_L < V_0$ (a esfera 2 está freando enquanto se aproxima da esfera fixa).

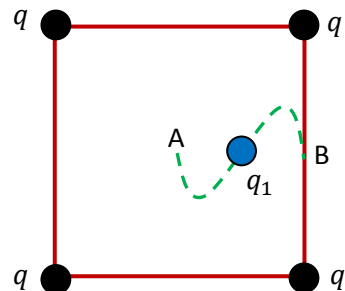
b) Qual vai ser a distância mínima entre as esferas?

A esfera de carga q_2 vai se aproximando e parando, devido à força de repulsão. Na distância mínima entre as esferas, $L = L_{MIN}$, a equação acima vale com $V_L = 0$. Portanto:

$$V_L = 0 \Rightarrow V_0^2 - \frac{q_1 q_2}{2 \pi \epsilon_0 M} \left(\frac{1}{L_{MIN}} - \frac{1}{D} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{L_{MIN}} = \frac{1}{D} + \frac{2 \pi \epsilon_0 M V_0^2}{q_1 q_2}$$

Essa última equação fornece o valor de L_{MIN} em termos dos dados do exercício.

E/P23.10: Quatro partículas de carga q estão fixas nos vértices de um quadrado de lado L . Uma partícula de carga q_1 vai ser levada desde o centro do quadrado (A) até o ponto médio de um dos lados do quadrado (B). A Figura ao lado ilustra a ideia. A curva verde tracejada seria uma trajetória qualquer que levaria a carga q_1 de A até B.



Imagine um agente externo que faz esse transporte de q_1 , vencendo a força elétrica resultante que as quatro cargas q exercem sobre q_1 . Se $\vec{E}$ é o campo elétrico criado pelas quatro cargas q no espaço, a força elétrica que essas cargas exercem sobre q_1 é:

$$\vec{F}^{(el)} = q_1 \vec{E}$$

Portanto, se o agente externo aplica em q_1 uma força $\vec{F}^{(ext)}$ que vence $\vec{F}^{(el)}$ e leva q_1 desde A (em repouso) até B (em repouso), o teorema do trabalho energia aplicado a q_1 leva a:

$$0 = K(B) - K(A) = W_{el}(A \rightarrow B) + W_{ext}(A \rightarrow B)$$

Portanto, o trabalho que o agente externo deve fazer nesse transporte é:

$$W_{ext}(A \rightarrow B) = -W_{el}(A \rightarrow B) = - \int_A^B \vec{F}^{(el)} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B q_1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q_1 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Agora vamos usar o fato de que $\vec{E}$ é um campo conservativo e de que existe, portanto, uma função escalar V , o potencial elétrico associado ao campo $\vec{E}$, de tal forma que:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$$

Concluindo:

$$W_{ext}(A \rightarrow B) = q_1 [V(B) - V(A)] = \Delta U_E$$

sendo U_E a energia potencial elétrica da carga q_1 : $\Delta U_E = U_E(B) - U_E(A)$.

Note que esse trabalho W_{ext} de A até B independe do caminho percorrido pela carga q_1 conectando os pontos A e B. Qualquer caminho que usarmos na integral de $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ vai levar ao mesmo resultado. Obviamente não faremos essa integral explicitamente, pois isso não é necessário. Basta calcular a diferença de potencial V entre A e B, sendo V o potencial eletrostático das quatro cargas q no espaço, ou seja:

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r}) + V_3(\vec{r}) + V_4(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_4}$$

Para o ponto A vale (r é metade da diagonal) $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = L\sqrt{2}/2$ e, portanto:

$$V(A) = 4 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} \frac{q}{\pi\epsilon_0 L}$$

Para o ponto B vale $r_1 = r_2 = L/2$ e $r_3 = r_4 = L\sqrt{5}/2$. Portanto:

$$V(B) = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L/2} + 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L\sqrt{5}/2} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 L} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right]$$

Concluindo:

$$W_{ext}(A \rightarrow B) = q_1 \frac{q}{\pi\epsilon_0 L} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right] - q_1 \sqrt{2} \frac{q}{\pi\epsilon_0 L} = \frac{q q_1}{\pi\epsilon_0 L} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{2} \right]$$

E/P23.13: Um campo elétrico uniforme aponta para o leste. São dados 4 pontos no espaço: A, B a oeste de A, C a leste de A e D ao sul de A. A Figura ao lado resume essa ideia.

O que podemos dizer sobre o potencial elétrico nos pontos A, B, C e D?

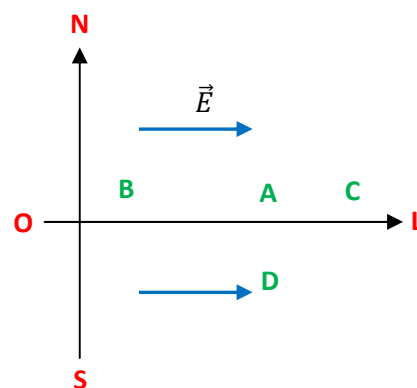
Fato 1: o potencial diminui ao longo da direção/sentido em que aponta o campo $\vec{E}$. De fato, como:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

com $d\vec{l}$ apontando de A para B, segue que, se $\vec{E}$ também aponta sempre de A para B vale $\vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$ e:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0 \Rightarrow V(A) > V(B)$$

(fazendo uma analogia: a aceleração da gravidade $\vec{g}$ sempre aponta para baixo, ou seja, no sentido do decaimento da energia potencial $U_g = m g h$, assim como $\vec{E}$ sempre aponta no sentido do decaimento de V).



Portanto, já podemos afirmar sem nenhum cálculo que na situação dessa questão vale: $V(B) > V(A) > V(C)$. Isso porque o potencial elétrico decai quando caminhamos na direção/sentido de O para L, que é a direção/sentido de $\vec{E}$.

Fato 2: as superfícies equipotenciais são ortogonais a $\vec{E}$ e vice-versa. Isso porque se A e B estão sobre uma superfície equipotencial ($V(A) = V(B)$) e $d\vec{l}$ é um vetor qualquer sempre paralelo a essa superfície segue que:

$$V(A) - V(B) = 0 = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

Portanto, estando o campo elétrico na direção OL, segue que as superfícies equipotenciais estão na direção NS, que é a direção ortogonal à direção OL. As superfícies equipotenciais são planos ortogonais à direção OL. Segue que $V(D) = V(A)$ pois A e D estão sobre uma mesma superfície equipotencial (mesmo plano ortogonal a $\vec{E}$).

Podemos dar uma solução mais quantitativa para esse problema, apenas como exercício. Chamando de x o eixo OL, segue que: $\vec{E} = E\hat{x}$, com $E > 0$. Portanto, para quaisquer dois pontos 1 e 2 no espaço vale:

$$V(1) - V(2) = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 E\hat{x} \cdot d\vec{l} = E \int_1^2 dx = E(x_2 - x_1)$$

Note que a operação de produto escalar é uma operação de projeção e para qualquer vetor $\vec{K}$ vale $\vec{K} \cdot \hat{x} = K_x$. Segue que $\hat{x} \cdot d\vec{l} = dx$. A realização da integral acima pressupõe a escolha de um caminho entre os pontos 1 e 2, qualquer caminho, pois a integral independe do caminho. De fato, nossa solução da integral mostrou essa independência, pois nem definimos qual o caminho de integração utilizado. Não é necessário, posto que a igualdade $\hat{x} \cdot d\vec{l} = dx$ implica que somente a distância entre os pontos 1 e 2 ao longo de x interessa. Mas enfim, se você quiser pode definir um caminho ligando os dois pontos 1 e 2, um caminho “quadriculado” que anda sobre o eixo x, depois sobre o y e finalmente sobre o z. Como $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$ e $\hat{x} \cdot \hat{z} = 0$, segue que somente o deslocamento ao longo de x interessa.

Resumindo:

$$V(A) - V(B) = E(x_B - x_A)$$

Confirmamos então que se $x_B < x_A$, como na Figura acima, segue que $V(A) - V(B) = E(x_B - x_A) < 0 \Rightarrow V(A) < V(B)$. Por outro lado, como $x_D = x_A$ segue que $V(A) - V(D) = 0$. Nesse referencial as superfícies equipotenciais são planos $x=\text{constante}$. Podemos ver, dada a expressão acima, que nessa região do espaço vale $V = V(x) = -E x + C$ (com C uma constante arbitrária). Portanto, $V(A) = -E x_A + C$ etc.

E/P23.22: Duas cargas pontuais $+q$ fixadas no eixo y conforme a Figura acima. Considere o potencial elétrico no espaço produzido por essas duas partículas.

Do princípio da superposição, o potencial elétrico em qualquer ponto do espaço é:

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r}) = k \frac{q}{r_1} + k \frac{q}{r_2}$$

sendo r_1 (r_2) a distância da carga 1 (2) até o ponto $\vec{r}$ (seta vermelha) onde o potencial está sendo avaliado. Na origem ($\vec{r} = \vec{0}$), por exemplo, vale: $r_1 = r_2 = a$ e, portanto:

$$V(\vec{0}) = k \frac{q}{a} + k \frac{q}{a} = 2k \frac{q}{a}$$

Note que o potencial está sempre definido a menos de uma constante arbitrária e que, portanto, esse valor acima é o valor do potencial na origem tomando como referência o valor arbitrário $V=0$ no infinito.

Para um ponto qualquer sobre o eixo x vemos da Figura que vale:

$$r_1 = r_2 = r = \sqrt{x^2 + a^2}$$

Portanto, sobre este eixo x vale:

$$V(x) = k \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}} + k \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 2k \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

d) Vamos esboçar um gráfico de $V(x)$ versus x :

O potencial tem um máximo na origem equidistante das cargas e decai a zero à medida que nos afastamos das cargas. A função $V(x)$ é par, ou seja: $V(-x) = V(x)$, dada a simetria da distribuição de cargas.

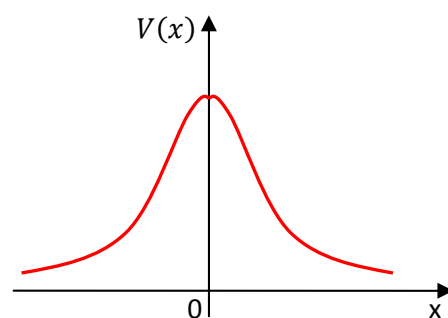
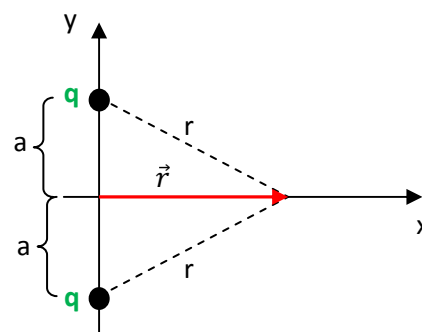
e) Para $x \gg a$ ($a/x \cong 0$) podemos fazer (usando $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n \varepsilon$, para ε pequeno):

$$\begin{aligned} V(x) &= 2k \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 2k \frac{q}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + (a/x)^2}} = 2k \frac{q}{|x|} \left(1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2\right)^{-1/2} \\ &= 2k \frac{q}{|x|} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

Note que $\sqrt{x^2} = |x|$. O termo dominante (maior) nessa série é:

$$V(x) \cong k \frac{2q}{|x|}$$

Poderíamos ter feito simplesmente $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{x^2} = |x|$. Mas, agora já foi.



Vemos que para $x \gg a$ o potencial é aquele produzido sobre o eixo x por uma carga pontual $2q$ na origem. Esse é o resultado esperado, pois, para um observador distante dessas duas cargas, a separação $2a$ entre elas “desaparece” e elas se fundem como se fossem uma carga pontual apenas de magnitude $2q$ localizada na origem.

E/P23.32: Uma esfera de raio R tem uma carga Q distribuída uniformemente em sua superfície.

Para obter o potencial no espaço na vizinhança dessa esfera podemos usar o teorema das cascas. Sabemos que para quaisquer dois pontos A e B no espaço:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

sendo $\vec{E}$ o campo elétrico que existe nesse espaço.

Tomando o ponto A no infinito e arbitrando $V(A) = V(\infty) = 0$, ficamos com:

$$V(\infty) - V(\vec{r}) = -V(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

sendo $\vec{r}$ um ponto qualquer do espaço. É conveniente que definamos $\vec{r}$ em relação a uma origem no centro da esfera. Nesse caso, $|\vec{r}| = r$ é a distância (raio) até esse centro.

Essa expressão para $V(\vec{r})$ mostra que o potencial está definido (a menos de uma constante, que estamos arbitrando como sendo zero) pelo campo elétrico. Do teorema das cascas, sabemos que para essa esfera com densidade de carga superficial uniforme e carga total Q vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{para } r > R \\ \vec{0} & \text{para } r < R \end{cases}$$

ou seja, para pontos fora da esfera ($r > R$) o campo elétrico é o mesmo que seria gerado por uma carga pontual Q fixa no centro da casca (origem) concentrando toda a carga da casca. Para pontos dentro da casca ($r < R$) o campo elétrico produzido pelas cargas na casca é nulo.

Portanto, para $r > R$ (um ponto fora da esfera) obtemos:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{-dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

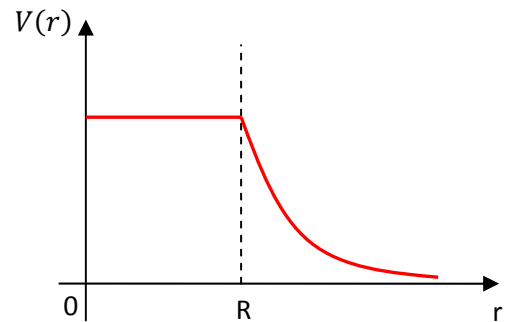
Note novamente que a operação de produto escalar é uma operação de projeção e que $\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$. Como não poderia deixar de ser, concluímos que fora da esfera tudo se passa como se houvesse uma carga pontual Q na

origem. No cálculo acima não definimos o caminho de integração, basicamente porque já sabemos que esse resultado independe do caminho. Tanto é assim que pudemos obter o resultado sem assumir um caminho particular conectando os pontos $\vec{r}$ (com $r > R$) e ∞ . Mais adiante comentaremos um pouco mais sobre isso.

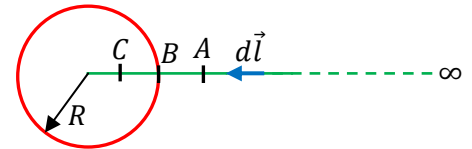
Para $r < R$ (um ponto dentro da esfera) obtemos (como o campo elétrico dentro da esfera é diferente do campo fora da esfera, dividimos o caminho em duas partes: fora da esfera e dentro da esfera):

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{-dr}{r^2} - \int_R^r 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Vemos então que fora da esfera tudo se passa como se houvesse uma carga pontual Q na origem (teorema das cascas) e que dentro da esfera o potencial assume um valor constante igual ao valor do potencial na superfície da esfera. A Figura abaixo ilustra o comportamento de $V(\vec{r}) = V(r)$ versus o raio r . Note que como sempre acontece, o potencial é uma função contínua das coordenadas. A região dentro da esfera, assim como a superfície da esfera, é uma região equipotencial.



Note que nas integrais acima que fornecem $V(\vec{r})$ nem nos demos ao trabalho de especificar o caminho de integração, porque essas integrais independem do caminho. Qualquer que seja o caminho escolhido, conectando um ponto no ∞ e $\vec{r}$, o resultado obtido é o mesmo. Mas, enfim, o procedimento padrão para realizar essas integrais é escolher um caminho conveniente e integrar ao longo desse caminho. Como qualquer caminho serve, geralmente escolhemos o caminho mais simples/conveniente. Um caminho mais simples é basicamente aquele em que o produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ é mais fácil de calcular.



Portanto, essa escolha depende basicamente da direção de $\vec{E}$. Nesse caso $\vec{E}$ é radial e o caminho mais simples é radial ($d\vec{l} = \hat{r}dl$), pois segue que $\vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \hat{r}dl = E dl$. Esse caminho está ilustrado na Figura ao lado (linha verde que parte do infinito). O ponto A é um ponto fora da esfera carregada e, portanto, desde o infinito até A o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

e:

$$V(A) = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^A \frac{-dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A}$$

sendo r_A o raio do ponto A. Esse foi o resultado que obtivemos, sem nem pensar em qual caminho estávamos utilizando na integral de caminho. Alguém poderia chamar atenção de que na Figura o vetor $d\vec{l}$ está apontando para dentro do raio e que, portanto, deveríamos ter escrito $d\vec{l} = -\hat{r} dr$, pois $\hat{r}$ aponta para fora do centro. Mas, devemos levar em conta que nossa integral é de ∞ até A (sentido decrescente do raio) e que, portanto, nessa integral o valor de dr é negativo. Portanto, o vetor $d\vec{l} = \hat{r} dr$ é de fato um vetor que aponta para dentro do raio. Se estivéssemos integrando de A até ∞ , ainda assim usaríamos $d\vec{l} = \hat{r} dr$ porque nesse caso o vetor $d\vec{l}$ estaria apontando para fora do raio e o dr seria positivo. Enfim, em qualquer caso vale $d\vec{l} = \hat{r} dr$.

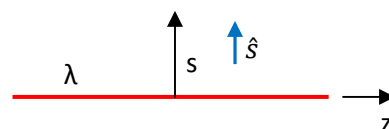
Para calcular o potencial no ponto C, que é um ponto dentro da esfera carregada, devemos lembrar que a partir do ponto B, na superfície da esfera, o campo elétrico muda de valor, ele passa a ser nulo. Assim quebramos nossa integral em duas partes, uma que vai de ∞ até B, para a qual o campo elétrico é o mesmo utilizado na integral acima e outra integral, de B até C, em que o campo elétrico é nulo. Ficamos com:

$$V(C) = - \int_{\infty}^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^B \frac{-dr}{r^2} - \int_B^C 0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

que foi o resultado obtido anteriormente.

Conclusão: é sempre mais fácil de se visualizar e de se controlar o processo de cálculo do potencial elétrico através da escolha de um caminho de integração. Um desenho sempre ajuda nesse caso. É aconselhável que o estudante faça dessa forma. Mas, devemos ter em mente que o resultado da integral de caminho do campo eletrostático não depende do caminho escolhido, pois esse campo é conservativo. Portanto, mesmo que ignoremos qual o caminho que está sendo percorrido na integral, se fizermos todas as contas corretamente, obteremos ao final o resultado correto para a diferença de potencial elétrico entre dois pontos quaisquer no espaço. Mesmo assim, entendemos que a realização da integral que fornece a função V em um caminho particular escolhido convenientemente (de acordo com as propriedades do campo $\vec{E}$) permite ao estudante um raciocínio menos abstrato e de menores chances de erro.

E/P23.35: Um filamento reto muito longo possui uma densidade de carga linear uniforme λ .



Faremos aqui um cálculo parecido com o feito o exercício anterior. Para obter o potencial no espaço na vizinhança desse filamento partimos de:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Em princípio podemos ter o ímpeto de tomar o ponto A no infinito e arbitrar $V(A) = V(\infty) = 0$, ficando com:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

sendo $\vec{r}$ um ponto qualquer do espaço. Veremos que essa referência não funciona para esse caso (ela geralmente não funciona para distribuições de cargas uniformes que estão definidas sobre corpos de dimensões infinitas, como no caso desse filamento). É conveniente que definamos $\vec{r}$ em relação a uma origem sobre o filamento (linha vermelha na Figura ao lado), usando um sistema de coordenadas cilíndricas com eixo z ao longo do filamento. Nesse caso, s é a distância (raio) em relação ao filamento e $\hat{s}$ um vetor unitário ao longo dessa coordenada (ver a figura acima). Nesse sistema de coordenadas já sabemos (da lei de Gauss) que o campo elétrico na vizinhança desse filamento é dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 s} \hat{s}$$

Portanto:

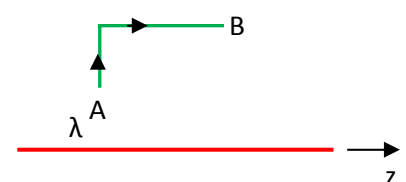
$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 s} \hat{s} \cdot d\vec{l} = \frac{-\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{ds}{s} = \frac{-\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(s/\infty)$$

Vemos que essa é uma expressão divergente. Ela está dizendo que não podemos tomar como referência $V = 0$ no infinito. De fato, a hipótese de que o potencial V convirja para uma constante no infinito (zero, por exemplo) pressupõe que o campo elétrico se anule suficientemente rápido no infinito. Isso geralmente é verdade para distribuições de carga localizadas em objetos/corpos de dimensões finitas (uma esfera, por exemplo). Quando nos afastamos suficientemente desses objetos eles se tornam pontuais e seus campos elétricos decaem rapidamente a zero (no mínimo com $1/r^2$). Esse não é o caso deste filamento infinito considerado nesse exercício, para o qual o campo elétrico decai lentamente com $1/s$.

Vamos abandonar então essa ideia de tomar $V=0$ no infinito e voltar ao cálculo da diferença de potencial entre dois pontos A e B quaisquer. Obtemos:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \int_A^B \frac{ds}{s} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(s_B/s_A)$$

sendo s_A (s_B) a distância do ponto A (B) até o filamento (note que, como já discutimos, se fizermos $s_A = \infty$ não podemos fazer $V(A) = 0$ pois obtemos uma expressão divergente). Novamente, não nos preocupamos muito em especificar o caminho de integração, pois vemos logo que $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E ds$ e que, portanto, somente o deslocamento na direção radial s interessa para o cálculo de V . Mas, podemos imaginar um caminho que



parte de A, anda na direção radial até chegar no mesmo raio de B e depois anda na direção z até chegar finalmente em B (curva verde na Figura ao lado). Esse trecho de caminho paralelo a z não contribui para o cálculo de V, pois nele vale $\vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \hat{z} dl = 0$ (já que $\hat{s}$ é ortogonal a $\hat{z}$).

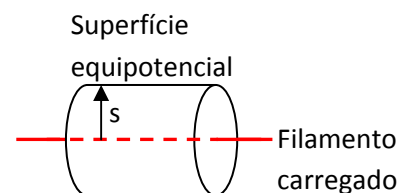
a) Se medimos a diferença de potencial entre dois pontos A e B quaisquer (com $s_B \neq s_A$) podemos descobrir o valor de λ , pois:

$$\lambda = \frac{2 \pi \epsilon_0}{\ln(s_B/s_A)} [V(A) - V(B)]$$

c) Se tomarmos A e B dois pontos quaisquer a uma mesma distância do filamento, $s_A = s_B$, obtemos:

$$V(B) - V(A) = \frac{-\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(s_B/s_A) = \frac{-\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(1) = 0$$

Não há diferença de potencial entre esses dois pontos. De fato, as superfícies equipotenciais para essa distribuição de cargas são cascas cilíndricas (superfícies $s=\text{constante}$) coaxiais com o filamento carregado. Portanto, se $s_A = s_B$, então A e B estão sobre uma mesma superfície cilíndrica equipotencial. A Figura ao lado ilustra essa ideia. Note então que



o campo elétrico tem a direção do raio s e que as superfícies equipotenciais são as cascas cilíndricas coaxiais ao filamento, que são ortogonais a esse raio e, portanto, ortogonais ao campo elétrico em todos os pontos do espaço.

E/P23.36: Um cilindro reto muito longo de raio a possui uma densidade de carga linear uniforme λ .

Esse exercício é parecido com o anterior. A lei de Gauss mostra que para pontos fora do cilindro ($s > a$) tudo funciona como se a carga de densidade λ estivesse concentrada em um filamento ao longo do eixo do cilindro (teorema das cascas cilíndricas). Esse resultado independe de onde a carga está, se ela está distribuída uniformemente em todo o volume do cilindro ou apenas na superfície do cilindro. Visto de fora (raios $s > a$), tudo funciona como se essa carga estivesse ao longo de um filamento no eixo do cilindro.

Portanto, se A e B são dois pontos fora do cilindro obtemos (do resultado do exercício anterior):

$$V(A) - V(B) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(s_B/s_A)$$

Nesse caso podemos, por conveniência, fixar o ponto A na superfície do cilindro, $s_A = a$, arbitrar $V(A) = 0$ e definir então o potencial em um ponto B qualquer a uma distância $s_B = s > a$ do eixo do cilindro por:

$$0 - V(s) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(s/a) \Rightarrow V(s) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(a/s)$$

A qual distância s do cilindro o potencial vale $V_X = 175 \text{ V}$?

Basta resolver a equação:

$$V_X = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(a/s)$$

Portanto:

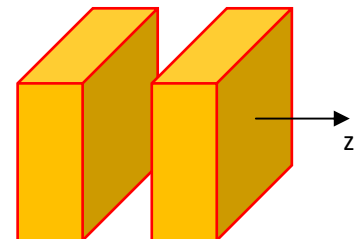
$$\ln(a/s) = \frac{2 \pi \epsilon_0 V_X}{\lambda} \Rightarrow \frac{a}{s} = e^{\frac{2 \pi \epsilon_0 V_X}{\lambda}} \Rightarrow s = a e^{-\frac{2 \pi \epsilon_0 V_X}{\lambda}}$$

Note então que se fizermos $V_X = 0$, obtemos $s = a$, que foi nossa escolha de referência para o potencial. Vemos também que (para $\lambda > 0$), quanto maior o valor de V_X , menor o valor de s , ou seja, o potencial decai à medida que nos afastamos do cilindro (que é o sentido do campo elétrico, se $\lambda > 0$). No infinito o potencial vale (para $\lambda > 0$):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} V(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(a/s) \rightarrow \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \ln(0) \rightarrow -\infty$$

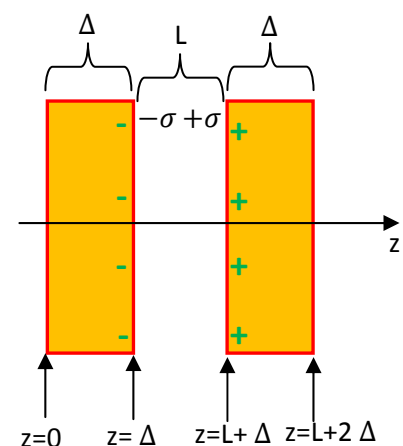
Novamente vemos que é impossível tomarmos para essa distribuição de carga a referência comum $V=0$ no infinito. Vimos que se tomarmos $V=0$ em $s = a$, então no infinito o potencial diverge ($V \rightarrow -\infty$). Se, por outro lado, tomássemos $V=0$ no infinito, então o potencial divergiria para todo valor finito do raio s , o que seria um absurdo, ou, pelo menos, uma descrição inútil desse sistema físico.

E/P23.39: Duas placas planas grossas (espessura Δ) condutoras, muito largas (infinitas para todos os efeitos), e paralelas entre si (distanciadas de L) possuem densidades de carga superficiais uniformes em suas faces internas, mas de sinais opostos, conforme as Figuras ao lado (visão oblíqua e visão de perfil). Vamos definir um eixo z ortogonal às placas, com origem ($z=0$) na face esquerda da placa da esquerda. Note que durante um transiente rápido as cargas se atraem mutuamente,



indo se concentrar nas faces internas das placas. Após esse transiente o equilíbrio eletrostático é atingido e o campo elétrico se anula dentro das duas regiões condutoras (em amarelo): $0 < z < \Delta$ e $L + \Delta < z < L + 2 \Delta$.

Note que são duas distribuições de carga do mesmo tipo, ou seja, distribuições σ uniformes em superfícies planas. Se soubermos o campo elétrico e o potencial elétrico produzido por apenas uma distribuição de carga uniforme em uma superfície plana infinita, podemos apelar para o princípio da superposição e somar os dois



campos elétricos e os dois potenciais produzidos pelas duas faces carregadas. Vamos nos concentrar então, inicialmente, em uma superfície plana infinita com densidade de carga σ uniforme.

Da lei de Gauss, já sabemos que uma placa plana infinita com densidade de carga σ uniforme produz em sua vizinhança um campo elétrico ortogonal à placa e de magnitude:

$$E = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0}$$

O campo não depende de fato da distância $|z|$ até a placa, ele é uniforme no espaço (de cada lado da placa). Para $\sigma > 0$ ($\sigma < 0$) o vetor campo elétrico aponta para fora (dentro) da placa. Tendo em vista esse resultado, podemos concluir facilmente, dado o princípio da superposição, que no caso das duas placas condutoras desse exercício só haverá campo elétrico na região entre as placas: $\Delta < z < L + \Delta$. O campo elétrico resultante nessa região será:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} (-\hat{z}) + \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} (-\hat{z}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (-\hat{z})$$

O campo entre as placas aponta da placa positiva para a placa negativa. Nas outras regiões os campos elétricos das duas placas se anulam:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} (\pm \hat{z}) + \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} (\mp \hat{z}) = \vec{0}$$

No futuro chamaremos esse objeto de capacitor de placas paralelas.

Portanto, a diferença de potencial entre quaisquer dois pontos na região entre as placas será:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (-\hat{z}) \cdot d\vec{l} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_A^B \hat{z} \cdot d\vec{l} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_A^B dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (z_A - z_B)$$

Nas outras regiões o potencial será constante porque o campo elétrico é nulo.

O exercício sugere que tomemos como referência a face esquerda da placa negativa ($z=0$ no nosso referencial) e arbitremos o potencial nessa face como sendo zero (note que as superfícies equipotenciais são planos $z=\text{constante}$, paralelos às placas). Portanto, como toda a região $z < \Delta$ é equipotencial, pois não há campo elétrico nela, essa escolha resulta em:

$$V(z = 0) = V(z = \Delta) = 0$$

Então, tomando o ponto A em $z = \Delta$ ($V(A) = 0$) e o ponto B em um z qualquer entre as placas obtemos:

$$V(A) - V(B) = 0 - V(B) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (z_A - z_B) \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (z - \Delta)$$

Note que o potencial cresce com z (lembre-se que $z > \Delta$ na expressão acima), pois o campo elétrico entre as placas aponta no sentido $-z$. Essa é a expressão do potencial para qualquer ponto entre as placas, ou seja, entre a face direita da placa negativa ($z = \Delta$) e a face esquerda da placa positiva ($z = L + \Delta$).

Concluindo, na face esquerda da placa positiva ($z = L + \Delta$) o potencial vai valer:

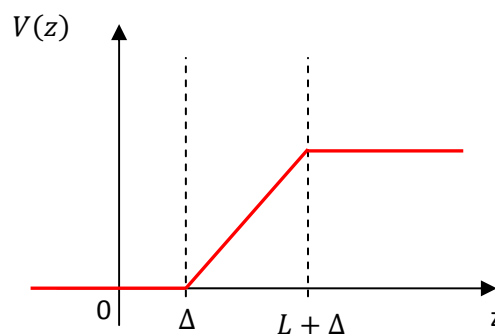
$$V(z = L + \Delta) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (L + \Delta - \Delta) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} L$$

Esse será o valor do potencial em toda a região equipotencial $z > L + \Delta$, pois o campo elétrico é nulo nessa região. Concluindo, obtemos o potencial elétrico produzido por essas duas placas:

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } z < \Delta \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z - \Delta) & \text{para } \Delta < z < L + \Delta \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} L & \text{para } z > L + \Delta \end{cases}$$

Na Figura ao lado esboçamos um gráfico do potencial em função da coordenada z . Note que o potencial elétrico é uma função contínua da coordenada z .

Poderíamos obter esse mesmo resultado superpondo os potenciais das duas placas. Mas, este seria um caminho bem mais complicado do que este que já utilizamos aqui. Por isso vamos deixar como está.



E/P23.44: Uma esfera maciça metálica (de cobre, por exemplo) possui raio R e o campo elétrico em sua superfície (externa) vale E_S apontando para dentro da esfera. Qual o potencial V_0 no centro da esfera (tomando $V=0$ no infinito)?

Sendo a esfera condutora (em equilíbrio eletrostático) sabemos que em seu interior o campo elétrico se anula. Portanto, o volume da esfera é uma região equipotencial. Conclusão: o potencial no centro da esfera ($r=0$) é igual ao potencial na superfície ($r=R$) da esfera: $V(r=0) = V(r=R)$. Então, vamos calcular $V(r=R)$, com a referência $V(\infty) = 0$.

Do teorema das cascas sabemos que na região fora dessa esfera ($r > R$) tudo se passa como se toda a carga Q que está na superfície da esfera (distribuída uniformemente) estivesse concentrada em uma carga pontual localizada no centro da esfera. Note que nesse caso vale $Q < 0$, pois está dito que o campo fora da esfera aponta para dentro dela.

Assim, da lei de Coulomb (para $r > R$):

$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

sendo r o raio em relação ao centro da esfera condutora e $\hat{r}$ um vetor unitário ao longo desse raio.

Da mesma forma, o potencial na região fora ($r > R$) dessa esfera é o mesmo produzido por uma carga elétrica pontual Q localizada no centro da esfera, que é dado por (com a referência $V(\infty) = 0$):

$$V(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

Portanto, o potencial no centro da esfera é igual ao potencial na superfície da esfera que vale (tendo em vista a continuidade do potencial elétrico):

$$V_0 = V(r = R) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R}$$

Não foi dada a carga concentrada na esfera, mas foi dado o valor do módulo do campo elétrico (E_S) na superfície exterior, tão próximo quanto se queira da superfície da esfera. Da expressão acima para $\vec{E}$ obtemos:

$$E_S = \lim_{r \rightarrow R} \frac{-Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{-Q}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \Rightarrow \frac{-Q}{4 \pi \epsilon_0 R} = R E_S$$

Note que E_S é o módulo do campo, que é sempre positivo, e por isso introduzimos um sinal de menos na carga, pois já sabemos que ela é negativa.

Conclusão:

$$V_0 = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R} = -R E_S$$

Sendo $Q < 0$, o campo elétrico na região $r > R$ aponta do infinito para a esfera. Portanto, o potencial elétrico decai quando caminhamos do infinito para a esfera. Como $V = 0$ no infinito, o potencial na esfera tem que ser negativo. Para $r \leq R$ (dentro da esfera) vale $V_0 = -R E_S$.

E/P23.56: Duas esferas isolantes iguais (raio R) possuem cargas de mesmo módulo mas de sinais contrários (Q e $-Q$) e estão colocadas lado a lado, conforme a Figura acima (distanciadas de L , centro a centro). Qual a leitura do voltímetro conectado às superfícies das esferas (pontos a e b)?



O voltímetro vai medir a diferença de potencial $V(a) - V(b)$. Novamente, como no exercício anterior, vamos apelar para o teorema das cascas que diz que na região fora de uma esfera ($r > R$) tudo se passa como

se toda a carga Q que está na esfera (distribuída uniformemente) estivesse concentrada em uma carga pontual localizada no centro dessa esfera. Assim, da lei de Coulomb:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

sendo r o raio em relação ao centro da esfera e $\hat{r}$ um vetor unitário ao longo desse raio.

Da mesma forma, o potencial na região fora ($r > R$) dessa esfera é dado por (considerando $V=0$ no infinito):

$$V(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

Esse raciocínio vale para qualquer uma das duas esferas consideradas aqui e, portanto, do princípio da superposição, o potencial na região fora das duas esferas é dado por:

$$V(\vec{r}) = V_+(r) + V_-(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r_+} + \frac{-Q}{4 \pi \epsilon_0 r_-} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\}$$

sendo r_+ (r_-) o raio desde o ponto onde V está sendo avaliado ($\vec{r}$) até o centro da esfera com carga positiva (negativa), conforme ilustrado na Figura ao lado.

Para o ponto “a” vale $r_+ = R$ e $r_- = L - R$. Portanto:

$$V(a) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{L - R} \right\}$$

Para o ponto “b” vale $r_+ = L - R$ e $r_- = R$. Portanto:

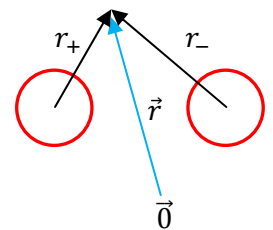
$$V(b) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{L - R} - \frac{1}{R} \right\}$$

Concluindo, sendo o voltímetro um aparelho que mede diferença de potencial, a leitura do voltímetro é:

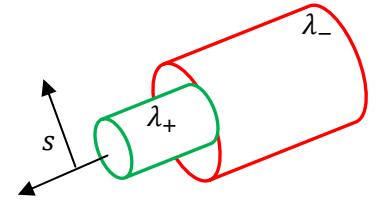
$$V(a) - V(b) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{L - R} \right\} - \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{L - R} - \frac{1}{R} \right\} = \frac{2Q}{4 \pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{L - R} \right\} = \frac{Q}{2 \pi \epsilon_0 R} \left\{ 1 - \frac{1}{L/R - 1} \right\}$$

Note que $V(a) - V(b) > 0$ (pois $L > 2R$ e $L/R - 1 > 1$), ou seja, $V(a) > V(b)$, que é um resultado já esperado, pois o campo elétrico no espaço aponta da esfera positiva para a esfera negativa e o campo elétrico sempre aponta no sentido do decaimento do potencial (o potencial elétrico da esfera positiva é maior que o potencial da esfera negativa).

Enfim, sem fazer qualquer cálculo, sabemos que o campo elétrico no espaço aponta da esfera + para a esfera -. Portanto, o potencial elétrico no espaço decai quando vamos da esfera + para a esfera -. Finalmente, o potencial na superfície da esfera + é maior que o potencial na superfície da esfera -. Isso independe de qual referência usamos para arbitrar onde fixamos $V = 0$.



E/P23.61: Um cilindro metálico maciço (em verde) de raio a está dentro (coaxial) de uma casca cilíndrica (em vermelho) de raio b . O cilindro interno tem densidade de carga por unidade de comprimento uniforme λ_+ (> 0) e a casca tem densidade de carga λ_- (< 0). Qual o potencial no espaço, tomando como referência $V=0$ em $s = b$?



Note que no cilindro metálico a carga elétrica está concentrada apenas na superfície $s = a$ (equilíbrio eletrostático de um condutor).

Vamos usar o princípio da superposição para o campo elétrico dos dois cilindros. O teorema das cascas (cilíndricas) nos diz que, para pontos fora, uma casca (com densidade de carga uniforme) se comporta como se toda sua carga fosse concentrada em um filamento coaxial à casca e que para pontos dentro da casca (por simetria), o campo elétrico é nulo. Já vimos que para um filamento com densidade de carga uniforme λ vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 s} \hat{s}$$

sendo s a distância (raio) até o filamento e $\hat{s}$ um vetor unitário ao longo desse raio.

Portanto, na região mais interior ($s < a$), o campo elétrico é nulo, e o potencial é constante, igual ao potencial em $s = a$. Já sabíamos que isso era assim porque essa é uma região ocupada por um condutor em equilíbrio eletrostático. Mas, enfim, estamos apenas vendo aqui que, como não poderia deixar de ser, o fato de que $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ nesta região está de acordo com o que diz o teorema das cascas cilíndricas.

Na região entre os cilindros ($a < s < b$), o campo elétrico é o campo gerado apenas por λ_+ , ou seja:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_+}{2 \pi \epsilon_0 s} \hat{s}$$

Nessa região o potencial varia com o raio s , $V=V(s)$. Finalmente, na região exterior ($s > b$), o campo elétrico é a superposição dos dois campos, ou seja:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2 \pi \epsilon_0 s} \hat{s}$$

(note que o enunciado faz $\lambda_+ = \lambda = -\lambda_-$ mas aqui estamos considerando um caso mais geral). Nessa região o potencial também varia com o raio s , $V=V(s)$ (no caso do livro ele seria constante, pois valeria $\vec{E} = \vec{0}$).

Já que a referência deve ser $V=0$ em $s = b$, vamos começar calculando o potencial elétrico na região mais externa ($s > b$) e adotar essa referência.

A diferença de potencial entre dois pontos A e B na região exterior é: (lembrando que, qualquer que seja o caminho de integração, $\hat{s} \cdot d\vec{l} = ds$):

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{ds}{s} = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2\pi\epsilon_0} \ln(s_B/s_A)$$

sendo s_A (s_B) a distância do ponto A (B) até o eixo z comum aos dois cilindros.

Para calcular a função $V(\vec{r})$ a partir da expressão de $V(A) - V(B)$ (que é sempre nosso ponto de partida), devemos fixar um dos pontos (A ou B) e arbitrar o potencial nesse ponto (geralmente fazemos, para simplificar, $V=0$). Nesse caso está dito para fazer $V=0$ em $s = b$. Então, tomando $s_A = b$, fazendo $V(A) = 0$ e tomando o ponto B em um raio s qualquer ($s > b$), obtemos na região exterior:

$$V(A) - V(B) = 0 - V(s) = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2\pi\epsilon_0} \ln(s_B/b) \Rightarrow V(s) = -\frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2\pi\epsilon_0} \ln(s/b)$$

Note que se $\lambda_+ > |\lambda_-|$, o potencial vai se tornar cada vez mais negativo quando nos afastamos dos cilindros, porque o campo elétrico nessa região estará apontando para fora do cilindro maior e o campo elétrico sempre aponta no sentido do decaimento do potencial. Sendo $V=0$ em $s = b$, ele terá que se tornar negativo na região $s > b$. Por outro lado, se $\lambda_+ < |\lambda_-|$, o campo elétrico nessa região estará apontando para o cilindro maior e o potencial vai se tornar cada vez mais positivo quando nos afastamos dos cilindros. No caso específico $\lambda_+ = \lambda = -\lambda_-$, não haverá campo elétrico nessa região e o potencial será $V=0$ para $s = b$ em diante.

Para dois pontos A e B na região entre os cilindros obtemos:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{ds}{s} = \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(s_B/s_A)$$

Novamente, tomando $s_A = b$, fazendo $V(A) = 0$ e tomando o ponto B em um raio s qualquer ($s_B = s$, com $a < s < b$), obtemos nessa região:

$$V(A) - V(B) = 0 - V(s) = \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(s_B/b) \Rightarrow V(s) = -\frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(s/b)$$

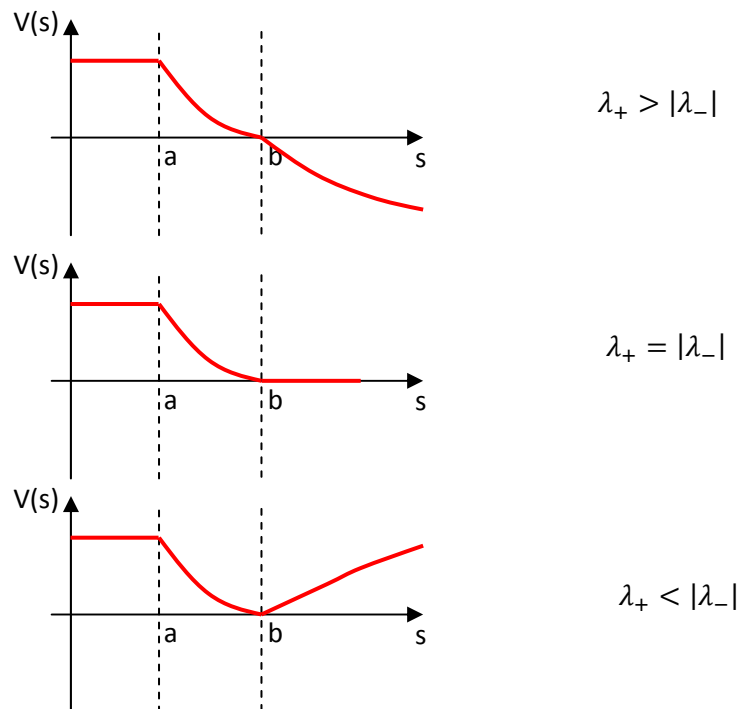
Note que como nessa região vale $s < b$, segue que $V(s)$ é sempre positivo. De fato, sendo $\lambda_+ > 0$, o campo elétrico nessa região aponta de a para b e o potencial elétrico cai quando andamos nesse sentido.

Finalmente, na região interior ($s < a$) o potencial é constante e igual ao potencial em $s = a$ (porque o potencial é uma função contínua). Portanto, na região interior obtemos:

$$V(s) = \lim_{s \rightarrow a} -\frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(s/b) = -\frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(a/b)$$

Note que como vale $a < b$, segue que $V(s)$ é uma constante positiva.

Nos gráficos abaixo esboçamos o potencial em função do raio s para os três casos possíveis de relação entre λ_+ e λ_- .



Podemos obter esse resultado anterior superpondo diretamente os potenciais elétricos dos dois cilindros. Essa solução é um pouco mais trabalhosa e não será apresentada aqui.

b) A diferença de potencial entre as superfícies dos cilindros é:

$$V_{ab} = V(s=a) - V(s=b) = \frac{-\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(a/b) - 0$$

Note que como vale $a < b$, segue que V_{ab} é positiva. O cilindro positivo tem potencial maior que o cilindro negativo.

c) Na região entre os cilindros o campo elétrico que existe é o gerado apenas pelo cilindro condutor:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) = \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}$$

como:

$$V_{ab} = \frac{-\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(a/b) \Rightarrow \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} = \frac{V_{ab}}{\ln(b/a)}$$

Portanto, na região entre os cilindros:

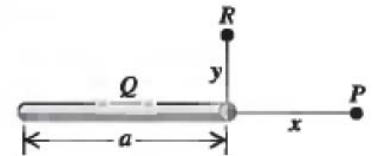
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s} = \frac{V_{ab}}{\ln(b/a)} \frac{\hat{s}}{s}$$

d) Se $\lambda_- = 0$ continua valendo:

$$V_{ab} = \frac{-\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(a/b)$$

A diferença de potencial entre as duas superfícies cilíndricas ($s = a$ e $s = b$) só depende do campo elétrico que existe entre essas duas superfícies e esse campo não é afetado pelas cargas (uniformemente distribuídas) no cilindro mais externo.

E/P23.79: Uma haste fina de comprimento a possui uma carga Q distribuída uniformemente em sua extensão. Calcule o potencial elétrico nos pontos P e R mostrados na Figura ao lado.



Vamos usar o princípio da superposição: cada pequeno segmento da haste, de carga dq , produz em sua vizinhança um potencial do tipo carga pontual (já tomando $V=0$ no infinito):

$$dV = k \frac{dq}{r}$$

Portanto, o potencial em um ponto qualquer do espaço é dado pela integral:

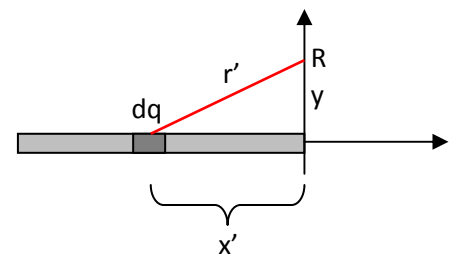
$$V(\vec{r}) = \int_{\text{haste}} dV = \int_{\text{haste}} k \frac{dq}{r'}$$

sendo r' a distância do ponto $\vec{r}$ onde o potencial está sendo avaliado até a carga dq .

Para o ponto R podemos usar a Figura ao lado como referência. Vemos logo que:

$$dq = \lambda dx' = \frac{Q}{a} dx'$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y^2}$$



Note que no nosso referencial a variável x' é negativa e varre o intervalo $[-a, 0]$ quando somamos sobre toda a extensão da haste. Portanto:

$$V(R) = \int_{\text{haste}} k \frac{dq}{r'} = \int_{x'=-a}^{x'=0} k \frac{\left(\frac{Q}{a}\right) dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = k \frac{Q}{a} \int_{-a}^0 \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$$

Em uma tabela de integrais obtemos:

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \ln(x' + \sqrt{x'^2 + y^2})$$

Portanto:

$$\int_{-a}^0 \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \ln(y) - \ln(-a + \sqrt{a^2 + y^2}) = \ln\left(\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2} - a}\right)$$

Concluindo:

$$V(R) = k \frac{Q}{a} \ln\left(\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2} - a}\right)$$

Note que podemos escrever também:

$$\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2} - a} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2} - a} \left(\frac{\sqrt{a^2 + y^2} + a}{\sqrt{a^2 + y^2} + a} \right) = \frac{y(\sqrt{a^2 + y^2} + a)}{a^2 + y^2 - a^2} = \frac{\sqrt{a^2 + y^2} + a}{y}$$

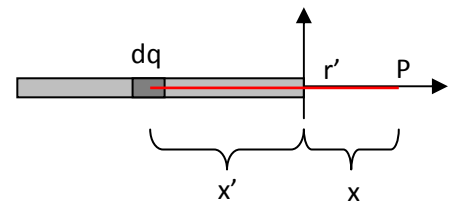
Portanto:

$$V(R) = k \frac{Q}{a} \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + y^2} + a}{y}\right)$$

Para o ponto P podemos usar a Figura ao lado como referência. Vemos logo que:

$$dq = \lambda dx' = \frac{Q}{a} dx'$$

$$r' = -x' + x$$



Note que x' é negativo e, por isso, precisamos colocar o sinal $-$ nessa expressão que dá a distância. Para $x' = -a$, por exemplo (extremidade esquerda da haste), a distância entre dq e o ponto P é $r' = a + x$.

Portanto:

$$V(P) = \int_{\text{haste}} k \frac{dq}{r'} = \int_{x'=-a}^{x'=0} k \frac{\left(\frac{Q}{a}\right) dx'}{-x' + x} = k \frac{Q}{a} \int_{-a}^0 \frac{dx'}{-x' + x}$$

Em uma tabela de integrais (que nesse caso nem seria necessária) obtemos:

$$\int \frac{dx'}{-x' + x} = -\ln|-x' + x|$$

Portanto:

$$\int_{-a}^0 \frac{dx'}{-x' + x} = -\ln(x) + \ln|a + x| = \ln\left(\frac{x + a}{x}\right)$$

Concluindo:

$$V(P) = k \frac{Q}{a} \ln\left(\frac{x + a}{x}\right)$$

c) Se R e P forem pontos distantes da haste podemos fazer $y \gg a$ e $x \gg a$ ou $a/y \ll 1$ e $a/x \ll 1$ nas expressões acima. Para obter as expressões assintóticas do potencial usamos a expansão em série de Taylor da função logaritmo próxima de $x=1$ (fazendo $x = 1 + \varepsilon$ com ε pequeno):

$$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon$$

Portanto, para o ponto R obtemos ($y \gg a$):

$$V(R) = k \frac{Q}{a} \ln \left(\frac{\sqrt{a^2 + y^2} + a}{y} \right) = k \frac{Q}{a} \ln \left(\frac{\sqrt{y^2} + a}{y} \right) = k \frac{Q}{a} \ln \left(\frac{y + a}{y} \right) = k \frac{Q}{a} \ln \left(1 + \frac{a}{y} \right) = k \frac{Q}{a} \frac{a}{y} = k \frac{Q}{y}$$

Para o ponto P obtemos ($x \gg a$):

$$V(P) = k \frac{Q}{a} \ln \left(\frac{x + a}{x} \right) = k \frac{Q}{a} \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) = k \frac{Q}{a} \frac{a}{x} = k \frac{Q}{x}$$

Nos dois casos obtemos um potencial que decai com $1/r$, que é o comportamento típico do potencial de uma carga pontual. De fato, vista de longe, essa haste se parece com uma carga pontual Q na origem e seu potencial é:

$$V(r) = k \frac{Q}{r}$$

para $r \gg a$.