E/P24.1: Dadas a capacitância e a DDP entre as placas, qual a carga que deve ser armazenada em um capacitor?

Um capacitor é essencialmente um dispositivo capaz de acumular carga elétrica. Ele é composto geralmente de duas placas metálicas que são carregadas com cargas +Q e –Q. Um capacitor carregado produz no espaço ao seu redor um campo elétrico e um potencial elétrico. A capacitância C é uma medida da intensidade com que um capacitor é capaz de acumular carga elétrica:

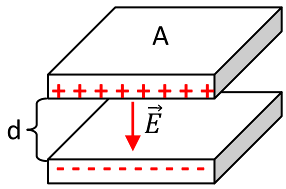
$$Q = C\,\Delta V$$

sendo ΔV a diferença de potencial entre as placas. Nessa expressão, C é uma grandeza (positiva) que depende da geometria do capacitor e do material que permeia o espaço, sendo independente de Q e ΔV. A unidade de é coulomb/volt (C/V) que chamamos de farad (F).

Se um capacitor possui capacitância $C = 7{,}28\ \mu\text{F} = 7{,}28 \times 10^{-6}\ \text{F}$ e a diferença de potencial entre suas placas é $\Delta V = 25$ V, a carga acumulada em sua placa positiva será:

$$Q = C\,\Delta V = 182\ \mu\text{C}$$

($\mu = 10^{-6}$ = micro). Na placa negativa a carga acumulada será $-182\ \mu$C.



E/P24.2: Um capacitor de placas paralelas. A Figura ao lado ilustra um capacitor com essa geometria. Na aproximação em que desprezamos efeito de borda, ou seja, considerando que as cargas Q e $-Q$ se distribuem uniformemente nas faces internas das placas (essas cargas se atraem mutuamente) e que o campo elétrico está restrito ao espaço entre as placas e é uniforme nessa região, a capacitância é: $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$

sendo A a área (maior) das placas e d a distância entre as faces internas das placas. No espaço entre as placas não há nada, somente o vácuo. As cargas não estão no vácuo, elas estão espalhadas uniformemente nas faces internas das placas.

a) Dados A e d podemos calcular a capacitância de $C = \varepsilon_0 A/d \cong 3{,}3\ \times 10^{-12}\ F\ = 3{,}3\ pF$ (p=pico).

b) A DDP entre as placas é dada por $Q = C\,\Delta V \Rightarrow \Delta V = Q/C = Q/[\varepsilon_0 A/d]$. Portanto:

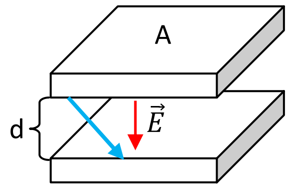
$$\Delta V = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \cong 13.209\ V = 13{,}209\ kV$$

c) A relação entre o campo elétrico $\vec{E}$ e a DDP ΔV é sempre:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

sendo a integral realizada em qualquer caminho que parte de um ponto (qualquer) na placa + e chega em um ponto (qualquer) na placa -. Para um campo $\vec{E}$ uniforme (uma constante), obtemos:

$$\Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot \int_{+}^{-} d\vec{l} = \vec{E} \cdot \vec{L}$$



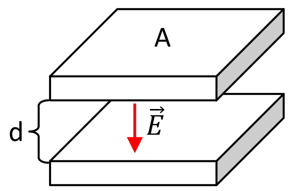
sendo $\vec{L}$ um vetor ("deslocamento") qualquer como o ilustrado ao lado em azul (conectando dois pontos quaisquer nas faces internas das placas do capacitor). Portanto:

$$\Delta V = \vec{E} \cdot \vec{L} = E\ d$$

O campo elétrico entre as placas é uniforme e tem módulo dado por:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{1}{d}\frac{Qd}{\varepsilon_0 A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cong 4{,}03 \times 10^6\ V/m$$

sendo $\sigma = Q/A$ a densidade de carga uniforme na face interna da placa +. Esse resultado pode ser confirmado facilmente através da lei de Gauss para a geometria plana, sem efeitos de borda. Cada placa produz um campo elétrico uniforme de módulo $\sigma/2\varepsilon_0$ e o campo entre as placas é a soma dos campos das duas placas: σ/ε_0. Note a unidade conveniente de E: volt/metro. Esse campo elétrico produziria uma DDP de $4{,}03 \times 10^6\ V$ entre dois pontos separados pela distância de 1 metro no espaço entre as placas.



E/P24.7: Um capacitor vai ser produzido utilizando-se duas moedas como placas planas paralelas.

Uma geometria simples para um capacitor é a plana: duas placas metálicas planas, cada uma de área A e espessura qualquer, com suas faces internas distanciadas de uma distância d, conforme a Figura acima. Na aproximação em que as placas são muito próximas ($d \ll \sqrt{A}$) desprezamos efeitos de borda. Efeitos de borda são modificações no comportamento do campo elétrico (ou de qualquer campo) que ocorrem próximo às bordas do dispositivo. Um campo que não dependia da coordenada x, por exemplo, passa a depender de x próximo à borda. Então, essa dependência em x é um efeito de borda. Se não há efeitos de borda neste capacitor, a carga elétrica se distribui uniformemente nas faces internas das placas e o campo elétrico é uniforme na região entre as placas. Fora dessa região o campo elétrico é nulo. Na face interna da placa positiva a densidade de carga superficial é:

$$\sigma = Q/A$$

Da lei de Gauss, o campo elétrico (das duas placas) entre as placas possui magnitude:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

A diferença de potencial entre as placas é:

$$\Delta V = E\, d = \frac{Q\, d}{\varepsilon_0 A}$$

A razão $Q/\Delta V$ é a capacitância desse capacitor:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Note que a capacitância não depende da espessura das placas, pois o acúmulo de cargas se dá apenas nas superfícies internas das placas (devido à atração entre elas).

Suponha que fabriquemos um capacitor de placas paralelas usando duas moedas (que não foram especificadas no enunciado) de 1 real fazendo o papel das placas. Para facilitar as contas, vamos assumir que cada moeda seja um disco metálico de raio $R = 1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$. Então:

$$C = \varepsilon_0 \pi\, R^2/d$$

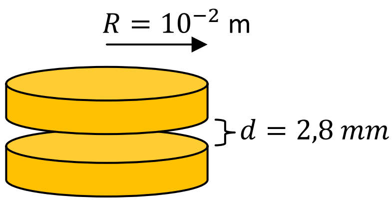
Para que esse capacitor tenha uma capacitância específica C, a distância entre as faces internas das moedas deverá ser:

$$d = \varepsilon_0 \pi\, R^2/C$$

Portanto, para que nosso capacitor feito de duas moedas tenha uma capacitância $C = 1\, p\text{F} = 10^{-12}\ \text{F}$ (um picofarad) a distância entre as placas deve ser (desprezando as propriedades elétricas do ar que permeia o espaço entre as moedas ($\varepsilon_{AR} = \varepsilon_0$), que é uma aproximação razoável): $d \cong 2{,}8$ mm.

Como $d \ll R$ $(2{,}8 \times 10^{-3} \ll 10^{-2})$, segue que a aproximação em que desprezamos os efeitos de borda é razoável nesse caso.

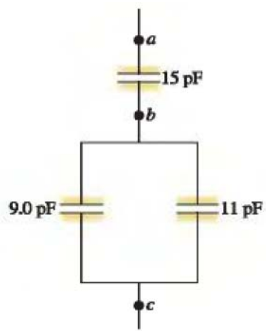
Enfim, se você fizer essa montagem, ilustrada na Figura ao lado, e conectar cada uma das moedas aos pólos + e - de uma bateria de 9 volts, a moeda conectada ao pólo + vai armazenar a carga elétrica superficial:



$$q = C\, \Delta V = \frac{\varepsilon_0 \pi\, R^2}{d} \Delta V = 10^{-12} \times 9 = 9\ \text{pC}$$

(nove picocoulombs). A moeda ligada ao polo – vai adquirir a carga – q (cargas concentradas nas faces internas das moedas).

E/P24.14: Considere a associação de três capacitores mostrada na Figura ao lado. Sejam $C_1 = 15\, p\text{F}$, $C_2 = 9\, p\text{F}$ e $C_3 = 11\, p\text{F}$.



Vemos logo que C_2 está em paralelo com C_3 e que essa associação está em série com C_1.

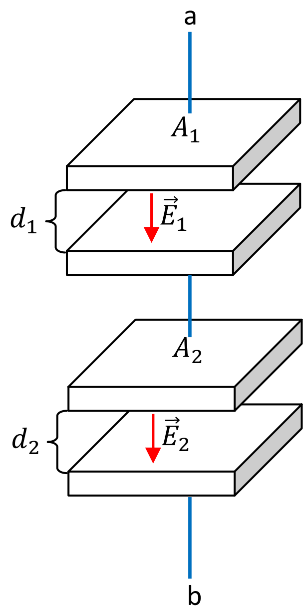
A capacitância equivalente entre os pontos b e c é a resultante da associação de C_2 em paralelo com C_3. Portanto:

$$C_{bc} = C_2 + C_3 = 20\,pF$$

A capacitância equivalente entre os pontos a e c é a resultante da associação em série de C_1 com a capacitância equivalente entre os pontos b e c:

$$C_{ac} = \frac{C_{bc}\,C_1}{C_{bc} + C_1} = \frac{(C_2 + C_3)\,C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \cong 8{,}6\,pF$$

E/P24.20: Dois capacitores de placas planas paralelas estão conectados em série, conforme a Figura ao lado. Calcule a capacitância equivalente entre os terminais a e b.



Suponha que a placa superior do capacitor 1 possua carga +Q. Uma carga –Q é atraída para a placa inferior desse capacitor. A carga total depositada no condutor formado pelas duas placas conectadas entre si era e continuará sendo nula. Portanto, na placa superior do capacitor 2 haverá uma carga –Q, de tal forma que +Q - Q = 0. Dessa forma, na placa inferior do capacitor 2 haverá uma carga –Q. Conclusão, esse capacitor "total" possui uma carga +Q em sua placa positiva (placa superior do capacitor 1) conectada ao terminal a e –Q em sua placa negativa (placa inferior do capacitor 2) conectada ao terminal b. Ficamos então com a equação:

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

Essa igualdade é sempre verdadeira para capacitores em série, e é conseqüência da conservação da carga elétrica (aplicada às duas placas que estão conectadas entre si e isoladas do mundo exterior).

Falta agora calcular a diferença de potencial entre os terminais a e b:

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{EPC1} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{EPC2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

Nessa expressão acima usamos a notação EPC1 (EPC2) significando uma integral do campo elétrico entre as placas do capacitor 1 (2) no sentido de a para b. Concluímos que:

$$\Delta V_{ab} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Essa igualdade é sempre verdadeira para capacitores em série: as DDPs se somam.

Da lei de Gauss sabemos que no espaço entre as placas o campo elétrico é uniforme e de módulo:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 A_1} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A_1}$$

analogamente para E_2. Portanto:

$$\Delta V_{ab} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A_1} d_1 + \frac{Q}{\varepsilon_0 A_2} d_2 = \left\{ \frac{d_1}{\varepsilon_0 A_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 A_2} \right\} Q$$

Se C_{ab} é a capacitância entre os terminais a e b, segue que, da definição de capacitância:

$$Q = C_{ab}\, \Delta V_{ab} \Rightarrow \Delta V_{ab} = \frac{1}{C_{ab}} Q$$

Portanto, concluímos que:

$$\frac{1}{C_{ab}} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 A_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 A_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Usamos acima a expressão já conhecida para a capacitância de um capacitor de placas paralelas (sem efeitos de borda). Mostramos explicitamente que, como não poderia deixar de ser, a capacitância dessa associação de dois capacitores de placas planas em série é dada pela fórmula de validade geral para quaisquer dois capacitores em série:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

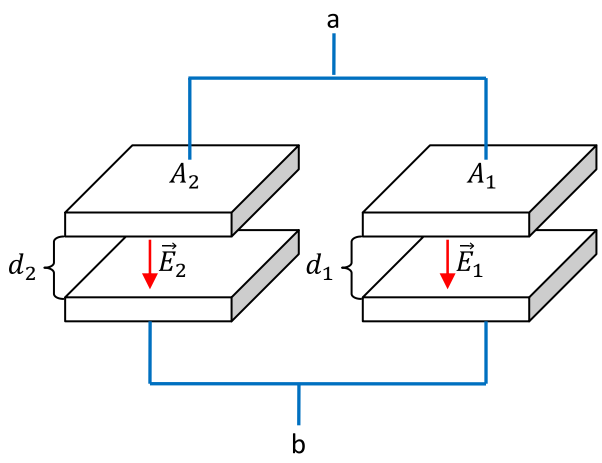
Note que não é necessária a hipótese de que as áreas das placas (A_1 e A_2) sejam iguais. Todos os resultados que obtivemos para C_{eq} valem em geral para dois capacitores quaisquer em série.

Mas, se as áreas das placas forem iguais ($A_1 = A_2 = A$), segue que:

$$\frac{1}{C_{ab}} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 A} = \frac{d_1 + d_2}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow C_{ab} = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1 + d_2}$$

ou seja, o capacitor equivalente é um capacitor de placas paralelas com área A e distância entre as placas igual a $d_1 + d_2$ (as duas placas internas se tornam irrelevantes, tudo funciona como se houvesse somente duas placas de área A separadas pela distância total $d_1 + d_2$). De fato, essas duas placas internas conectadas entre si formam apenas uma região equipotencial entre as placas mais externas, elas não afetam ΔV_{ab}e nem Q e, por isso, não influenciam no valor de C_{ab}. Elas apenas "encurtam" a distância entre as placas mais externas, distância em que existe campo elétrico entre as placas mais externas, que afeta ΔV_{ab}e Q.

E/P24.21: Dois capacitores de placas paralelas estão conectados em paralelo, conforme a Figura ao lado. Calcule a capacitância equivalente entre os terminais a e b.



Suponha que a placa superior do capacitor 1 (2) possua carga $+Q_1$ ($+Q_2$). Nas placas inferiores as cargas são $-Q_1$ e $-Q_2$. Conclusão, esse capacitor "total" possui uma carga elétrica total Q_T depositada no condutor formado pelas duas placas superiores conectadas entre si (formando uma placa só) dada por:

$$Q_T = Q_1 + Q_2$$

Essa igualdade é sempre verdadeira para capacitores em paralelo.

Falta agora calcular a diferença de potencial entre os terminais a e b:

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{EPC1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 d_1$$

Nessa expressão acima usamos a notação EPC1 significando uma integral do campo elétrico entre as placas do capacitor 1 no sentido de a para b.

Essa integral do campo elétrico independe do caminho (porque o campo elétrico é um campo conservativo) e poderíamos muito bem ter feito a integral através das placas do capacitor 2 (EPC2) obtendo:

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{EPC2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_2 d_2$$

Conclusão: nessa configuração das placas tem que valer:

$$\Delta V_{ab} = \Delta V_1 = E_1 d_1 = \Delta V_2 = E_2 d_2$$

Concluímos que:

$$\Delta V_{ab} = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

Essa igualdade entre as DDPs é sempre verdadeira para capacitores em paralelo.

Sabemos da lei de Gauss que o campo elétrico entre as placas é uniforme e tem módulo:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 A_1}$$

analogamente para E_2. Portanto:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = \varepsilon_0 A_1 E_1 + \varepsilon_0 A_2 E_2 = \varepsilon_0 A_1 \frac{\Delta V_{ab}}{d_1} + \varepsilon_0 A_2 \frac{\Delta V_{ab}}{d_2} = \left(\frac{\varepsilon_0 A_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_0 A_2}{d_2}\right) \Delta V_{ab}$$

Finalmente, concluímos que:

$$Q_T = \left(\frac{\varepsilon_0 A_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_0 A_2}{d_2}\right) \Delta V_{ab}$$

Se C_{ab} é a capacitância entre os terminais a e b segue que, da definição de capacitância:

$$Q_T = C_{ab}\, \Delta V_{ab}$$

Portanto, concluímos que:

$$C_{ab} = \frac{\varepsilon_0 A_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_0 A_2}{d_2}$$

Tendo em vista a expressão já conhecida para a capacitância de um capacitor de placas paralelas (sem efeitos de borda), mostramos explicitamente que, como não poderia deixar de ser, a capacitância dessa associação de dois capacitores de placas planas em paralelo é dada pela fórmula de validade geral para quaisquer dois capacitores em paralelo:

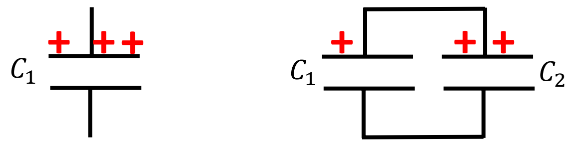
$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Note que não é necessária a hipótese de que as distâncias entre as faces internas das placas (d_1 e d_2) sejam iguais. Mas, se elas forem iguais ($d_1 = d_2 = d$), segue que:

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A_1}{d} + \frac{\varepsilon_0 A_2}{d} = \frac{\varepsilon_0 (A_1 + A_2)}{d}$$

ou seja, o capacitor equivalente é um capacitor de placas paralelas com área total $A_1 + A_2$ e distância entre as placas igual a d (tudo funciona como se houvesse somente duas placas de área $A_1 + A_2$ separadas pela distância d).

E/P24.28: Um capacitor de capacitância C_1 é submetido a uma DDP V_0 (através de uma bateria) até carregar totalmente. Depois esse capacitor é conectado em paralelo com outro capacitor C_2 (inicialmente descarregado).



Na Figura acima ilustramos o capacitor C_1 com sua carga inicial $q_{10} = C_1\, V_0$ (para simplificar, não mostramos as cargas na placa negativa). Ao conectar C_1 com C_2 as cargas positiva e negativa se redistribuem nas placas, produzindo um novo equilíbrio eletrostático. Sabemos duas coisas sobre esse equilíbrio:

i) A carga total nas placas se conserva e, portanto: $q_{1f} + q_{2f} = q_{10} = C_1 V_0$.

ii) C_1 e C_2 estão em paralelo e, portanto: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_f \Rightarrow q_{1f}/C_1 = q_{2f}/C_2$

Note que não vale $\Delta V_f = V_0$, ou seja, não há uma "conservação da DDP". Não tem porque haver. As cargas se redistribuem nas placas, os campos elétricos entre as placas mudam e a DDP entre as placas assume um novo valor ΔV_f que não temos idéia ainda qual seja. O que sabemos, com certeza, é o que está afirmado em (i) e (ii) acima.

Resolvendo o sistema de duas equações acima obtemos finalmente:

$$q_{1f} = \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} V_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_{10} \qquad \text{e} \qquad q_{2f} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q_{10}$$

O capacitor com maior capacitância fica com uma fração maior da carga inicial q_{10} dividida entre eles.

Vemos, portanto, que a nova DDP entre as placas de C_1 e C_2 é:

$$\Delta V_f = \frac{q_{1f}}{C_1} = \frac{q_{2f}}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V_0$$

Note que no caso particular de capacitores iguais ($C_1 = C_2 = C$) a carga se dividiria igualmente ($q_{1f} = q_{2f} = q_{10}/2$), o campo elétrico entre as placas do capacitor C_1 cairia à metade e a DDP também: $\Delta V_f = V_0/2$.

A energia potencial elétrica acumulada (na configuração de cargas) em um capacitor pode ser obtida de:

$$U = \frac{1}{2} C\, (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\, q\, \Delta V$$

Portanto, a energia potencial elétrica que estava acumulada em C_1 era:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2$$

Após a conexão a C_2 e o rearranjo das cargas, a energia acumulada nos dois capacitores passa a ser:

$$U_f = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V_f)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\Delta V_f)^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left[\frac{C_1}{C_1 + C_2} V_0\right]^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1^2}{C_1 + C_2}\right) V_0^2$$

Raciocinando em termos de um capacitor equivalente (C_1 e C_2 em paralelo), o resultado acima pode ser obtido de:

$$U_f = \frac{1}{2} C_{eq} (\Delta V_f)^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2)(\Delta V_f)^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)} V_0^2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0 < U_0$$

Portanto, nesse processo a energia acumulada mudou de:

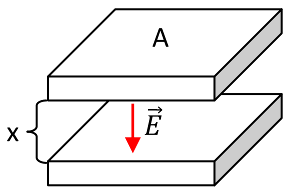
$$\Delta U = U_f - U_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0 - U_0 = -\frac{C_2}{C_1 + C_2} U_0$$

Uma parte da energia foi perdida. Para onde ela foi?

Trata-se de uma pergunta interessante, pois energia não pode simplesmente desaparecer. A energia sempre flui e se transforma, nunca surge do nada ou desaparece. Ou ΔU foi transformada em outra forma de energia e continua no circuito de dois capacitores ou ela fluiu para fora desse circuito. Como não há outra forma de energia associada a capacitores, concluímos que essa energia foi emitida para fora do circuito. Como não há, idealmente, nenhuma forma de dissipação em um circuito (ideal) de apenas dois capacitores, chegamos finalmente a um aparente paradoxo. Para discutir a solução desse aparente paradoxo precisamos usar conceitos que não estudamos ainda nesse curso e, por isso, entendemos que essa questão está colocada ainda fora do contexto, de forma prematura. Mas enfim, ela pode ser encarada aqui como um desafio à curiosidade do estudante. Vamos apenas dar uma ideia da origem desse aparente paradoxo.

O ponto central aqui é que estamos nos deparando com as limitações dos "modelos" ou dos "sistemas ideais". Não existe no mundo real um sistema de dois capacitores sem nenhum mecanismo de dissipação, seja através da simples resistência elétrica do circuito ou da possibilidade de emissão de ondas eletromagnéticas. Não existe também no mundo real um sistema que possua um transiente instantâneo ($\Delta t = 0$), de um estado (apenas C_1) para outro estado (C_1 e C_2) e que envolve, portanto, uma corrente elétrica (um fluxo de cargas) dq/dt infinita. Concluindo: para explicar o destino de ΔU nesse circuito ideal contendo apenas duas capacitâncias que se conectam precisamos entender as limitações dessa idealização. Esse entendimento exige conceitos que não estudamos ainda nesse curso. Basicamente, esse modelo ideal de um sistema de dois capacitores envolve um transiente instantâneo ($\Delta t = 0$) e uma corrente elétrica infinita ($I \to \infty$) fluindo em uma resistência elétrica nula ($R = 0$). A energia dissipada nesse transiente foi: $\Delta E = R\, I^2 \Delta t = 0 \times \infty^2 \times 0 = ?$. Uma resistência elétrica nula pode dissipar calor? Sim, se ela for atravessada por uma corrente infinita. Nesse modelo, $\Delta U = \Delta \mathrm{E}$, ou seja, a energia perdida pelos capacitores foi dissipada nesse transiente instantâneo. No mundo real, tudo se tornaria regular (finito e/ou não nulo) e a explicação seria a mesma, mas sem os artifícios que vem das idealizações do modelo. Há ainda a possibilidade desse sistema emitir ondas eletromagnéticas durante o transiente e perder energia através desse processo. Por se tratar de um processo mais complicado, preferimos deixar aqui apenas essa observação.

E/P24.29: Um capacitor de placas paralelas com área A e distância entre as faces internas das placas igual a x. A carga no capacitor é Q.



a) A energia eletrostática armazenada no capacitor é (desprezando efeitos de borda, ou seja, usando $C = \varepsilon_0 A/x$):

$$U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0 A}{x}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}x$$

b) As placas são afastadas de tal forma que $x \to x + dx$ ($C \to C' = \varepsilon_0 A/(x + dx)$), levando a energia eletrostática armazenada no capacitor ao novo valor (supondo que a carga elétrica não mude, ou seja, que o capacitor não está conectado a nada):

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0 A}{x + dx}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}(x + dx)$$

O incremento na energia acumulada ($dU > 0$) foi:

$$dU = U_f - U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} dx$$

c) As placas se atraem, pois possuem cargas elétricas de sinais opostos. Portanto, esse afastamento das placas requereu um trabalho positivo do agente externo que (por hipótese) puxou uma placa para longe da outra. Esse agente externo teve que aplicar uma força em uma das placas (supondo que a outra ficou fixa) de magnitude F_{ext} capaz de vencer a força de atração F_{at} entre as placas ($F_{ext} = F_{at}$). De acordo com o Teorema do trabalho-energia, o trabalho do agente externo no afastamento das placas resultou em um incremento na energia eletrostática armazenada no capacitor. A energia proveniente desse trabalho ficou armazenada no capacitor. Segue que:

$$dK + dU = dW_{ext} = F_{ext}\, dx = F_{at}\, dx$$

Portanto (sendo $dK = 0$, apenas mudança na posição da placa):

$$F_{at}\, dx = dU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} dx \Rightarrow F_{at} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon_0 A} Q = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} Q$$

sendo $\sigma = Q/A$ a densidade de carga na face interna da placa positiva.

Da lei de Gauss, sabemos que o campo elétrico (das duas placas) entre as placas possui magnitude:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Segue que, do nosso resultado anterior, concluímos que a força de atração entre as placas tem módulo:

$$F_{at} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} Q = \frac{1}{2} E\, Q$$

d) Deveríamos ter obtido $F_{at} = E\, Q$? Note, sendo o campo elétrico entre as placas uniforme de magnitude E, poderíamos esperar que a força de atração na placa positiva (por exemplo) fosse:

$$F_{at} = \sum_{placa+} E\, \Delta q = E \sum_{placa+} \Delta q = E\, Q$$

que é o dobro do resultado anterior. Qual afinal é a resposta correta para a força de atração entre as placas? $E\, Q$ ou $E\, Q/2$? No cálculo acima de F_{at} utilizamos apenas a ideia do princípio da superposição, de que cada pedacinho de placa com carga Δq sofre uma força de atração elétrica $E\ \Delta q$, pelo fato de estar mergulhado no campo elétrico $\vec{E}$ da outra placa. Não parece haver nada errado com esse raciocínio.

Mas, é fato que aqui no item (d) cometemos um erro crasso. Note, o E que utilizamos acima no cálculo de F_{at} é o módulo do campo elétrico entre as placas produzido pelas duas placas. Para calcular a força de atração na placa positiva devemos levar em conta apenas o campo elétrico produzido pela placa negativa. A placa negativa atrai a placa positiva, a placa positiva não atrai ela mesma. O campo elétrico (apenas) da placa negativa resulta na força de atração na placa positiva (e vice-versa). Sabemos, da lei de Gauss, que o campo elétrico de uma placa apenas possui magnitude:

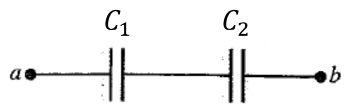
$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{E}{2}$$

Portanto, a força atrativa na placa positiva será:

$$F_{at} = \sum_{placa+} E_1\ \Delta q = E_1 \sum_{placa+} \Delta q = E_1\ Q = \frac{1}{2} EQ$$

Concluindo, o método do trabalho/energia fornece o resultado correto para a magnitude da força de atração entre as placas, que é $E\ Q/2$, sendo E o módulo do campo elétrico entre as placas.

E/P24.32: No circuito ao lado a DDP entre a e b é dada: $V_a - V_b = V_0$.



Trata-se de dois capacitores em série, cuja capacitância equivalente é:

$$C_{eq} = C_{ab} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Portanto, a carga elétrica que está acumulada na placa positiva desse capacitor equivalente (entre a e b) é $q = C_{ab} V_0$. Mas, a placa positiva de C_{eq} é a placa esquerda de C_1. Portanto, a carga na placa positiva de C_1 é $q_1 = q = C_{ab} V_0$. Estando C_1 (150 nF) e C_2 (120 nF) em série, segue que $q_2 = q_1 = C_{ab} V_0$. Isso ocorre porque as duas placas centrais conectadas entre si estão isoladas (eletricamente) do universo e, portanto: $-q_1 + q_2 = 0$. As DDPs nos capacitores são: $\Delta V_1 = q_1/C_1 = [C_2/(C_1 + C_2)]\ V_0$ e $\Delta V_2 = q_2/C_2 = [C_1/(C_1 + C_2)]\ V_0$. Note que, para dois capacitores em série vale sempre:

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = V_a - V_b = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V_0 + \frac{C_1}{C_1 + C_2} V_0 = V_0$$

pois a integral de $\vec{E}$ de a até b (V_0) é a soma da integral de $\vec{E}$ através de C_1 (ΔV_1) com a integral de $\vec{E}$ através de C_2 (ΔV_2).

A energia eletrostática armazenada no capacitor "total" é:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2}C_{eq}V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\,V_0^2$$

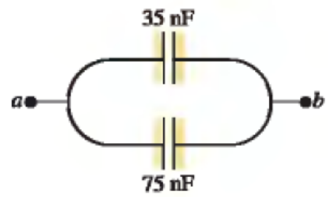
A energia eletrostática em cada capacitor é:

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} = \frac{1}{2}\frac{C_{ab}^2}{C_1}V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}\,V_0^2 \qquad \text{e} \qquad U_2 = \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{C_{ab}^2}{C_2}V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{C_1^2C_2}{(C_1 + C_2)^2}\,V_0^2$$

Como não poderia deixar de ser:

$$U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}\,V_0^2 + \frac{1}{2}\frac{C_1^2C_2}{(C_1 + C_2)^2}\,V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\,V_0^2 = U$$

E/P24.33: Considere a associação de dois capacitores em paralelo mostrada ao lado. Sejam: $C_1 = 35$ nF e $C_2 = 75$ nF (n = nano = 10^{-9}). A diferença de potencial entre os terminais a e b é $\Delta\mathbb{V} = V_a - V_b = V_0 = 220$ volts (vamos supor o terminal a positivo).



a e b) A capacitância equivalente para dois capacitores em paralelo é:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = C_{ab}$$

Sendo $\Delta\mathbb{V} = V_0$ a diferença de potencial entre os terminais (a e b) desse capacitor equivalente, a carga elétrica total armazenada na placa positiva (ligada ao terminal a) é:

$$Q_T = C_{ab}V_0 = (C_1 + C_2)V_0$$

Essa carga total está distribuída, parte na placa esquerda de C_1 e parte na placa esquerda de C_2.

Equivalentemente, como sabemos que para dois capacitores em paralelo vale:

$$\Delta\mathbb{V} = V_0 = \Delta\mathbb{V}_1 = \Delta\mathbb{V}_2$$

podemos calcular a carga elétrica somente na placa positiva do capacitor 1 (ligada ao terminal a):

$$Q_1 = C_1\Delta\mathbb{V}_1 = C_1V_0$$

analogamente para o capacitor 2: $Q_2 = C_2\Delta\mathbb{V}_2 = C_2V_0$. Daí, a carga total armazenada na associação de capacitores será:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\,V_0$$

que é o nosso resultado anterior.

c) A energia eletrostática total armazenada no capacitor equivalente é:

$$U_T = \frac{1}{2}C_{ab}(\Delta\mathbb{V})^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V_0^2$$

Equivalentemente, podemos calcular a energia eletrostática armazenada somente no capacitor 1:

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1(\Delta\mathbb{V}_1)^2 = \frac{1}{2}C_1V_0^2$$

analogamente para o capacitor 2. Daí, a energia eletrostática armazenada na associação de capacitores será:

$$U_T = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}C_1V_0^2 + \frac{1}{2}C_2V_0^2$$

que é o nosso resultado anterior.

e) Estando os capacitores em paralelo, está claro que tanto o capacitor 1 quanto o capacitor 2 estão conectados entre os terminais a e b e, portanto, a diferença de potencial entre os terminais de qualquer capacitor é a diferença de potencial entre a e b, ou seja $\Delta\mathbb{V}_1 = \Delta\mathbb{V}_2 = V_0$.

E/P24.41: Queremos construir um capacitor de placas paralelas com capacitância $C_0 = 1{,}25 \times 10^{-9}$ F para ser conectado a uma diferença de potencial $\Delta\mathbb{V} = V_0 = 5.500$ V. O dielétrico que vai preencher o espaço entre as placas possui constante dielétrica $K_0 = 3{,}6$ e rigidez dielétrica $E_{MAX} = 1{,}6 \times 10^7$ V/m. Qual a área mínima das placas deste capacitor?

A capacitância de um capacitor de placas paralelas com vácuo entre as placas é:

$$C_{VAC} = \frac{\varepsilon_0\, A}{d}$$

sendo A a área de qualquer uma das placas e d a distância entre as faces internas das placas. O preenchimento de todo o espaço entre as placas por um material dielétrico de constante dielétrica $K_0 > 1$ eleva a capacitância para o valor:

$$C = C_0 = K_0\frac{\varepsilon_0\, A}{d}$$

Além de aumentar a capacitância (uma vantagem), a introdução do dielétrico entre as placas facilita a condução de cargas elétricas entre elas (uma desvantagem), através do volume do dielétrico, no espaço entre as placas. O campo elétrico existente dentro do material dielétrico (produzido pelas cargas nas placas) pode atingir um valor extremo em que ocorre a quebra de rigidez dielétrica do material, que passa a partir daí a se comportar como um material condutor elétrico, não permitindo mais o acúmulo de cargas nas placas. No vácuo essa quebra de rigidez só ocorre com valores de campo elétrico muito (muito mesmo) altos, característicos dos materiais de que as placas são feitas. Para o ar, por exemplo, a rigidez dielétrica é da ordem de 3 kV/mm, ou seja, se for estabelecida uma diferença de potencial (DDP) de 3 kV entre dois pontos no ar separados pela distância de 1 mm, haverá a condução de corrente elétrica através do ar, basicamente porque as moléculas no ar se ionizam. Para DDPs menores que 3 kV o ar continua sendo isolante e não há corrente elétrica entre esses dois pontos. Para que ocorra um raio em uma tempestade, é necessário que a rigidez dielétrica do ar entre uma nuvem e a terra seja quebrada. Isso ocorre quando uma nuvem acumula grandes quantidades de cargas elétricas. Essas distribuições de cargas nas nuvens se formam basicamente através das colisões entre as partículas que compõem a nuvem (gotas de água e de gelo).

No presente caso estamos assumindo uma rigidez dielétrica (o menor valor do campo elétrico dentro do material isolante, ou seja, entre as placas do capacitor, que produz a quebra da rigidez dielétrica do material) igual a E_{MAX}. Esse campo E_{MAX} é o maior valor admissível para o campo elétrico entre as placas, para que o dielétrico nessa região mantenha suas propriedades de isolamento elétrico. E_{MAX} é o campo limiar entre os comportamentos isolante e condutor do dielétrico. Portanto, para que esse capacitor funcione adequadamente o campo elétrico entre as placas deve ser tal que:

$$E < E_{MAX}$$

Em termos dos dados do exercício, o campo elétrico entre as placas é:

$$\Delta\mathbb{V} = V_0 = E\ d\ \Rightarrow E = \frac{V_0}{d}$$

Portanto, a distância entre as placas deve ser tal que:

$$E = \frac{V_0}{d} < E_{MAX} \Rightarrow d > \frac{V_0}{E_{MAX}} = d_{MIN}$$

Vemos que não podemos aproximar muito as placas, sob risco de produzir a quebra de rigidez dielétrica. A distância mínima d_{MIN} garante o valor de C_0 sem quebra de rigidez dielétrica no material isolante.

Da expressão da capacitância almejada obtemos:

$$C_0 = K_0 \frac{\varepsilon_0\ A}{d} \Rightarrow d = \frac{K_0\ \varepsilon_0\ A}{C_0}$$

Vemos que para um dado valor fixo de C_0, se aumentamos d, para evitar a quebra de rigidez, devemos aumentar também a área A das placas. De fato:

$$d > \frac{V_0}{E_{MAX}} = d_{MIN} \Rightarrow \frac{K_0\ \varepsilon_0\ A}{C_0} > d_{MIN} \Rightarrow A > \frac{C_0 d_{MIN}}{K_0\ \varepsilon_0} = A_{MIN}$$

A menor área aceitável (em um caso extremo) para as placas do capacitor é:

$$A_{MIN} = \frac{C_0 d_{MIN}}{K_0\ \varepsilon_0} = \frac{C_0\ V_0}{K_0\ \varepsilon_0\ E_{MAX}}$$

Essa é a menor área que as placas devem ter para que a distância entre elas seja a menor possível, compatível com um dado valor de capacitância desejado e uma dada rigidez dielétrica do material entre as placas. Se quisermos um capacitor com área menor, com a mesma capacitância C_0 etc., teremos que aproximar mais as placas, para manter a capacitância, levando ao risco de quebra da rigidez dielétrica do isolante e concomitante descarga do capacitor através do espaço entre as placas.

Com os dados numéricos obtemos: $A_{MIN} \cong 0{,}014$ m^2. Uma área menor requereria uma distância d menor (fixando o valor de C_0) e levaria à condução elétrica através do meio isolante entre as placas.

E/P24.47: Um capacitor está conectado a uma bateria que mantém uma DDP V_0 entre suas placas. Em um dado momento um dielétrico de constante dielétrica $K > 1$ (sempre é verdade que $K \geq 1$, sendo $K = 1$ o K do vácuo) é inserido e preenche todo o espaço entre as placas.

Antes da inserção do dielétrico o capacitor (com vácuo entre as placas) estava carregado com carga $q_0 = C^{VAC}\, V_0 = C_0 V_0$ e a energia que estava armazenada nele era:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2}\, q_0\, V_0$$

Após a inserção do dielétrico a capacitância passa a ser $C_f = K\, C_0$, a carga armazenada passa a ser $q_f = C_f\, V_0 = K\, C_0\, V_0 = K\, q_0$ (a carga aumenta) e a energia armazenada passa a ser:

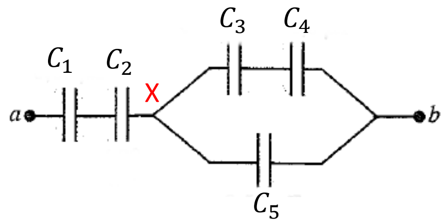
$$U_f = \frac{1}{2} C_f\, V_0^2 = \frac{1}{2} K\, C_0 V_0^2 = \frac{1}{2}\, q_f\, V_0 = K\, U_0$$

A energia acumulada aumenta. Note que nessa análise mantivemos a DDP V_0 fixa, pois estamos supondo que o capacitor está o tempo todo conectado a uma bateria que desempenha essa função. A variação de energia armazenada no capacitor foi:

$$\Delta U = U_f - U_0 = (K-1) U_0 > 0$$

De onde veio esse acréscimo de energia no capacitor? Só pode ter vindo da bateria que está mantendo a DDP V_0. De fato, a inserção do dielétrico entre as placas polariza o dielétrico, cria distribuições de cargas de polarização nas interfaces dielétrico/placa que atraem mais cargas para as placas. Essas cargas, $\Delta q = q_f - q_0 = (K-1) q_0$, vêm da bateria que, portanto, realiza trabalho sobre os portadores de carga que fluem. Esse trabalho da bateria resulta em um $\Delta U > 0$.

Cada portador de carga (de carga elétrica q_1) que flui através da bateria e vai para as placas do capacitor ganha a energia potencial $\delta U_1 = q_1\, V_0$. Portanto, a carga total Δq recebe da bateria a energia potencial elétrica: $U_{BAT} = \Delta q\, V_0 = (K-1) q_0\, V_0 = 2\, \Delta U$. Parte dessa energia ($\Delta U$) fica armazenada no capacitor e a outra parte (ΔU) é transferida (trabalho da força atrativa) para o agente externo que insere o dielétrico entre as placas.



E/P24.57: No circuito ao lado a DDP entre a e b é dada: $V_a - V_b = V_0$.

Vamos calcular a capacitância equivalente C_{ab}. Entre os pontos a e X vemos que C_1 e C_2 estão em série:

$$C_{aX} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Entre os pontos X e b há uma associação paralela entre $C_{34} = C_3 C_4/(C_3 + C_4)$ e C_5. Portanto:

$$C_{Xb} = C_5 + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}$$

Finalmente, entre a e b vemos que C_{aX} está em série com C_{Xb}. Portanto:

$$C_{ab} = \frac{C_{aX}\, C_{Xb}}{C_{aX} + C_{Xb}}$$

Vamos deixar como está. Vamos calcular agora a carga acumulada em cada capacitor.

Em C_1 a carga é a do capacitor equivalente, pois a placa esquerda de C_1 é a placa esquerda de C_{ab}. Portanto: $q_1 = C_{ab} V_0$. Em C_2 a carga é também q_1, pois ele está em série com C_1: $q_2 = q_1 = C_{ab} V_0$.

C_{Xb} também está em série com C_2 e segue que a carga em C_{Xb} também é $q_1 = C_{ab} V_0$. Portanto, como a carga total no ponto X e em tudo que se conecta a ele é nula, posto que estão isolados eletricamente do universo, segue que:

$$q_3 + q_5 = q_2 = q_1 = C_{ab} V_0$$

Note que q_3 é a carga no capacitor equivalente C_{34} e que $\Delta V_{34} = \Delta V_5$, pois eles estão em paralelo. Portanto:

$$\Delta V_{34} = \Delta V_5 = V_X - V_b \Rightarrow \frac{q_{34}}{C_{34}} = \frac{q_3}{C_{34}} = \frac{q_5}{C_5}$$

Dessas duas últimas equações obtemos (notando também que $q_4 = q_3$ (série)):

$$q_3 = q_4 = \frac{C_{ab} V_0}{1 + C_5/C_{34}} \qquad \text{e} \qquad q_5 = \frac{C_{ab} V_0}{1 + C_{34}/C_5}$$

Apenas para conferir, a carga total no ponto X e em tudo que se conecta a ele é nula:

$$-q_2 + q_3 + q_5 = -C_{ab} V_0 + \frac{C_{ab} V_0}{1 + C_5/C_{34}} + \frac{C_{ab} V_0}{1 + C_{34}/C_5} = C_{ab} V_0 \left[-1 + \frac{1}{1 + C_5/C_{34}} + \frac{1}{1 + C_{34}/C_5}\right] = 0$$

A energia total acumulada no circuito é a energia no capacitor equivalente:

$$U = \frac{1}{2} C_{ab}\, V_0^2$$

A energia acumulada em cada capacitor é:

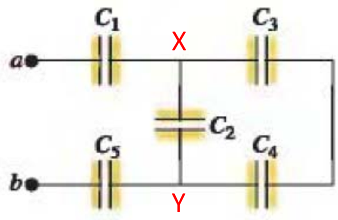
$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} = \frac{1}{2}\frac{C_{ab}^2}{C_1}V_0^2 \qquad U_2 = \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{C_{ab}^2}{C_2}V_0^2 \qquad U_3 = \frac{1}{2}\frac{q_3^2}{C_3} = \frac{1}{2}\frac{1}{C_3}\left(\frac{C_{ab}}{1 + C_5/C_{34}}\right)^2 V_0^2$$

$$U_4 = \frac{1}{2}\frac{q_4^2}{C_4} = \frac{1}{2}\frac{1}{C_4}\left(\frac{C_{ab}}{1 + C_5/C_{34}}\right)^2 V_0^2 \qquad U_5 = \frac{1}{2}\frac{q_5^2}{C_5} = \frac{1}{2}\frac{1}{C_5}\left(\frac{C_{ab}}{1 + C_{34}/C_5}\right)^2 V_0^2$$

Conferindo:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = \frac{1}{2}C_{ab}^2V_0^2\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right)\left(\frac{1}{1 + C_5/C_{34}}\right)^2 + \frac{1}{C_5}\left(\frac{1}{1 + C_{34}/C_5}\right)^2\right]$$

Com a ajuda do Maple mostramos que o termo entre colchetes é igual a $1/C_{ab}$.



E/P24.59: Considere a associação de capacitores ao lado:

a) Qual a capacitância equivalente entre os terminais a e b?

Começamos da direita para a esquerda:

C_3 está em série com C_4 resultando em:

$$C_{XY} = \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4}$$

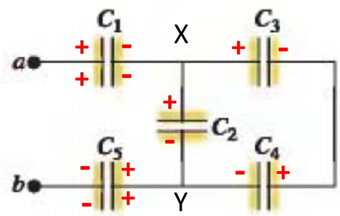
C_{XY} (2,1 μF) está em paralelo com C_2 resultando em:

$$C_{XY2} = C_2 + C_{XY} = C_2 + \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4}$$

C_{XY2} (6,3 μF) está em série com C_1 e C_5 resultando finalmente em:

$$\frac{1}{C_{ab}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_{XY2}}$$

Não vale a pena substituir uma expressão na outra para tentar simplificar ($C_{ab} = 2{,}52\ \mu F$).



b) Dado V_{ab}, calcule a diferença de potencial e a carga elétrica na placa positiva de cada um dos capacitores no circuito ao lado. Essa Figura ilustra uma possível polarização das placas, supondo que o terminal “a” é positivo. Note que a neutralidade elétrica deve ser mantida nos condutores formados pela conexão entre várias placas. Por exemplo, se a placa da direita de C_3 possui carga $-Q_3$, então a placa da direita de C_4 possui carga Q_4 tal que (C_3 e C_4 estão em série):

$$Q_3 = Q_4$$

As cargas Q_1 e Q_5 podem ser obtidas diretamente da capacitância equivalente dessa associação entre os pontos a e b:

$$Q_1 = Q_5 = C_{ab}V_{ab}$$

Isso porque as placas de C_1 (+) e C_5 (-) são as placas do capacitor equivalente entre a e b (são as placas ligadas a esses terminais). Com os dados numéricos: $Q_1 = Q_5 = 554\ \mu C$ (lembrando: μ=micro=10^{-6}).

A neutralidade elétrica do ponto X e de tudo conectado a ele leva a: $Q_1 = Q_2 + Q_3$.

Para obter mais uma equação envolvendo as cargas nos capacitores, podemos usar a DDP entre os pontos que chamamos de X e Y na figura acima:

$$V_X - V_Y = \Delta V_2 = Q_2/C_2$$

Vemos na Figura que $V_a - \Delta V_1 = V_X$ e $V_b + \Delta V_5 = V_Y$. Portanto: $V_X - V_Y = V_{ab} - 2\,\Delta V_1$. Esta é a DDP entre os terminais de C_2 e, portanto:

$$\frac{Q_2}{C_2} = V_X - V_Y = V_{ab} - 2\frac{C_{ab}}{C_1}V_{ab} \Rightarrow Q_2 = \left[1 - 2\frac{C_{ab}}{C_1}\right]C_2V_{ab} \cong 348\ \mu C$$

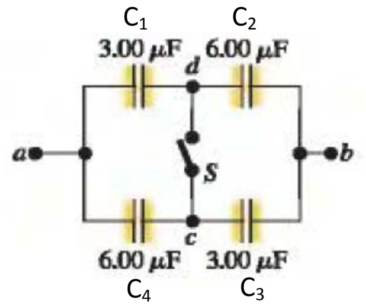
Sendo $Q_1 = Q_2 + Q_3$, segue que:

$$Q_3 = Q_4 = Q_1 - Q_2 = \left[C_{ab} - C_2 + 2\ \frac{C_{ab}C_2}{C_1}\right]V_{ab}$$

Com os dados numéricos: $Q_3 = Q_4 = 206\ \mu C$.

As DDPs nos capacitores são dadas por $\Delta V_i = Q_i/C_i$.

E/P24.60: Considere a associação de capacitores ao lado. A chave S está inicialmente aberta e a DDP está fixa no valor $V_{ab} = V_a - V_b = 210$ V (imagine que essa associação de capacitores está conectada a uma bateria com FEM 210 V).

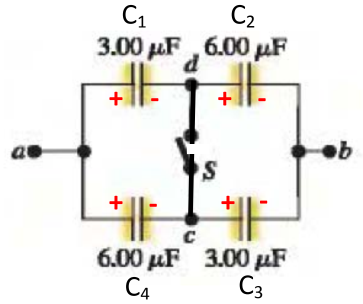


A chave S está inicialmente aberta e depois vai ser fechada, mantendo-se fixa a DDP V_{ab} (pela ação da bateria conectada a a e b).

Note que com a chave S aberta, C_1 está em série com C_2 e C_4 está em série com C_3. Essas duas associações série estão em paralelo entre si, ou seja:

$$C_{ab} = C_{12} + C_{34} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4}$$

a) Calcule $V_{cd} = V_c - V_d$.



Na figura ao lado fizemos uma hipótese (razoável) sobre as polaridades dos capacitores (supondo que o terminal a é o terminal positivo).

Note que:

$$V_a - V_1 = V_d$$

$$V_a - V_4 = V_c$$

sendo V_i a diferença de potencial entre a placa positiva e a placa negativa do capacitor i.

Subtraindo uma equação da outra obtemos:

$$V_{cd} = V_c - V_d = V_1 - V_4$$

Portanto, para conhecer V_{cd} devemos conhecer as cargas em C_1 e C_4, que nos darão os valores de V_1 e V_4.

Da conservação da carga elétrica (nas placas conectadas entre si) obtemos:

$$Q_1 = Q_2 \text{ (capacitores em série)}$$

$$Q_3 = Q_4 \text{ (capacitores em série)}$$

O capacitor equivalente C_{12} possui DDP V_{ab} e carga $Q_1 = Q_2$, portanto:

$$Q_1 = Q_2 = C_{12}V_{ab} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}V_{ab}$$

Analogamente, para o capacitor equivalente C_{34}, que possui DDP V_{ab} e carga $Q_3 = Q_4$:

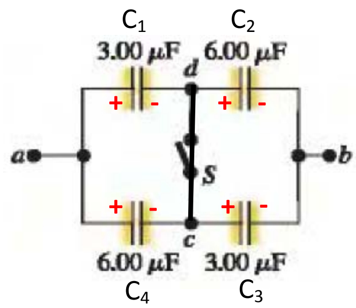
$$Q_3 = Q_4 = C_{34}V_{ab} = \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4}V_{ab}$$

Concluindo:

$$V_{cd} = V_1 - V_4 = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_4}{C_4} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}V_{ab} - \frac{C_3}{C_3 + C_4}V_{ab} = \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{C_3}{C_3 + C_4}\right)V_{ab}$$
$$= \left[\frac{C_2C_4 - C_1C_3}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}\right]V_{ab}$$

Se as capacitâncias fossem todas iguais, por simetria deveria valer $V_{cd} = 0$. O resultado acima concorda com essa ideia. De fato, se valer $C_2C_4 = C_1C_3$, então já obtemos $V_{cd} = 0$.

b) A chave S é fechada (o ponto d se conecta ao ponto c). Há um rearranjo nas capacitâncias, um rearranjo nas cargas elétricas (novo equilíbrio eletrostático) e a chave fechada leva a $V_{cd} = 0$. Lembre-se que a DDP V_{ab} está mantida em seu mesmo valor anterior (pela presença de uma bateria/fonte não mostrada na Figura).



Vamos calcular a nova DDP em cada um dos capacitores.

Com a chave S fechada, C_1 fica em paralelo com C_4:

$$C_{14} = C_1 + C_4$$

e C_2 fica em paralelo com C_3:

$$C_{23} = C_2 + C_3$$

A capacitância equivalente entre a e b passa a ser a associação série de C_{14} com C_{23}:

$$C_{ab} = \frac{C_{14}C_{23}}{C_{14} + C_{23}} = \frac{(C_1 + C_4)(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$$

Da conservação da carga elétrica:

$$Q_{14} = Q_{23} \text{ (capacitores em série)}$$

Vale ainda $Q_{14} = Q_{23} = C_{ab}V_{ab}$ (carga total no capacitor equivalente). Portanto:

$$Q_{14} = C_{ab}V_{ab} = \frac{(C_1 + C_4)(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}V_{ab} = Q_{23}$$

Esse resultado apenas confirma que a placa esquerda de C_{14} é a placa esquerda do capacitor equivalente C_{ab} e que, portanto, a carga em C_{14} é a carga em C_{ab} que é $C_{ab}V_{ab}$. O mesmo raciocínio vale para a placa direita de C_{23}.

A DDP entre os terminais de C_{14} (que é a DDP entre os terminais de C_1 e C_4) é:

$$V_{14} = V_1 = V_4 = \frac{Q_{14}}{C_{14}} = \frac{C_{ab}}{C_{14}}V_{ab} = \frac{(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}V_{ab}$$

A DDP entre os terminais de C_{23} (que é a DDP entre os terminais de C_2 e C_3) é:

$$V_{23} = V_2 = V_3 = \frac{Q_{23}}{C_{23}} = \frac{C_{ab}}{C_{23}}V_{ab} = \frac{(C_1 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}V_{ab}$$

Portanto, como a DDP entre os terminais de C_1 é V_{14} (capacitores em paralelo), segue que:

$$Q_1 = C_1\, V_{14} = \frac{C_1\,(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}V_{ab}$$

Analogamente (a DDP entre os terminais de C_4 é V_{14}):

$$Q_4 = C_4\, V_{14} = \frac{C_4\,(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}V_{ab}$$

Com a DDP entre os terminais de C_2 e C_3 é V_{23} (capacitores em paralelo), segue que:

$$Q_2 = C_2\, V_{23} = \frac{C_2(C_1 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}V_{ab}$$

$$Q_3 = C_3\,V_{23} = \frac{C_3(C_1 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} V_{ab}$$

c) Quanto de carga elétrica flui através da chave S no instante em que ela é fechada?

Antes de a chave ser fechada a carga total no ponto d, $Q_2 - Q_1$ (e em tudo que estava conectado a ele), era zero. Analogamente, a carga total no ponto c, $Q_3 - Q_4$ (e em tudo que estava conectada a ele), era zero. Após a chave ser fechada o capacitor C_1 adquire a carga:

$$Q_1 = \frac{C_1\,(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} V_{ab}$$

e o capacitor C_2 adquire a carga:

$$Q_2 = \frac{C_2(C_1 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} V_{ab}$$

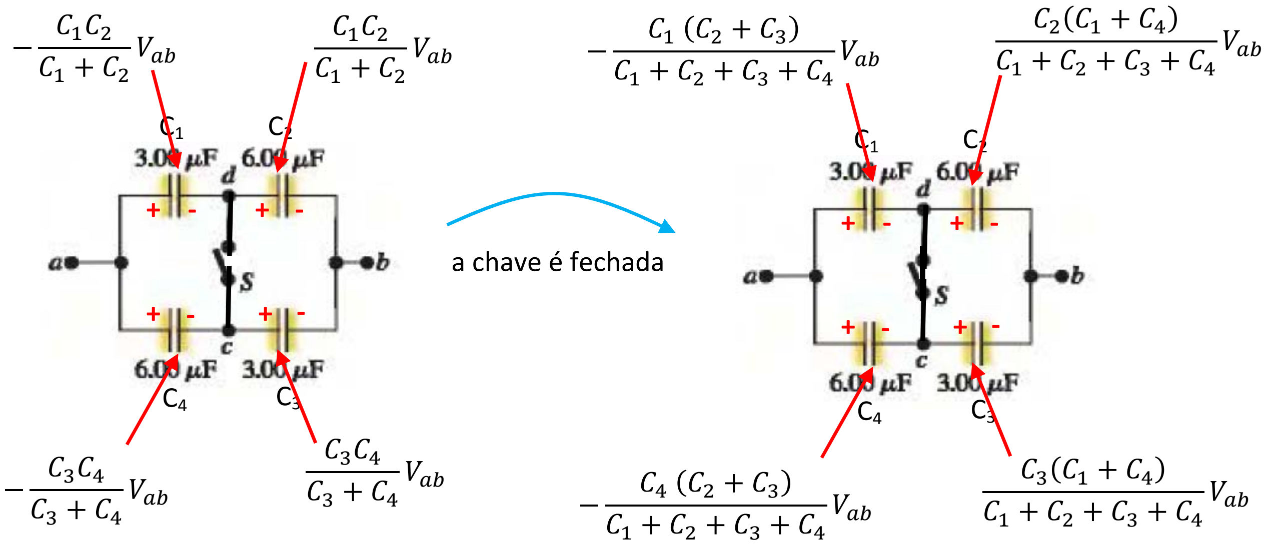
Portanto, a carga elétrica total que foi transferida para o ponto d foi:

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{C_2 C_4 - C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} V_{ab}$$

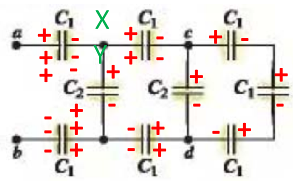
Essa é a carga elétrica que fluiu através da chave S.

Obviamente a carga elétrica total nas quatro placas centrais conectadas entre si continua sendo nula, ou seja, no ponto c (e em tudo que está conectado a ele) a carga elétrica é $-\Delta Q = -(Q_2 - Q_1)$. A ideia central aqui é que com a chave aberta o ponto d estava conectado a duas placas de cargas opostas (de C_1 e C_2) e que, portanto, não havia nenhum saldo de carga elétrica nessa região condutora (necessariamente tinha que valer $Q_1 = Q_2$). Com o fechamento da chave ocorre um novo equilíbrio eletrostático, pois antes valia $V_c \neq V_d$ e com a chave fechada vai ter que valer $V_c = V_d$. Esse novo equilíbrio requer uma transferência de cargas elétricas de uma região para a outra. Com a chave fechada não vale mais o vínculo $Q_1 = Q_2$ (C_1 e C_2 não estão mais em série), pois as quatro placas centrais estão conectadas entre si e deve valer que a soma das cargas nessas quatro placas é nula. Vemos que, de fato, com a chave fechada, vale $Q_1 \neq Q_2$, ou seja, a região do ponto d possui agora um saldo de carga elétrica, que é $\Delta Q = Q_2 - Q_1$. Essa carga fluiu através da chave durante o transiente entre os dois equilíbrios eletrostáticos. A região do ponto d adquiriu uma carga $Q_2 - Q_1$ e a região do ponto c adquiriu a carga oposta $-(Q_2 - Q_1)$.

A Figura abaixo ilustra o rearranjo de cargas produzido pelo fechamento da chave S. Tudo se resume a uma transição de um equilíbrio em que valia $Q_1 - Q_2 = 0$ e $Q_3 - Q_4 = 0$ para um novo equilíbrio em que passa a valer $-Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0$ (e, portanto, $Q_1 - Q_2 \neq 0$).



E/P24.63: Considere a associação de capacitores ao lado.



Ilustramos uma possível (e razoável) polarização para as placas.

a) A capacitância entre a e b é:

Nossa análise caminha no sentido da direita para a esquerda.

Começando pelo ramo mais à direita: Há três capacitores C_1 em série (entre c e d):

$$\frac{1}{C_{cd}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{3}{C_1} \Rightarrow C_{cd} = \frac{C_1}{3}$$

Esse capacitor está em paralelo com um C_2 (o C_2 entre c e d):

$$C_{cd2} = C_2 + C_{cd} = C_2 + \frac{C_1}{3}$$

Esse capacitor está em série com dois C_1 (conectados a X e Y):

$$\frac{1}{C_{XY}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{cd2}} = \frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_2 + \frac{C_1}{3}}$$

Vamos deixar do jeito que está ($C_{XY} = 2{,}3\ \mu F$).

Esse capacitor está em paralelo com um C_2 (o C_2 entre X e Y):

$$C_{XY2} = C_2 + C_{XY} = C_2 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_2 + \frac{C_1}{3}}\right)^{-1}$$

Essa é a capacitância equivalente entre X e Y ($C_{XY2} = 6{,}9\ \mu F$).

Finalmente, esse capacitor está em série com dois C_1 (conectadas a a e b):

$$\frac{1}{C_{ab}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{XY2}} = \frac{2}{C_1} + \left[C_2 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_2 + \frac{C_1}{3}}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

Vamos deixar do jeito que está. Se mexer piora. Numericamente obtemos $C_{ab} = 2{,}3\ \mu F$.

b) Dado $V_{ab} = V_a - V_b$, quais as cargas elétricas nas placas positivas dos três capacitores mais próximos dos terminais a e b?

A carga elétrica no capacitor equivalente é: $Q = C_{ab}\, V_{ab}$. Essa carga foi transferida (por uma bateria) da placa do capacitor C_1 conectado ao ponto b para a placa do capacitor C_1 conectado ao ponto a. Essas placas são as placas do capacitor equivalente, pois estão conectadas aos terminais a e b. Portanto, em cada um desses dois C_1 a carga elétrica na placa positiva é: $Q_1 = C_{ab}\, V_{ab} \cong 966\ \mu C$.

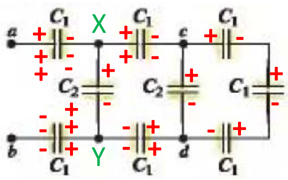
Lembrando que esses dois capacitores estão em série com o capacitor equivalente C_{XY2} segue que:

$$V_a - V_1 - V_{XY2} - V_1 = V_b \Rightarrow V_{ab} = 2\, V_1 + V_{XY2} \Rightarrow V_{XY2} = V_X - V_Y = V_{ab} - 2\frac{Q_1}{C_1} = \left(1 - 2\frac{C_{ab}}{C_1}\right) V_{ab}$$

Essa é a DDP ($V_{XY2} = 140\ V$) entre os terminais do capacitor C_2 mais próximo dos terminais a e b (o C_2 entre X e Y). Portanto:

$$Q_2 = C_2 V_{XY2} = \left(1 - 2\frac{C_{ab}}{C_1}\right) C_2 V_{ab} \cong 644\ \mu C$$

c) Calcule $V_{cd} = V_c - V_d$.



Já sabemos que na placa positiva do capacitor C_1 conectado entre a e X a carga é $Q_1 = C_{ab}\, V_{ab}$ e na placa positiva do capacitor C_2 entre X e Y a carga é Q_2 (que foi calculada acima). Portanto, na placa positiva do capacitor C_1 entre X e c a carga Q_1' é (essas três placas estão conectadas entre si e isoladas do universo):

$$Q_1' + Q_2 - Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1' = Q_1 - Q_2 = C_{ab}\, V_{ab} - \left(1 - 2\frac{C_{ab}}{C_1}\right) C_2 V_{ab}$$

Concluímos a mesma coisa para o capacitor C_1 conectado entre b e Y. Portanto as DDPs nestes capacitores são:

$$V'_1 = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{1}{C_1}\left[C_{ab}\, V_{ab} - \left(1 - 2\frac{C_{ab}}{C_1}\right) C_2 V_{ab}\right]$$

Já calculamos acima $V_X - V_Y = V_{XY2} = Q_2/C_2$.

Atravessando de X para c obtemos: $V_X - V'_1 = V_c$.

Atravessando de Y para d obtemos: $V_Y + V'_1 = V_d$.

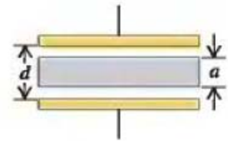
Portanto, subtraindo essas equações: $V_{cd} = V_c - V_d = V_{XY2} - 2V'_1$.

Esse resultado nos permite calcular finalmente:

$$V_{cd} = V_{XY2} - 2\,V'_1 = \left\{\left(1 - 2\frac{C_{ab}}{C_1}\right) - \frac{2}{C_1}\left[C_{ab} \; - \left(1 - 2\frac{C_{ab}}{C_1}\right)C_2\right]\right\}V_{ab}$$

$V_{cd} \cong 47\ V$.

E/P24.66: Um capacitor de placas paralelas tem um bloco de metal (em cinza) inserido entre suas placas, conforme a Figura ao lado (visão de perfil).

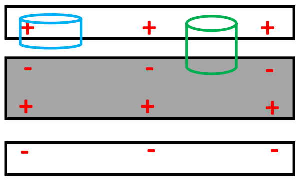


a) Calcule a capacitância desse capacitor.

Vamos fazer o cálculo desprezando efeitos de borda. Suponha uma carga elétrica +Q distribuída uniformemente na face inferior da placa de cima e uma carga –Q distribuída uniformemente na face superior da placa de baixo. Essas duas distribuições de cargas produzem um campo elétrico uniforme entre as placas, ortogonal às faces das placas e de magnitude (de acordo com a lei de Gauss):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Obviamente, não haverá campo elétrico dentro da região condutora da placa de espessura a. Essa blindagem vai se dar por causa de densidades de carga superficiais nas faces superior e inferior desta placa (eletrização por indução), conforme a Figura ao lado. Podemos provar a existência dessas densidades de carga através da lei da Gauss aplicada, por exemplo, à superfície gaussiana (em verde) mostrada na Figura. Como não há fluxo de campo elétrico nessa superfície, pois suas tampas (dois discos) estão em regiões onde $\vec{E} = \vec{0}$, então a carga elétrica total no interior dela deve ser nula. Concluímos que existe uma densidade de carga negativa na face superior da placa de espessura a igual, em módulo, à densidade de carga positiva na face inferior da placa de cima do capacitor. A mesma ideia se aplica para as faces inferiores. Analogamente, a lei da Gauss aplicada à superfície gaussiana em azul mostrada na Figura nos leva a concluir que o campo na região vazia (vácuo) entre as placas é $E = \sigma/\varepsilon_0$.

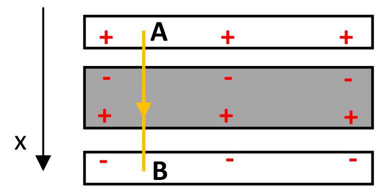


Enfim, há quatro densidades de carga superficiais, na ordem de cima para baixo: σ, $-\sigma$, σ, $-\sigma$. O campo elétrico no espaço é a resultante de quatro campos elétricos de magnitude $\sigma/2\varepsilon_0$ ortogonais às placas. Na região vazia entre a placa superior e o bloco condutor a resultante (para baixo) é: $\sigma/2\varepsilon_0 + \sigma/2\varepsilon_0 - \sigma/2\varepsilon_0 + \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$. Na região dentro da placa de espessura a a resultante (para baixo) é: $\sigma/2\varepsilon_0 - \sigma/2\varepsilon_0 + \sigma/2\varepsilon_0 - \sigma/2\varepsilon_0 = 0$. Na região vazia entre a placa inferior e a placa de espessura a a resultante (para baixo) é: $\sigma/2\varepsilon_0 - \sigma/2\varepsilon_0 + \sigma/2\varepsilon_0 + \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$. A lei de Gauss demonstra esse resultado mais facilmente (note que não precisamos provar que o campo é nulo dentro de um condutor em equilíbrio eletrostático).

A diferença de potencial entre as duas placas do capacitor será:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E\,\hat{x} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E\,dx = E\,\Delta x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-a) = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}(d-a)$$

Considere que para o cálculo da integral acima tomamos $d\vec{l} = dx\,\hat{x}$ ao longo do caminho laranja, desde A até B, ilustrado na Figura ao lado. Consideramos também que $\vec{E} = \vec{0}$ na região dentro da placa condutora de espessura a e no interior das duas placas do capacitor. Nas duas regiões vazias entre as placas o campo é $\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \hat{x}$ (segue que $\Delta x = d - a$).



Concluindo, a capacitância é:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-a}$$

que é a capacitância de um capacitor de placas paralelas com espaçamento $d - a$ entre as faces internas das placas. A inserção da placa condutora entre as placas do capacitor funciona como uma redução na distância entre elas, uma redução igual à espessura a da placa condutora.

Note que podemos pensar também que esse capacitor é a associação de dois capacitores em série: um capacitor de área A e distância entre as placas $k(d-a)$ (com $k < 1$) e o outro capacitor com área A e distância entre as placas $(1-k)(d-a)$, de tal forma que a distância total vazia entre as duas placas do capacitor é $k(d-a) + (1-k)(d-a) = d - a$. A capacitância equivalente dessa associação (série) é:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{k(d-a)}{\varepsilon_0 A} + \frac{(1-k)(d-a)}{\varepsilon_0 A} = \frac{d-a}{\varepsilon_0 A}$$

Antes da placa condutora ser inserida a capacitância era:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Portanto, a capacitância do capacitor com a placa metálica inserida é:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d-a} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-a}\frac{d}{d} = \frac{\varepsilon_0 A/d}{d-a} d = \frac{d}{d-a} C_0$$

c) Se $a \to 0$ (a placa se torna uma folha de espessura nula) obtemos: $C = C_0$. É como se a placa condutora não existisse, ela não tem nenhum efeito na capacitância.

Se $a \to d$ obtemos: $C \to \infty$. Funciona como se fosse um capacitor de placas paralelas com placas muito, muito mesmo, próximas ($d \to 0$ em C_0). É interessante notar que esse resultado está mostrando que a capacitância de um "ponto", ou seja, de um curto circuito, é infinita e não nula, como talvez pudéssemos supor. Quando $a \to d$ as duas placas se conectam e deixamos de ter um capacitor e passamos a ter um simples curto-circuito entre os terminais. Tudo se torna equipotencial, $\Delta V \to 0$, e equivale a um simples ponto, um nó, no circuito. Da relação $q = C\,\Delta V$ vemos que o limite $\Delta V \to 0$ e $C \to \infty$ equivale a dizer que esse nó pode acumular uma quantidade qualquer de carga q, não necessariamente zero, que seria a única possibilidade no caso de valer $C \to 0$. Portanto, desprezar um capacitor no circuito equivale a considerar a união (o curto-circuito) das duas placas e, portanto, $C \to \infty$ e não $C \to 0$. Por outro lado, considerar que um capacitor é um simples circuito aberto é considerar $d \to \infty$ e $C \to 0$. Como exemplo, considere dois capacitores C_1 e C_2 em série, conectados entre os terminais A e B. A capacitância equivalente entre A e B é:

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Suponha agora que queiramos desprezar C_2, curto-circuitando seus terminais. Esperamos que nesse caso $C_{AB} = C_1$. Isso é verdade se fizermos $C_2 \to \infty$ na expressão acima.

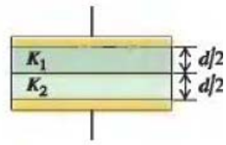
Considere agora dois capacitores C_1 e C_2 em paralelo, conectados entre os terminais A e B. A capacitância equivalente entre A e B é:

$$C_{AB} = C_1 + C_2$$

Suponha agora que queiramos desprezar C_2, substituindo-o por um simples circuito aberto. Esperamos que nesse caso $C_{AB} = C_1$. Isso é verdade se fizermos $C_2 \to 0$ na expressão acima.

Concluindo: se queremos desprezar a presença de um capacitor curto-circuitando seus terminais (transformando-o em um simples fio condutor) devemos fazer $C \to \infty$ e se queremos desprezar um capacitor transformando-o em um simples circuito aberto (que não acumula cargas), devemos fazer $C = 0$.

E/P24.71: Um capacitor de placas paralelas tem duas camadas de isolantes conforme a Figura ao lado. Os isolantes têm constantes dielétricas K_1 e K_2. Vamos chamar de d_1 e d_2 as espessuras das camadas de dielétricos ($d_1 + d_2 = d$). Vamos calcular a capacitância desse capacitor (um sanduíche de dielétricos).



Vamos fazer o cálculo desprezando efeitos de borda. Suponha uma carga elétrica +Q distribuída uniformemente na face inferior da placa de cima e uma carga –Q distribuída uniformemente na face superior da placa de baixo. Essas duas cargas produzem um campo elétrico uniforme entre as placas de magnitude:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

O que pode ser obtido através da lei de Gauss para uma distribuição de cargas com simetria plana.

Os dielétricos, por sua vez, vão se polarizar na presença desse campo, produzindo um campo elétrico resultante dentro deles que é mais fraco do que E. Dentro do dielétrico 1 o campo elétrico resultante vai ser:

$$E_1 = \frac{E}{K_1} = \frac{Q}{K_1 \varepsilon_0 A}$$

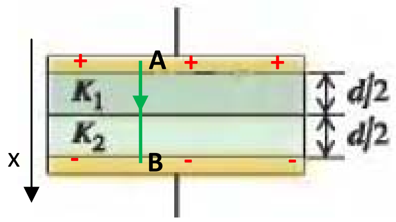
Dentro do dielétrico 2 o campo elétrico resultante vai ser:

$$E_2 = \frac{E}{K_2} = \frac{Q}{K_2 \varepsilon_0 A}$$

A diferença de potencial entre as placas será:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{DIEL\ 1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{DIEL\ 2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

Considere que para o cálculo da integral acima tomamos $d\vec{l} = dx\ \hat{x}$ ao longo do caminho verde, desde A até B, ilustrado na Figura ao lado. Consideramos também que $\vec{E} = \vec{0}$ no interior das duas placas do capacitor e que o campo no interior de cada dielétrico é dado pelas expressões deduzidas acima, ao longo do eixo x ortogonal às placas.



Portanto, substituindo as expressões de E_1 e E_2 em ΔV obtemos:

$$\Delta V = \frac{Q}{K_1 \varepsilon_0 A} d_1 + \frac{Q}{K_2 \varepsilon_0 A} d_2 = \left(\frac{d_1}{K_1 \varepsilon_0 A} + \frac{d_2}{K_2 \varepsilon_0 A} \right) Q = \frac{Q}{C}$$

Concluindo, a capacitância C desse capacitor é:

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{K_1 \varepsilon_0 A} + \frac{d_2}{K_2 \varepsilon_0 A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

que é a capacitância equivalente de dois capacitores em série, um com dielétrico K_1 e espaçamento d_1 e o outro com dielétrico K_2 e espaçamento d_2.

No caso particular $d_1 = d_2 = d/2$ obtemos:

$$C = 2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

ou seja, o sanduíche de dielétricos funciona como um único dielétrico com um K efetivo dado por:

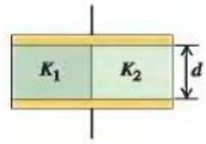
$$K_{ef} = 2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

Note que se $K_1 = K_2 = K$ (um dielétrico apenas entre as placas) segue que:

$$C = 2\frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}\frac{\varepsilon_0 A}{d} = 2\frac{K^2}{2\,K}\frac{\varepsilon_0 A}{d} = K\,\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$K_{ef} = 2\frac{K_1K_2}{K_1 + K_2} = 2\frac{K^2}{2\,K} = K$$

E/P24.72: Um capacitor de placas paralelas tem duas camadas de isolantes conforme a Figura ao lado. Os isolantes têm constantes dielétricas K_1 e K_2. Vamos chamar de A_1 a área ocupada pelo dielétrico 1 e de A_2 a área ocupada pelo dielétrico 2: $A_1 + A_2 = A$ (A é a área das placas).



Vamos calcular a capacitância desse capacitor/sanduíche.

Vamos fazer o cálculo desprezando efeitos de borda. Suponha uma carga elétrica +Q distribuída na face inferior da placa de cima e uma carga –Q distribuída na face superior da placa de baixo. Note que, diferentemente do exercício anterior, não temos porque supor que essas cargas vão se distribuir uniformemente nas faces dessas placas. Pelo contrário, a carga no lado direito da placa será diferente da carga no lado esquerdo (em cada lado ela estará distribuída uniformemente, por hipótese). Sejam Q_1 a carga distribuída na face inferior da placa de cima no lado esquerdo e Q_2 a carga distribuída na face inferior da placa de cima no lado direito (analogamente para a face superior da placa de baixo). Estamos afirmando aqui que $Q_1 \neq Q_2$. De fato, note que a diferença de potencial entre as placas é:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

e que essa integral pode ser realizada por qualquer caminho que conecta as duas placas, pois $\vec{E}$ é conservativo. Portanto, se percorrermos um caminho que vai por dentro do dielétrico 1 obtemos:

$$\Delta V = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_1 d = \frac{Q_1}{K_1\varepsilon_0\, A_1}d$$

Note que $Q_1/A_1 = \sigma_1$ é a densidade de carga superficial na face inferior da metade esquerda da placa superior.

Por outro lado, se percorrermos um caminho que vai por dentro do dielétrico 2 obtemos:

$$\Delta V = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_2 d = \frac{Q_2}{K_2\varepsilon_0\, A_2}d$$

Considere que nessas integrais adotamos caminhos retos que conectam diretamente um ponto (A) na placa de cima a um ponto (B) na placa de baixo e que:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{K_i \varepsilon_0} = \frac{Q_i}{K_i \varepsilon_0 A_i}$$

Concluindo:

$$\Delta V = \frac{Q_1}{K_1 \varepsilon_0 \, A_1} d = \frac{Q_2}{K_2 \varepsilon_0 A_2} d \Rightarrow \frac{Q_1}{K_1 A_1} = \frac{Q_2}{K_2 \, A_2}$$

o que prova que $Q_1 \neq Q_2$ se $K_1 A_1 \neq K_2 \, A_2$ (em geral). Os diferentes dielétricos se polarizam e interagem com as cargas nas placas metálicas de formas diferentes, atraindo mais ou menos as cargas nessas placas. Isso produz a diferença entre as cargas Q_1 e Q_2 que ficam acumuladas nas faces das placas metálicas. O dielétrico que se polariza mais, tem o maior K, acaba possuindo mais cargas de polarização e atraindo mais as cargas na placa metálica adjacente: se $K_1 > K_2$ então $Q_1 > Q_2$ (supondo $A_1 = A_2$).

Concluindo, a carga total na placa positiva do capacitor é:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \left(\frac{K_1 A_1}{K_2 A_2} + 1\right) Q_2 = \left(\frac{K_1 A_1}{K_2 A_2} + 1\right) \frac{K_2 \varepsilon_0 \, A_2}{d} \Delta V = C \, \Delta V$$

Portanto, a capacitância é:

$$C = (K_1 A_1 + K_2 A_2) \frac{\varepsilon_0}{d}$$

Essa é a capacitância de dois capacitores em paralelo, um com espaçamento d, área A_1 e dielétrico K_1 e outro com espaçamento d, área A_2 e dielétrico K_2.
Resumindo: descobrimos que um capacitor formado por um sanduíche de dielétricos diferentes se comporta como uma associação de capacitores com dielétricos diferentes.

Podemos dizer também que:

$$C = K_{ef} \frac{\varepsilon_0 \, (A_1 + A_2)}{d}$$

que é a capacitância de um capacitor de placas paralelas com espaçamento d, área $A = A_1 + A_2$ e meio isolante com um K efetivo dado por:

$$K_{ef} = \frac{K_1 A_1 + K_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

Note que se $K_1 = K_2 = K$ (um dielétrico apenas entre as placas) segue que:

$$C = (K_1 A_1 + K_2 A_2) \frac{\varepsilon_0}{d} = K \frac{\varepsilon_0 \, (A_1 + A_2)}{d}$$

$$K_{ef} = \frac{K_1 A_1 + K_2 A_2}{A_1 + A_2} = K$$

Uma combinação de dielétricos se comporta como um só dielétrico com uma constante dielétrica efetiva, função das constantes dielétricas destes dielétricos que foram combinados.