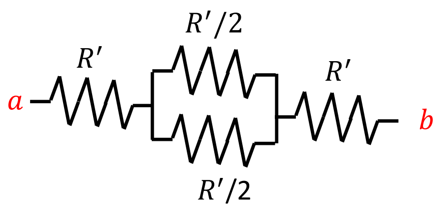
E/P26.1: Um fio que possui resistência elétrica R é cortado em três pedaços iguais. Um pedaço é enrolado formando um círculo e é conectado aos outros dois pedaços retos conforme a Figura ao lado. Quanto vale a resistência elétrica R_{ab}?

Um fio é um resistor cilíndrico cuja resistência elétrica é dada por:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

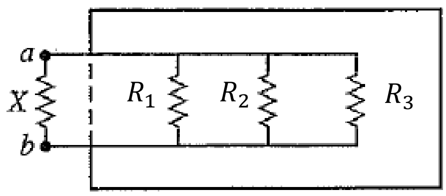
sendo ρ a resistividade do material do fio, L o comprimento do fio e A a área da seção transversal do fio. Portanto, cada pedaço com comprimento $L/3$ tem resistência $R' = R/3$. Quanto ao fio em forma de círculo, ele equivale a duas resistências $R'/2$ em paralelo. Portanto, o circuito equivalente fica como mostrado abaixo:



A resistência entre a e b é dada pela associação em paralelo dos dois $R'/2$ em série com os outros dois resistores R':

$$R_{ab} = R' + \frac{(R'/2)(R'/2)}{\frac{R'}{2} + \frac{R'}{2}} + R' = R' + \frac{R'}{4} + R' = \frac{9}{4} R' = \frac{9}{4} \frac{R}{3} = \frac{3}{4} R = \frac{3}{4} \rho \frac{L}{A}$$

E/P26.2: No circuito ao lado os resistores R_1, R_2 e R_3 são conhecidos. Um ohmímetro conectado entre os terminais a e b mede a resistência equivalente R_{ab}. Vemos que todos os resistores estão em paralelo e que, portanto:

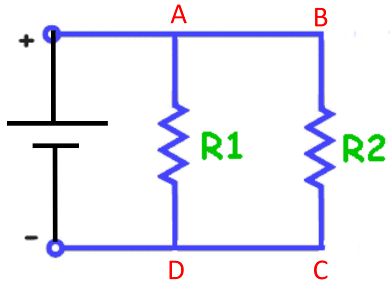


$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{X} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Concluindo, o resistor desconhecido é tal que:

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{R_{ab}} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}$$

E/P26.4: Dois resistores R_1 e R_2 são ligados em paralelo e a uma fonte ideal (sem resistência interna) CC de DDP V_0 (equivalente a uma bateria ideal de FEM V_0).



A figura ao lado ilustra esse circuito. Estando os dois resistores em paralelo, a resistência equivalente do circuito é:

$$R_{eq} = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$$

A corrente que flui através da bateria (ou fonte CC) é:

$$I_{BAT} = \frac{V_0}{R_{eq}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1\,R_2}\,V_0$$

Essa corrente se divide entre os dois resistores. Da lei dos nós:

$$I_{BAT} = I_1 + I_2$$

I_1 flui de A para D através de R_1 e I_2 flui de B para C através de R_2. Após isso essas duas correntes se juntam novamente e fluem para o terminal – da bateria. Para determinar I_1 e I_2 podemos construir mais uma equação usando o fato de que $V_A = V_B$ e $V_D = V_C$. Portanto (como sempre vale para resistores em paralelo) :

$$\Delta V_1 = V_A - V_D = \Delta V_2 = V_B - V_C \Rightarrow \Delta V_1 = \Delta V_2$$

Utilizando também a lei de Ohm ($\Delta V = R\,I$) obtemos:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \Longrightarrow R_1\,I_1 = R_2\,I_2$$

Essa equação mostra que a corrente é maior através do resistor menor. Essa equação e mais a lei dos nós fornecem:

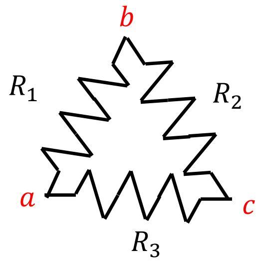
$$I_{BAT} = I_1 + I_2 = \left[1 + \frac{R_1}{R_2}\right] I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\frac{R_1 + R_2}{R_1\,R_2}\,V_0 = \frac{V_0}{R_1}$$

$$I_1 = \frac{V_0}{R_1} \qquad \text{e} \qquad I_2 = \frac{V_0}{R_2}$$

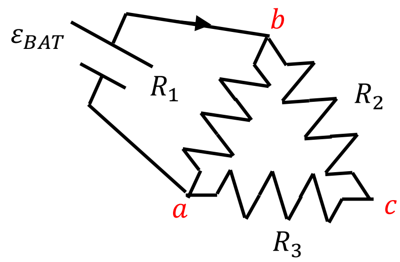
Esses resultados poderiam ter sido obtidos mais facilmente se reconhecêssemos logo que $\Delta V_1 = \Delta V_2 = V_0$, pois R_1 e R_2 têm seus terminais ligados diretamente aos terminais da bateria: $V_A = V_B = V_+$ e $V_D = V_C = V_-$.

Conclusão: a corrente I_{BAT} que sai do terminal + da bateria se divide em duas novas correntes, I_1 e I_2 que passam por R_1 e R_2. Passa mais corrente pelo resistor paralelo de menor resistência elétrica.

E/P26.5: Considere três resistores conectados como na Figura ao lado.



a) Considere uma bateria ideal de FEM ε_{BAT} conectada entre os terminais a e b, a corrente fluindo nesse circuito será:



Note na Figura ao lado que R_2 fica em série com R_3 (pois o nó c está flutuando (não está conectado a nada)) e esse conjunto fica em paralelo com R_1. A resistência equivalente será:

$$R_{ab} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

A corrente na bateria será:

$$I_{ab} = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_{ab}}$$

b) Considere uma bateria ideal de FEM ε_{BAT} conectada entre os terminais b e c, a corrente fluindo nesse circuito será:

Analogamente, note que R_1 fica em série com R_3 (pois o nó a está flutuando) e esse conjunto fica em paralelo com R_2. A resistência equivalente será:

$$R_{bc} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

A corrente na bateria será:

$$I_{bc} = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_{bc}}$$

c) Considere agora uma bateria ideal de FEM ε_{BAT} conectada entre os terminais a e c, a corrente fluindo nesse circuito será:

Agora R_1 fica em série com R_2 (pois o nó b está flutuando) e esse conjunto fica em paralelo com R_3. A resistência equivalente será:

$$R_{ac} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

A corrente na bateria será:

$$I_{ac} = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_{ac}}$$

d) Se a bateria deixa de ser ideal e passa a ter uma resistência interna r, essa resistência fica em série com as associações de resistores definidas nos itens anteriores. No caso da bateria entre a e b, por exemplo, a resistência entre os terminais da bateria passa a ser:

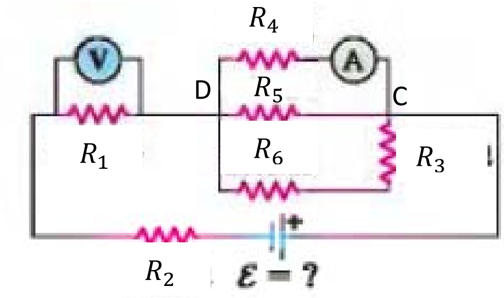
$$R_{eq} = R_{ab} + r = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} + r$$

A corrente na bateria passa a ser:

$$I_{ab} = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_{ab} + r}$$

A corrente diminui, em relação à bateria ideal, porque a resistência do circuito aumenta.

E/P26.6: Considere o circuito ao lado. A bateria é ideal ($r_{int} = 0$), o amperímetro é ideal ($r_{int} = 0$) e o voltímetro é ideal ($r_{int} \to \infty$, não passa corrente por ele). O amperímetro mede uma corrente I_A (dada).



a) A leitura do voltímetro é?

A corrente em R_4 é I_A pois ele está em série com o amperímetro. Então, da lei de Ohm, a DDP entre os terminais D e C, que são os terminais de R_4, é $V_{CD} = V_C - V_D = R_4\, I_A$. Como R_5 e a associação série de R_6 com R_3 também estão conectados entre C e D, segue que as correntes nesses resistores são:

$$I_5 = \frac{V_{CD}}{R_5} = \frac{R_4}{R_5} I_A$$

e, no ramo entre C e D que contem R_3 e R_6 em série:

$$I_6 = I_3 = \frac{V_{CD}}{R_3 + R_6} = \frac{R_4}{R_3 + R_6} I_A$$

Portanto, a corrente I_D que chega em D é, da lei dos nós no nó D:

$$I_D = I_A + I_5 + I_6 = I_A \left(1 + \frac{R_4}{R_5} + \frac{R_4}{R_3 + R_6}\right)$$

Essa corrente passa por R_1, pois não passa corrente pelo voltímetro ideal. Portanto, a DDP entre os terminais de R_1, que é a leitura do voltímetro (pois eles estão em paralelo), vale:

$$\Delta V_1 = R_1 I_D = R_1\, I_A \left(1 + \frac{R_4}{R_5} + \frac{R_4}{R_3 + R_6}\right)$$

b) A FEM da bateria vale?

Note que a corrente I_D, que passa por R_1 , é também a corrente que passa pela bateria, que é sempre dada por:

$$I_D = \frac{\varepsilon}{R_{eq}}$$

para circuitos formados por uma bateria (apenas) conectada a um conjunto de resistores. R_{eq} é a resistência equivalente do circuito, que nesse caso pode ser obtida sem muita dificuldade:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_{CD}$$

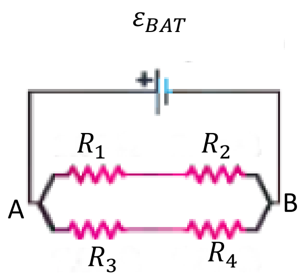
com R_{CD} dado por três resistores em paralelo: R_4, R_5 e $(R_3 + R_6)$. Portanto:

$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3 + R_6}$$

Segue que:

$$\varepsilon = R_{eq} I_D = \ (R_1 + R_2 + R_{CD}) \left(1 + \frac{R_4}{R_5} + \frac{R_4}{R_3 + R_6}\right) I_A$$

E/P26.12: Considere o circuito ao lado. A bateria é ideal (sem resistência interna).



A resistência equivalente do circuito (entre A e B) é dada pelo paralelo de R_1 em série com R_2 (ou seja, $R_1 + R_2$) e R_3 em série com R_4 (ou seja, $R_3 + R_4$). Portanto:

$$R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

A DDP entre A e B é, partindo de B e passando pela bateria até A:

$$V_B + \varepsilon_{BAT} = V_A \Rightarrow V_{AB} = V_A - V_B = \varepsilon_{BAT}$$

A DDP entre os terminais (A e B) de uma bateria ideal é igual a sua FEM.

Portanto, a corrente no ramo de R_1 e R_2 é, da lei de Ohm:

$$I_1 = I_2 = \frac{V_{AB}}{R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_1 + R_2}$$

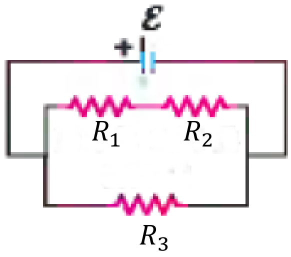
Analogamente, a corrente no ramo de R_3 e R_4 é:

$$I_3 = I_4 = \frac{V_{AB}}{R_3 + R_4} = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_3 + R_4}$$

A corrente na bateria é:

$$I_{BAT} = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_{eq}} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \varepsilon_{BAT} = I_1 + I_3$$

E/P26.15:



Considere o circuito ao lado. A DDP entre os terminais de R_2 é V_2 (dado).

a) A FEM da bateria é?

Note que R_2 está em série com R_1 e que a DDP entre os terminais desse ramo é ε. Portanto, a corrente que passa por esses dois resistores é:

$$I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

Da lei de Ohm, sabemos que a DDP entre os terminais de R_2 é:

$$V_2 = R_2\, I_2$$

Portanto:

$$V_2 = R_2 \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_2 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_2$$

b) A corrente que passa por R_3 é?

Vemos que a DDP entre os terminais de R_3 é ε, portanto, da lei de Ohm:

$$\varepsilon = R_3\, I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{\varepsilon}{R_3} = \frac{1}{R_3}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_2$$

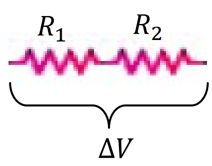
Concluindo, da lei dos nós vemos que a corrente na bateria é:

$$I_{BAT} = I_3 + I_2 = \frac{\varepsilon}{R_3} + \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \varepsilon\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2}\right) = \frac{\varepsilon}{R_{eq}}$$

sendo R_{eq} a resistência equivalente do circuito, que é a associação paralela de R_3 com $(R_1 + R_2)$, ou seja:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

E/P26.17: Duas lâmpadas incandescentes: uma de resistência $R_1 = R$ e outra de resistência maior $R_2 = 2\,R$.



a) As lâmpadas estão em série (figura acima) e conectadas a uma DDP ΔV (dada). Da lei de Ohm:

$$I_1 = I_2 = \frac{\Delta V}{R_1 + R_2} = \frac{\Delta V}{3\,R}$$

A lâmpada 1 dissipa a potência:

$$P_1 = R_1\, I_1^2 = R\left(\frac{\Delta V}{3\,R}\right)^2 = \frac{1}{9}\frac{(\Delta V)^2}{R}$$

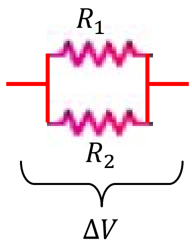
A lâmpada 2 dissipa a potência:

$$P_2 = R_2\, I_2^2 = 2R\left(\frac{\Delta V}{3\,R}\right)^2 = \frac{2}{9}\frac{(\Delta V)^2}{R} = 2\,P_1$$

A lâmpada de maior resistência brilha mais. A Potência total dissipada é:

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{9}\frac{(\Delta V)^2}{R} + \frac{2}{9}\frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{3}{9}\frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{1}{3}\frac{(\Delta V)^2}{R} = 3\,P_1$$

a) Agora vamos considerar que as lâmpadas estão em paralelo, e conectadas à mesma DDP ΔV (dada), conforme a figura ao lado. Lembrando que $R_1 = R$ e $R_2 = 2\,R$.



Da lei de Ohm para R_1:

$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{\Delta V}{R}$$

Para a lâmpada 2:

$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{\Delta V}{2R} = \frac{I_1}{2}$$

Passa mais corrente pela lâmpada de menor resistência.

A lâmpada 1 dissipa a potência:

$$P_1 = R_1\, I_1^2 = R\left(\frac{\Delta V}{R}\right)^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

A lâmpada 2 dissipa a potência:

$$P_2 = R_2\, I_2^2 = 2R\left(\frac{\Delta V}{2\,R}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{P_1}{2}$$

A lâmpada de menor resistência brilha mais. A Potência total dissipada é:

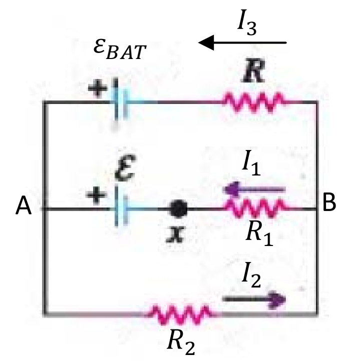
$$P_1 + P_2 = \frac{(\Delta V)^2}{R} + \frac{1}{2}\frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{3}{2}\frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{3}{2}P_1$$

Esse circuito paralelo dissipa maior potência que o circuito série. Isso é claro, pois para uma mesma ΔV, a potência total dissipada por um circuito de resistência equivalente R_{eq} é:

$$P_1 + P_2 = P = \frac{(\Delta V)^2}{R_{eq}}$$

Portanto, quanto menor o valor de R_{eq}, maior a potência total dissipada. A associação paralela possui uma resistência equivalente menor que a associação série, dos mesmos resistores. Logo, dissipa maior potência total (para uma mesma ΔV).

Nas instalações elétricas residenciais os dispositivos são todos ligados à mesma voltagem/DDP, a voltagem/DDP nas tomadas. Portanto, os dispositivos estão todos em paralelo: a geladeira está em paralelo com o chuveiro, com a televisão etc. Todas as lâmpadas da casa estão em paralelo entre si e ligadas à DDP de uma tomada (geralmente 127 volts). Não é comum se ter dispositivos ligados em série em uma instalação elétrica residencial. Sendo $P = V^2/R$, em uma instalação residencial as lâmpadas incandescentes de menor resistência R dissipam mais calor e brilham mais.



E/P26.21: Considere o circuito ao lado. São desconhecidos apenas os valores de R e ε. O restante é dado.

a) A corrente em R é?

Considere o nó direito (B), onde os três ramos se conectam. Suponha uma corrente I_3 em R fluindo para a esquerda. Da lei dos nós aplicada à B:

$$\sum_{CHEGAM} I = \sum_{SAEM} I \Rightarrow I_2 = I_1 + I_3 \Rightarrow I_3 = I_2 - I_1$$

Se calcularmos essa corrente, e ela der negativa, significa que nesse caso a corrente I_3 está fluindo para a direita. Os dados numéricos do exercício são $I_1 = 4$ A e $I_2 = 6$ A. Portanto, obtemos $I_3 = 2$ A, positiva, o que significa que I_3 está mesmo fluindo para a esquerda em R, como supusemos. Se chega mais carga em B (através de I_2) do que sai (através de I_1), então I_3 tem que sair de B, para manter fixa a carga elétrica no nó B (circuito em regime estacionário).

b) A resistência R é?

Considere a lei das malhas partindo de A, passando pelo ramo de R_2, pelo ramo de R e voltando ao ponto A:

$$V_A - R_2\, I_2 - R\, I_3 + \varepsilon_{BAT} = V_A \Rightarrow R = \frac{\varepsilon_{BAT} - R_2\, I_2}{I_3} = \frac{\varepsilon_{BAT} - R_2\, I_2}{I_2 - I_1}$$

Note que a única maneira de valer $I_2 = I_1$ seria $R \to \infty$: o circuito teria que estar aberto no ramo de R.

c) A FEM ε é?

Considere a lei das malhas partindo de A, passando pelo ramo de R_2, pelo ramo de R_1 e voltando ao ponto A:

$$V_A - R_2\, I_2 - R_1\, I_1 + \varepsilon = V_A \Rightarrow \varepsilon = R_2\, I_2 + R_1\, I_1$$

d) O circuito é cortado (aberto) no ponto x. A corrente I_3 passa a ser?

Se eliminarmos o ramo central ($I'_1 = 0$), sobram apenas ε_{BAT} e R em série com R_2. A corrente nessa malha será:

$$I'_3 = I'_2 = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R + R_2}$$

Já deduzimos anteriormente que:

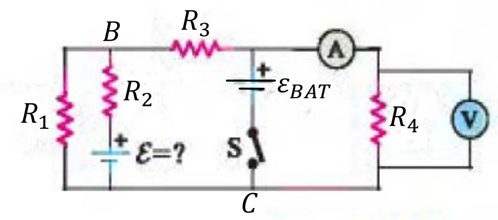
$$R = \frac{\varepsilon_{BAT} - R_2\, I_2}{I_2 - I_1}$$

sendo I_1 e I_2 as correntes com o circuito fechado no ponto x. Substituindo em I'_3 obtemos as correntes no circuito aberto em x em termos das correntes no circuito fechado em x:

$$I'_3 = I'_2 = (I_2 - I_1)\frac{\varepsilon_{BAT}}{\varepsilon_{BAT} - R_2\, I_1}$$

e $I'_1 = 0$ (pelo ramo aberto não passa corrente).

E/P26.27:



Considere o circuito ao lado. Baterias, voltímetro e amperímetro são ideais.

a) Com a chave S aberta o voltímetro mede uma DDP V_4 (dada) entre seus terminais. A FEM ε vale?

Desconsideramos o ramo que contém a bateria de FEM ε_{BAT}, pois ele está aberto. Note que V_4 é a DDP entre os terminais de R_4 e que, portanto, da lei de Ohm, no ramo de R_4, que está em série com R_3, flui uma corrente (que é medida pelo amperímetro):

$$I_3 = I_4 = \frac{V_4}{R_4}$$

Essa corrente desce em R_4, por causa da polaridade da bateria de FEM ε.

Aplicando a lei das malhas na malha mais externa, partindo de C, indo no sentido horário e voltando para C obtemos (I_1 é a corrente que desce no resistor R_1, produzida pela bateria de FEM ε):

$$V_C + R_1\, I_1 - R_3\, I_3 - R_4\, I_4 = V_C \Rightarrow I_1 = \frac{(R_3 + R_4)}{R_1} I_3 = \frac{(R_3 + R_4)}{R_1\, R_4} V_4$$

Aplicando a lei das malhas na malha que contém R_2, R_3 e R_4, partindo de C, indo no sentido horário e voltando para C obtemos (I_2 é a corrente que sobe no resistor R_2, produzida pela bateria de FEM ε):

$$V_C + \varepsilon - R_2\, I_2 - R_3\, I_3 - R_4\, I_4 = V_C \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} - \frac{(R_3 + R_4)}{R_2} I_3 = \frac{\varepsilon}{R_2} - \frac{(R_3 + R_4)}{R_2\, R_4} V_4$$

Da lei dos nós aplicada ao nó B obtemos uma equação para ε:

$$\sum_{CHEGAM} I = \sum_{SAEM} I \Rightarrow I_2 = I_1 + I_3 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{R_2} - \frac{(R_3 + R_4)}{R_2\, R_4} V_4 = \frac{(R_3 + R_4)}{R_1\, R_4} V_4 + \frac{V_4}{R_4}$$

Concluindo:

$$\varepsilon = R_2\left[\frac{(R_3+R_4)}{R_1\,R_4}+\frac{1}{R_4}+\frac{(R_3+R_4)}{R_2\,R_4}\right]V_4 = \frac{R_2}{R_4}\left[1+(R_3+R_4)\frac{(R_1+R_2)}{R_1\,R_2}\right]V_4$$

Uma outra forma de resolver, partindo de I_2 deduzida acima, é constatar que I_2 é a corrente na bateria de FEM ε, ou seja:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{eq}}$$

sendo R_{eq} a resistência equivalente do circuito conectado aos terminais da bateria de FEM ε: R_3 em série com R_4, essa associação em paralelo com R_1 e essa associação em série com R_2, ou seja:

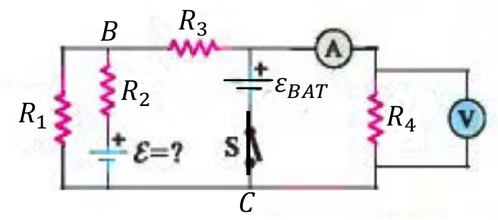
$$R_{eq} = R_2 + \frac{R_1(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4}$$

Portanto:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} - \frac{(R_3+R_4)}{R_2\,R_4}V_4 = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{R_2+\dfrac{R_1(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4}}$$

resolvendo para ε obtemos o mesmo resultado anterior.

a) Com a chave S fechada o amperímetro mede?



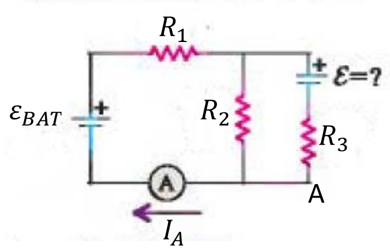
Repetimos o circuito ao lado. Note que não podemos usar aqui as respostas do item anterior, ou mesmo assumir o mesmo valor de V_4, porque antes a chave estava aberta e agora ela está fechada. As correntes e DDPs devem assumir novos valores. Apenas a FEM ε continuará com o mesmo valor determinado anteriormente. A FEM de uma bateria depende apenas dela (da reação química dentro dela), e não do circuito em que ela está ligada. Assumimos então que ε é dado (mas essa hipótese se mostrará desnecessária).

Percorrendo a malha que contém ε_{BAT} e R_4, partindo de C, no sentido horário, obtemos:

$$V_C + \varepsilon_{BAT} - R_4\,I_4 = V_C \Rightarrow I_4 = \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_4}$$

Como o amperímetro está em série com R_4, pois não passa corrente pelo voltímetro ideal, segue que o amperímetro mede I_4. Note que ao fechar a chave S fixamos a DDP entre os terminais de R_4 como sendo ε_{BAT}, não importando o que mais tem no circuito, outras baterias e outros resistores. Daí segue que fixamos I_4 no valor determinado acima.

E/P26.28:



Considere o circuito ao lado. A corrente no amperímetro (ideal) é I_A (dada). A FEM ε vale?

Foi feita uma hipótese sobre a polaridade de ε. Ao final devemos concluir se essa hipótese está correta.

Percorrendo a malha mais externa no sentido horário, partindo de A, obtemos:

$$V_A + \varepsilon_{BAT} - R_1\, I_A - \varepsilon - R_3\, I_3 = V_A \Rightarrow I_3 = \frac{\varepsilon_{BAT} - \varepsilon - R_1\, I_A}{R_3}$$

Assumimos que I_3 é a corrente que desce no resistor R_3 (se calcularmos seu valor numérico e der negativo, é porque essa corrente sobe em R_3).

Percorrendo a malha que contém R_2 e ε_{BAT} no sentido horário, partindo de A, obtemos:

$$V_A + \varepsilon_{BAT} - R_1\, I_A - R_2\, I_2 = V_A \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon_{BAT} - R_1\, I_A}{R_2}$$

I_2 é a corrente que desce no resistor R_2 (ela desce com certeza, se a polaridade de ε for a assumida na Figura).

Aplicando a lei dos nós ao nó A obtemos:

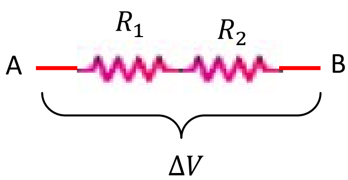
$$\sum_{CHEGAM} I = \sum_{SAEM} I \Rightarrow I_2 + I_3 = I_A \Rightarrow \frac{\varepsilon_{BAT} - R_1\, I_A}{R_2} + \frac{\varepsilon_{BAT} - \varepsilon - R_1\, I_A}{R_3} = I_A$$

Resolvendo a equação para ε obtemos:

$$\varepsilon = R_3\left(\frac{\varepsilon_{BAT} - R_1\, I_A}{R_2} + \frac{\varepsilon_{BAT} - R_1\, I_A}{R_3} - I_A\right) = R_3\left[\frac{\varepsilon_{BAT}}{R_2} + \frac{\varepsilon_{BAT}}{R_3} - \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} + 1\right) I_A\right]$$

Deixaremos do jeito que está. Se, com os dados numéricos, obtivermos um $\varepsilon > 0$, significa que a polaridade indicada na Figura está correta. Com os dados numéricos, assumindo $I_A = 1{,}5\ A$, obtemos $\varepsilon = 52{,}3\ V$.

E/P26.33: Considere o circuito ao lado, em que conhecemos a DDP ΔV (dada). A DDP entre os terminais de R_2 é?



R_1 e R_2 estão em série. A corrente nesse ramo AB é:

$$I = \frac{\Delta V}{R_1 + R_2}$$

Portanto a DDP ("real") entre os terminais de R_2 é (da lei de Ohm):

$$\Delta V_2 = R_2\, I = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\Delta V = \frac{\Delta V}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}$$

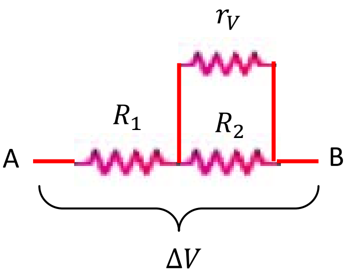
Analogamente, a DDP entre os terminais de R_1 é:

$$\Delta V_1 = R_1\, I = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\Delta V = \frac{\Delta V}{1 + \dfrac{R_2}{R_1}}$$

Trata-se de um circuito divisor de DDP (ou divisor de tensão). A DDP ΔV se divide entre os dois resistores, na mesma razão de suas resistências:

$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{R_1}{R_2}$

Um voltímetro não ideal, ou seja, com resistência interna $r_V \neq \infty$, não vai indicar exatamente o valor ("real") acima para a DDP entre os terminais de R_2, porque um instrumento de medida não ideal sempre modifica o circuito em que ele é conectado: modifica as correntes e DDPs no circuito. Ligando esse voltímetro não ideal entre os terminais de R_2 (em paralelo com R_2) obtemos o novo circuito como mostrado ao lado.



A nova corrente nesse ramo (de A para B) é (note que r_V está em paralelo com R_2):

$$I' = \frac{\Delta V}{R_1 + \dfrac{R_2\, r_V}{R_2 + r_V}}$$

Portanto, a leitura do voltímetro (LV) é a nova DDP entre os terminais do resistor equivalente do paralelo entre r_V e R_2:

$$LV = \frac{R_2\, r_V}{R_2 + r_V}\, I' = \frac{R_2\, r_V}{R_2 + r_V}\left[\frac{\Delta V}{R_1 + \dfrac{R_2\, r_V}{R_2 + r_V}}\right] = \frac{\Delta V}{1 + R_1\left(\dfrac{R_2 + r_V}{R_2\, r_V}\right)} = \frac{\Delta V}{1 + \dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{R_1}{r_V}}$$

Note que $LV < \Delta V_2$ e que:

$$\lim_{r_V \to \infty} LV = \Delta V_2$$

o que significa que somente um voltímetro ideal seria capaz de indicar a "verdadeira" DDP entre os terminais de R_2, ou seja, a DDP que havia antes do voltímetro ser conectado ao circuito.

O erro absoluto na leitura é:

$$EA = \Delta V_2 - LV = \frac{\Delta V}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}} - \frac{\Delta V}{1 + \dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{R_1}{r_V}} = \frac{\dfrac{R_1}{r_V}}{\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{R_1}{r_V}\right)\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)}\Delta V = \frac{\Delta V}{\left(1 + \dfrac{r_V}{R_2} + \dfrac{r_V}{R_1}\right)\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)}$$

O erro relativo é:

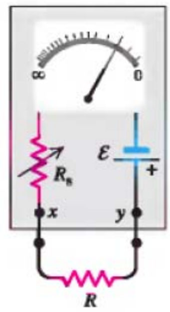
$$ER = \frac{\Delta V_2 - LV}{\Delta V_2} = \frac{1}{1 + \frac{r_V}{R_2} + \frac{r_V}{R_1}}$$

Os dois erros se anulam quando $r_V \rightarrow \infty$, ou seja, quando o voltímetro de aproxima da idealidade.

Na prática um voltímetro é um instrumento que possui uma resistência interna r_V muito alta. Quanto maior o valor de r_V, menos o voltímetro modifica o circuito em que ele é ligado e mais ele indica os valores de DDPs que haviam no circuito original, sem a presença do voltímetro. Quanto maior o valor de r_V, mais caro é o voltímetro.

E/P26.36:

Considere o circuito de um ohmímetro, mostrado ao lado. Basicamente trata-se de um circuito série contendo uma bateria ideal de FEM ε, um resistor interno ajustável R_S, um galvanômetro de resistência interna R_G, que é basicamente um mili(ou micro)amperímetro e o resistor externo R cujo valor queremos medir. A corrente que circula no galvanômetro é (todos os resistores estão em série):



$$I_G = \frac{\varepsilon}{R + R_S + R_G}$$

Um galvanômetro é basicamente um pequeno motor que tem o rotor acoplado a uma mola espiral. Quando passa corrente nele, o rotor gira e torce a mola espiral, até que o equilíbrio entre os torques magnético e da mola seja estabelecido para um dado ângulo de deflexão/torção. Quanto maior a corrente no galvanômetro, maior a deflexão da agulha.

Se as pontas x e y do ohmímetro estão abertas, então $R \rightarrow \infty$ e $I_G = 0$. A agulha não deflete e indica então o "valor" ∞ no início da escala. Essa é uma diferença essencial entre um ohmímetro e um amperímetro ou um voltímetro. Em um amperímetro e em um voltímetro, quando a agulha está descansando, sem deflexão, ou seja, quando o aparelho não está conectado a nada, a agulha indica zero amperes ou zero volts. No ohmímetro, essa mesma posição indica resistência infinita.

Se as pontas x e y são curto-circuitadas (unidas por um fio de resistência desprezível), então:

$$I_G = \frac{\varepsilon}{R_S + R_G}$$

e o galvanômetro deve ir até o fim da escala, indicando o valor "zero" (no amperímetro ou no voltímetro essa posição seria o máximo da escala, no ohmímetro é o zero). A escala do ohmímetro vai do ∞ ao zero.

Se o galvanômetro for tal que necessite de uma corrente I_{MAX} passando nele para atingir a deflexão máxima, então, devemos ajustar (na mão) R_S tal que:

$$I_G = \frac{\varepsilon}{R_S + R_G} = I_{MAX} \Rightarrow R_S = \frac{\varepsilon}{I_{MAX}} - R_G$$

Geralmente esse ajuste tem que ser feito na mão sempre que vamos utilizar o ohmímetro (analógico), pois nunca sabemos de fato o valor de ε, que é fornecido por uma pilha ou bateria interna, que vai descarregando com o uso. Um instrumento digital zera automaticamente quando juntamos (curto-circuitamos) seus terminais.

Se conectarmos um resistor R aos terminais x e y e a agulha do galvanômetro parar no meio da escala, saberemos que a resistência desse resistor é (supondo um galvanômetro com resposta linear):

$$I_G = \frac{\varepsilon}{R + R_S + R_G} = \frac{I_{MAX}}{2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{R_S + R_G} \Rightarrow R = R_S + R_G$$

O enunciado desse problema confunde as coisas, como se o resistor R_S fosse ajustado conforme a resistência que deve ser indicada no meio da escala. O fato é que R_S é ajustado para zerar o ohmímetro, ou seja, para que a corrente no galvanômetro no caso $R = 0$ (pontas curto-circuitadas) seja exatamente I_{MAX}. Portanto:

$$R_S = \frac{\varepsilon}{I_{MAX}} - R_G$$

Olhando a resposta do livro vemos logo que se $R_G = 15\ \Omega$, $R_S = 218\ \Omega$ e $\varepsilon = 1{,}5$ V, segue que a corrente máxima não é 3,6 mA, conforme está dito no enunciado. Trata-se de um deslize infeliz. De fato, se $\varepsilon = 1{,}5$ V e $R_G = 15\ \Omega$, segue que se juntarmos as pontas do ohmímetro e ajustarmos $R_S \cong 401{,}7\ \Omega$, vamos obter $I_G = 3{,}6$ mA, ou seja, a agulha vai para o fundo da escala ($R = 0$). Depois disso, se ligarmos o voltímetro em um resistor desconhecido R e a agulha ficar exatamente no meio da escala, saberemos que $R = R_S + R_G \cong 416{,}7\ \Omega$. Isso porque com esse R a corrente no galvanômetro é $I_{MAX}/2 = 1{,}8$ mA. Resumindo: primeiramente juntamos as pontas do ohmímetro e vamos ajustando R_S até que o ponteiro marque zero. Isso ocorrerá quando:

$$R_S = \frac{\varepsilon}{I_{MAX}} - R_G$$

pois esse valor de R_S leva a I_{MAX} no galvanômetro. Depois ligamos um R desconhecido entre as pontas do ohmímetro e a agulha vai indicar um valor correspondente à corrente no galvanômetro dada por:

$$I_G = \frac{\varepsilon}{R + R_S + R_G} < I_{MAX}$$

Suponha que $I_G = k\, I_{MAX}$ com $0 \leq k \leq 1$. Então, R é tal que:

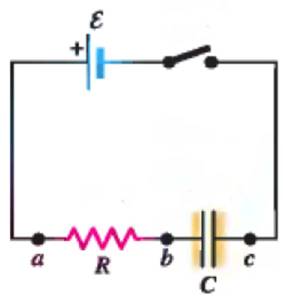
$$\frac{\varepsilon}{R + R_S + R_G} = k\ \frac{\varepsilon}{R_S + R_G} \Rightarrow R = \left(\frac{1}{k} - 1\right)(R_S + R_G)$$

Se o ponteiro ficar no meio da escala, $k = 1/2$, então:

$$R = R_S + R_G$$

Fato é que esse não é um bom esquema apara um ohmímetro, pois ele não permite que ajustemos também, de forma independente, a escala de resistências a serem medidas. Aqui a escala também está sendo definida pelo resistor R_S que zera a escala.

E/P26.38: Considere o circuito ao lado. A chave está inicialmente aberta e o capacitor está inicialmente descarregado.



Imaginando a chave fechada e percorrendo o circuito no sentido horário partindo do ponto c obtemos, da lei das malhas (note que a placa do capacitor conectada a b é a placa positiva):

$$V_c + \frac{q(t)}{C} + RI(t) - \varepsilon = V_c \Rightarrow \frac{q(t)}{C} + RI(t) - \varepsilon = 0$$

a) Exatamente no instante (t=0) em que a chave é fechada vale:

A carga ainda é nula $q(t = 0) = 0$ e a DDP ("queda de tensão") entre os terminais do capacitor é nula ($q/C = 0$). A corrente é máxima, como se o capacitor fosse um curto-circuito (como se "b" e "c" estivessem conectados entre si por uma resistência nula), ou seja, $I(t = 0) = \varepsilon/R$ e a DDP entre os terminais do resistor é $RI(t = 0) = \varepsilon$. Nesse instante a equação acima da lei das malhas fica:

$$\frac{q(t = 0)}{C} + RI(t = 0) - \varepsilon = 0 + \varepsilon - \varepsilon = 0$$

b) Após um longo tempo $t \to \infty$, vale:

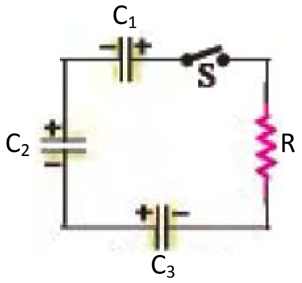
A carga é máxima $q(t \to \infty) = C\varepsilon$ e a DDP entre os terminais do capacitor é ε ($q/C = \varepsilon$). A corrente é nula, como se o capacitor fosse um circuito aberto, ou seja, $I(t \to \infty) = 0$ e a DDP entre os terminais do resistor é $RI(t \to \infty) = 0$. A equação acima da lei das malhas fica:

$$\frac{q(t \to \infty)}{C} + RI(t \to \infty) - \varepsilon = \varepsilon + 0 - \varepsilon = 0$$

No intervalo de tempo desde $t = 0$ até $t \to \infty$ o capacitor transita entre o comportamento de um curto-circuito ($I = \varepsilon/R$) até o comportamento de um circuito aberto ($I = 0$).

Em um circuito RC conectado em $t = 0$ com $q(0) = 0$ sempre podemos considerar: $C =$ curto-circuito para $t \to 0$ e $C =$ circuito aberto para $t \to \infty$.

E/P26.45:



Considere o circuito ao lado. Cada capacitor possui inicialmente a carga Q em sua placa positiva.

Tudo se passa como se fosse um circuito RC série em processo de descarga. O capacitor equivalente (série) possui capacitância:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

A lei das malhas dá a equação que governa o circuito:

$$\frac{q(t)}{C_{eq}} - RI(t) = 0$$

De fato, se percorrermos o circuito no sentido horário, que é o sentido da corrente de descarga dos capacitores, a lei das malhas leva à seguinte equação:

$$-R\,I(t) + \frac{q_3(t)}{C_3} + \frac{q_2(t)}{C_2} + \frac{q_1(t)}{C_1} = 0$$

Levando em conta que os capacitores estão em série e que $q_1(t) = q_2(t) = q_3(t) = q(t)$, segue a equação que envolve C_{eq}.

No processo de descarga vale $I(t) = -dq(t)/dt$. Portanto:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{q(t)}{R\,C_{eq}}$$

A carga inicial nesse capacitor equivalente é a carga na placa positiva de C_1, ou seja, $q(t=0) = Q$. A solução desse problema de valor inicial é:

$$q(t) = Q\,e^{-t/RC_{eq}}$$

A corrente no circuito decai, após t=0, de acordo com:

$$I(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{Q}{R\,C_{eq}} e^{-t/RC_{eq}} = \frac{Q}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) e^{-t/RC_{eq}}$$

A energia eletrostática armazenada no circuito é:

$$U_E(t) = \frac{[q(t)]^2}{2\,C_{eq}} = \frac{\left[Q\,e^{-t/RC_{eq}}\right]^2}{2\,C_{eq}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) Q^2\,e^{-2t/RC_{eq}}$$

Suponha que o circuito tenha perdido 80% de sua energia inicial. Então, nesse instante, $U_E(t)$ é 20% da energia inicial (em $t = 0$), ou seja:

$$U_E(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)Q^2\, e^{-2t/RC_{eq}} = 0{,}2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)Q^2$$

Portanto, o instante em que isso ocorre é dado por:

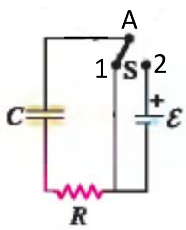
$$e^{-2t/RC_{eq}} = 0{,}2 \;\Rightarrow -\frac{2t}{RC_{eq}} = \ln(0{,}2) \Rightarrow -\frac{t}{RC_{eq}} = \frac{\ln(0{,}2)}{2} \Rightarrow t = -RC_{eq}\frac{\ln(0{,}2)}{2}$$

Note que $\ln(0{,}2)\,/2 \cong -0{,}805$, ou seja, $t \cong 0{,}805\; RC_{eq}$.

Nesse mesmo instante a corrente no circuito será:

$$I(t) = \frac{Q}{R\,C_{eq}}e^{-t/RC_{eq}} = \frac{Q}{R\,C_{eq}}\sqrt{e^{-2t/RC_{eq}}} = \frac{Q}{R\,C_{eq}}\sqrt{0{,}2} \cong 0{,}447\, I(t=0)$$

Note que $\sqrt{0{,}2} \cong 0{,}447$.



E/P26.48: Considere o circuito ao lado. O capacitor está inicialmente descarregado e a chave S está conectando os pontos A e 1. Por enquanto nada está acontecendo.

a) Em t=0 a chave passa a conectar os pontos A e 2 e o capacitor começa a carregar.

A corrente flui no sentido anti-horário e a carga no capacitor (na placa positiva) cresce no tempo de acordo com:

$$q(t) = C\,\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

que é a solução da equação diferencial (lei das malhas):

$$\frac{q(t)}{C} + R\frac{dq(t)}{dt} - \varepsilon = 0$$

com a condição inicial $q(0) = 0$.

Se esse processo de carga continuar por muito tempo, a carga no capacitor vai finalmente atingir, ou chegar tão próximo quanto se queira, do valor assintótico:

$$q(t \to \infty) = \lim_{t\to\infty} C\,\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right) = C\,\varepsilon$$

b) Supondo que a chave seja mantida nessa posição 2 somente até o instante $t = t_2$, a carga no capacitor atingirá nesse instante o valor máximo:

$$q_{MAX} = q(t = t_2) = C\,\varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right)$$

Se medirmos essa carga, simplesmente medindo a DDP no capacitor, podemos determinar o valor de R, pois:

$$C\,\varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right) = q_{MAX} \Rightarrow e^{-t_2/RC} = 1 - \frac{q_{MAX}}{C\,\varepsilon} \Rightarrow \frac{t_2}{RC} = -\ln\left(1 - \frac{q_{MAX}}{C\,\varepsilon}\right)$$

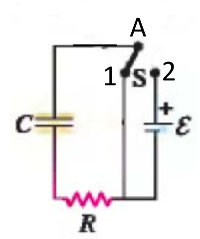
Note que vale $q_{MAX} < C\,\varepsilon$ pois $C\,\varepsilon$ seria o valor de q_{MAX} se esperássemos um tempo t_2 infinito. Com essa equação podemos determinar R se conhecermos a carga q_{MAX} que o capacitor acumula em um instante conhecido t_2.

c) Se quisermos que t_2 seja tal que q_{MAX} é 99% de $C\,\varepsilon$, devemos esperar com a chave na posição 2 o tempo:

$$q_{MAX} = C\,\varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right) = 0{,}99\,C\,\varepsilon \Rightarrow e^{-t_2/RC} = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Rightarrow \frac{t_2}{RC} = -\ln(0{,}01) \cong 4{,}61$$

ou seja, após o tempo $t_2 \cong 4{,}61\,RC$ a carga no capacitor terá atingido 99% de seu valor assintótico ($C\,\varepsilon$), que só seria atingido após um tempo matematicamente infinito. O tempo característico $\tau = RC$ depende dos valores de R e C.

E/P26.49:



Considere o circuito ao lado (o mesmo do exercício anterior). O capacitor está inicialmente descarregado e a chave está conectando os pontos A e 1. Nada está acontecendo ainda.

a) Em t=0 a chave passa a conectar os pontos A e 2 e o capacitor começa a carregar.

A corrente flui no sentido anti-horário e a carga no capacitor (na placa positiva) cresce no tempo de acordo com:

$$q(t) = C\,\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

que é a solução da equação diferencial (lei das malhas):

$$\frac{q(t)}{C} + R\frac{dq(t)}{dt} - \varepsilon = 0$$

com a condição inicial $q(0) = 0$.

A chave é mantida na posição 2 apenas por um tempo t_2, depois disso ela vai voltar para a posição 1.

Nesse instante a carga no capacitor atinge o valor:

$$q_{MAX} = q(t = t_2) = C\,\varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right)$$

b) A DDP entre os terminais do capacitor é:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Portanto, em $t = t_2$:

$$V_C(t = t_2) = \varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right) = \frac{q_{MAX}}{C}$$

Ainda haverá corrente no circuito nesse instante, pois o capacitor ainda não atingiu sua capacidade máxima de carga, que seria $C\ \varepsilon$. A corrente no circuito é:

$$I(t) = \frac{d}{dt}q(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

Portanto, em $t = t_2$ a corrente será mínima, dada por:

$$I(t = t_2) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t_2/RC} = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \frac{q_{MAX}}{C\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q_{MAX}}{R\ C} = I_{MIN}$$

De fato, da lei das malhas com $t = t_2$:

$$\frac{q(t = t_2)}{C} + RI(t = t_2) - \varepsilon = 0 \Rightarrow I(t = t_2) = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q_{MAX}}{R\ C}$$

A DDP entre os terminais do resistor nesse instante será (da lei de Ohm):

$$V_R(t = t_2) = R\ I(t = t_2) = \varepsilon\ e^{-t_2/RC} = \varepsilon\left(1 - \frac{q_{MAX}}{C\varepsilon}\right) = R\ I_{MIN}$$

c) Agora a chave volta para a posição 1, a corrente flui no sentido horário e o capacitor começa a descarregar. Chamaremos esse instante de t=0.

No processo de descarga, a carga no capacitor (na placa positiva) decai de acordo com:

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC}$$

Nesse caso, q_0 é a carga que já estava no capacitor no instante em que viramos a chave, ou seja, considerando os resultados que obtivemos nos itens anteriores:

$$q_0 = q_{MAX} = C\ \varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right)$$

Portanto:

$$q(t) = q_{MAX}\ e^{-t/RC} = C\ \varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right)e^{-t/RC}$$

A corrente no circuito será:

$$I(t) = -\frac{d}{dt}q(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t_2/RC}\right)e^{-t/RC} = \left(\frac{\varepsilon}{R} - I_{MIN}\right)e^{-t/RC} = \frac{q_{MAX}}{RC}\ e^{-t/RC}$$

Note que no processo de carga vale $I(t) = +\frac{d}{dt}q(t)$, pois q está aumentando no tempo e no processo de descarga vale $I(t) = -\frac{d}{dt}q(t)$, pois q está diminuindo no tempo. Note também que no início do processo de descarga (t=0) a corrente vale:

$$I(t = 0) = \frac{\varepsilon}{R} - I_{MIN} = \frac{q_{MAX}}{RC}$$

Esse valor é diferente de I_{MIN}, a corrente que havia quando a chave ainda estava em “2”, ou seja, ao virarmos a chave de “2” para “1” a corrente subitamente muda de valor e inverte de sentido.

A DDP no capacitor em t=0 será:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right)e^{-t/RC} \Rightarrow V_C(0) = \varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right) = \frac{q_{MAX}}{C}$$

que é a mesma DDP que havia no instante final do processo de carga. O capacitor não teve tempo ainda de descarregar.

A DDP no resistor em t=0 será:

$$V_R(0) = R\,I(0) = \varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right) = \frac{q_{MAX}}{C} = \varepsilon - R\,I_{MIN}$$

Essa DDP é diferente da que havia no instante final do processo de carga, pois a corrente no início do processo de descarga é diferente da corrente no final do processo de carga. Note que ela tem a polaridade invertida, em relação ao processo de carga, porque a corrente inverteu de sentido. Note que $V_R(t) = V_C(t)$ porque eles estão em paralelo (ou em série, dependendo do ponto de vista: valem $V_R = V_C$ e $I_R = I_C$).

Note a validade da lei das malhas em $t = 0$ (percorrendo o circuito no sentido horário, ou seja, no sentido oposto ao da corrente):

$$-V_R(0) + V_C(0) = -\frac{q_{MAX}}{C} + \frac{q_{MAX}}{C} = 0$$

d) Suponha agora que a chave seja mantida na posição 1 por um tempo t_2, o mesmo tempo em que ela foi mantida na posição 2.

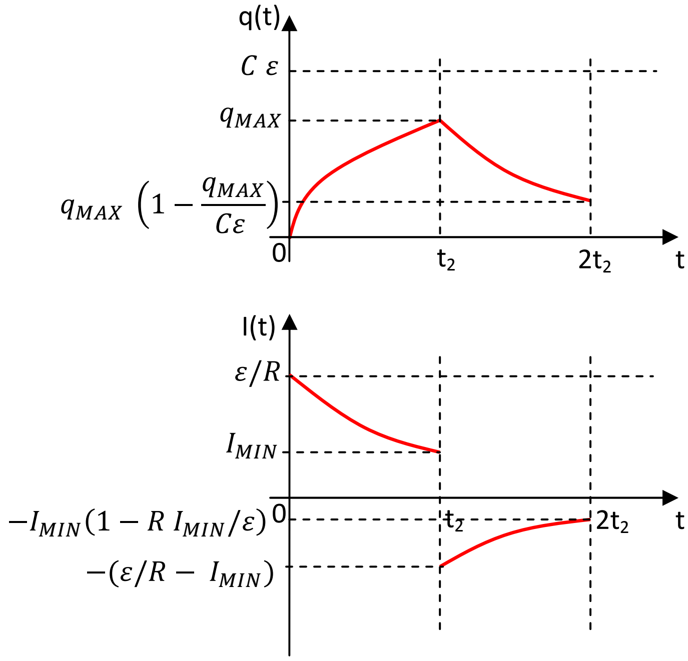
A carga no capacitor será:

$$q(t_2) = C\,\varepsilon\left(1 - e^{-t_2/RC}\right)e^{-t_2/RC} = q_{MAX}e^{-t_2/RC} = q_{MAX}\left(1 - \frac{q_{MAX}}{C\varepsilon}\right)$$

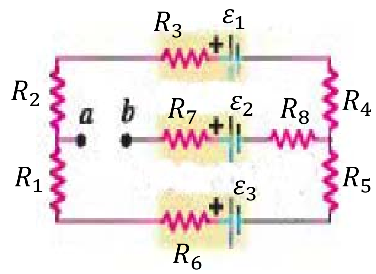
É interessante notar que o capacitor foi carregado por um tempo t_2 e foi em seguida descarregado pelo mesmo tempo t_2. Durante o processo de carga ele partiu da carga nula e atingiu uma carga q_{MAX} e durante a descarga ele não descarregou totalmente, pois da equação acima vemos que $q(t_2) \neq 0$. Nesse instante a corrente no circuito será:

$$I(t_2) = \left(\frac{\varepsilon}{R} - I_{MIN}\right)e^{-t_2/RC} = I_{MIN}\left(1 - \frac{I_{MIN}}{\varepsilon/R}\right)$$

As Figuras ao lado ilustram os comportamentos da carga no capacitor e da corrente no circuito (no sentido anti-horário) em função do tempo em todo o processo de carga e descarga. Olhando para o gráfico da corrente entendemos a assimetria entre os processos de carga e descarga: no primeiro intervalo de tempo t_2 a carga vai de 0 a q_{MAX} e no segundo intervalo de tempo t_2 a carga não vai de q_{MAX} a 0. Vemos que a corrente é mais intensa durante o processo de carga (porque as placas do capacitor estão "vazias" no início do processo de carga) e por isso esse processo é mais rápido que o de descarga. Durante o mesmo intervalo de tempo, o capacitor ganha mais carga no processo de carga do que a carga que ele perde no processo de descarga.



E/P26.65: Considere o circuito ao lado, aberto em "ab".



a) A DDP entre a e b é?

Vemos que não há corrente no ramo central, pois ele está aberto. A corrente I na malha mais externa (suposta no sentido horário) será obtida da lei das malhas (percorrendo no sentido horário, partindo de a):

$$V_a - R_2 I - R_3 I - \varepsilon_1 - R_4 I - R_5 I + \varepsilon_3 - R_6 I - R_1 I = V_a$$

Portanto:

$$I = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6}$$

Todos os resistores estão em série e há duas baterias em série com polaridades opostas. Se $\varepsilon_3 - \varepsilon_1 > 0$, a corrente estará mesmo no sentido horário. Caso contrário, estará no sentido anti-horário.

Percorrendo agora o circuito de cima, partindo de a até chegar em b, obtemos:

$$V_a - R_2 I - R_3 I - \varepsilon_1 - R_4 I + \varepsilon_2 = V_b$$

Portanto:

$$V_a - V_b = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I(R_2 + R_3 + R_4) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6}$$

Note que se as baterias tivessem FEMs iguais não haveria corrente no circuito e nem DDP entre a e b.

b) Supondo agora que curto-circuitemos os pontos a e b, qual a corrente na bateria de FEM ε_1?

Agora teremos três correntes: I_1 no ramo de cima, para a direita (por hipótese), I_2 no ramo central, para a direita (por hipótese) e I_3 no ramo inferior, para a direita (por hipótese).

Da lei das malhas no nó "a" sabemos que:

$$\sum_{CHEGAM} I = \sum_{SAEM} I \Rightarrow 0 = I_1 + I_2 + I_3$$

Pelo menos uma das correntes terá que ser negativa, ou seja, ter o sentido para a esquerda.

Percorrendo a malha de cima no sentido horário obtemos (partindo de a):

$$V_a - R_2 I_1 - R_3 I_1 - \varepsilon_1 - R_4 I_1 + R_8 I_2 + \varepsilon_2 + R_7 I_2 = V_a$$

Portanto:

$$I_2(R_7 + R_8) - I_1(R_2 + R_3 + R_4) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

Percorrendo a malha de baixo no sentido horário obtemos (partindo de a):

$$V_a - R_7 I_2 - \varepsilon_2 - R_8 I_2 + R_5 I_3 + \varepsilon_3 + R_6 I_3 + R_1 I_3 = V_a$$

Portanto:

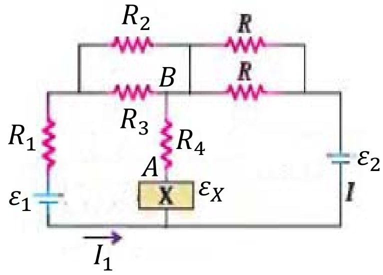
$$I_3(R_1 + R_5 + R_6) - I_2(R_7 + R_8) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

Queremos calcular I_1. Eliminamos então I_2 e I_3:

$$0 = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow 0 = I_1 + \left[1 + \frac{R_7 + R_8}{R_1 + R_5 + R_6}\right]\left[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_7 + R_8} + \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_7 + R_8} I_1\right] + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{R_1 + R_5 + R_6}$$

Preferimos deixar como está, para não gerar uma equação muito grande, mas está claro que a equação acima determina o valor de I_1 em termos das FEMs e das resistências.

E/P26.69:



Considere o circuito ao lado. A corrente I_1 é conhecida. A DDP em R_4 é dada: $V_A - V_B = V_4 > 0$. O dispositivo X é uma bateria de FEM ε_X e polaridade desconhecida. Vamos assumir que o polo positivo dessa bateria é o ponto A. Se calcularmos ε_X e der positivo, significa que essa é mesmo a polaridade dessa bateria. Se calcularmos ε_X e der negativo, significa que o ponto A é o pólo negativo dessa bateria.

a) Calcule ε_X (com a polaridade, ou seja, com o sinal, conforme já discutimos).

Note que podemos simplificar o circuito associando R_2 em paralelo com R_3 dando:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

e associando os dois resistores R em paralelo dando um resistor de resistência R/2. Assim o circuito fica com apenas duas malhas. O ponto B é o nó onde se conectam R_{23}, R_4 e esse R/2.

Percorrendo a malha da esquerda no sentido horário, partindo de B, obtemos da lei das malhas:

$$V_B + V_4 - \varepsilon_X + \varepsilon_1 + R_1 I_1 + R_{23} I_1 = V_B$$

Portanto:

$$\varepsilon_X = \varepsilon_1 + (R_1 + R_{23}) I_1 + V_4$$

Vemos que ε_X é positivo e, portanto, o ponto A é mesmo o pólo positivo dessa bateria. Com os dados numéricos obtemos $\varepsilon_X = 186\ V$.

b) Determine a corrente I. Vamos assumir que I esteja subindo na bateria ε_2. O sinal de I vai dizer se essa hipótese está correta ou não.

Note que no resistor R_4 sobe (porque $V_A - V_B > 0$) uma corrente de magnitude conhecida dada por:

$$I_4 = \frac{V_4}{R_4}$$

Aplicando a lei dos nós ao pólo negativo da bateria ε_X obtemos:

$$\sum_{CHEGAM} I = \sum_{SAEM} I \Rightarrow I_1 = I_4 + I$$

Portanto:

$$I = I_1 - \frac{V_4}{R_4}$$

Somente com os dados numéricos podemos saber se essa corrente é positiva ou negativa. Obtemos $I = 3\ A$.

c) Determine o valor de R. Percorrendo a malha da direita no sentido horário, partindo de B, obtemos da lei das malhas:

$$V_B + \frac{R}{2} I - \varepsilon_2 + \varepsilon_X - V_4 = V_B$$

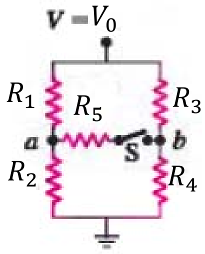
Portanto:

$$\frac{R}{2} I - \varepsilon_2 + [\varepsilon_1 + (R_1 + R_{23}) I_1 + V_4] - V_4 = 0$$

Concluindo:

$$R = \frac{2}{I}[\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - (R_1 + R_{23})I_1] = \frac{2[\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - (R_1 + R_{23})I_1]}{I_1 - \frac{V_4}{R_4}} = 20\ \Omega$$

E/P26.73: Considere o circuito ao lado.



a) A chave S está aberta. Não passa corrente pelo ramo central que contém a chave S. Calcule $V_a - V_b$.

Não passa corrente no ramo central (é como se ele não existisse) e R_1 está em série com R_2, enquanto que R_3 está em série com R_4. A corrente que desce no ramo da esquerda é:

$$I_1 = I_2 = \frac{V_0}{R_1 + R_2}$$

A corrente que desce no ramo da direita é:

$$I_3 = I_4 = \frac{V_0}{R_3 + R_4}$$

Portanto, partindo do pólo + da bateria (onde $V = V_0$) pelo ramo da esquerda obtemos:

$$V_0 - R_1 I_1 = V_a$$

Partindo do pólo + da bateria pelo ramo de direita obtemos:

$$V_0 - R_3 I_3 = V_b$$

Subtraindo uma equação da outra obtemos:

$$V_a - V_b = R_3 I_3 - R_1 I_1 = \left[\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right] V_0 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} V_0$$

Se valer a igualdade $R_2 R_3 = R_1 R_4$ ("produto cruzado") então $V_a - V_b = 0$.

b) A chave S é fechada. Qual a corrente na chave?

Alguém mais apressado poderia querer aplicar a lei de Ohm a R_5 com o $V_a - V_b$ obtido anteriormente e dizer que:

$$I_5 = \frac{V_a - V_b}{R_5} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_5 (R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} V_0$$

Mas, infelizmente não é tão simples assim. Esse raciocínio está correto apenas na primeira igualdade, mas está errado na segunda, quando assume que o fechamento da chave S não vai modificar as correntes e DDPs no circuito. Temos que recalcular $V_a - V_b$. De fato, agora as correntes serão diferentes em cada resistor. São 5 incógnitas. Vamos supor as correntes descendo nos ramos laterais, como anteriormente, e a corrente indo para a direita no ramo central em R_5.

Descendo pelo ramo esquerdo obtemos:

$$V_0 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0$$

Descendo pelo ramo direito obtemos:

$$V_0 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

Percorrendo a malha de cima, no sentido horário obtemos:

$$V_0 - R_3 I_3 + R_5 I_5 + R_1 I_1 = V_0$$

Percorrendo a malha de baixo, no sentido horário obtemos:

$$V_b - R_4 I_4 + R_2 I_2 - R_5 I_5 = V_b$$

Essa não é uma equação independente. Ela pode ser obtida das 3 equações anteriores.

Da lei dos nós em "a" obtemos:

$$\sum_{CHEGAM} I = \sum_{SAEM} I \Rightarrow I_1 = I_2 + I_5$$

Da lei dos nós em "b" obtemos:

$$\sum_{CHEGAM} I = \sum_{SAEM} I \Rightarrow I_3 + I_5 = I_4$$

Queremos determinar I_5. Utilizando o programa Maple de computação algébrica, para poupar esforço, obtemos:

$$I_5 = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_4 R_5 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4} V_0$$

Se valer a igualdade $R_2 R_3 = R_1 R_4$ ("produto cruzado") então não passa corrente no ramo central e $V_a - V_b = 0$. É como se a chave S estivesse aberta, mas ela está fechada.

c) Com a chave S fechada, qual a resistência equivalente do circuito?

A corrente total no circuito é (que entra pelo ponto onde $V = V_0$ ou sai pelo ponto onde $V = 0$):

$$I = I_1 + I_3 = I_2 + I_4 = \frac{V_0}{R_{eq}}$$

Com a ajuda do Maple obtemos:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_4 R_5 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_3 R_5 + R_4 R_5 + R_3 R_4 + R_1 R_2 + R_1 R_5 + R_1 R_4 + R_2 R_5}$$

Note que esse circuito não é composto de associações série e paralelo e, portanto, sua resistência equivalente não é de determinação simples.

Apenas para conferir se não cometemos nenhum erro de digitação (porque o Maple não erra), note que se fizermos $R_1 \to \infty$, o que equivale a abrir o circuito nesse resistor, restam apenas R_3 em série com a associação de R_4 em paralelo com a associação série de R_2 e R_5. Obtemos, nesse limite (mantendo no numerador e no denominador apenas os termos que contém R_1):

$$\lim_{R_1 \to \infty} R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3 + R_1R_3R_5 + R_1R_2R_4 + R_1R_4R_5 + R_1R_3R_4}{R_1R_2 + R_1R_5 + R_1R_4} = R_3 + \frac{R_4(R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

que é o resultado esperado.

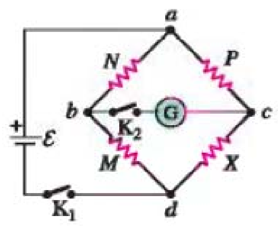
Analogamente, se fizermos $R_5 \to \infty$, isso equivale a abrir a chave S e ficamos novamente com R_1 em série com R_2, R_3 em série com R_4 e o paralelo dessas duas associações. O nosso resultado para R_{eq} fica (mantendo no numerador e no denominador apenas os termos que contém R_5):

$$\lim_{R_5 \to \infty} R_{eq} = \frac{R_1R_3R_5 + R_2R_3R_5 + R_1R_4R_5 + R_2R_4R_5}{R_3R_5 + R_4R_5 + R_1R_5 + R_2R_5} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + 4}$$

que é o resultado esperado.

E/P26.79:

Considere o circuito ao lado, a ponte de Wheatstone.



Esse circuito é usado para se medir, ou construir resistências elétricas com grande precisão. Supondo as chaves K1 e K2 fechadas, vai fluir uma corrente pelo galvanômetro central. Variando a resistência X, essa corrente vai mudando. Ela se anula quando X é tal que:

$$XN = PM$$

Os produtos das resistências cruzadas são iguais.

Note que esse circuito é exatamente o que consideramos no exercício anterior, fazendo $V_0 = \varepsilon$, $R_1 = N$, $R_2 = M$, $R_3 = P$, $R_4 = X$ e $R_5 = 0$, pois a resistência do galvanômetro é desprezível. Temos também que trocar os pontos a e b do ramo central pelos pontos b e c.

a) Esse item corresponde ao item (a) do exercício anterior. Se a corrente central é nula:

$$V_b - V_c = \left[\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right] V_0 = \left[\frac{P}{P + X} - \frac{N}{N + M}\right] \varepsilon$$

Mas note que aqui $V_b = V_c$ pois o galvanômetro curto-circuita esses pontos. Portanto:

$$\frac{P}{P+X}-\frac{N}{N+M}=0 \Rightarrow P(N+M)=N(P+X) \Rightarrow PM=NX$$

Equivalentemente, podemos calcular a corrente no galvanômetro, que é a corrente em R_5 no exercício anterior com $R_5=0$. Obtemos:

$$I_{galv}=I_5=\frac{R_1R_4-R_2R_3}{R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4}V_0=\frac{NX-MP}{NMP+NMX+NPX+MPX}\varepsilon$$

Notamos então que $I_{galv}=0$ somente se $NX-MP=0$.

A ideia de se usar esse equipamento para medir resistências com grande precisão (precisão maior que a de um ohmímetro) está na equação:

$$NX-MP=0 \Rightarrow X=\frac{M\,P}{N}$$

O procedimento é simples. Conectamos o resistor X à ponte e observamos o ponteiro do galvanômetro, que vai estar indicando alguma corrente no ramo central da ponte. Daí vamos variando as resistências N, M e P, que podem ser variadas girando alguns botões, enquanto ficamos de olho no ponteiro do galvanômetro. Quando o ponteiro indicar corrente nula paramos de mexer nos botões e a ponte vai indicar o valor de X a partir dos valores que ela já conhece internamente para M, N e P e assumindo a validade da equação acima.

E/P26.85: Considere um capacitor em um circuito RC descarregando. A carga elétrica na placa positiva do capacitor é dada por:

$$q(t)=Q_0e^{-t/RC}$$

Matematicamente o capacitor demora um tempo infinito para descarregar, pois:

$$\lim_{t\to\infty} q(t)=0$$

Na prática, quando a carga atingir, por exemplo, o valor $q_{FINAL}=10^{-100}$ C, não há aparelho que meça o efeito dessa carga e, portanto, podemos dizer que o capacitor está descarregado. Vamos fixar esse q_{FINAL} como sendo a carga de um próton, $e \cong 1{,}6\times 10^{-19}$ C. O tempo que o capacitor leva para atingir esse valor de carga é:

$$q(t)=Q_0e^{-t/RC}=e\ \Rightarrow e^{-t/RC}=\frac{e}{Q_0}\Rightarrow -\frac{t}{RC}=\ln\left(\frac{e}{Q_0}\right)\Rightarrow \frac{t}{RC}=\ln\left(\frac{Q_0}{e}\right)$$

O tempo gasto é:

$$t=RC\ \ln\left(\frac{Q_0}{e}\right)$$

Sendo $\tau=RC$ um tempo característico do processo de carga/descarga do circuito RC, vemos que:

$$t = \tau \ \ln\left(\frac{Q_0}{e}\right)$$

Ou seja, o capacitor sempre gasta a mesma quantidade de τs para descarregar, partindo de Q_0 e chegando em e. A quantidade de τs que ele gasta é:

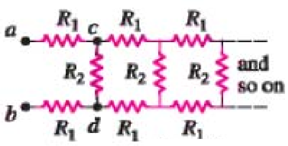
$$\ln\left(\frac{Q_0}{e}\right)$$

Como um valor típico de Q_0 é $Q_0 = 1\mu C = 10^{-6}C$, segue que, um valor típico para a quantidade acima seria:

$$\ln\left(\frac{Q_0}{e}\right) \cong \ln\left(\frac{10^{-6}}{10^{-19}}\right) = \ln(10^{13}) \cong 30$$

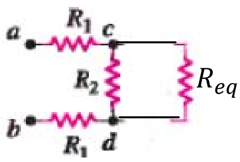
O capacitor demora cerca de 30 τs para descarregar (quaisquer que sejam os valores de R e C). É claro que quanto mais lento o circuito, maior τ, mais tempo ele vai demorar para descarregar. Mas, todos os circuitos demoram cerca de 30 vezes esse tempo característico τ.

E/P26.91:



Considere uma rede infinita de resistores R_1 e R_2, como na Figura ao lado.

Calcule a resistência equivalente (entre a e b) dessa cadeia infinita de resistores.



A dica no enunciado já resolve o exercício. Seja R_{eq} essa resistência equivalente. O fato é que entre c e d começa tudo de novo, a mesma cadeia infinita de resistores ($\infty - 3 = \infty$). Portanto, podemos simplificar o circuito conforme a Figura ao lado. A R_{eq} dos resistores além dos pontos c e d é a mesma R_{eq} da associação total que começa em a e b, pois $\infty - 3 = \infty$.

Vemos que R_{eq} está em paralelo com R_2 e essa associação está em série com dois resistores R_1. Portanto:

$$R_{eq} = 2\ R_1 + \frac{R_{eq}R_2}{R_{eq} + R_2}$$

Resolvendo para R_{eq} obtemos:

$$R_{eq} = R_1 + \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2}$$

Note que no caso particular $R_2 = 0$ deve valer $R_{eq} = 2\ R_1$. Isso porque o primeiro R_2 já curto-circuita o restante do circuito que se estende depois dos nós c e d e a corrente fica restrita ao ramo $acdb$ de resistência equivalente $2\ R_1 + R_2 = 2R_1$.

Se, por outro lado, valesse $R_1 = 0$, teríamos infinitos resistores R_2 em paralelo e a resistência equivalente seria:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \cdots = \frac{\infty}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = 0$$

Apesar de parecer apenas uma abstração, esse raciocínio pode muito bem se usado para se estimar a resistência (por unidade de comprimento) de um cabo paralelo longo, se conhecermos a resistência dos fios metálicos e do isolante que separa esses dois fios (resistências por unidade de comprimento).