E/P25.1: Uma corrente elétrica I_0 constante flui através de uma lâmpada de farol.

A corrente elétrica em um fio condutor é a taxa no tempo com que carga elétrica flui através desse fio:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Mais especificamente, podemos imaginar que a área de seção transversal desse fio é atravessada, a cada intervalo de tempo dt, por uma carga de portadores dq. Então a corrente nesse fio é $I = dq/dt$ (amperes).

A unidade de I é coulomb/segundo (C/s), que abreviamos por ampere (A). A carga elétrica total (que fui com os portadores de carga) que atravessa uma seção transversal do fio em um tempo Δt é dada por:

$$q = \int_{\Delta t} dq = \int_{\Delta t} I\, dt$$

Se a corrente elétrica é constante no tempo segue que:

$$q = \int_{\Delta t} I_0\, dt = I_0 \int_{\Delta t} dt = I_0\, \Delta t$$

Para uma corrente constante $I = 3{,}6$ A em um tempo $\Delta t = 3$ h obtemos (convertendo Δt para segundos):

$$q = I\, \Delta t = 3{,}6 \times 3 \times 60 \times 60 = 3{,}9 \times 10^4 \text{ C}$$

Essa é a carga elétrica total que atravessou de um terminal ao outro dessa lâmpada nesse tempo.

E/P25.2: Uma corrente elétrica I_0 constante flui através de um fio de prata de raio r_0. Essa corrente transfere através desse fio uma carga total Q_0 em um tempo T_0. a) Portanto:

$$I_0 = \frac{Q_0}{T_0} \cong 0{,}088\, A$$

b) Conhecendo n_{Ag}, a densidade de portadores de carga (elétrons livres) por unidade de volume da prata, podemos calcular a velocidade de arraste dos portadores. De fato, sabemos que a densidade de corrente no fio possui módulo:

$$J = \frac{I_0}{A} = \frac{I_0}{\pi\, r_0^2} = n_{Ag}\, q\, v_d$$

sendo A a área da seção transversal do fio (cilíndrico), q o módulo da carga do elétron e v_d o módulo da velocidade de deriva (arraste) desses elétrons livres que fluem através do fio na corrente I. Concluindo:

$$v_d = \frac{1}{n_{Ag}\, q} \frac{I_0}{\pi\, r_0^2} \cong 1{,}8 \times 10^{-6}\, m/s$$

Note que quanto mais corrente devemos transportar através desse fio, maior deve ser v_d e quanto mais fino o fio, menor r_0, maior deve ser v_d. Os (muitos) portadores ($5{,}8 \times 10^{28}$ elétrons/m^3) fluem vagarosamente através do fio ($1{,}8 \times 10^{-3}\ mm/s$), como um fluido que flui em um cano cilíndrico. O fluido transporta massa, enquanto que o fluxo de portadores de carga transporta carga elétrica através do fio condutor.

E/P25.3: Uma corrente elétrica I_0 constante flui através de um fio de cobre de raio r. A densidade de portadores de carga (elétrons livres) por unidade de volume do cobre é n_{Cu}.

a) Sendo $I = Q/T$ (coulomb/segundo=ampere), a cada segundo ($T = 1$ s), uma carga elétrica $Q = I_0$ atravessa uma seção transversal qualquer desse fio. Sendo q o módulo da carga do elétron, a quantidade de elétrons que atravessa essa seção transversal a cada segundo é:

$$N_e = \frac{Q}{q} = \frac{I_0}{q} = 3 \times 10^{19}\ elétrons/seg.$$

b) A densidade de corrente no fio é axial e possui módulo (A é a área da seção transversal do fio):

$$J = \frac{I_0}{A} = \frac{I_0}{\pi\, r^2} = 1{,}5 \times 10^6\ A/m^2$$

c) Os elétrons livres que constituem a corrente I estão fluindo nesse fio com velocidade média (velocidade de deriva ou arraste) dada por:

$$J = n_{Cu}\, q\, v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{n_{Cu}\, q} = 0{,}11 \times 10^{-3}\ m/s$$

d) Supondo que o fio tivesse o dobro do raio ($r \to 2r$): a quantidade de elétrons N_e não muda, supondo que a corrente é a mesma. A densidade de corrente deve diminuir, pois é a mesma corrente I fluindo em um fio mais grosso: $J \to J/4$. Sendo o fio mais grosso, os elétrons vão poder fluir mais lentamente, pois fluem mais elétrons (em paralelo) através da seção transversal mais grossa: $v_d \to v_d/4$.

E/P25.7: Uma corrente elétrica $I(t)$ flui através de um fio, sendo $I(t) = I_0 - k\, t^2$, com I_0 e k constantes positivas.

a) Sendo $I(t)$ a taxa no tempo com que carga elétrica flui através do fio:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Portanto, a carga elétrica total que já atravessou uma seção transversal do fio em um intervalo de tempo qualquer $\Delta t = [0, T]$ é dada por:

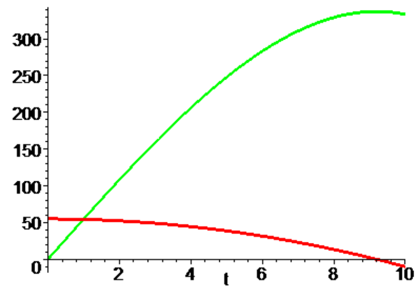
$$q_T = \int_{\Delta t} dq = \int_{\Delta t} I(t)dt = \int_0^T (I_0 - k\,t^2)dt = I_0 T - k\frac{T^3}{3} \cong 329\,C$$

b) A corrente elétrica constante I_{CONST} que implicaria na mesma carga transportada no mesmo intervalo de tempo ($8\,s$) seria aquela dada por:

$$q_T = \int_0^T I_{CONST}\,dt = I_{CONST}\,T \Rightarrow I_{CONST} = \frac{q_T}{T} = I_0 - k\frac{T^2}{3} \cong 41{,}1\,A$$

Se fluísse nesse fio uma corrente elétrica constante de $41{,}1\,A$ por um tempo de $8\,s$, a carga elétrica total transportada através de qualquer seção transversal do fio seria $329\,C$.

No gráfico ao lado mostramos as curvas de $I(t)$ (em vermelho) e $q_T(t)$ (em verde). A função $q_T(t)$ dá a carga que já atravessou uma seção do fio após um tempo t. A corrente inicia em um valor alto ($I_0 = 55\,A$) e vai caindo com o tempo, até que no instante $\sqrt{I_0/k}$ ela se anula e inverte de sentido. Enquanto a corrente é positiva, a carga $q_T(t)$ que já atravessou uma seção transversal do fio vai aumentando continuamente com o tempo. Quando a corrente inverter de sentido a carga vai começar a fluir no sentido oposto ao inicial, e a carga total que já atravessou uma seção vai passar a diminuir com o tempo. No intervalo de tempo considerado no exercício essa inversão de sentido é irrelevante, pois ela é posterior.



A corrente elétrica constante de $41{,}1\,A$ implicaria no mesmo transporte de carga no mesmo intervalo de tempo $t \in [0{,}8\,s]$.

E/P25.8: Uma corrente elétrica flui em uma solução de água e sal.

O sal dissolvido na água (uma solução eletrolítica) se dissocia em íons Na^+ (cátion) e Cl^- (ânion) (o sal é um eletrólito, diferentemente do açúcar, que quando dissolvido em água não forma íons). Esses íons fluem através da solução (em sentidos opostos), sob ação de um campo elétrico aplicado. Suponha que em um tempo Δt cheguem ao eletrodo negativo (catodo) N^+ íons de sódio Na^+ e cheguem ao eletrodo positivo (anodo) N^- íons de cloro Cl^-. Note que o "anodo" é o terminal em que chegam os elétrons (em excesso nos íons Cl^-) através do eletrólito.

Então, a corrente elétrica de íons Na^+, ou seja, a taxa de transporte de carga elétrica na solução através desses portadores de carga é (q é a carga elétrica de um próton):

$$I^{+} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{N^{+}q}{\Delta t} \cong 0{,}0043\ A$$

O sentido da corrente é igual ao sentido do movimento dos portadores de carga positiva. Caso os portadores de carga tenham carga negativa, o sentido da corrente desses portadores é oposto ao sentido do movimento deles.

Como os íons Na^{+} estão saindo do anodo (+) e chegando ao catodo (-), segue que I^{+} tem esse mesmo sentido, ou seja, I^{+} flui do anodo para o catodo ($+\rightarrow -$) através da solução.

Analogamente, a corrente elétrica de íons Cl^{-}, ou seja, a taxa de transporte de carga elétrica na solução através desses portadores de carga é:

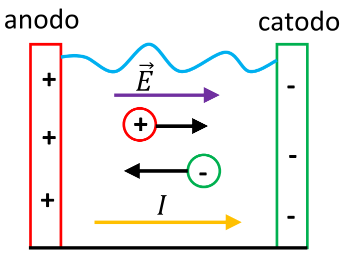
$$I^{-} = \frac{N^{-}q}{\Delta t} \cong 0{,}0063\ A$$

Como esses íons estão saindo do catodo (-) e chegando ao anodo (+), então I^{-} tem o sentido oposto ao do movimento desses portadores de carga, ou seja, I^{-} também flui do anodo para o catodo através da solução ($+\rightarrow -$).

As duas correntes, de íons Na^{+} e de íons Cl^{-} têm o mesmo sentido e se somam, resultando em um transporte "efetivo" de carga (positiva) total do anodo para o catodo na taxa:

$$I = I^{+} + I^{-} = \frac{N^{+} + N^{-}}{\Delta t} q \cong 0{,}011\ A$$

A Figura abaixo ilustra essa ideia.



As placas do anodo e do catodo (eletrodos) conectadas a uma bateria externa (não mostrada) funcionam como um capacitor, gerando dentro da solução um campo elétrico $\vec{E}$ que aponta do anodo para o catodo. Os íons Na^{+} são acelerados no sentido do campo elétrico e os íons Cl^{-} são acelerados no sentido oposto. O transporte de íons Na^{+} e o transporte de íons Cl^{-} resultam no mesmo efeito: tornar o catodo mais positivo em relação ao anodo. Por isso, seus efeitos, ou seja, suas correntes elétricas, se somam.

A deposição dos íons nas placas levaria a uma redução das cargas elétricas depositadas nessas placas e finalmente ao término do transporte de íons. Um circuito externo, uma bateria, por exemplo, teria a função de repor essas cargas, através de uma corrente elétrica que flui do catodo para o anodo pelo circuito externo (o anodo da célula eletrolítica estaria conectado ao catodo (terminal +) da bateria enquanto que o catodo da célula estaria conectado ao anodo (terminal -) da bateria).

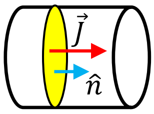
E/P25.10: Um fio cilíndrico possui raio R e é feito de um metal com resistividade ρ_0 (na temperatura ambiente). Queremos produzir nesse fio uma corrente elétrica de magnitude I_0 (uniformemente distribuída na seção transversal do fio).

a) Qual a magnitude do campo elétrico (axial e uniforme) necessário?

Estando a corrente distribuída uniformemente na seção transversal do fio, segue que:

$$I_0 = \int_{FIO} \vec{J} \cdot \hat{n}\, da = \int_{FIO} J\, da = J \int_{FIO} da = J\, \pi R^2 \Rightarrow J = \frac{I_0}{\pi R^2}$$

Os vetores $\vec{J}$ e $\hat{n}$ estão ilustrados na Figura ao lado.



Da lei de Ohm na forma microscópica:

$$J = \frac{E}{\rho_0}$$

Portanto:

$$\frac{E}{\rho_0} = \frac{I_0}{\pi R^2} \Rightarrow E = \frac{\rho_0\, I_0}{\pi R^2}$$

Note que quanto mais resistivo o fio (maior ρ_0), quanto mais fino o fio (menor R) e quanto maior a corrente I_0 requerida, maior deve ser o campo elétrico aplicado no interior do fio para produzir uma dada corrente elétrica I_0 ao longo dele.

Para um fio de cobre ($\rho_0 \cong 1{,}72 \times 10^{-8}$ Ωm) com raio R=1,025 mm (fio 12) transportando uma corrente $I_0 = 2{,}75$ A obtemos: $E \cong 1{,}43 \times 10^{-2}$ V/m. Trata-se de um campo elétrico minúsculo que é produzido por densidades de cargas minúsculas concentradas/depositadas na superfície do fio.

b) Se trocarmos (apenas) o material do fio, basta trocar o valor da resistividade:

$$E' = \frac{\rho_0'\, I_0}{\pi R^2}$$

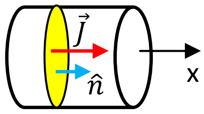
Se passarmos de fios de cobre para fios de prata (de mesmo raio), por exemplo, precisaremos de um campo elétrico E' menor (pois $\rho_0' < \rho_0$) para estabelecer a mesma corrente I_0, pois a prata é melhor condutor elétrico do que o cobre (mas é bem mais cara também). A prata é melhor condutor elétrico que o cobre porque é um material menos resistivo, ou seja: $\rho_{prata} < \rho_{cobre}$.

E/P25.25: Um fio cilíndrico de ouro (resistividade ρ_0 à temperatura ambiente) de raio R possui em seu interior um campo elétrico axial (eixo x) uniforme de magnitude E_0 ($\vec{E} = E_0\, \hat{x}$).

a) Da lei de Ohm na forma microscópica:

$$\vec{J} = \frac{E_0}{\rho_0}\hat{x}$$

Sendo o campo elétrico uniforme, segue que a corrente elétrica está distribuída uniformemente na seção transversal do fio (em amarelo na Figura ao lado). Portanto, a corrente fluindo no fio é:



$$I_0 = \int_{FIO} \vec{J} \cdot \hat{n}\, da = \int_{FIO} J\, \hat{x} \cdot \hat{x}\, da = J \int_{FIO} da = J\, \pi R^2 \Rightarrow I_0 = \frac{E_0}{\rho_0}\pi R^2$$

Note que para um dado campo de força E_0, quanto mais resistivo o material do fio (maior ρ_0) e/ou mais fino o fio (menor R), menor a corrente estabelecida no fio.

b) Suponha dois pontos A e B (com $x_B > x_A$, B está na frente de A) no interior do fio separados por uma distância (axial) L. A diferença de potencial entre esses dois pontos é:

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E_0\, \hat{x} \cdot \hat{x}\, dx = E_0 \int_A^B dx = E_0\, (x_B - x_A) = E_0\, L$$

Note que estamos supondo que o campo $\vec{E}$ aponta de A para B e, por isso, V_{AB} é positivo ($V_A > V_B$). O campo $\vec{E}$ sempre aponta no sentido do decaimento do potencial.

c) Já sabemos que esse segmento de fio de comprimento L possui resistência elétrica dada por:

$$\mathcal{R} = \rho_0 \frac{L}{\pi R^2}$$

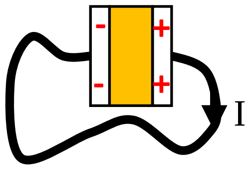
mas, podemos deduzir aqui essa expressão através da definição de resistência elétrica:

$$\mathcal{R} = \frac{V_{AB}}{I_0} = E_0\, L \left(\frac{E_0}{\rho_0}\pi R^2\right)^{-1} = \rho_0 \frac{L}{\pi R^2}$$

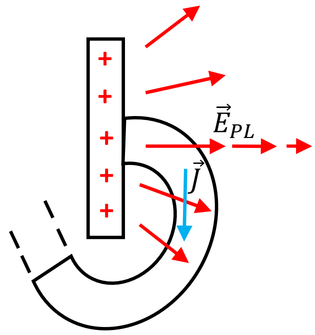
Fios de cobre, comumente usados em instalações elétricas, têm, em geral, resistências elétricas muito baixas, pois $\rho_0 \cong 10^{-8}$ Ωm. Mas essas resistências estão lá e apresentam efeitos indesejáveis, como a dissipação de calor pela passagem da corrente elétrica (efeito Joule).

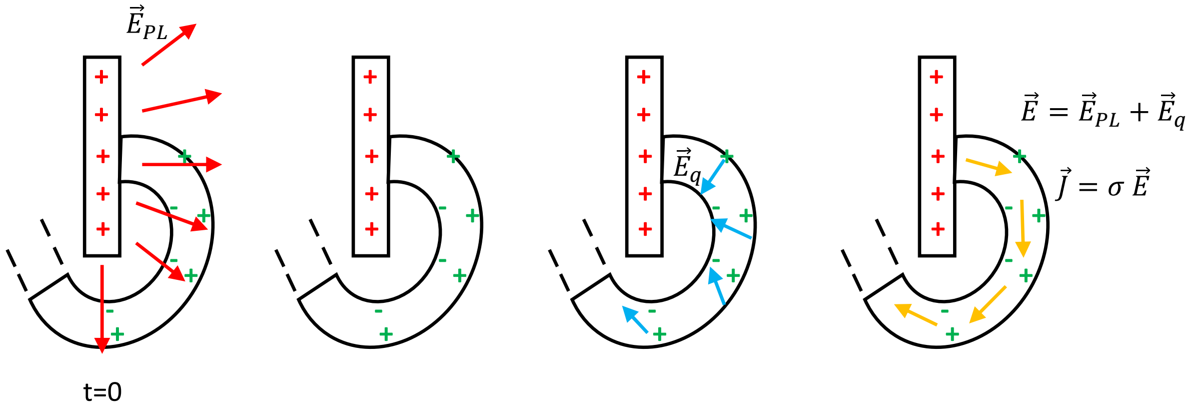
Os exercícios 25.10 e 25.25 abordam a questão da necessidade de se ter um campo elétrico dentro de um fio condutor que transporta uma corrente elétrica. A corrente flui ao longo do fio e a lei de Ohm $\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$ mostra que deve haver dentro do fio um campo elétrico sempre paralelo à corrente. Só há $\vec{J}$ se houver $\vec{E}$ e esses dois campos vetoriais devem ser paralelos entre si. Uma questão pouco discutida nos livros textos é a que trata da origem desse campo $\vec{E}$. Campos elétricos são produzidos por acúmulos de cargas elétricas (com exceção dos campos elétricos induzidos, que estudaremos mais adiante, no capítulo 29) e a questão que fica é:

onde estão depositadas essas cargas? Uma resposta simples é a de que as cargas estão acumuladas na bateria, ou mais especificamente nos terminais + e – da bateria que, por hipótese, alimenta o circuito criando a corrente elétrica nele. Mas esse campo elétrico decai rapidamente com a distância e tem uma direção no espaço que não necessariamente coincide com a direção do fio condutor. Não podem ser essas cargas elétricas as responsáveis pelo campo elétrico envolvido na lei $\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$ que vale em um segmento de fio que pode estar a dez metros da bateria e orientado em uma direção arbitrária.



Considere o circuito ao lado, que mostra uma bateria conectada a um fio curvo onde circula uma corrente constante I. Nas placas/terminais da bateria são mantidas cargas acumuladas, graças à reação química em seu interior. Ao fechar o circuito, cargas elétricas se acumularão também na superfície do fio curvo. Para analisar essa situação, vamos nos concentrar apenas em uma pequena parte do circuito. Considere a Figura abaixo, que mostra (apenas) o terminal (a placa) + da bateria e um segmento do fio curvo conectado a ele, por onde circula a corrente elétrica I. A corrente continua fluindo pelo circuito fechado, até chegar ao terminal -, mas apenas uma pequena parte do circuito é mostrada. Note que as cargas + depositadas na placa + criam um campo elétrico $\vec{E}_{PL}$ (setas vermelhas) cuja direção não coincide necessariamente com a direção do fio curvo. Mostramos na Figura a seta de $\vec{J}$ (azul) em um ponto do fio, $\vec{J}$ é sempre paralelo ao fio. Note que na posição mostrada as setas de $\vec{J}$ e de $\vec{E}_{PL}$ são quase que ortogonais entre si e seria absurdo atribuir o efeito $\vec{J}$ à causa $\vec{E}_{PL}$ através da lei de Ohm: $\vec{J} = \sigma\,\vec{E}_{PL}$ (essa lei na forma $\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$ diz que os vetores $\vec{J}$ e $\vec{E}$ são proporcionais entre si). Essa equação estaria dizendo que $\vec{J}$ e $\vec{E}_{PL}$ são paralelos entre si e a Figura mostra que isso obviamente não é verdade. Conclusão, a existência da corrente $\vec{J}$ em um fio não pode ser atribuída unicamente ao campo elétrico $\vec{E}_{PL}$ das cargas elétricas acumuladas nos terminais de uma bateria. Tem que haver outras cargas elétricas envolvidas na criação de um campo elétrico $\vec{E}$ que é paralelo ao fio, e de magnitude constante, em toda a sua extensão. Essas outras cargas estão depositadas na superfície do fio e foram colocadas lá pela ação da bateria nos primeiros instantes de funcionamento do circuito (um transiente). De fato, note que $\vec{E}_{PL}$ empurra os portadores de carga no fio (de carga +, por hipótese) contra a parede do fio, logo no início do funcionamento do circuito. Essas cargas + batem nessa parede e acumulam aí, até que a repulsão criada por elas inibe o acúmulo de mais cargas nessa região. Cria-se um acúmulo de cargas na superfície do fio que guia a corrente $\vec{J}$ ao longo do fio. A Figura abaixo tenta ilustrar esse processo transiente.

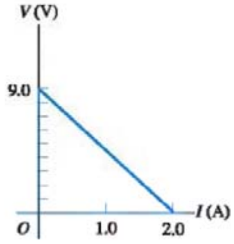




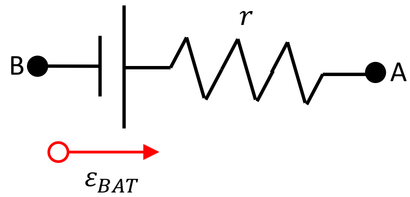
No instante t=0, em que o circuito acabou de ser ligado, só existem as cargas acumuladas nos terminais da bateria. Essas cargas foram colocadas aí por uma reação química que ocorre no interior da bateria, conforme já discutimos. Só há essas cargas e o campo $\vec{E}_{PL}$ (setas vermelhas). A corrente inicial no fio é $\vec{J} = \sigma\,\vec{E}_{PL}$ e ela flui na direção "errada", contra as paredes do fio. Cargas (em verde) se acumulam nessas paredes. Elas vão se acumulando e inibindo o próprio acúmulo, pela repulsão elétrica que criam nessa região. Ao mesmo tempo vai se criando um outro campo elétrico, um campo $\vec{E}_q$(setas azuis) devido a esse acúmulo de cargas. Daí em diante passa a existir um campo elétrico resultante dentro do fio $\vec{E} = \vec{E}_{PL} + \vec{E}_q$ (setas amarelas) e passa a valer $\vec{J} = \sigma\,(\vec{E}_{PL} + \vec{E}_q)$. A corrente vai mudando de direção, até que ela finalmente passa a fluir paralelamente ao fio. Esse processo de acúmulo de cargas na superfície do fio termina quando a repulsão elétrica criada por essas cargas impede a chegada de mais portadores de carga nessa superfície. Portanto, após um transiente muito rápido (nos bons condutores de eletricidade, como os metais), o campo elétrico resultante $\vec{E} = \vec{E}_{PL} + \vec{E}_q$ dentro do fio assume uma direção paralela ao fio, e o mesmo acontece com a corrente, dada a validade da lei de Ohm.

Quando estudamos a eletrostática vimos que se deixarmos um condutor isolado (sem nenhuma conexão elétrica com outros corpos e submetido à influência apenas de campos elétricos externos estáticos) e esperarmos um pouco, ele vai atingir o equilíbrio eletrostático. Nesse equilíbrio cargas elétricas no condutor se distribuem em sua superfície em posições estratégicas de tal forma que, ao final, o campo elétrico dentro do condutor é nulo. Isso tem que ocorrer porque a existência de $\vec{E}$ dentro desse condutor implicaria na existência de correntes fluindo nele ($\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$) e em dissipação de energia (efeito Joule). De onde estaria vindo essa energia, se o condutor está isolado e em uma situação eletrostática? Só há uma possibilidade: $\vec{E} = \vec{J} = \vec{0}$. Em um circuito elétrico os fios condutores não estão isolados, eles estão conectados a uma bateria, por exemplo. Portanto, pode e deve haver dentro deles um campo elétrico não nulo, para explicar a circulação da corrente no circuito. Esse campo é criado pelas cargas elétricas nos terminais da bateria e pelas cargas elétricas que acumulam nas superfícies dos fios condutores. Na eletrostática essas cargas superficiais tinham a tarefa de anular o campo elétrico no interior do condutor e agora elas têm a tarefa de garantir que a corrente flua paralelamente aos fios condutores.

E/P25.33: O gráfico ao lado ilustra o comportamento da DDP entre os terminais de uma bateria real, medida por um voltímetro ideal conectado aos terminais dessa bateria, em função da corrente que flui na bateria.



O circuito abaixo ilustra uma bateria real, que é a associação (série) de uma bateria ideal (uma fonte de FEM ε_{BAT}) com um resistor de resistência r. Essa resistência resume a resistência elétrica dos materiais que compõem a bateria (eletrodos e solução eletrolítica). Os terminais da bateria real são os pontos A (+) e B (-).

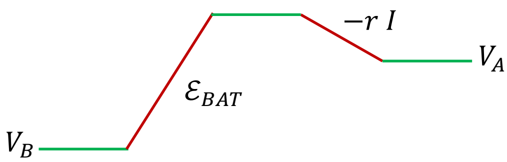


Em uma situação normal, em que a bateria está produzindo a corrente no circuito (conectado aos terminais A e B), a corrente elétrica flui dentro da bateria de B para A, no mesmo sentido da FEM (a corrente sai pelo terminal + da bateria (A) e retorna pelo terminal – (B) através do circuito externo). Dessa forma, ao atravessar a bateria os portadores de carga (positiva) fluem dentro da bateria indo do potencial menor (-) para o potencial maior (+), ou seja, ganhando energia potencial elétrica fornecida pela bateria.

Levando em conta o campo elétrico dentro da bateria ideal e dentro do resistor obtemos:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{BAT} - r\,I \Rightarrow V = V_A - V_B = \varepsilon_{BAT} - r\,I$$

Equivalentemente, podemos usar a ideia de somar as DDPs ao longo do circuito. Para aplicar essa ideia precisamos nos lembrar de que uma bateria ideal de FEM $\mathcal{E}$ mantém um degrau de $\mathcal{E}$ entre o potencial do seu pólo positivo (V_+) e o potencial do seu pólo negativo (V_-): $V_+ - V_- = \mathcal{E}$. Além disso, em um resistor de resistência R a corrente I sempre flui do terminal de potencial maior para o terminal de potencial menor e o degrau de potencial é (de acordo com a lei de Ohm) $R\,I$. Portanto, se partirmos do ponto B, onde o potencial é V_B, e formos percorrendo o circuito e somando esses “degraus de potencial”, ao chegarmos no ponto A o novo valor do potencial deve ser V_A. A Figura ao lado ilustra essa sequência de degraus de potencial que um portador de carga “enxerga” à



medida que vai caminhando no circuito de B para A. Essa Figura se traduz na equação: $V_B + \varepsilon_{BAT} - r\,I = V_A$.

Finalmente, vemos que se fizermos um gráfico de $V = V_A - V_B = \varepsilon_{BAT} - r\,I$ versus I vamos obter uma reta de inclinação negativa $-r$ e que passa pelo ponto $V(0) = \varepsilon_{BAT}$. Esse é o gráfico apresentado na questão.

Olhando para o gráfico fornecido no exercício concluímos que:

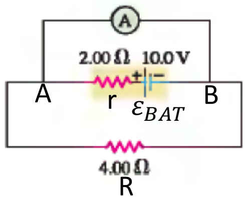
$$\varepsilon_{BAT} = 9\ \mathrm{V}$$

Quando não passa corrente elétrica pela bateria, a DDP entre seus terminais é igual à sua FEM. Quanto mais corrente passa, menor é a DDP, porque ocorre uma "queda de potencial" $r\,I$ na resistência interna r.

Calculando a inclinação da reta fornecida no gráfico obtemos a resistência interna da bateria:

$$-r = \frac{\Delta V}{\Delta I} = \frac{0-9}{2-0} = -\frac{9}{2} \Rightarrow r = \frac{9}{2}\ \Omega$$

E/P25.34: Considere o circuito ao lado. O amperímetro é ideal (ou seja, sem resistência interna). Quais as correntes nesse circuito?



Um amperímetro ideal possui resistência elétrica interna nula. Portanto, ele curto-circuita os pontos A e B mostrados na Figura, ou seja, ele faz $V_A = V_B$ (um condutor sem resistência é equipotencial). Concluímos logo que nesse caso não vai passar corrente pelo resistor R, pois, da lei de Ohm: $I_R = (V_A - V_B)/R = 0$. Esse fato simplifica bastante o circuito, pois circula corrente apenas na malha que contém a bateria, o resistor r e o amperímetro ideal. Usando a ideia de que a soma das DDPs ao longo do circuito completo (a malha) deve ser igual a zero (que chamaremos de lei das malhas no próximo capítulo), concluímos que essa corrente ($I_{BAT} = I_A$) é dada pela equação:

$$\varepsilon_{BAT} - r\,I_{BAT} = 0$$

Abaixo damos uma solução mais detalhada para esse problema. Essa solução adianta um pouco alguns conceitos que estudaremos com mais detalhes no próximo capítulo.

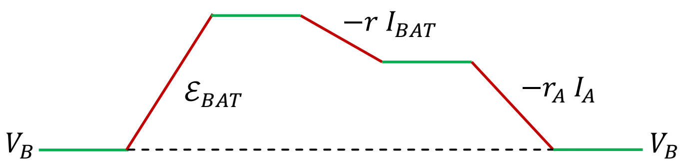
a) Vamos chamar, por enquanto, a resistência interna do amperímetro de r_A. Sejam também I_A a corrente através do amperímetro (de A para B) e I_{BAT} a corrente que circula na bateria (de B para A).

Agora vamos usar a ideia de que a soma das DDPs ao longo do circuito completo deve ser igual a zero. Para aplicar essa ideia precisamos nos lembrar de que uma bateria ideal de FEM $\mathcal{E}$ mantém um degrau de $\mathcal{E}$ entre o potencial do seu pólo positivo (V_+) e o potencial do seu pólo negativo (V_-): $V_+ - V_- = \mathcal{E}$. Além disso, em um resistor de resistência R a corrente I sempre flui do terminal de potencial maior para o terminal de potencial menor e o degrau de potencial é (de acordo com a lei de Ohm) $R\,I$. Portanto, se formos percorrendo o circuito e somando esses “degraus de potencial”, ao retornarmos para o mesmo ponto de partida devemos voltar para o mesmo nível de potencial, ou seja, a soma dos degraus é nula.

Assim sendo, percorrendo a malha que contém a bateria e o amperímetro, partindo de B, obtemos:

$$V_B + \varepsilon_{BAT} - r\, I_{BAT} - r_A\, I_A = V_B \Rightarrow r_A\, I_A = \varepsilon_{BAT} - r\, I_{BAT}$$

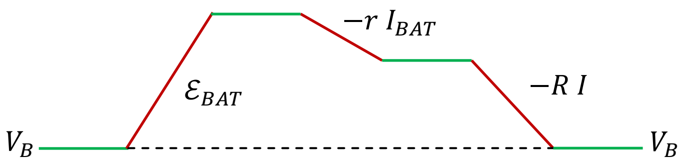
Esses degraus de potencial estão mostrados na Figura ao lado para essa malha. Podemos imaginar um portador de carga (positiva) fluindo nessa paisagem, da esquerda para a direita. Esse portador ganha energia potencial elétrica quando atravessa a bateria e perde energia potencial quando atravessa os resistores. O saldo é zero.



Seja I a corrente através do resistor R (de A para B). Percorrendo a malha que contém a bateria e esse resistor, partindo de B, obtemos:

$$V_B + \varepsilon_{BAT} - r\, I_{BAT} - R\, I = V_B \Rightarrow R\, I = \varepsilon_{BAT} - r\, I_{BAT}$$

Esses degraus de potencial estão mostrados na Figura ao lado para essa malha.



Note que essas duas equações implicam na igualdade (posto que r_A e R estão em paralelo):

$$r_A\, I_A = R\, I$$

(a DDP no amperímetro é igual à DDP em R). Por isso, quando assumirmos que o amperímetro é ideal, ele curto-circuita o resistor R.

A lei dos nós (conservação da carga elétrica: soma das correntes que chegam=soma das correntes que saem) aplicada ao nó A diz que:

$$I_{BAT} = I_A + I$$

Portanto:

$$r_A\, I_A = \varepsilon_{BAT} - r\, I_{BAT} = \varepsilon_{BAT} - r\,(I_A + I) = \varepsilon_{BAT} - r\,\left(I_A + \frac{r_A}{R} I_A\right) \Rightarrow I_A = \frac{\varepsilon_{BAT}}{r + r_A\left(1 + \frac{r}{R}\right)}$$

e

$$I = \frac{r_A}{R} I_A = \frac{\varepsilon_{BAT}/R}{\frac{r}{r_A} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)} = \frac{1/R}{1 + \frac{r}{r_A} + \frac{r}{R}}\varepsilon_{BAT}$$

Essas seriam as correntes no amperímetro e em R se o amperímetro fosse não-ideal. Tomando agora $r_A \to 0$ (amperímetro ideal) obtemos:

$$I_A \to \frac{\varepsilon_{BAT}}{r}$$

$$I \to 0$$

Vemos que não passa corrente pelo resistor R, porque ele está curto-circuitado pelo amperímetro ideal. Estar "curto-circuitado" é estar ligado em paralelo com uma resistência nula.

Poderíamos obter esse resultado enxergando o circuito como sendo uma bateria real de resistência interna r e FEM ε_{BAT} (cujos terminais são A e B) conectada a um resistor equivalente que é o paralelo de r_A com R, ou seja:

$$R_{eq} = \frac{r_A\, R}{r_A + R}$$

Percorrendo o caminho de B para A através da bateria obtemos:

$$V_B + \varepsilon_{BAT} - r\, I_{BAT} = V_A \Rightarrow V_{AB} = V_A - V_B = \varepsilon_{BAT} - r\, I_{BAT}$$

Essa é a DDP entre os terminais da bateria real, de resistência interna r e FEM ε_{BAT}. Portanto, obtemos:

$$I_{BAT} = \frac{V_{AB}}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon_{BAT} - r\, I_{BAT}}{\dfrac{r_A\, R}{r_A + R}} \Rightarrow I_{BAT} = \frac{\varepsilon_{BAT}}{\dfrac{r_A\, R}{r_A + R} + r}$$

Daí obtemos I_A e I a partir das equações anteriores obtidas da lei das malhas. Vemos que se $r_A \to 0$ segue que:

$$I_{BAT} \to \frac{\varepsilon_{BAT}}{r} = I_A$$

Como já mencionamos, vemos que o amperímetro sem resistência interna curto-circuita os pontos A e B, fazendo com que não circule corrente pelo resistor R, canalizando toda a corrente que passa pela bateria através do curto-circuito, ou seja, através do amperímetro. De fato, o curto-circuito faz

$$V_{AB} = V_A - V_B = 0$$

e, portanto, a corrente em R (que está conectado entre A e B) é, da lei de Ohm:

$$I = \frac{V_{AB}}{R} = 0$$

Ao passo que a corrente pelo amperímetro (que também está conectado entre A e B) é:

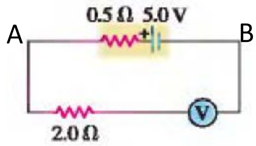
$$I_A = \frac{V_{AB}}{r_A} \to \frac{0}{0} \to \frac{\varepsilon_{BAT}}{r}$$

Apenas para ilustrar, podemos tomar o limite $R \to \infty$, que equivale a abrir o circuito na posição do resistor R. Um circuito aberto é equivalente a uma resistência infinita, enquanto que um curto-circuito é equivalente a uma resistência nula. Para $R \to \infty$ obtemos:

$I_{BAT}=\frac{\varepsilon_{BAT}}{\frac{r_A R}{r_A+R}+r}\to\frac{\varepsilon_{BAT}}{r_A+r}$	$I_A=\frac{\varepsilon_{BAT}}{r+r_A\left(1+\frac{r}{R}\right)}\to\frac{\varepsilon_{BAT}}{r_A+r}=I_{BAT}$	$I=\frac{1/R}{1+\frac{r}{r_A}+\frac{r}{R}}\varepsilon_{BAT}\to 0$

Vemos que nesse limite os resistores r e r_A ficam em série e a resistência equivalente do circuito se torna $R_{eq}=r_A+r$. Não passa corrente pelo circuito aberto (em R) e a corrente simplesmente circula pela malha da bateria e do amperímetro ($I_A=I_{BAT}$).

E/P25.35: Considere o circuito ao lado. O voltímetro é ideal (ou seja, de resistência interna infinita). Circula corrente nesse circuito?



Um voltímetro ideal possui resistência elétrica interna infinita e, por isso, não circula corrente elétrica por ele. Ele se comporta como um circuito aberto. Portanto, fica claro que o circuito mostrado na Figura está aberto (pelo voltímetro ideal) e não circula corrente por ele.

Abaixo vamos dar uma solução mais detalhada para esse problema. Essa solução adianta um pouco alguns conceitos que estudaremos com mais detalhe no próximo capítulo.

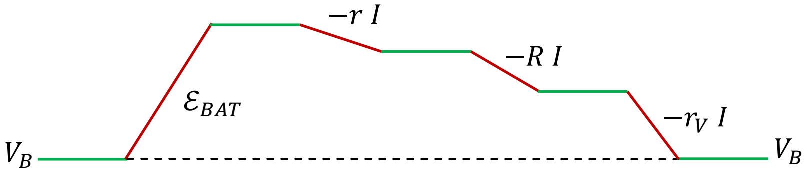
a) Vamos chamar, por enquanto, a resistência interna do voltímetro de r_V. Sejam também I a corrente através da bateria (de B para A), $r=0{,}5\ \Omega$ e $R=2\ \Omega$.

Vamos usar aqui a mesma ideia de que a soma das DDPs ao longo do circuito completo deve ser igual a zero. No próximo capítulo chamaremos essa lei de “lei das malhas”. Uma bateria ideal de FEM $\mathcal{E}$ mantém um degrau de $\mathcal{E}$ entre o potencial do seu pólo positivo (V_+) e o potencial do seu pólo negativo (V_-): $V_+-V_-=\mathcal{E}$. Em um resistor de resistência R com corrente I o degrau de potencial é (de acordo com a lei de Ohm) $R\,I$. Portanto, se formos percorrendo o circuito e somando esses “degraus de potencial”, ao retornarmos para o mesmo ponto de partida devemos voltar para o mesmo nível de potencial, ou seja, a soma dos degraus é nula.

Percorrendo a malha no sentido anti-horário (sentido da corrente), partindo do ponto B, obtemos:

$$V_B+\varepsilon_{BAT}-r\,I-R\,I-r_V\,I=V_B\Rightarrow I=\frac{\varepsilon_{BAT}}{r+R+r_V}$$

A “paisagem” de potencial elétrico que um portador de carga (positiva) “enxerga” enquanto flui nessa malha (da esquerda para a direta) é mostrada na Figura ao lado. Essa “paisagem” está expressa na equação: $V_B+\varepsilon_{BAT}-r\,I-R\,I-r_V\,I=V_B$.



O resultado que obtivemos para I é o esperado, posto que os três resistores estão em série. Essa seria a corrente no circuito se o voltímetro fosse não-ideal. Tomando agora o limite $r_V \to \infty$ (voltímetro ideal) obtemos:

$$I = \frac{\varepsilon_{BAT}}{r + R + r_V} \to 0$$

ou seja, não passa corrente no circuito. Não passa corrente por um circuito de resistência infinita (circuito aberto). Comparando esse resultado com o do exercício anterior, podemos dizer que o amperímetro ideal curto-circuita enquanto que o voltímetro ideal abre o circuito, não deixando passar nenhuma corrente por ele. Obviamente essa não é a forma correta de se conectar um voltímetro a um circuito. Um voltímetro mede DDPs e deve sempre ser conectado em paralelo com o dispositivo cuja DDP se quer medir. Um voltímetro (ideal) ligado em série simplesmente interrompe o circuito em que ele está ligado.

b) A DDP entre os terminais da bateria é:

$$V_B + \varepsilon_{BAT} - r\,I = V_A \Rightarrow V_{AB} = V_A - V_B = \varepsilon_{BAT} - r\,I = \frac{R + r_V}{r + R + r_V}\varepsilon_{BAT}$$

Tomando agora o limite $r_V \to \infty$ obtemos:

$$V_{AB} \to \varepsilon_{BAT}$$

Se não há corrente na bateria não-ideal, então a DDP entre seus terminais é igual à sua FEM.

c) A DDP entre os terminais do voltímetro (que é a leitura do voltímetro, LV) é:

$$LV = r_V\,I = \frac{r_V\,\varepsilon_{BAT}}{r + R + r_V}$$

Tomando agora o limite $r_V \to \infty$ (ideal) obtemos:

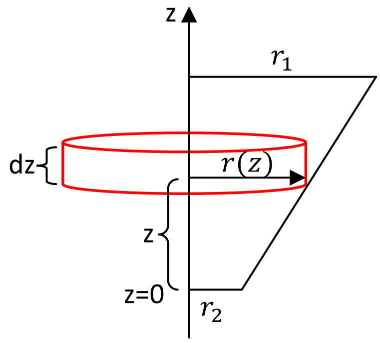
$$LV \to \varepsilon_{BAT}$$

Não havendo corrente no circuito, o voltímetro ideal mede a DDP entre os terminais A e B da bateria, que é igual a ε_{BAT}.

Concluindo, se você quer medir a FEM de uma bateria com muita precisão, use um voltímetro de altíssima resistência interna (um voltímetro caro). Nesse circuito o voltímetro está conectado de forma errada, em série. Um voltímetro real (com $r_V \neq \infty$) indicaria em sua escala um valor de DDP ($\lesssim \varepsilon_{BAT}$) que seria difícil de ser interpretado. Para medir a DDP entre os terminais da bateria real deveríamos conectar o voltímetro (real) diretamente aos pontos A e B. Haveria um pequeno erro na leitura, posto que vale $r_V \neq \infty$, mas o voltímetro estaria ligado de forma correta, em paralelo com o dispositivo cuja DDP queremos medir.

E/P25.63: Um resistor é um tronco de cone feito de um material de resistividade ρ, conforme a Figura ao lado. Calcule a resistência desse resistor (os dois terminais do resistor são as faces de raios r_1 e r_2). A corrente vai fluir ao longo da altura h, de uma face para a outra.

Podemos pensar o resistor cônico como sendo uma sucessão (uma pilha) de resistores cilíndricos de raios diferentes, um colado no outro, em uma associação em série.



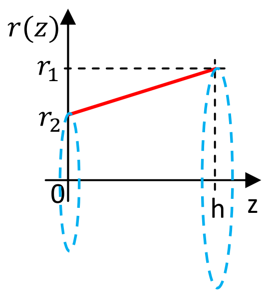
A Figura ao lado ilustra um desses resistores cilíndricos, de espessura infinitesimal dz, localizado na posição z e de raio $r(z)$. O menor resistor cilíndrico será o de baixo com raio $r(z=0)=r_2$. O maior resistor cilíndrico será o de cima com raio $r(z=h)=r_1$. A resistência de um condutor cilíndrico de raio r e altura dz, feito de um material de resistividade ρ, é:

$$dR = \rho\,\frac{dz}{\pi\,r^2}$$

Portanto, a resistência equivalente da associação em série dessa infinidade de fatias cilíndricas de espessuras infinitesimais será dada por:

$$R = \sum_{z=0}^{z=h} dR \rightarrow \int_{z=0}^{z=h} dR = \int_{z=0}^{z=h} \rho\,\frac{dz}{\pi\,[r(z)]^2}$$

Para realizar a integral só falta conhecermos a função $r(z)$. Olhando o gráfico abaixo vemos que a função $r(z)$ é linear. Portanto:



$$r(z) = a\,z + b$$

com a e b constantes. Como $r(z=0)=r_2$ segue que $b=r_2$. Como $r(z=h)=r_1$ segue que:

$$r_1 = r(z=h) = a\,h + r_2 \Rightarrow a = \frac{r_1 - r_2}{h}$$

Portanto (a equação da reta vermelha é):

$$r(z) = \frac{r_1 - r_2}{h}z + r_2$$

Conferindo: $r(z=0)=r_2$ e $r(z=h)=r_1-r_2+r_2=r_1$.

Concluindo:

$$R = \int_{z=0}^{z=h} \rho\,\frac{dz}{\pi\,[r(z)]^2} = \frac{\rho}{\pi}\int_0^h \frac{dz}{\left[\frac{r_1 - r_2}{h}z + r_2\right]^2}$$

Portanto (trata-se de uma integral de $u^{-2}\, du$):

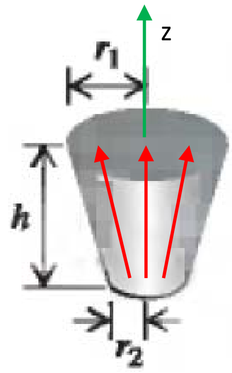
$$R = \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{r_1 - r_2} \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right] = \frac{\rho\, h}{\pi\, r_1\, r_2}$$

No caso particular em que $r_1 = r_2 = r$ segue que:

$$R = \frac{\rho\, h}{\pi\, r^2}$$

que é o resultado já conhecido para o resistor cilíndrico de comprimento h e raio r.

Podemos dar uma outra solução para esse problema utilizando a definição de resistência elétrica:



$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

Considere a corrente fluindo através desse condutor cônico. A corrente (setas vermelhas) flui da face menor para a face maior, conforme ilustrado na Figura ao lado:

Se I é a corrente que flui através do resistor, então a densidade de corrente é tal que:

$$I = \int_{cone} \vec{J} \cdot \hat{n}\, dA = \int_{cone} \vec{J} \cdot \hat{z}\, dA = \int_{cone} J_z\, dA = J_z\, \pi [r(z)]^2 \Rightarrow J_z(z) = \frac{I}{\pi [r(z)]^2}$$

Vemos que a densidade de corrente (a componente z, mais especificamente, que é a única que interessa aqui) decai com o aumento de z. A densidade de corrente é maior na face menor que na face maior, para que a corrente nas duas faces seja a mesma. Da lei de Ohm na forma microscópica, concluímos que o campo elétrico dentro desse resistor, responsável por essa circulação de corrente, é tal que:

$$E_z(z) = \rho\, J_z(z) = \frac{\rho\, I}{\pi [r(z)]^2}$$

Portanto, a diferença de potencial entre as duas faces (os dois terminais do resistor cônico) é:

$$\Delta V = V(0) - V(h) = \int_{z=0}^{z=h} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{z=0}^{z=h} \vec{E} \cdot \hat{z}\, dz = \int_0^h E_z(z)\, dz = \int_0^h \frac{\rho\, I}{\pi [r(z)]^2}\, dz$$

Concluindo, da lei Ohm na forma macroscópica:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \int_0^h \frac{\rho}{\pi [r(z)]^2}\, dz$$

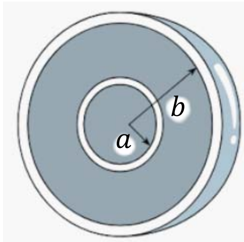
que é o mesmo resultado obtido anteriormente.

Um resistor cônico possui resistência elétrica:

$$R_{CONE} = \frac{\rho\, h}{\pi\, r_1\, r_2} = \frac{\rho\, h}{\pi\, r_M^2}$$

ou seja, ele se comporta como um resistor cilíndrico cujo raio é a média geométrica de r_1 e r_2: $r_M = \sqrt{r_1 r_2}$.

E/P25.64: Um resistor é formado preenchendo-se o espaço entre duas cascas esféricas metálicas concêntricas de raios a e $b > a$ com um material condutor de resistividade ρ. Os terminais do resistor são as duas cascas esféricas. A Figura ao lado ilustra um corte desse resistor esférico. O material de resistividade ρ está preenchendo a região cinza localizada entre as duas placas esféricas metálicas. Imagine a corrente elétrica fluindo na direção radial, da casca menor para a casca maior.



a) Tratas-se de uma situação parecida com a do exercício anterior. Agora consideramos o resistor como sendo uma sucessão de resistores do tipo casca esférica de raios r diferentes e de espessuras infinitesimais dr, conectados em série. O menor resistor casca-esférica será o de raio $r = a$. O maior resistor casca-esférica será o de raio $r = b$. A resistência de um resistor do tipo casca-esférica de raio r e espessura dr, feito de um material de resistividade ρ, é:

$$dR = \rho\, \frac{dr}{4\, \pi\, r^2}$$

Note que essa é a resistência de um resistor cilíndrico cuja área da base é $4\, \pi\, r^2$ (a área da superfície da esfera de raio r) e cuja altura é dr.

Portanto, a resistência equivalente da associação em série dessa infinidade de cascas esféricas de espessuras infinitesimais será dada por:

$$R = \sum_{z=0}^{z=h} dR \rightarrow \int_{r=a}^{r=b} dR = \int_{r=a}^{r=b} \rho\, \frac{dr}{4\, \pi\, r^2} = \frac{\rho}{4\, \pi} \int_{r=a}^{r=b} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\, \pi} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

b) Suponha uma diferença de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ entre os terminais desse resistor esférico. A corrente que vai circular nele é? Da lei de Ohm:

$$I = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{4\, \pi\, a\, b}{\rho\, (b - a)} V_{ab}$$

Essa corrente vai fluir radialmente, partindo da casca de raio $r = a$ até chegar à casca de raio $r = b$.

Portanto, vemos que a densidade de corrente (por unidade de área) vai diminuindo à medida que o raio aumenta, pois é a mesma corrente I fluindo em uma área maior $4\, \pi\, r^2$ (analogamente ao que acontece no resistor cônico discutido no exercício 25.63) . A densidade de corrente em um raio r é dada por:

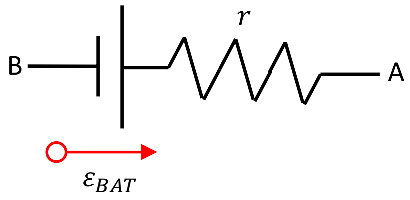
$$J = J(r) = \frac{I}{4\,\pi\,r^2} = \frac{a\,b}{\rho\,(b-a)} V_{ab} \frac{1}{r^2}$$

c) Suponha que as duas cascas esféricas estejam muito próximas uma da outra, ou seja, que $b - a = \delta \cong 0$. Então: $a\,b = a\,(a+\delta) \cong a^2$ e:

$$R = \frac{\rho}{4\,\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] = \frac{\rho}{4\,\pi}\frac{b-a}{a\,b} = \frac{\rho\,\delta}{4\,\pi\,a^2}$$

que é o resultado já conhecido para um resistor cilíndrico de altura δ e área da base $4\,\pi\,a^2$.

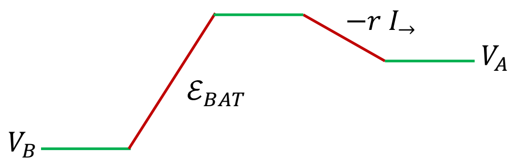
E/P25.69: Uma bateria real é ilustrada ao lado. Os terminais da bateria são A (positivo) e B (negativo). A bateria real é uma bateria ideal (um dispositivo ideal de FEM ε_{BAT}) + um resistor r (a resistência interna da bateria real).



Suponha que uma corrente $I_{\rightarrow}$ circule de B para A por dentro da bateria (e de A para B através do circuito externo). Então, integrando o campo elétrico de B para A obtemos:

$$V_B + \varepsilon_{BAT} - rI_{\rightarrow} = V_A \;\Rightarrow V_{AB}^{\rightarrow} = V_A - V_B = \varepsilon_{BAT} - rI_{\rightarrow}$$

Esses degraus de potencial estão mostrados na Figura ao lado. A DDP entre os terminais de uma bateria real não é necessariamente igual à sua FEM.

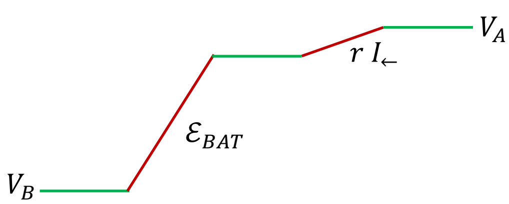


Essa é a situação em que a bateria está descarregando, fornecendo energia para o circuito em que ela está conectada. Os portadores de carga (+) fluem dentro da bateria do potencial menor (-) para o potencial maior (+) e, portanto, ganham energia potencial elétrica. Essa energia está vindo da reação química que ocorre dentro da bateria. Vemos que nesse caso a DDP ($V_{AB}^{\rightarrow}$) entre os terminais da bateria é menor que sua FEM. Dizemos que há uma "queda de tensão", ou "queda de potencial" dentro da bateria (em r).

Suponha agora que uma corrente $I_{\leftarrow}$ circule de A para B por dentro da bateria (e de B para A através do circuito externo). Então, usando a mesma ideia anterior, mas agora atravessamos r no sentido oposto à corrente nele:

$$V_B' + \varepsilon_{BAT} + rI_{\leftarrow} = V_A' \;\Rightarrow V_{AB}^{\leftarrow} = V_A' - V_B' = \varepsilon_{BAT} + rI_{\leftarrow}$$

Esses degraus de potencial estão mostrados na Figura ao lado.



Essa é a situação em que a bateria está carregando, recebendo energia do circuito em que ela está conectada. Agora os portadores de carga (+) fluem dentro da bateria do potencial maior (+) para o potencial menor (-) e, portanto, perdem energia potencial elétrica. Essa energia está sendo fornecida para a reação química que ocorre dentro da bateria, a reação reversa daquela que ocorre quando a bateria está descarregando. A reação química que ocorre na descarga libera energia (é exotérmica) enquanto que a reação química que ocorre no processo de carga absorve energia (é endotérmica). Vemos que nesse caso a DDP ($V_{AB}^{\leftarrow}$) entre os terminais da bateria tem que ser maior que sua FEM (é o que faz um carregador de baterias).

Subtraindo uma equação da outra obtemos a resistência interna da bateria:

$$r = \frac{V_{AB}^{\leftarrow} - V_{AB}^{\rightarrow}}{I_{\leftarrow} + I_{\rightarrow}}$$

Multiplicando a primeira equação por $I_{\leftarrow}$ e somando com a segunda equação multiplicada por $I_{\rightarrow}$ obtemos a FEM da bateria:

$$\varepsilon_{BAT} = \frac{V_{AB}^{\leftarrow} I_{\rightarrow} + V_{AB}^{\rightarrow} I_{\leftarrow}}{I_{\leftarrow} + I_{\rightarrow}}$$

Com os dados numéricos obtemos:

$$r = \frac{V_{AB}^{\leftarrow} - V_{AB}^{\rightarrow}}{I_{\leftarrow} + I_{\rightarrow}} = \frac{9{,}4 - 8{,}4}{3.5 + 1{,}5} = 0{,}2\ \Omega$$

$$\varepsilon_{BAT} = \frac{V_{AB}^{\leftarrow} I_{\rightarrow} + V_{AB}^{\rightarrow} I_{\leftarrow}}{I_{\leftarrow} + I_{\rightarrow}} = \frac{9{,}4\ (1{,}5) + 8{,}4\ (3{,}5)}{3.5 + 1{,}5} = 8{,}7\ V$$

E/P25.72: Atualmente (07/2018) o custo da energia elétrica está em cerca de 0,85 reais/kWh. Isso significa que se você deixar um aparelho com potência de 1 kW ligado por 1 hora você vai ter que pagar 85 centavos para a empresa que fornece energia elétrica (fora as taxas e os impostos).

Considere o custo de um banho, no inverno. Um chuveiro possui potência P=5 kW na posição inverno. Um banho dura $\Delta t = 10$ minutos. Quantos reais custa esse banho?

A energia consumida em kWh foi: considerando que o tempo, em horas é $\Delta t = 1/6$ h, segue que:

$$E = P\ \Delta t = \frac{5}{6}\ \text{kWh}$$

(a energia em kWh é simplesmente o produto da potência em kW pelo tempo em horas).

Portanto o preço desse único banho é:

$$E \times 0{,}85 = \frac{5}{6} 0{,}85 \cong 0{,}71\ \text{reais} = 71\ \text{centavos}$$

Se essa pessoa tomar banho todos os dias, vai gastar em 1 ano cerca de 260 reais com essa rotina. Colocando o chuveiro na posição verão reduz-se a potência do chuveiro e o custo do banho.

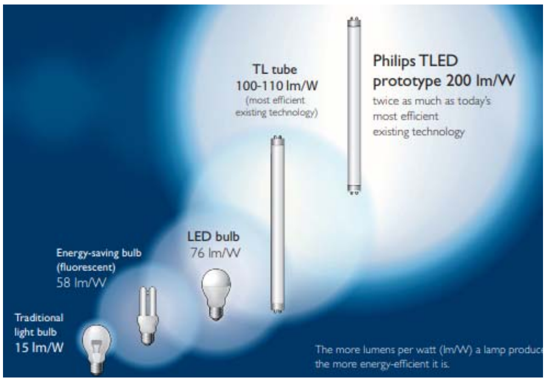
Um computador do tipo laptop consome cerca de 150 W quando está em uso pleno. Suponha que ele fique ligado 8 h por dia. O custo em um dia é (P=0,15 kW e $\Delta t = 8$ h):

$$E = P\,\Delta t = 1{,}2\ \text{kWh} \Rightarrow E \times 0{,}85 = 1{,}02\ \text{reais}$$

Em um ano o custo é de cerca de 370 reais. É mais caro que o banho.

Note que não há a necessidade de converter a energia para joules, que seria o produto da potência em watts pelo tempo em segundos. Isso seria uma perda de tempo, pois o custo da energia não está fixado em reais/joule, mas sim em reais/kWh. Por isso calculamos diretamente a energia em kWh multiplicando a potência em kW pelo tempo em horas. O kWh é uma unidade esquisita de energia (é J/3.600.000) que se justifica pela sua praticidade.

Uma lâmpada converte energia elétrica em energia luminosa. A potência que está especificada na lâmpada é geralmente a potência elétrica e não a potência luminosa. Se você comprar uma lâmpada de 100 W, por exemplo, isso significa que você vai pagar por essa potência elétrica enquanto ela ficar acesa. A quantidade de potência luminosa que a lâmpada vai gerar depende de sua eficiência. A Figura abaixo, retirada do site do fabricante Philips (https://www.philips.com/) resume as eficiências típicas das lâmpadas encontradas no mercado.



Vemos que as lâmpadas incandescentes antigas, que estão em extinção, eram pouco eficientes, geravam cerca de 15 lumens de potência luminosa para cada watt de potência elétrica consumida. Sua eficiência é, então, 15 lm/W. Essas lâmpadas produzem luz através do efeito Joule. A corrente elétrica atravessa um filamento que aquece muito e se torna incandescente. Vemos na Figura que as lâmpadas fluorescentes são mais eficientes, cerca de 58 lm/W, ou seja, quase 4 vezes mais eficientes que as incandescentes. Isso significa que você vai pagar quatro vezes menos para produzir a mesma potência luminosa que seria produzida com lâmpadas incandescentes. Equivalentemente, você produziria quatro vezes mais potência luminosa com o mesmo custo. As lâmpadas fluorescentes produzem luz através da excitação/desexcitação das moléculas de um gás confinado em um tubo. As paredes do tubo são cobertas por um material fluorescente, que absorve a radiação (invisível, geralmente UV) emitida pelo gás e emite radiação no espectro visível. A Figura mostra também que as lâmpadas de LED são ainda mais eficientes, cerca de 76 lm/W, cerca de 5 vezes mais que as incandescentes e 1,3 vezes mais que as fluorescentes. As lâmpadas LED

(LED=diodo emissor de luz) produzem luz através de excitação/desexcitação de elétrons que fluem dentro de materiais semicondutores (luminescência). Dependendo dos materiais usados, a luz emitida terá uma cor específica.

Além da diferença em eficiência, os diferentes tipos de lâmpadas apresentam também diferentes durabilidades e diferentes impactos ambientais. Em princípio as lâmpadas de LED duram mais que as outras, aumentando sua vantagem econômica, dado seu maior custo inicial.

E/P25.74: Um fio cilíndrico de comprimento L é feito de um material de resistividade ρ. A DDP entre as extremidades desse fio é ΔV. Queremos que ele dissipe calor por efeito Joule com potência P_{Joule}.

a) Qual o raio do fio?

Se r é o raio do fio, então ele é um resistor de resistência:

$$R = \rho\,\frac{L}{\pi\, r^2}$$

A potência com que um resistor dissipa calor por efeito Joule é:

$$P = VI = R\,I^2 = \frac{V^2}{R}$$

No presente caso usaremos a última expressão:

$$P_{\text{Joule}} = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{\pi\, r^2}{\rho\, L}(\Delta V)^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{\rho\, L\, P_{\text{Joule}}}{\pi}}\,\frac{1}{\Delta V}$$

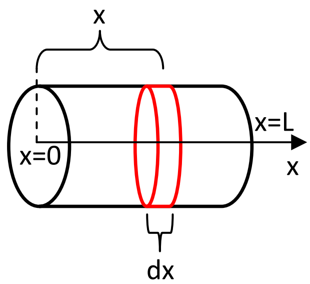
Para uma mesma ΔV, se queremos mais calor (maior P_{Joule}), devemos aumentar o raio do fio, e diminuir sua resistência. É o que acontece em um chuveiro elétrico. A resistência da posição inverno é menor que a resistência da posição verão, porque queremos que na posição inverno o chuveiro produza mais calor, com a mesma ΔV (a ΔV da tomada em que o chuveiro está ligado, geralmente 127 V ou 220 V). Nesse caso do chuveiro é mais simples diminuir o comprimento L do fio, de tal forma a obter um fio de menor resistência elétrica. Pode parecer estranho que para aumentar a potência dissipada devemos diminuir a resistência elétrica, mas lembre-se que o contexto aqui é que a ΔV está fixa e que, portanto, para uma mesma ΔV a expressão $P = (\Delta V)^2/R$ mostra que P aumenta se R diminui. É claro que a diminuição em R é compensada pelo aumento na corrente, já que $I = \Delta V/R$ e $P = R\,I^2$. Resumindo, se R diminui à metade, a corrente I dobra e a potência fica $P' = (R/2)\,(\,2\,I)^2 = 2\,P$, ou seja, a potência dobra.

b) Qual a magnitude do campo elétrico dentro desse fio?

Sendo o campo elétrico uniforme, segue que:

$$\Delta V = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_L E\, dl = E \int_L dl = E\, L \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{L}$$

Esse campo elétrico é geralmente minúsculo (porque os fios são feitos de materiais ótimos condutores de eletricidade) e é produzido por densidades de carga minúsculas depositadas na superfície do fio.



E/P25.76: Um cilindro de raio r e comprimento L é feito de um material que possui uma resistividade não uniforme $\rho(x)$, sendo x uma coordenada ao longo do eixo do cilindro, $x \in [0, L]$.

a) Qual a resistência elétrica desse cilindro?

Podemos pensar o cilindro como uma sucessão de várias fatias cilíndricas infinitesimais (em vermelho na Figura acima), de raio r e espessura dx, associadas em série. A resistência elétrica de uma fatia é:

$$dR = \rho(x)\, \frac{dx}{\pi\, r^2}$$

A resistência elétrica do cilindro é:

$$R = \sum_{x=0}^{x=L} dR \;\rightarrow \int_{x=0}^{x=L} dR = \frac{1}{\pi\, r^2} \int_{x=0}^{x=L} \rho(x) dx$$

Por exemplo, consideremos: $\rho(x) = a + bx^2$ com a e b constantes. Então:

$$R = \frac{1}{\pi\, r^2} \int_{x=0}^{x=L} (a + bx^2) dx = \frac{1}{\pi\, r^2} \left(a\, L + b\, \frac{L^3}{3} \right)$$

b) Supondo que esse fio esteja transportando uma corrente elétrica I uniformemente distribuída em sua seção transversal, o campo elétrico em uma posição x dentro do fio será, da lei de Ohm:

$$J = \frac{I}{\pi\, r^2} = \frac{E(x)}{\rho(x)} \Rightarrow E(x) = \frac{I}{\pi\, r^2} \rho(x)$$

Na região em que $\rho(x)$ é maior, o campo elétrico necessário para manter a mesma corrente fluindo será maior. Essa mudança no campo elétrico dentro do material condutor será produzida por acúmulos de cargas elétricas no volume do condutor.

c) Se cortarmos o cilindro em duas metades iguais, obteremos dois resistores com resistências:

$$R_1 = \frac{1}{\pi\, r^2} \int_{x=0}^{x=L/2} (a + bx^2) dx = \frac{1}{\pi\, r^2} \left(a \frac{L}{2} + b\, \frac{L^3}{24} \right)$$

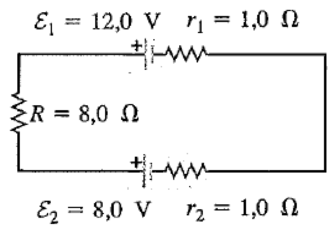
$$R_2 = \frac{1}{\pi\, r^2} \int_{x=L/2}^{x=L} (a + bx^2)dx = \frac{1}{\pi\, r^2}\left(a\frac{L}{2} + b\frac{7}{24}L^3\right)$$

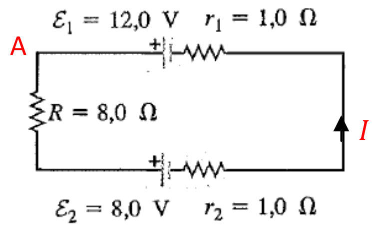
Vemos que $R_1 \neq R_2$ pois uma metade do fio possui resistividade diferente da outra metade.

Note que esses dois resistores (essas duas metades) estão em série e que, portanto:

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{\pi\, r^2}\left(a\frac{L}{2} + b\,\frac{L^3}{24} + a\frac{L}{2} + b\frac{7}{24}L^3\right) = \frac{1}{\pi\, r^2}\left(a\, L + b\,\frac{L^3}{3}\right) = R$$

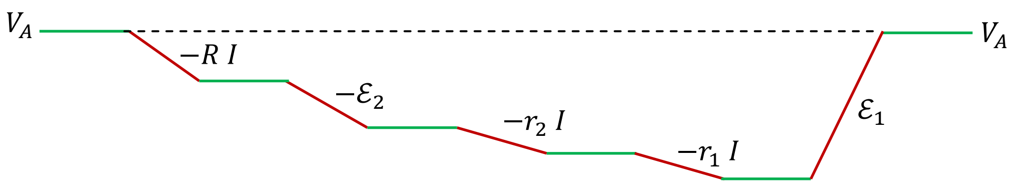
E/P25.79: Considere o circuito ao lado, com $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$.





Note que, sendo $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$, a corrente vai circular no sentido anti-horário, posto que essa é a vontade da bateria 1. Mas, não precisamos saber isso de antemão. O sinal da corrente vai determinar o sentido dela. Agora vamos usar a ideia de que a soma das DDPs ao longo do circuito completo deve ser igual a zero. No próximo capítulo chamaremos essa lei de "lei das malhas". Para aplicar essa ideia precisamos nos lembrar de que uma bateria ideal de FEM $\mathcal{E}$ mantém um degrau de $\mathcal{E}$ entre o potencial do seu pólo positivo (V_+) e o potencial do seu pólo negativo (V_-): $V_+ - V_- = \mathcal{E}$. Além disso, em um resistor de resistência R a corrente I sempre flui do terminal de potencial maior para o terminal de potencial menor e o degrau de potencial é (de acordo com a lei de Ohm) $R\, I$. Portanto, se formos percorrendo o circuito e somando esses "degraus de potencial", ao retornarmos para o mesmo ponto de partida devemos voltar para o mesmo nível de potencial, ou seja, a soma dos degraus é nula. Olhando para o circuito ao lado, em que assumimos uma corrente I no sentido anti-horário, se partirmos do ponto A e dermos uma volta completa no circuito nesse mesmo sentido, obtemos os "degraus de potencial" representados na Figura abaixo.

Partimos do ponto A, onde o potencial vale V_A e vamos atravessando os dispositivos e seus "degraus de potencial" correspondentes. Todos os resistores são atravessados no mesmo sentido da corrente e, por isso, são degraus de descida. A bateria de FEM $\mathcal{E}_2$ é atravessada do + para o - e também é um degrau de descida. Apenas a bateria de FEM $\mathcal{E}_1$ é um degrau de subida.



Os platôs (em verde) correspondem aos condutores perfeitos (fios ideais de resistência nula = equipotenciais) que conectam os resistores e baterias no circuito.

Essa Figura corresponde à seguinte equação:

$$V_A - R\,I - \mathcal{E}_2 - r_2 I - r_1 I + \mathcal{E}_1 = V_A \Rightarrow -R\,I - \mathcal{E}_2 - r_2 I - r_1 I + \mathcal{E}_1 = 0$$

Portanto, a corrente no circuito é:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}$$

Note que para $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ obtemos uma corrente positiva, ou seja, o sentido anti-horário que assumimos é mesmo o sentido da corrente nesse circuito. Se valesse $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ obteríamos uma corrente negativa, significando que seu sentido seria oposto ao que assumimos, ou seja, seria o sentido horário. As baterias estão com polaridades opostas e daí vem o sinal de menos no numerador. O denominador é apenas a resistência equivalente dos três resistores em série.

Nesse circuito a bateria de FEM $\mathcal{E}_1$ está fornecendo energia potencial elétrica para os portadores de carga (positiva), pois dentro dela eles estão indo do potencial menor (-) para o potencial maior (+). De onde vem esse ganho de energia potencial dos portadores de carga? Vem da reação química nessa bateria, que está descarregando.

A bateria de FEM $\mathcal{E}_2$, por sua vez, está sendo carregada, pois os portadores de carga fluem dentro dela do potencial maior (+) para o potencial menor (-), ou seja, eles perdem energia potencial elétrica dentro dessa bateria. Para onde está indo essa energia? Só pode estar sendo armazenada nos materiais reagentes dentro da bateria, na forma de energia química. Nessa bateria está ocorrendo uma reação endotérmica.

Nos resistores os portadores de carga sempre perdem energia potencial elétrica, pela ação do arraste (efeito Joule).

Portanto, as energias/potenciais elétricas ganhas/perdidas pelos portadores que circulam nesse circuito se dão com as potências:

$$P_{GANHA}^{BAT\,1} = \mathcal{E}_1\,I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}\mathcal{E}_1$$

$$P_{PERDIDA}^{BAT\,2} = \mathcal{E}_2\,I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}\mathcal{E}_2$$

$$P_{PERDIDA}^{R} = R\,I^2 = R\,\left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}\right)^2$$

$$P_{PERDIDA}^{r_1} = r_1\,I^2 = r_1\,\left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}\right)^2$$

$$P^{r_2}_{PERDIDA} = r_2\, I^2 = r_2\, \left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}\right)^2$$

Não é muito difícil mostrar que, como não poderia deixar de ser:

$$P^{BAT\ 1}_{GANHA} = P^{BAT\ 2}_{PERDIDA} + P^{R}_{PERDIDA} + P^{r_1}_{PERDIDA} + P^{r_2}_{PERDIDA}$$

Resumindo: na bateria 1 energia química é convertida em energia potencial elétrica dos portadores de carga que fluem no circuito. Na bateria 2 parte dessa energia potencial elétrica é novamente convertida em energia química. O restante da energia potencial elétrica ganha é convertida em calor nos resistores.

Estando o circuito funcionando em regime estacionário, não há sobra ou falta de energia fluindo para os portadores de carga. Dados os mecanismos de conversão de energia que estamos considerando nesse modelo de circuito (que são 1) conversão de energia potencial em energia química, 2) conversão de energia química em energia potencial e 3) conversão de energia potencial em calor (ef. Joule)), tudo se encaixa para que o que um portador de carga ganha ele perde em uma volta completa no circuito. Essa é, sem essência, a lei das malhas, que consideraremos com mais detalhes no próximo capítulo.