

**E/P27.1:** Uma partícula de carga  $-q$  negativa está se movendo, em um dado instante, com a velocidade:

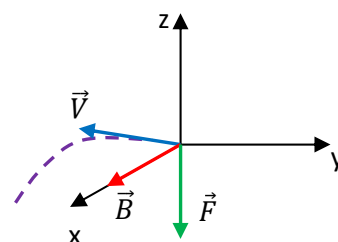
$$\vec{V} = V_x \hat{x} - V_y \hat{y}$$

sendo  $V_x > 0$  e  $V_y > 0$ .

a) Se nesse instante o campo magnético na posição em que a partícula está for  $\vec{B} = B_x \hat{x}$  (com  $B_x > 0$ ), a força magnética na partícula será:

$$\vec{F} = -q \vec{V} \times \vec{B} = -q(V_x \hat{x} - V_y \hat{y}) \times B_x \hat{x} = -qB_x(V_x \hat{x} \times \hat{x} - V_y \hat{y} \times \hat{x}) = -qB_x(\vec{0} - V_y(-\hat{z}))$$

Concluindo:  $\vec{F} = -qB_xV_y \hat{z}$  (sendo  $q$ ,  $B_x$  e  $V_y$  positivos). A Figura ao lado ilustra esses vetores (note que  $\vec{V}$  tem componente  $y$  negativa). Note que  $\vec{F}$  tem o sentido oposto a  $\vec{V} \times \vec{B}$ , porque a carga da partícula é negativa. Note também que  $\vec{F}$  é sempre ortogonal ao plano de  $\vec{V}$  e  $\vec{B}$ , que é o plano  $xy$  nesse caso. Nesse instante a partícula seria puxada na direção do eixo  $-z$  e percorreria uma trajetória parecida com a curva tracejada.



b) Se nesse instante o campo magnético na posição em que a partícula está for  $\vec{B} = B_z \hat{z}$  (com  $B_z > 0$ ), a força na partícula será:

$$\vec{F} = -q \vec{V} \times \vec{B} = -q(V_x \hat{x} - V_y \hat{y}) \times B_z \hat{z} = -qB_z(V_x \hat{x} \times \hat{z} - V_y \hat{y} \times \hat{z}) = -qB_z(V_x(-\hat{y}) - V_y(\hat{x}))$$

Concluindo:  $\vec{F} = qB_z(V_y \hat{x} + V_x \hat{y})$  (sendo  $q$ ,  $B_z$ ,  $V_x$  e  $V_y$  positivos).

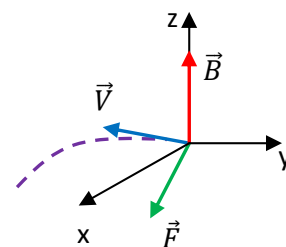
A Figura ao lado ilustra esses vetores. Note que  $\vec{F}$  é sempre ortogonal ao plano de  $\vec{V}$  e  $\vec{B}$ .  $\vec{F}$  está no plano  $xy$ , assim como  $\vec{V}$ , em uma direção ortogonal a  $\vec{V}$ .

De fato, fazendo o produto escalar:

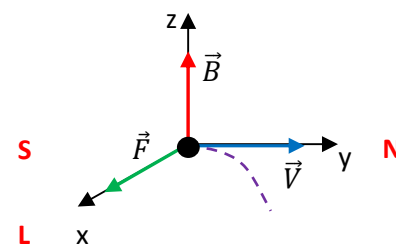
$$\vec{F} \cdot \vec{V} = qB_z(V_y \hat{x} + V_x \hat{y}) \cdot (V_x \hat{x} - V_y \hat{y}) = qB_z(V_y V_x - V_x V_y) = 0$$

Isso mostra que esses dois vetores são ortogonais entre si.

Nesse instante a partícula seria puxada na direção da seta verde e percorreria uma trajetória parecida com a curva tracejada.



**E/P27.3:** Em uma região do espaço existe um campo magnético uniforme vertical com sentido de baixo para cima:  $\vec{B} = B \hat{z}$ , conforme nosso referencial. Uma partícula de carga  $q$  que viajava para o norte (N) é desviada



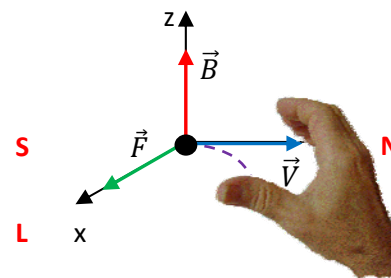
para o leste (L). A Figura ao lado ilustra essa ideia. A seta verde é a seta da força magnética  $\vec{F}^{(MAG)}$  que deve atuar em  $q$  para desviá-la para o leste (trajetória tracejada).

Sabemos que  $\vec{F}^{(MAG)} = q \vec{V} \times \vec{B}$  com  $\vec{B} = B \hat{z}$  e  $\vec{V} = V \hat{y}$  (no nosso referencial). Portanto:

$$\vec{F}^{(MAG)} = q \vec{V} \times \vec{B} = q V \hat{y} \times B \hat{z} = q V B \hat{y} \times \hat{z} = q V B \hat{x}$$

Concluindo, como  $\vec{F}^{(MAG)}$  na Figura deve estar mesmo ao longo de  $+x$ , segue que  $q > 0$ . Se  $q$  fosse negativa (um elétron, por exemplo), então o vetor  $\vec{F}^{(MAG)} = q V B \hat{x}$  estaria ao longo de  $-x$  e a partícula desviaria para o oeste (O).

A Figura ao lado mostra que a regra da mão direita para o produto vetorial  $\vec{V} \times \vec{B}$  confirma esse resultado: fazendo um movimento de giro com os dedos da mão direita do vetor  $\vec{V}$  para o vetor  $\vec{B}$ , pelo menor ângulo ( $90^\circ$ ) entre eles, o polegar dessa mão aponta na direção de  $\vec{V} \times \vec{B}$ .



Portanto,  $q$  deve ser positiva para que a força  $\vec{F}^{(MAG)} = q \vec{V} \times \vec{B}$  aponte

ao longo de  $\vec{V} \times \vec{B}$ . A força magnética sobre essa partícula nesse instante é  $\vec{F}^{(MAG)} = q V B \hat{x}$  com o sentido ao longo de  $+x$ , como na Figura. Isso faz com que sua trajetória se curve para o leste (L).

**E/P27.7:** Uma partícula de carga  $q$  positiva está se movendo, em um dado instante, com a velocidade:

$$\vec{V} = -V_y \hat{y}$$

com  $V_y > 0$ . A força magnética na partícula, nesse instante, é:  $\vec{F} = F_x \hat{x} - F_z \hat{z}$ , com  $F_x$  e  $F_z$  positivos.

a) O campo magnético no ponto do espaço ocupado por essa partícula é?

Seja  $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$ . Então:

$$\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B} = q(-V_y \hat{y}) \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) = -qV_y (B_x(\hat{y} \times \hat{x}) + B_y(\hat{y} \times \hat{y}) + B_z(\hat{y} \times \hat{z}))$$

Concluindo:

$$\vec{F} = -qV_y (B_x(-\hat{z}) + B_z \hat{x})$$

Portanto, igualado as duas expressões para  $\vec{F}$  obtemos:

$$-qV_y (B_x(-\hat{z}) + B_z \hat{x}) = F_x \hat{x} - F_z \hat{z}$$

Sabemos que dois vetores são iguais quando suas componentes são todas iguais, ou seja:

Em z:  $-qV_y B_x(-1) = -F_z$

Em y:  $0 = 0$

Em x:  $-qV_y B_z = F_x$

Da 1ª equação:

$$B_x = -\frac{F_z}{qV_y}$$

Da 2ª equação:  $B_y$  fica indeterminado, pois qualquer que seja  $B_y$ , vale  $0 = 0$ .

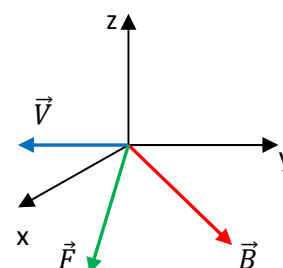
Da 3ª equação:

$$B_z = -\frac{F_x}{qV_y}$$

Concluindo:

$$\vec{B} = -\frac{F_z}{qV_y} \hat{x} + B_y \hat{y} - \frac{F_x}{qV_y} \hat{z}$$

com  $B_y$  um valor qualquer, que não pode ser determinado apenas com os dados do problema. Fato é que estando  $\vec{V}$  ao longo de  $y$ , a componente  $y$  de  $\vec{B}$  não contribui para a força  $\vec{F}$  na partícula. Portanto, a simples medição de  $\vec{F}$  não permite determinar o valor de  $B_y$ . Qualquer que seja o valor de  $B_y$ , a força na partícula será a mesma. Na Figura ao lado esboçamos esses vetores. A força  $\vec{F}$  está no plano  $xz$ .



b)  $B_y$  não causa força na partícula, porque a velocidade está ao longo de  $y$ .

Portanto, como  $B_y$  não tem efeito sobre  $\vec{F}$ , não pode ser determinado a partir do valor de  $\vec{F}$ . Para medir  $B_y$  precisaríamos fazer uma medida da força magnética em uma partícula que tivesse velocidade ao longo de  $x$  ou  $z$ .

c) Calculando o produto escalar:

$$\vec{B} \cdot \vec{F} = \left( -\frac{F_z}{qV_y} \hat{x} + B_y \hat{y} - \frac{F_x}{qV_y} \hat{z} \right) \cdot (F_x \hat{x} + 0 \hat{y} - F_z \hat{z}) = -\frac{F_z}{qV_y} F_x + 0 + \frac{F_x}{qV_y} F_z = 0$$

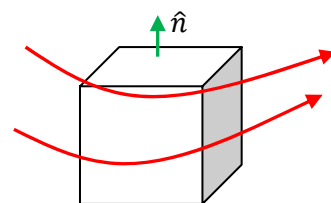
Sabendo que  $\vec{B} \cdot \vec{F} = B F \cos(\theta)$ , sendo  $\theta$  o (menor) ângulo entre os vetores  $\vec{B}$  e  $\vec{F}$ , segue que  $\cos(\theta) = 0$ , ou seja,  $\theta = 90^\circ$ . A força magnética sempre é ortogonal a  $\vec{V}$  e a  $\vec{B}$  (e, portanto, ao plano que contem  $\vec{V}$  e  $\vec{B}$ ). Apenas para conferir:

$$\vec{V} \cdot \vec{F} = (-V_y \hat{y}) \cdot (F_x \hat{x} + 0 \hat{y} - F_z \hat{z}) = -V_y \cdot 0 = 0$$

Enfim, estamos apenas verificando o que já era esperado, se  $\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B}$ , então segue das propriedades do produto vetorial que  $\vec{F}$  é ortogonal a  $\vec{V}$  ( $\vec{V} \cdot \vec{F} = 0$ ) e a  $\vec{B}$  ( $\vec{B} \cdot \vec{F} = 0$ ).

**E/P27.10:** O fluxo do campo magnético através de uma face específica de uma superfície cúbica  $S$  é  $\phi_1$ . O cubo tem 6 faces. O fluxo total do campo magnético nas outras 5 faces é?

A Figura ao lado ilustra essa situação (as linhas “de força” de  $\vec{B}$  estão em vermelho, elas vão fatalmente se estender até o infinito ou se fechar). Fato é que as linhas de força do campo  $\vec{B}$  são sempre fechadas (com exceção das linhas que nascem no infinito e terminam no infinito), ou seja, se uma linha de força entra na superfície  $S$ , contribuindo com um fluxo infinitesimal negativo (porque o vetor normal  $\hat{n}$  está para fora), ela vai ter que sair, contribuindo com um fluxo infinitesimal positivo. O saldo é sempre zero. Portanto, chamando de  $\phi_5$  o fluxo de  $\vec{B}$  nas outras 5 faces da superfície  $S$ , obtemos:

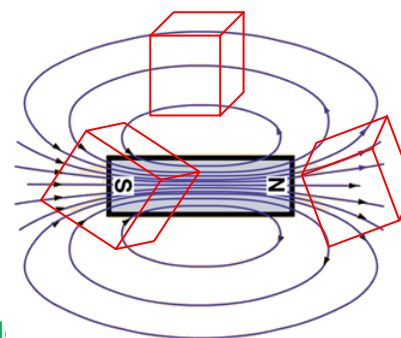


$$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_1 \vec{B} \cdot \hat{n} dA + \int_{\text{Outras 5}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \phi_1 + \phi_5 = 0 \Rightarrow \phi_5 = -\phi_1$$

Concluindo: as linhas de  $\vec{B}$  que entram (ou saem) da face 1, necessariamente saem (ou entram) pelas outras 5 faces do cubo. Essa é a ideia da lei de Gauss do magnetismo.

b) O resultado acima não depende do tamanho de  $S$ , da forma de  $S$  ou da posição/orientação de  $S$  no espaço (desde que  $S$  seja uma superfície fechada). Ele apenas diz que “o que entra sai” e que “o que sai entra”. Isso é consequência do simples fato de que as linhas de força do campo magnético  $\vec{B}$  são sempre fechadas (com exceção das linhas que nascem no infinito e terminam no infinito). Esse fato, por sua vez, é consequência de uma propriedade fundamental da natureza, a não existência de pólos magnéticos isolados (monopolos magnéticos **N** e **S**). Diferentemente do campo elétrico, que é produzido por cargas positivas e negativas, que podem existir isoladamente umas das outras (monopolos elétricos como o elétron (-) e o próton (+)), o campo magnético não é produzido por partículas que possuem polaridade N ou S. Não existe na natureza uma partícula que é um pólo norte, ou sul, magnético. Se essas partículas existissem, as linhas de força de  $\vec{B}$  nasceriam ou morreriam nelas e não seriam sempre fechadas ou infinitas de  $\pm\infty$  a  $\mp\infty$ . É o que ocorre com o campo elétrico, cujas linhas de força nascem nas cargas + e morrem nas cargas -. Campos magnéticos não são produzidos por partículas com polaridades N e S, mas sim por correntes elétricas. Daí decorrem todas as propriedades que mencionamos acima.

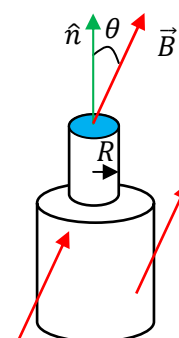
c) Suponha que  $\vec{B}$  seja o campo de um ímã, como ilustrado ao lado (linhas de  $\vec{B}$  em preto). Você pode colocar a superfície  $S$  (cúbicas, em linhas vermelhas) em qualquer lugar, com qualquer orientação. O resultado de (a) é válido sempre:  $\phi_5 = -\phi_1$  (o que entra sai e o que sai entra, ou seja,  $\phi = 0$ ). Na Figura do ímã ao lado (pegada



emprestada da internet) estão mostradas também as linhas de força de  $\vec{B}$  dentro do imã, que são basicamente axiais apontando do pólo S para o polo N. Elas devem ser levadas em conta, no caso da superfície mais à esquerda, para entendermos que o que entra (sai) sai (entra). Conforme nossa discussão anterior, o campo  $\vec{B}$  do imã não é produzido por acúmulos de partículas com polaridades magnéticas N e S em seus pólos. Não existem essas partículas. O campo  $\vec{B}$  do imã é produzido pelas correntes elétricas microscópicas que existem dentro da matéria que compõe o imã, especialmente os elétrons. Os elétrons circulando em torno dos núcleos atômicos e rodopiando em torno deles mesmos (spin) constituem correntes elétricas microscópicas que são as responsáveis pelo campo  $\vec{B}$  do imã. Esse campo existe dentro e fora do imã. A região onde as linhas de  $\vec{B}$  emergem de dentro do imã é chamada de pólo norte do imã e a região onde as linhas de  $\vec{B}$  mergulham para dentro do imã é chamada de pólo sul do imã. Esses são apenas nomes para essas regiões, adotados em analogia com os pólos magnéticos da Terra. É importante notar que as linhas de  $\vec{B}$  não nascem no pólo norte do imã, elas apenas passam e emergem do imã nessa região. O pólo norte do imã **não** é uma região de acúmulo de partículas com polaridade magnética do tipo N. Essas partículas não existem.

Campos magnéticos não são produzidos por acúmulos de partículas com polaridade N e/ou S. Campos magnéticos são produzidos por partículas que possuem polaridade elétrica + e/ou – e que fluem, que são as correntes elétricas.

**E/P27.13:** Uma garrafa de plástico está sobre uma mesa onde há um campo magnético  $\vec{B}$  inclinado de um ângulo  $\theta$  em relação à vertical, apontando para cima. A boca da garrafa é um disco de raio R. O fluxo do campo magnético através da superfície SP (aberta) de plástico da garrafa é?



A Figura ao lado ilustra a situação. Definimos uma superfície fechada SF que é a junção da superfície SP de plástico com um disco SD (em azul) que tampa a boca da garrafa. A normal à SD é vertical (pois SD é paralela à mesa, ou seja, horizontal) e, portanto, faz um ângulo  $\theta$  com  $\vec{B}$  (que é oblíquo). Sabemos que:

$$\phi = \oint_{SF} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{SP} \vec{B} \cdot \hat{n} dA + \int_{SD} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

Calculando:

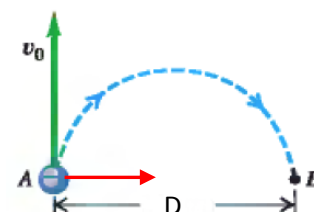
$$\int_{SD} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{SD} B \cos(\theta) dA = B \cos(\theta) \int_{SD} dA = B \cos(\theta) \pi R^2$$

Portanto:

$$\int_{SP} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -B \cos(\theta) \pi R^2$$

O fluxo do campo magnético que sai pela tampa tem que, necessariamente, ter entrado na garrafa pelas suas paredes de plástico (fundo e lateral). Essa é a ideia da lei de Gauss do magnetismo.

**E/P27.15:** Um elétron (de carga  $-e$ ) entra no ponto A com velocidade de módulo  $V_0$  e percorre um arco de círculo até passar por B.



a) O campo magnético (uniforme) nessa região é?

A força magnética no elétron é  $\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B}$ . Quando o elétron estiver em A a força vai ser:  $\vec{F}_A = -e \vec{v}_0 \times \vec{B}$ . Na Figura acima ilustramos (em vermelho) como deve ser a seta dessa força, para que o elétron comece a percorrer esse arco de círculo a partir de A. A força deve ser centrípeta. Suponha que  $\vec{F}_A$  esteja ao longo de x e que  $\vec{v}_0$  (em verde) esteja ao longo de y (note que z estará para fora do plano do papel). Então:

$$F_A \hat{x} = -e V_0 \hat{y} \times \vec{B}$$

Sabendo que  $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$  vemos logo que  $\vec{B} = B(-\hat{z})$ , ou seja,  $\vec{B}$  deve apontar para dentro do plano do papel. Usando a regra da mão direita para  $\vec{F}$  e lembrando que a carga elétrica do elétron é negativa você vai se convencer logo de que essa é mesmo a direção de  $\vec{B}$ . Portanto:

$$F_A \hat{x} = -e V_0 \hat{y} \times B(-\hat{z}) = e V_0 B \hat{x} \Rightarrow B = \frac{F_A}{e V_0}$$

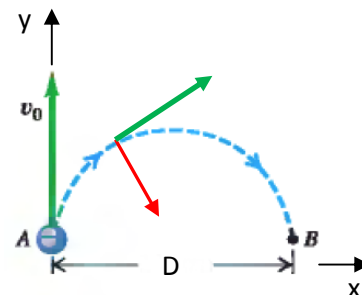
Podemos calcular o campo magnético de outra forma: seja  $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$ . Então:

$$F_A \hat{x} = -e \vec{v} \times \vec{B} = -e V_0 \hat{y} \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) = -e V_0 (B_x(-\hat{z}) + B_y \vec{0} + B_z \hat{x})$$

Concluindo, sabendo que dois vetores são iguais quando suas componentes correspondentes são todas iguais:

$$F_A \hat{x} = -e V_0 (B_x(-\hat{z}) + B_y \vec{0} + B_z \hat{x})$$

leva a:  $B_x = 0$ ,  $B_z = -\frac{F_A}{e V_0}$  e  $B_y$  pode ter qualquer valor. Mas note, olhando a figura ao lado, que ao longo do tempo a velocidade da partícula (tangente à curva azul) vai ganhar uma componente x. Portanto, se  $B_y$  fosse não nulo, nesses outros instantes a força na partícula ganharia uma componente z (pois



$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ ) e deixaria de ser centrípeta. O elétron seria arrastado para fora do plano  $xy$  e não percorreria o arco de círculo pressuposto. Portanto, concluímos que  $B_y = 0$ .  $\vec{B}$  deve estar ao longo de  $z$  para que a partícula descreva uma trajetória restrita no plano  $xy$ .

Continuando, a segunda lei de Newton aplicada ao movimento circular uniforme (a força magnética não modifica o módulo da velocidade da partícula, porque não realiza trabalho) diz que:

$$F_A = m \frac{V_0^2}{R} = m \frac{V_0^2}{D/2} = 2 m \frac{V_0^2}{D}$$

Portanto, a magnitude do campo magnético é:

$$B = \frac{F_A}{e V_0} = \frac{2 m V_0^2}{e V_0 D} = \frac{2 m V_0}{e D}$$

Note que o elétron vai percorrer o semicírculo de raio  $D/2$  com velocidade de módulo constante  $V_0$  (pois a força magnética não realiza trabalho). Portanto, o tempo que essa partícula leva para ir de A até B é:

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{V_0} = \frac{\pi D/2}{V_0} = \frac{\pi D}{2 V_0}$$

Em termos do campo magnético esse tempo fica:

$$\Delta t = \frac{\pi D}{2 V_0} = \pi \left[ \frac{D}{2 V_0} \right] = \pi \left[ \frac{m}{e B} \right] = \left( \frac{m}{e} \right) \frac{\pi}{B}$$

Podemos calcular esse tempo usando as propriedades do movimento circular. Sabemos que a força centrípeta é dada por:

$$F_A = 2 m \frac{V_0^2}{D} = m \omega^2 r$$

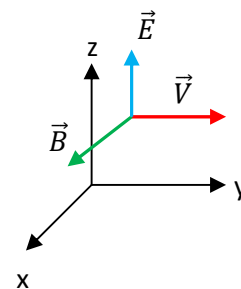
sendo  $r = D/2$  o raio da órbita circular e  $\omega = 2\pi/T$  a velocidade angular, com  $T$  o período do movimento (a duração de uma volta completa no círculo). Portanto:

$$\omega^2 = \frac{F_A}{m D/2} = \frac{2}{m D} \left[ 2 m \frac{V_0^2}{D} \right] = 4 \frac{V_0^2}{D^2}$$

Concluindo, o período do movimento circular é (o tempo  $\Delta t$  para ir de A até B é metade do período):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2 V_0/D} = \frac{\pi D}{V_0}$$

**E/P27.28:** Um feixe de elétrons entra em uma região onde existem um campo magnético  $\vec{B}$  e um campo elétrico  $\vec{E}$  ortogonais entre si e ambos ortogonais ao feixe (ou seja, à velocidade  $\vec{V}$  dos elétrons). O feixe passa por essa região sem nenhum efeito. A Figura acima ilustra (uma possibilidade para) essas grandezas. Devemos lembrar que a carga do elétron é negativa:  $q = -e$ . Estamos assumindo que:  $\vec{V} = V \hat{y}$ ,  $\vec{B} = B \hat{x}$  e  $\vec{E} = E \hat{z}$ .



Então: as forças no elétron são:

$$\vec{F}_E = -e \vec{E} = -e E \hat{z}$$

$$\vec{F}_M = -e \vec{V} \times \vec{B} = -e VB(\hat{y} \times \hat{x}) = e VB \hat{z}$$

Note que obtivemos duas forças opostas ao longo de z, que, por hipótese, não se cancelam. Então:

$$e E = e VB \Rightarrow V = \frac{E}{B}$$

Esse “aparelho” funciona como um “filtro” de velocidade. Se colocarmos um anteparo com um buraco pequeno na frente do feixe, somente as partículas do feixe com velocidade  $V=E/B$  vão conseguir passar pelo buraco, as outras vão ser desviadas e bater no anteparo. Vamos obter um feixe saindo do buraco com todas as partículas com a mesma velocidade.

b) Se o campo elétrico for desligado, os elétrons vão sofrer apenas a força inicial magnética:

$$\vec{F}_M = e VB \hat{z}$$

e vão ser desviados paralelamente ao eixo z. Depois a força vai mudando de direção (mas o módulo é constante), sempre se mantendo ortogonal à velocidade. A velocidade (e a força) se mantém com módulo constante, porque a força magnética não realiza trabalho (não muda a energia cinética). A partícula vai descrever um movimento circular uniforme de raio R. Da segunda lei de Newton aplicada ao movimento circular obtemos para o raio R da órbita:

$$F_M = m \frac{V^2}{R} \Rightarrow e VB = m \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m V}{e B}$$

c) O período orbital será?

Sabemos que para uma órbita circular de comprimento  $2 \pi R$  sendo percorrida em MCU vale:

$$V = \frac{2 \pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \pi R}{V} = \frac{2 \pi}{V} \left( \frac{m V}{e B} \right) = \frac{2 \pi m}{e B}$$



**E/P27.33:** Suponha que o campo magnético da Terra seja horizontal  $\vec{B}_T = B_T \hat{x}$  (isso acontece nas regiões próximas da linha do equador). Um fio reto de comprimento  $L$  e massa  $M$ , que transporta uma corrente  $I$ , está imerso nesse campo. Queremos que a força magnética no fio, devido ao campo da Terra, equilibre o peso do fio e ele fique flutuando no espaço. Qual o valor da corrente e a direção do fio?

A força magnética em um fio reto em um campo magnético uniforme será dada por:

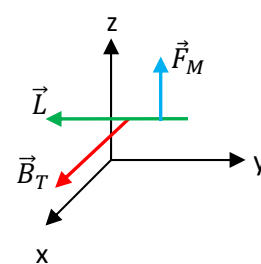
$$\vec{F}_M = I \vec{L} \times \vec{B} = I \vec{L} \times B_T \hat{x}$$

sendo  $\vec{L}$  um vetor orientado ao longo do fio, no mesmo sentido da corrente, e de módulo igual ao comprimento do fio.

Considere a Figura ao lado, em que  $z$  é a direção vertical. Queremos que  $\vec{F}_M = F_M \hat{z}$  para que essa força equilibre o peso do fio  $-Mg \hat{z}$ , ou seja:

$$\vec{F}_M = I \vec{L} \times B_T \hat{x} = F_M \hat{z}$$

Se você já se habituou à operação de produto vetorial, vai ver logo que  $\vec{L}$  deve (ou pode) ser  $\vec{L} = -L \hat{y}$  pois  $-\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}$  ( $\vec{L}$  poderia ter uma componente  $x$ , pois  $\hat{x} \times \hat{x} = \vec{0}$ , mas nesse caso a força magnética seria menor e a corrente no fio teria que ser maior). A Figura mostra então a direção do fio e o sentido da corrente (seta verde). Nesse caso:



$$\vec{F}_M = I L (-\hat{y}) \times B_T \hat{x} = I L B_T (-\hat{y} \times \hat{x}) = I L B_T \hat{z}$$

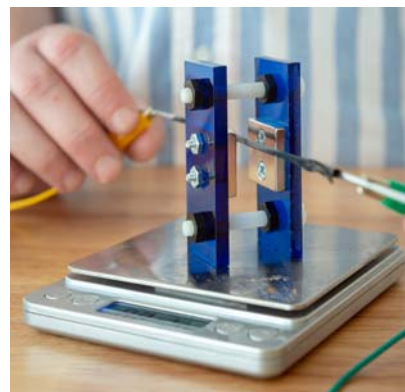
A (menor) corrente que sustenta o peso do fio é:

$$I L B_T = M g \Rightarrow I = \frac{M g}{L B_T}$$

Como  $B_T \cong 50 \mu T = 50 \times 10^{-6} T$  vemos que essa corrente teria que ser gigantesca, o que torna esse equilíbrio de difícil realização na prática. Utilizando um outro campo magnético mais intenso, gerado por um ímã ou solenóide, o experimento torna-se simples.

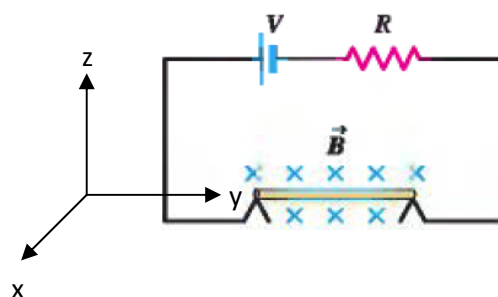
Resumindo, como  $\vec{F}_M = I \vec{L} \times B_T \hat{x}$  deve estar ao longo de  $z$  (para equilibrar o peso), e  $\vec{F}_M$  é ortogonal a  $\vec{L}$  e a  $B_T \hat{x}$ , então  $\vec{L}$  não pode ter componente  $z$ , ou seja:  $\vec{L} = L_x \hat{x} + L_y \hat{y}$ , de tal forma que  $\vec{F}_M = I (L_x \hat{x} + L_y \hat{y}) \times B_T \hat{x} = I L_y B_T (-\hat{z})$ . Então,  $L_y$  deve ser negativo (para que  $\vec{F}_M$  esteja para cima), ou seja, a corrente no fio deve estar no sentido negativo de  $y$  e  $L_x$  e  $L_y$  podem ter qualquer valor desde que  $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$  e  $L_y \neq 0$  (senão não haverá  $\vec{F}_M$ ). A posição do fio que vai exigir menor corrente é aquele em que  $L_y$  é máximo, ou seja,  $L_y = L$  e  $L_x = 0$  (nesse caso a força  $I L_y B_T$  pode ser produzida com menor  $I$ ).

A Figura ao lado ilustra um experimento que envolve a situação descrita aqui ([www.exploratorium.edu](http://www.exploratorium.edu)). Os ímãs estão fixados nos suportes azuis, que estão apoiados em uma balança. Nesse experimento o segmento de fio (entre as duas garras jacaré) é mantido fixo, passando por entre os ímãs, e está sendo empurrado para cima pela força magnética produzida pelo campo magnético dos ímãs sobre a corrente no fio. Os ímãs, por sua vez, são empurrados para baixo, pela reação a essa força. Invertendo o sentido da corrente, os ímãs passam a ser empurrados para cima. Portanto, através da variação na leitura da balança, comparando os casos com corrente no fio e sem corrente no fio, podemos medir facilmente a força magnética no segmento de fio.



### E/P27.39:

Considere o sistema ao lado. Um fio reto de comprimento  $L$  e massa  $M$  está apoiado em dois contatos que fecham um circuito com uma bateria e um resistor. A corrente passa no fio reto e a força magnética produzida (campo  $\vec{B}$  entrando no plano da página) tenta levantar ele. Se o fio for erguido, a corrente vai a zero, porque o circuito se abre. A corrente que abre o circuito é aquela que faz com que a força magnética no fio reto supere o peso do fio. Usando o referencial que adotamos na Figura obtemos:



$$\vec{F}_M = I \vec{L} \times \vec{B} = I L \hat{y} \times B(-\hat{x}) = ILB(\hat{y} \times (-\hat{x})) = I L B \hat{z}$$

Portanto, para que o circuito não seja interrompido deve valer:

$$I L B \leq M g$$

Sendo as outras resistências elétricas desprezíveis, a corrente no circuito é:

$$I = \frac{V}{R}$$

Portanto, o circuito não será interrompido se a bateria for tal que:

$$\frac{V}{R} L B \leq M g \Rightarrow V \leq \frac{M g R}{L B}$$

b) Suponha que  $V$  tenha o menor valor aceitável calculado acima, que faz com que o peso e a força magnética se equilibrem. Se a resistência  $R$  der um defeito e baixar subitamente para o valor  $r < R$ , a aceleração, para cima, do fio reto nesse instante será?

A corrente no fio era:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Mg}{LB}$$

e vai passar a valer:

$$I' = \frac{V}{r} = \frac{Mg}{LB} \left( \frac{R}{r} \right)$$

A corrente no fio vai aumentar, pois  $r < R$ . A força resultante no fio reto será vertical para cima de magnitude:

$$F_M - Mg = I' LB - Mg = \frac{Mg}{LB} \left( \frac{R}{r} \right) LB - Mg = Mg \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$$

A aceleração do fio será vertical para cima de magnitude:

$$a = \frac{F_M - Mg}{M} = g \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$$

Note que se a resistência mantém seu valor original  $r = R$ , o fio continua parado e o circuito fechado, pois  $a = 0$ . Quanto menor o valor de  $r$ , mais rapidamente o fio vai saltar e interromper a corrente. O fio vai saltar, cair e fechar o circuito e então saltar de novo. O fio vai ficar saltando sem parar.

#### E/P27.43:

No modelo de Bohr para o átomo de Hidrogênio o elétron orbita o próton em órbitas circulares (MCU). No estado de mais baixa energia do átomo a velocidade do elétron possui módulo  $V_0$  e o raio da órbita é  $a_0$  ( $\cong 0,5 \text{ \AA}$ ).

a) O período orbital do elétron é:

$$V_0 = \frac{2\pi a_0}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi a_0}{V_0}$$

b) Se imaginarmos uma superfície interceptando essa órbita do elétron, a taxa (no tempo) com que carga elétrica atravessa essa superfície é (a carga elétrica do elétron é  $-e < 0$ ):

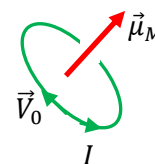
$$I_0 = \frac{e}{T_0} = \frac{e V_0}{2\pi a_0}$$

ou seja, a cada intervalo de tempo  $T_0$  essa superfície é atravessada por uma carga de módulo  $e$ . Essa corrente terá o sentido oposto ao sentido do movimento do elétron, porque a carga do elétron é negativa. Ela circula em uma espira circular (a própria órbita do elétron). A órbita do elétron é uma espira circular minúscula com uma pequena corrente elétrica  $I_0 \cong 1,1 \text{ mA}$ . Essa espira produz um campo magnético minúsculo, um campo dipolar.

c) O momento magnético orbital do átomo será o momento magnético dessa espira circular. O módulo do momento magnético orbital é dado por:

$$\mu_M = IA = I_0 \pi a_0^2 = \frac{e V_0}{2 \pi a_0} \pi a_0^2 = \frac{e V_0 a_0}{2}$$

A Figura ao lado ilustra o vetor  $\vec{\mu}_M$  de acordo com a regra da mão direita:  $\vec{\mu}_M$  está ortogonal ao plano da espira (curva verde, que é a trajetória do elétron) apontando no sentido do polegar da mão direita, quando os outros dedos dessa mão circulam no sentido de  $I$  (a corrente  $I$  é oposta a  $\vec{V}_0$  porque a carga do elétron é negativa).



Esses momentos magnéticos minúsculos conferem ao Hidrogênio propriedades magnéticas. Por exemplo, a radiação emitida pelo gás Hidrogênio excitado (por altas temperaturas) possui uma frequência que depende do campo magnético na região em que esse gás está (efeito Zeeman). Dessa forma, analisando a radiação que vem do Sol (que é basicamente uma bola de Hidrogênio), podemos obter informações sobre o campo magnético que existe lá na superfície do Sol. Além desse momento magnético orbital, o elétron possui também um momento magnético de spin, associado ao seu movimento de rotação em torno dele mesmo. Esses dois momentos magnéticos se combinam e conferem ao Hidrogênio suas propriedades magnéticas.

**E/P27.44:** Uma espira retangular em que circula uma corrente  $I$  (sentido anti-horário) está mergulhada em um campo magnético uniforme. Considere o referencial com o eixo  $x$  saindo ortogonalmente da página.

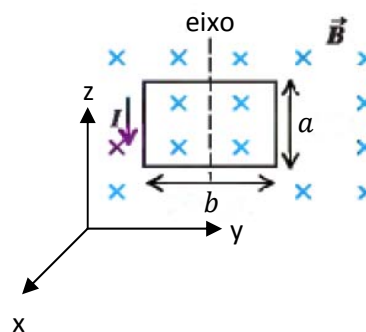
a) A força magnética na espira é nula. Isso seria verdadeiro para qualquer espira, de qualquer forma, em qualquer posição, imersa em um campo magnético uniforme. Isso porque, para cada pequeno pedaço de espira  $\Delta \vec{l}$  ( $\Delta \vec{l}$  paralelo à espira e no sentido da corrente) a força magnética nesse pedaço é dada por:

$$\Delta \vec{F} = I \Delta \vec{l} \times \vec{B}$$

Portanto, a força magnética resultante na espira é:

$$\vec{F} = \sum_{ESPIRA} \Delta \vec{F} = \sum_{ESPIRA} I \Delta \vec{l} \times \vec{B} = I \sum_{ESPIRA} \Delta \vec{l} \times \vec{B} = I \left( \sum_{ESPIRA} \Delta \vec{l} \right) \times \vec{B} = I \vec{0} \times \vec{B} = \vec{0}$$

Se você se lembrar da regra do paralelogramo para a soma de vetores e do fato de que uma espira é uma curva fechada, vai entender logo porque a soma dos  $\Delta \vec{l}$  acima é nula. Note que o resultado só se aplica se



$\vec{B}$  puder ser colocado em evidência no somatório, ou seja, se  $\vec{B}$  for uma constante no espaço (um campo uniforme).

Mesmo já conhecendo esse resultado, vamos prová-lo explicitamente para essa espira, calculando as quatro forças nos quatro lados da espira. Note que no nosso referencial  $\vec{B} = -B\hat{x}$ .

No lado de cima da espira:  $\Delta\vec{l} = -b\hat{y}$  e  $\Delta\vec{F} = I\Delta\vec{l} \times \vec{B} = I(-b\hat{y}) \times (-B\hat{x}) = I b B(-\hat{z})$ .

No lado de baixo da espira:  $\Delta\vec{l} = b\hat{y}$  e  $\Delta\vec{F} = I\Delta\vec{l} \times \vec{B} = I(b\hat{y}) \times (-B\hat{x}) = I b B(\hat{z})$ .

Essas duas forças se anulam.

No lado esquerdo da espira:  $\Delta\vec{l} = -b\hat{z}$  e  $\Delta\vec{F} = I\Delta\vec{l} \times \vec{B} = I(-b\hat{z}) \times (-B\hat{x}) = I b B\hat{y}$ .

No lado direito da espira:  $\Delta\vec{l} = b\hat{z}$  e  $\Delta\vec{F} = I\Delta\vec{l} \times \vec{B} = I(b\hat{z}) \times (-B\hat{x}) = I b B(-\hat{y})$ .

Essas duas forças se anulam. A força magnética na espira é nula.

Quanto ao torque magnético resultante na espira, ele é dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

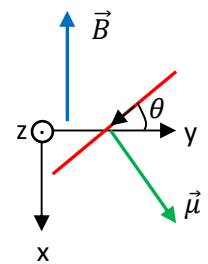
O momento magnético dessa espira é:  $\vec{\mu} = I(ab)\hat{x}$ , de acordo com a regra da mão direita.

Portanto:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I(ab)\hat{x} \times (-B\hat{x}) = \vec{0}$$

Não há torque na espira porque o torque é tal que sempre tenta alinhar o momento magnético da espira com o campo magnético. Se o momento magnético já estiver alinhado, o torque será nulo. Se o momento magnético estiver diametralmente oposto ao campo magnético, como é o caso aqui, o torque também será nulo, pois essa é uma posição de equilíbrio (instável) da espira. A posição alinhada é uma posição de equilíbrio estável. Enfim, o torque  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  possui módulo  $\tau = \mu B \sin(\alpha)$  sendo  $\alpha$  o ângulo entre  $\vec{\mu}$  e  $\vec{B}$ . No presente caso vale  $\alpha = 180^\circ = \pi$  rad e  $\sin(\pi) = 0$ .

b) A espira agora é girada de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo mostrado na Figura. A Figura ao lado ilustra uma visão de cima dessa situação. Ela é a Figura anterior vista de cima, e com a espira girada em torno do “eixo” mostrado. O eixo z está apontando para fora da página. O lado superior de cima da espira está em vermelho (note o sentido da corrente nesse lado), o momento magnético em verde e o campo magnético em azul. A situação anterior corresponde ao caso  $\theta = 0$  ( $\alpha = \pi$  entre as setas verde e azul,  $\alpha = \pi - \theta$ ).



Conforme nossa discussão anterior, sabemos que a força magnética na espira continua sendo nula. Mas, vamos calculá-la explicitamente para mostrar esse resultado.

No lado de cima da espira:  $\Delta \vec{l} = b(-\cos(\theta) \hat{y} + \sin(\theta) \hat{x})$  e:

$$\Delta \vec{F} = I \Delta \vec{l} \times \vec{B} = I(-\cos(\theta) \hat{y} + \sin(\theta) \hat{x}) \times (-B \hat{x}) = I b B \cos(\theta) (-\hat{z}).$$

No lado de baixo da espira:  $\Delta \vec{l} = b(\cos(\theta) \hat{y} - \sin(\theta) \hat{x})$  e:

$$\Delta \vec{F} = I \Delta \vec{l} \times \vec{B} = I(\cos(\theta) \hat{y} - \sin(\theta) \hat{x}) \times (-B \hat{x}) = I b B \cos(\theta) (\hat{z}).$$

Essas duas forças se anulam.

No lado esquerdo da espira:  $\Delta \vec{l} = -b \hat{z}$  e  $\Delta \vec{F} = I \Delta \vec{l} \times \vec{B} = I(-b \hat{z}) \times (-B \hat{x}) = I b B \hat{y}$ .

No lado direito da espira:  $\Delta \vec{l} = b \hat{z}$  e  $\Delta \vec{F} = I \Delta \vec{l} \times \vec{B} = I(b \hat{z}) \times (-B \hat{x}) = I b B (-\hat{y})$ .

Essas duas forças se anulam.

Quanto ao torque magnético resultante na espira, ele é dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

O momento magnético dessa espira agora é (decompondo a seta verde na Figura acima em suas componentes x e y):

$$\vec{\mu} = I (ab) \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{x} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{y} \right] = I (ab) [\cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y}]$$

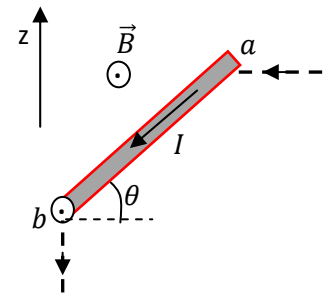
Portanto:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I (ab) [\cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y}] \times (-B \hat{x}) = I (ab) B \sin(\theta) \hat{z}$$

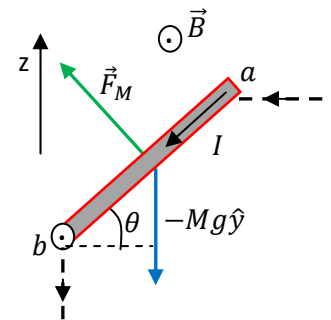
Note que  $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta) = \sin(\alpha)$ . Portanto:  $\tau = I (ab) B \sin(\alpha)$ .

O torque está ao longo de +z, ou seja, vai fazer com que a espira gire no sentido anti-horário, produzindo ao final o alinhamento de  $\vec{\mu}$  com  $\vec{B}$  ( $\theta = \pi$ ). De fato, esse torque é um torque restaurador para a posição de equilíbrio estável em  $\theta = \pi$  ( $\alpha = 0$ ). Ele vai fazer com que a espira descreva um movimento pendular oscilatório em torno da posição  $\theta = \pi$ . Se houver algum atrito atuando na espira, ela vai parando de oscilar (oscilações amortecidas) até atingir a posição de equilíbrio estável em  $\theta = \pi$ , para a qual os vetores  $\vec{\mu}$  e  $\vec{B}$  estão paralelos entre si. A posição  $\theta = 0$  ( $\alpha = \pi$ ) também é de equilíbrio, mas instável (qualquer peteleco e a espira gira para o outro lado, com  $\theta = \pi$ ). O movimento de  $\vec{\mu}$  é basicamente o que você observa na agulha de uma bússola. A agulha oscila para lá e para cá até entrar em equilíbrio alinhada na direção norte-sul.

**E/P27.59:** A Figura ao lado ilustra uma haste rígida condutora (em vermelho) que transporta uma corrente  $I$  (para baixo) e está mergulhada em um campo magnético uniforme horizontal, saindo ortogonalmente da página (esse é o sentido correto para o  $\vec{B}$  nesse exercício). A direção  $z$  é a vertical. A haste possui comprimento  $L$  e massa  $M$  e pode girar livremente em torno de um eixo saindo ortogonalmente da página que passa por  $b$  (eixo  $x$ ). No ponto  $a$  a haste está apenas apoiada, fechando o circuito. Há um valor de corrente limite  $I_{MAX}$  acima do qual a haste gira no sentido anti-horário e abre o circuito em  $a$ . Calcule  $I_{MAX}$ .



A Figura ao lado ilustra a força magnética  $\vec{F}_M = I \vec{L} \times \vec{B}$  (verde) e o peso  $-Mg\hat{z}$  (azul) que atuam na haste e produzem torques ao longo do eixo  $x$  (que passa por  $b$ ). Note que a força magnética produz um torque para fora (+ $x$ ) e tenta abrir o contato enquanto que o peso produz um torque para dentro (- $x$ ) e tenta manter o contato fechado. Há também uma força de apoio em  $a$ , mas na situação limite, em que a haste está perdendo contato com o ponto  $a$  essa força é nula. Por isso vamos desconsiderá-la aqui. As forças de apoio em  $b$  não foram mostradas, pois não produzem torque ao longo de  $x$  (não possuem braço de alavanca).



Na Figura podemos ver que a força magnética possui braço de alavanca igual a  $L/2$  e, portanto, seu torque é (note que o ângulo entre  $\vec{L}$  e  $\vec{B}$  é  $90^\circ$  e, por isso,  $F_M = I L B$ ):

$$\vec{\tau}_M = ILB \frac{L}{2} \hat{x}$$

O peso, por sua vez, possui braço de alavanca  $L/2 \cos(\theta)$  e seu torque é:

$$\vec{\tau}_P = Mg \frac{L}{2} \cos(\theta) (-\hat{x})$$

Portanto, se chamarmos a força de apoio na haste no ponto  $a$  de  $\vec{F}_A$  e o torque dessa força ao longo de  $x$  de  $\vec{\tau}_A$ , a condição de equilíbrio rotacional para a haste é:

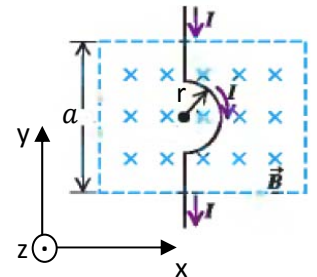
$$\vec{\tau}_P + \vec{\tau}_M + \vec{\tau}_A = \vec{0}$$

Note que a força  $\vec{F}_A$  empurra a extremidade da haste para a esquerda e produz, portanto, um torque ao longo de  $+x$ , assim como a força  $\vec{F}_M$ . Se  $I = 0$ , então, a condição de equilíbrio é  $\vec{\tau}_P + \vec{\tau}_A = \vec{0}$  (dois torques opostos que se anulam). Se ligamos a corrente, a força  $\vec{F}_M$  puxa a haste e a força  $\vec{F}_A$  diminui, assim como  $\vec{\tau}_A$ . Se aumentamos a corrente, chega uma hora em que  $\vec{F}_A$  se anula, a haste perde o apoio no ponto  $a$  e a haste fica na iminência de girar no sentido anti-horário. Para determinar esse valor  $I_{MAX}$  fazemos  $\vec{\tau}_A = \vec{0}$  na equação de equilíbrio dos torques:

$$\vec{\tau}_P + \vec{\tau}_M + \vec{\tau}_A = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_M = \vec{0} \Rightarrow I_{MAX} LB \frac{L}{2} - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta) = 0 \Rightarrow I_{MAX} = \frac{Mg \cos(\theta)}{L B}$$

Esse é o valor da corrente que anula a força de contato em  $a$ , ou seja, é a corrente máxima ( $I_{MAX}$ ) que ainda mantém a haste fechando o circuito em  $a$ , mas na iminência de abrir esse contato. Se a corrente aumentar além desse valor, a haste vai ganhar aceleração angular ao longo de  $x$  e o contato em  $a$  vai abrir. Nesse instante a corrente vai a zero, a força magnética se anula e a haste cai, fechando de novo o contato em  $a$ . A haste ficará oscilando, abrindo e fechando o contato em  $a$ .

**E/P27.62:** A Figura ao lado mostra um fio fino transportando uma corrente  $I$  mergulhado em um campo magnético uniforme entrando ortogonalmente na página. O fio possui uma parte que é um semicírculo de raio  $r$ . Calcule a força magnética no fio.



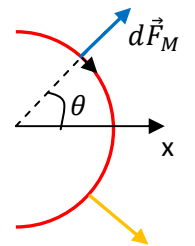
Há dois segmentos (1 e 2) retos, cada um de comprimento

$$l = \frac{a - 2r}{2}$$

para os quais a força magnética pode ser calculada sem muita dificuldade:

$$\vec{F}_{M1} = \vec{F}_{M2} = I \vec{l} \times \vec{B} = I \left( \frac{a - 2r}{2} (-\hat{y}) \right) \times B(-\hat{z}) = IB \left( \frac{a - 2r}{2} \right) \hat{x}$$

Na parte curva do fio (3) teremos que fazer uma integral. A Figura ao lado mostra um pequeno segmento de fio curvo de comprimento  $dl$  (setinha preta) sofrendo a força magnética infinitesimal  $d\vec{F}_M$  (em azul). Note que existe sempre um outro  $d\vec{F}_M$  (em amarelo) cuja componente  $y$  se anula com a componente  $y$  do primeiro. Portanto, fica claro que a força magnética no segmento curvo está ao longo de  $x$  e é dada por:



$$\vec{F}_{M3} = \int_{FIO\ 3} d\vec{F}_M = \int_{FIO\ 3} dF_{Mx} \hat{x} = \int_{FIO\ 3} dF_M \cos(\theta) \hat{x}$$

Sabendo que  $d\vec{F}_M = Id\vec{l} \times \vec{B}$  obtemos  $dF_M = IB dl$  (pois o ângulo entre  $d\vec{l}$  e  $\vec{B}$  é  $90^\circ$ ). Portanto:

$$\vec{F}_{M3} = \hat{x} I B \int_{FIO\ 3} \cos(\theta) dl$$

Notamos agora que  $dl$  é o comprimento de um pequeno arco de círculo, dado por:  $dl = r d\theta$  e que o ângulo  $\theta$  deve varrer o intervalo crescente  $[-\pi/2, \pi/2]$  para que todo o arco de círculo seja percorrido. Finalmente:



$$\vec{F}_{M3} = \hat{x} I B r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta = \hat{x} I B r [\sin(\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 I B r \hat{x}$$

Esse é um resultado geral, a força magnética em um fio fino curvo em um campo magnético uniforme é  $\vec{F}_M = I \vec{l} \times \vec{B}$ , sendo  $\vec{l}$  o vetor “deslocamento” que une as duas extremidades do fio, orientado no sentido da corrente. No presente caso vale  $\vec{l} = -2r \hat{y}$  e  $\vec{F}_{M3} = I \vec{l} \times B (-\hat{z})$ .

Concluindo, a força magnética resultante nesse fio é:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_{M1} + \vec{F}_{M2} + \vec{F}_{M3} = \left( 2 I B \left( \frac{a - 2r}{2} \right) + 2 I B r \right) \hat{x} = I B a \hat{x}$$

Concluindo, a força no fio é a mesma que haveria se o fio fosse simplesmente reto (ao longo de -y) de comprimento  $a$ . A curva que o fio faz é irrelevante para a força magnética no fio. Esse resultado continuaria sendo verdadeiro qualquer que fosse a curva que o fio descrevesse dentro da região com campo magnético uniforme. Isso é verdade em geral porque, sendo  $\vec{B}$  uniforme, ele sai da integral:

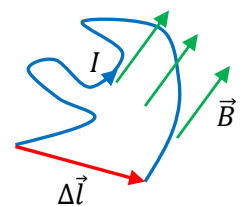
$$\vec{F}_M = \int_{FIO} d\vec{F}_M = \int_{FIO} I d\vec{l} \times \vec{B} = I \left[ \int_{FIO} d\vec{l} \right] \times \vec{B} = I \Delta\vec{l} \times \vec{B}$$

Sendo  $\Delta\vec{l} = -a \hat{y}$  (qualquer que seja a curva), segue que  $\vec{F}_M = I (-a \hat{y}) \times B (-\hat{z}) = I B a \hat{x}$ . Note que essa solução já fornece a força resultante no fio, sem a necessidade de decompor o fio em três partes e calcular  $\vec{F}_M = \vec{F}_{M1} + \vec{F}_{M2} + \vec{F}_{M3}$ .

Conclusão: podemos usar aqui o fato de que um segmento curvo de fio qualquer transportando uma corrente  $I$  e mergulhado em um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  sofre a força magnética:

$$\vec{F} = I \Delta\vec{l} \times \vec{B}$$

sendo  $\Delta\vec{l}$  o vetor que conecta as duas pontas do fio, conforme a Figura ao lado. Para uma espira, por exemplo, vale  $\Delta\vec{l} = \vec{0}$  e  $\vec{F} = \vec{0}$ .



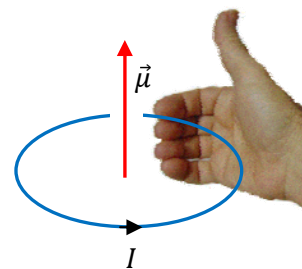
**E/P27.63:** Um campo magnético  $\vec{B}$  uniforme exerce torque sobre uma espira circular. Sabemos que esse torque é dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

sendo  $\vec{\mu}$  o momento magnético da espira, dado por:

$$\vec{\mu} = I \vec{A}$$

$I$  é a corrente que circula na espira e  $\vec{A}$  é o vetor área, que para espiras planas tem uma interpretação simples:  $\vec{A} = A \hat{n}$ , sendo o módulo de  $\vec{A}$  ( $A$ ) a área delimitada pela espira e  $\hat{n}$  a direção normal ao plano que contém a espira, com sentido dado pela regra da mão direita: circulando com os dedos da mão direita no sentido da corrente, o polegar vai apontar no sentido de  $\hat{n}$ . A Figura ao lado ilustra o vetor  $\vec{\mu} = I \pi R^2 \hat{n}$  para uma espira circular de raio  $R$  com a corrente no sentido indicado.

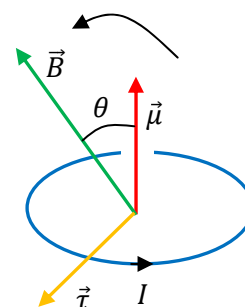


Se essa espira estiver mergulhada em um campo magnético externo uniforme  $\vec{B}$ , ela vai sofrer um torque:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I \pi R^2 \hat{n} \times \vec{B}$$

A Figura ao lado ilustra esse torque se o  $\vec{B}$  é a seta verde. Note que o torque sempre produz um giro no sentido (seta curva preta) do alinhamento de  $\vec{\mu}$  com  $\vec{B}$ . A magnitude do torque é:

$$\tau = I \pi R^2 B \sin(\theta)$$



Só não há torque nos casos  $\theta = 0$ , ou seja, quando o momento magnético já está alinhado com  $\vec{B}$  (posição de equilíbrio estável) ou  $\theta = \pi$ , quando o momento magnético está anti-paralelo a  $\vec{B}$  (posição de equilíbrio instável).

Se triplicarmos o diâmetro da espira, a área passa a ser:

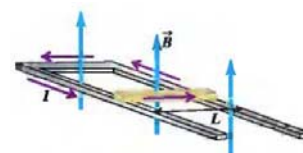
$$A' = \pi R'^2 = \pi(3R)^2 = 9A$$

A magnitude do torque passa a ser:

$$\tau' = IA'B \sin(\theta) = 9IA B \sin(\theta) = 9\tau$$

### E/P27.72:

A Figura ao lado ilustra uma haste rígida (em amarelo) que pode deslizar sem atrito em um trilho condutor com a forma de U. Uma fonte externa (não mostrada) mantém uma corrente constante no circuito fechado pela haste e pelo trilho. Um campo magnético uniforme  $\vec{B}$  ortogonal ao plano do trilho existe em todo o espaço entre os trilhos (setas azuis). Note que o circuito não é alimentado por uma bateria (uma fonte de FEM), mas por uma fonte de corrente (uma fonte que mantém fixo um determinado valor de corrente no circuito).



A Figura ao lado ilustra melhor a ideia, em uma visão de cima (a fonte de corrente não é mostrada). No referencial adotado:

$$\vec{B} = B \hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{L} = L \hat{y}$$

sendo  $L$  a largura do trilho em  $U$ . Portanto, a força magnética (seta verde) na haste (amarela) será:

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B} = I L B \hat{y} \times \hat{z} = I L B \hat{x}$$

a) Se  $M$  é a massa da haste, a aceleração constante da haste (desprezando outras forças) será:

$$\vec{a} = \frac{I L B}{M} \hat{x}$$

Da cinemática com aceleração constante ( $\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a} t$ ), concluímos que a velocidade da haste vai crescer de acordo com a equação horária (supondo que a haste parta do repouso em  $t=0$ ):

$$\vec{V}(t) = \frac{I L B}{M} t \hat{x}$$

b) A posição  $x(t)$  da haste será dada por (supondo que ela parta de  $x_0 = 0$ ):

$$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{I L B}{M} t^2$$

Para atingir uma velocidade de módulo  $V_F$  a haste demorará o tempo  $t_1$  dado por:

$$V_F = \frac{I L B}{M} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{M V_F}{I L B}$$

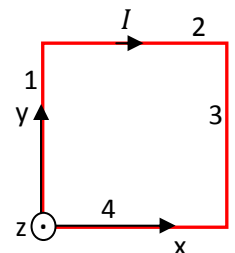
Isso ocorrerá após a haste percorrer a distância:

$$d = x(t_1) = \frac{1}{2} \frac{I L B}{M} t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{I L B}{M} \left( \frac{M V_F}{I L B} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{I L B} V_F^2$$

A situação considerada em (c) é tão estapafúrdia que não merece atenção. Mas, pode ser abordada através dos resultados algébricos acima.

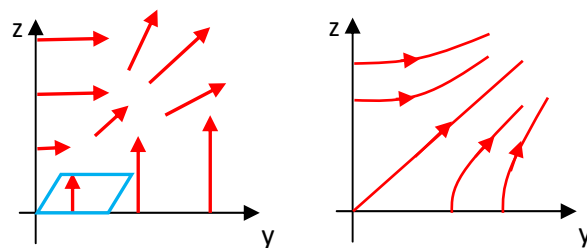
**E/P27.81:** A Figura ao lado ilustra uma espira quadrada de lado  $L$ , onde circula uma corrente  $I$ , mergulhada em um campo magnético não uniforme  $\vec{B}(z, y)$ . Supondo que:

$$\vec{B}(z, y) = \frac{B_0}{L} (z \hat{y} + y \hat{z})$$



calcule a força magnética resultante na espira. Suponha que o vértice esquerdo inferior da espira esteja na origem do sistema de coordenadas  $xyz$ . A espira está no plano  $xy$  (plano  $z=0$ ).

a) Ilustramos ao lado algumas setas do campo magnético no plano yz. O campo cresce com o crescimento de z e de y. A espira, em azul, está deitada no plano xy. No gráfico ao lado ilustramos as linhas “de força” de  $\vec{B}$ : linhas orientadas que são tangentes a  $\vec{B}$  em todos os pontos.



b) A força magnética resultante na espira será:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_{M1} + \vec{F}_{M2} + \vec{F}_{M3} + \vec{F}_{M4}$$

de acordo com a enumeração dos lados da espira que adotamos na Figura. Note que a espira está deitada no plano xy, que é o plano  $z=0$  e que, portanto, o campo magnético na espira é:

$$\vec{B}(z = 0, y) = \frac{B_0}{L} y \hat{z}$$

Vamos calcular a força magnética em cada um dos lados da espira:

No lado 4 vale  $y=0$  e, portanto, o campo magnético é nulo sobre esse lado. Então não há força:  $\vec{F}_{M4} = \vec{0}$ .

No lado 2 vale  $y=L$ , e, portanto, sobre esse lado o campo é uniforme e vale:

$$\vec{B}_2(z = 0, y = L) = \frac{B_0}{L} L \hat{z} = B_0 \hat{z}$$

Então:

$$\vec{F}_{M2} = I \vec{L} \times \vec{B} = I L \hat{x} \times B_0 \hat{z} = I L B_0 (-\hat{y})$$

No lado 1 a coordenada y varia desde  $y=0$  até  $y=L$  e, portanto, o campo magnético, que depende de y, varia ao longo desse segmento de fio. Para calcular a força nesse fio devemos fazer uma integral (com  $d\vec{l} = dy \hat{y}$ ):

$$\vec{F}_{M1} = \int_{\text{FIO 1}} I d\vec{l} \times \vec{B}$$

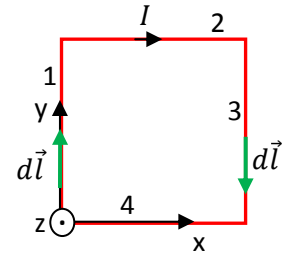
Mas, antes de sair calculando essa força, dá para ver que como as correntes nos fios 1 e 3 são opostas e que como  $\vec{B}$  não depende de x, as forças nos fios 1 e 3 serão de mesma magnitude, mas opostas. Essas duas forças vão se cancelar e, portanto, a força na espira será:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_{M1} + \vec{F}_{M2} + \vec{F}_{M3} + \vec{F}_{M4} = \vec{F}_{M2} = I L B_0 (-\hat{y})$$

Mesmo sabendo disso, vamos calcular  $\vec{F}_{M1}$  apenas como exercício.

$$\vec{F}_{M1} = \int_{\text{FIO 1}} I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{\text{FIO 1}} I dy \hat{y} \times \frac{B_0}{L} y \hat{z} = I \frac{B_0}{L} \hat{x} \int_{y=0}^{y=L} y dy = I \frac{B_0}{L} \hat{x} \frac{L^2}{2} = \frac{I B_0 L}{2} \hat{x}$$

Vamos calcular agora  $\vec{F}_{M3}$ . Note que nesse fio vale  $d\vec{l} = dy \hat{y}$  com  $y$  variando de  $y=L$  até  $y=0$ . Notamos que há muita confusão aqui, quanto aos sinais. Há uma tendência de se comparar o  $d\vec{l}$  no fio 3 com o  $d\vec{l}$  no fio 1 (ver a Figura ao lado), ver que eles são opostos, e escrever então, para o fio 3:  $d\vec{l} = -dy \hat{y}$ . Mas note, se no fio 3 a variável de integração vai variar de  $y=L$  até  $y=0$ , então  $y$  estará diminuindo nessa integral e, portanto,  $dy < 0$ . Então, ao escrevermos  $d\vec{l} = dy \hat{y}$  no fio 3, já estamos adotando um  $d\vec{l}$  oposto ao  $d\vec{l}$  no fio 1, pois no fio 1  $dy > 0$  ( $y$  variou de 0 até  $L$ ) e no fio 3  $dy < 0$ . Podemos adotar no fio 3  $d\vec{l} = -dy \hat{y}$ , desde que entendamos que nessa expressão  $dy$  é positivo, ou seja, desde que integremos nesse fio com  $y$  variando desde 0 até  $L$ , como fizemos no fio 1. Enfim:



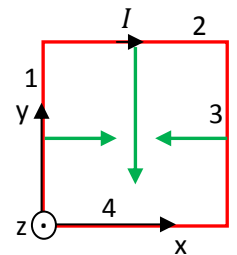
$$\vec{F}_{M3} = \int_{\text{FIO 3}} I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{\text{FIO 3}} I dy \hat{y} \times \frac{B_0}{L} y \hat{z} = I \frac{B_0}{L} \hat{x} \int_{y=L}^{y=0} y dy = I \frac{B_0}{L} \hat{x} \left( -\frac{L^2}{2} \right) = -\frac{I B_0 L}{2} \hat{x}$$

ou:

$$\vec{F}_{M3} = \int_{\text{FIO 3}} I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{\text{FIO 3}} I (-dy \hat{y}) \times \frac{B_0}{L} y \hat{z} = -I \frac{B_0}{L} \hat{x} \int_{y=0}^{y=L} y dy = -I \frac{B_0}{L} \hat{x} \frac{L^2}{2} = -\frac{I B_0 L}{2} \hat{x}$$

Concluindo o que já havíamos antecipado:  $\vec{F}_{M1} + \vec{F}_{M3} = \vec{0}$ .

Na Figura ao lado ilustramos as setas (em verde) das forças magnéticas que calculamos acima. O campo magnético está ao longo do eixo  $z$ , a corrente circula no sentido horário e a espira é puxada para baixo, ao longo de  $-\hat{y}$ .



Se o campo magnético fosse uniforme, ou seja, se ele tivesse o mesmo valor em todos os pontos da espira quadrada, então a força magnética nessa espira seria nula. Nesse caso, além de valer  $\vec{F}_{M1} + \vec{F}_{M3} = \vec{0}$ , valeria também  $\vec{F}_{M2} + \vec{F}_{M4} = \vec{0}$ .

Você deve usar a regra da mão direita para a força magnética  $I d\vec{l} \times \vec{B}$  nos três lados da espira onde há força magnética, considerando que  $\vec{B}$  está ao longo de  $+\hat{z}$ , e se convencer de que os sentidos das forças indicados na Figura anterior (que foram obtidos algebricamente) estão corretos.