

E/P28.1: Uma carga elétrica pontual $q > 0$ está passando pela origem com velocidade $\vec{V} = V \hat{y}$. Para baixas velocidades, o campo magnético que essa partícula produz em um ponto \vec{r} do espaço é:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{V} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q V \frac{\hat{y} \times \vec{r}}{r^3}$$

(note que estou usando \vec{r} no lugar de \hat{r} no numerador). Note que as posições \vec{r} são definidas tomando-se a própria carga pontual como referência/origem.

a) Calcule $\vec{B}(\vec{r})$ no ponto $P = (x = d, y = 0, z = 0)$. Considere que o plano yz é o plano da página, por hipótese (\hat{x} está apontando para fora da página). Então, $\vec{r} = d \hat{x}$ e:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} q V \frac{\hat{y} \times d \hat{x}}{d^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q V \frac{(-\hat{z})}{d^2}$$

(note que $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$). A Figura ao lado ilustra esse campo magnético (seta verde).

$\vec{B}(P)$ é um campo paralelo ao plano da página.

b) Calcule $\vec{B}(\vec{r})$ no ponto $Q = (x = 0, y = -d, z = 0)$. Então, $\vec{r} = -d \hat{y}$ e:

$$\vec{B}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} q V \frac{\hat{y} \times (-d) \hat{y}}{d^3} = \vec{0}$$

Não há campo magnético nesse ponto ($\hat{y} \times \hat{y} = \vec{0}$). Não há campo magnético em nenhum ponto sobre o eixo y, o eixo de \vec{V} .

c) Calcule $\vec{B}(\vec{r})$ no ponto $R = (x = 0, y = 0, z = d)$. Então, $\vec{r} = d \hat{z}$ e:

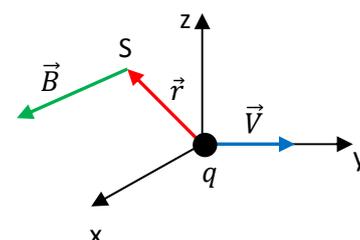
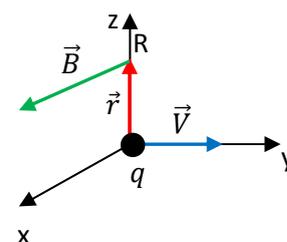
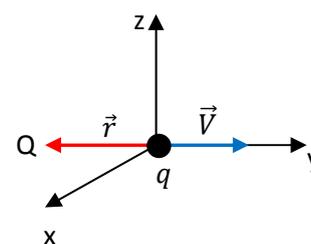
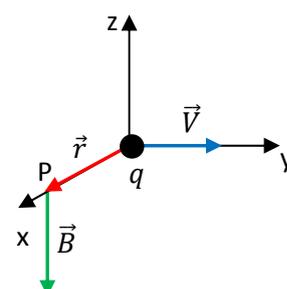
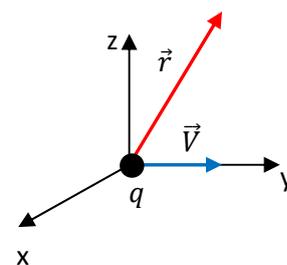
$$\vec{B}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} q V \frac{\hat{y} \times d \hat{z}}{d^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q V \frac{\hat{x}}{d^2}$$

A Figura ao lado ilustra esse campo magnético (é um campo saindo ortogonalmente da página).

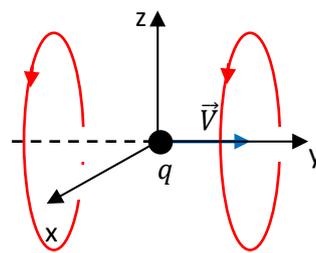
d) Calcule $\vec{B}(\vec{r})$ no ponto $S = (x = 0, y = -d, z = d)$. Então, $\vec{r} = -d \hat{y} + d \hat{z}$ e:

$$\vec{B}(S) = \frac{\mu_0}{4\pi} q V \frac{\hat{y} \times (-d \hat{y} + d \hat{z})}{(\sqrt{d^2 + d^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \frac{\mu_0}{4\pi} q V \hat{x}$$

A Figura ao lado ilustra esse campo magnético (é um campo saindo ortogonalmente da página).



Podemos notar que os resultados acima se encaixam na ideia de que as linhas “de força” de \vec{B} são círculos centrados no e coaxiais ao eixo y , que é o eixo de \vec{V} . As linhas “de força” de \vec{B} são círculos em planos xz . Essas são as mesmas linhas “de força” do campo \vec{B} de um fio reto transportando uma corrente. Esse fio é uma fila de portadores de carga se movendo da mesma forma que a partícula considerada aqui, sendo \vec{V} a velocidade de arraste dos portadores no fio. O campo \vec{B} do fio é a superposição dos campos \vec{B} s dos portadores de carga que fluem dentro dele. A Figura ao lado ilustra duas dessas linhas de força, em vermelho. Se a carga q fosse negativa, todas as setas de \vec{B} inverteriam de sentido, assim como as linhas de força.



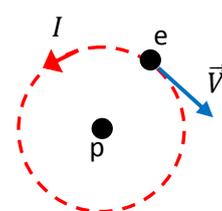
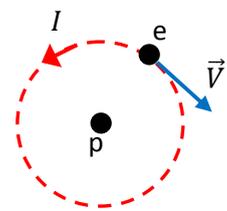
Estamos usando aqui o termo “linhas “de força” do campo \vec{B} ” com o “de força” entre aspas porque essas linhas são tangentes ao campo magnético \vec{B} e não à força magnética $\vec{F}_M = q \vec{V} \times \vec{B}$ (pois \vec{F}_M é ortogonal a \vec{B}). Para o campo elétrico e a força elétrica vale $\vec{F}_E = q \vec{E}$ e as linhas tangentes a \vec{E} são também tangentes a \vec{F}_E . Elas são mais propriamente linhas de força. Portanto, o mais correto é chamar as linhas tangentes ao campo \vec{B} apenas de “linhas de campo” ou “linhas de \vec{B} ”. Mas, enfim, aqueles cientes desse contraste entre os casos magnético e elétrico podem aceitar o uso do termo “linhas de força do campo \vec{B} ” como um simples e inofensivo abuso de linguagem.

E/P28.2:

No modelo de Bohr para o átomo de Hidrogênio o elétron se move em órbitas circulares, centradas no próton. Portanto, a órbita do elétron é uma espira circular de raio $r = a$ com corrente elétrica $I = q/T$, sendo q o módulo da carga de um elétron e T o período orbital (o tempo para dar uma volta completa). Se V é o módulo da velocidade orbital do elétron, então $V = 2 \pi a/T$ e:

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qV}{2\pi a}$$

A Figura ao lado ilustra essa órbita do elétron (e) centrada no próton (p). Note que a corrente elétrica I tem o sentido oposto ao da velocidade \vec{V} do elétron porque a carga do elétron é negativa (e o sentido da corrente é oposto ao do movimento do portador de carga nesse caso).



Para velocidades V baixas podemos usar a lei de Coulomb e a lei de Biot-Savart (para uma corrente pontual) e calcular os campos de força que o elétron cria na posição central do próton (posição “0”).

O elétron atrai o próton da direção radial, graças ao seu campo elétrico radial:

$$\vec{E}_e(O) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 a^2} \hat{r}$$

A Figura ao lado ilustra a seta (verde) desse campo \vec{E}_e na posição do próton. A seta aponta para o elétron, pois sua carga é negativa. Esse campo de força vai produzir no próton a força atrativa $\vec{F}_{e/p} = q \vec{E}_e$, que é a reação à força atrativa que o próton produz no elétron $\vec{F}_{p/e} = -\vec{F}_{e/p}$.

O campo magnético de uma corrente pontual (lenta) é:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q \vec{V} \times \vec{r}}{4 \pi r^3}$$

Note que \vec{r} é a posição do próton (O) em relação ao elétron e que a carga q vai ser $-q$, a carga do elétron. O ângulo entre \vec{V} (tangente) e \vec{r} (radial) é sempre 90° (ver figura ao lado).

Portanto, aplicando a regra da mão direita do produto vetorial obtemos:

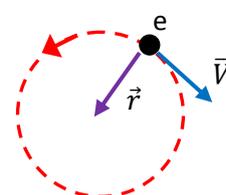
$$\vec{B}(\vec{r} = O) = \frac{\mu_0 (-q) V a \hat{\otimes}}{4 \pi a^3}$$

sendo $\hat{\otimes}$ um vetor unitário para dentro da página: $\vec{V} \times \vec{r} = V a \sin(90^\circ) \hat{\otimes} = V a \hat{\otimes}$.

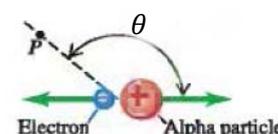
Portanto:

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 q V \hat{\odot}}{4 \pi a^2}$$

sendo $\hat{\odot}$ um vetor unitário apontando para fora da página: $\hat{\odot} = -\hat{\otimes}$. Esse campo magnético não vai produzir força magnética $\vec{F} = q \vec{v}_p \times \vec{B}(O)$ no próton posto que o próton está em repouso nesse referencial: $\vec{v}_p = \vec{0}$.

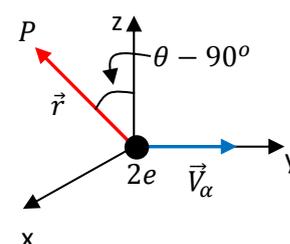


E/P28.4: Uma partícula α (que é um núcleo de átomo de Hélio, ou seja, possui $Z = 2$ prótons e carga $q = 2e$) e um elétron (carga $-e$), que estão inicialmente muito próximos um do outro (no mesmo ponto, para todos os efeitos), se movem como na Figura ao lado (com velocidades baixas). O campo magnético (resultante) no ponto P nesse instante é?



Considerando o referencial ao lado (em que \vec{V} e P estão no plano yz, o plano da página e \hat{x} está apontando para fora da página) vemos que a posição do ponto P é:

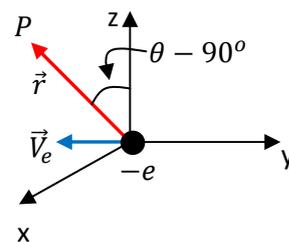
$$\vec{r} = -R \sin(\theta - 90^\circ) \hat{y} + R \cos(\theta - 90^\circ) \hat{z} = R \cos(\theta) \hat{y} + R \sin(\theta) \hat{z}$$



sendo $R = |\vec{r}|$ a distância de P até a partícula, que está na origem. Note que $90^\circ < \theta < 180^\circ$ e que $\cos(\theta) < 0$, ou seja, a componente y de \vec{r} é negativa, conforme a Figura.

Para a partícula α vemos que $\vec{V}_\alpha = V \hat{y}$. Portanto:

$$\begin{aligned}\vec{B}_\alpha(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{V}_\alpha \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2e V \hat{y} \times (R \cos(\theta) \hat{y} + R \sin(\theta) \hat{z})}{R^3} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e V}{R^2} \sin(\theta) \hat{x}\end{aligned}$$



Para o elétron vemos que $\vec{V}_e = -V \hat{y}$. Portanto:

$$\vec{B}_e(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{V}_e \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} (-e) V \frac{(-\hat{y}) \times (R \cos(\theta) \hat{y} + R \sin(\theta) \hat{z})}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e V}{R^2} \sin(\theta) \hat{x}$$

Vemos que as duas partículas produzem campos magnéticos no mesmo sentido (pois elas constituem duas correntes elétricas no mesmo sentido, para a direita, que é o sentido de \vec{V}_α e de $-\vec{V}_e$), mas o campo magnético da partícula α é o dobro, porque sua carga elétrica é o dobro (e os módulos das velocidades são iguais). Os dois campos saem ortogonalmente da página.

O campo magnético resultante em P será:

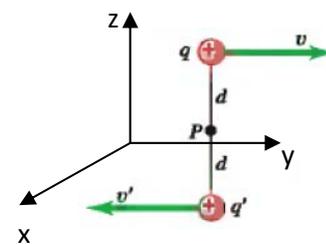
$$\vec{B}_\alpha(P) + \vec{B}_e(P) = \frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{e V}{R^2} \sin(\theta) \hat{x}$$

Para $\theta = 0$ ou $\theta = 180^\circ$, que é a direção que coincide com \vec{V}_e e \vec{V}_α , não há campo magnético.

E/P28.6: Duas partículas se movem como na Figura ao lado (com velocidades baixas).

a) O campo magnético em P é?

Considere o referencial na Figura, em que tudo está no plano yz (o plano da página) e \hat{x} aponta para fora da página.



O campo magnético produzido por uma partícula em baixas velocidades é:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{V} \times \vec{r}}{r^3}$$

Note que nessa expressão o vetor posição \vec{r} é a posição onde o campo está sendo calculado: posição tendo a própria partícula como origem/referência. Note também que, como sempre, estou usando \vec{r} no lugar de \hat{r} no numerador (isso poupa o cálculo inútil de um vetor unitário).

Para a partícula de carga q , a posição do ponto P é $\vec{r} = -d \hat{z}$. A velocidade dessa partícula é $\vec{V} = V \hat{y}$. Portanto:

$$\vec{B}_q(P) = \vec{B}_q(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q \vec{V} \times \vec{r}}{4 \pi r^3} = \frac{\mu_0 q V \hat{y} \times d (-\hat{z})}{4 \pi d^3} = \frac{\mu_0 q V}{4 \pi d^2} (-\hat{x})$$

Esse campo entra ortogonalmente na página (se q for positivo).

Para a partícula de carga q' , a posição do ponto P é $\vec{r}' = d \hat{z}$. A velocidade dessa partícula é $\vec{V}' = -V' \hat{y}$. Portanto:

$$\vec{B}_{q'}(P) = \vec{B}_{q'}(\vec{r}') = \frac{\mu_0 q' \vec{V}' \times \vec{r}'}{4 \pi r'^3} = \frac{\mu_0 q' V' (-\hat{y}) \times d \hat{z}}{4 \pi d^3} = \frac{\mu_0 q' V'}{4 \pi d^2} (-\hat{x})$$

Esse campo entra ortogonalmente na página (se q' for positivo).

O campo magnético resultante em P é:

$$\vec{B}_q(P) + \vec{B}_{q'}(P) = \frac{\mu_0}{4 \pi d^2} (q V + q' V') (-\hat{x})$$

Se as duas cargas tiverem o mesmo sinal, seus campos magnéticos serão paralelos entre si e vão se somar.

b) A força elétrica que q faz em q' é, de acordo com a lei de Coulomb:

$$\vec{F}_{E q/q'} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q q'}{(2d)^2} (-\hat{z})$$

Analogamente, $\vec{F}_{E q'/q} = -\vec{F}_{E q/q'}$. Se as duas cargas tiverem o mesmo sinal, elas vão se repelir (q' é empurrada para baixo e q é empurrada para cima (ação e reação)). Caso contrário, elas vão se atrair.

Para calcular a força magnética que q faz em q' precisamos calcular primeiro o campo magnético que q produz na posição de q' .

Qual o campo magnético que q produz na posição de q' ?

Para a partícula de carga q , a posição de q' é $\vec{r} = -2d \hat{z}$. A velocidade dessa partícula (q) é $\vec{V} = V \hat{y}$. Portanto:

$$\vec{B}_q(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q \vec{V} \times \vec{r}}{4 \pi r^3} = \frac{\mu_0 q V \hat{y} \times 2d (-\hat{z})}{4 \pi (2d)^3} = \frac{\mu_0 q V}{16 \pi d^2} (-\hat{x})$$

A força em q' por ela estar imersa no campo magnético de q com velocidade $\vec{V}' = -V' \hat{y}$ é:

$$\vec{F}_{q/q'} = q' \vec{V}' \times \vec{B}_q(\vec{r}) = q' (-V' \hat{y}) \times \frac{\mu_0 q V}{16 \pi d^2} (-\hat{x}) = \frac{\mu_0 q q' V V'}{16 \pi d^2} (-\hat{z})$$

Agora vamos calcular a força magnética que q' faz em q .

Para a partícula de carga q' , a posição de q é $\vec{r}' = 2d \hat{z}$. A velocidade dessa partícula (q') é $\vec{V}' = -V' \hat{y}$.

Portanto:

$$\vec{B}_{q'}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{V}' \times \vec{r}'}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q' V' \frac{(-\hat{y}) \times 2d \hat{z}}{(2d)^3} = \frac{\mu_0}{16\pi} \frac{q' V'}{d^2} (-\hat{x})$$

A força em q por ela estar imersa no campo magnético de q' com velocidade $\vec{V} = V \hat{y}$ é:

$$\vec{F}_{q'/q} = q \vec{V} \times \vec{B}_{q'}(\vec{r}') = q V \hat{y} \times \frac{\mu_0}{16\pi} \frac{q' V'}{d^2} (-\hat{x}) = \frac{\mu_0}{16\pi} \frac{q q' V V'}{d^2} \hat{z}$$

Se as duas cargas tiverem o mesmo sinal, elas vão se repelir (q' é empurrada para baixo e q é empurrada para cima (ação e reação)). Duas correntes de sentidos opostos se repelem mutuamente. Se as duas cargas tiverem sinais opostos ($q q' < 0$), elas vão se atrair (q' é puxada para cima e q é empurrada para baixo (ação e reação)). Duas correntes de mesmo sentido se atraem mutuamente.

A razão entre as magnitudes das forças elétrica e magnética é:

$$\frac{F_{E\ q/q'}}{F_{q/q'}} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{V V'} = \frac{c^2}{V V'}$$

sendo c a velocidade da luz, $c \cong 3 \times 10^8$ m/s. Vemos que a força elétrica entre as partículas é bem maior que a força magnética. Estamos supondo aqui que $V \ll c$ e $V' \ll c$, que é o regime de validade da expressão do campo magnético de uma partícula, $\vec{B}_q(\vec{r})$, que estamos usando. Para portadores de carga se movendo em fios transportando corrente elétrica esse regime se justifica porque as velocidades de arraste dos portadores são em geral minúsculas, da ordem de mm/s.

No caso de fios transportando corrente, eles são eletricamente neutros e, por isso, a força magnética não tem a concorrência da força elétrica. Os fios transportando corrente são eletricamente neutros porque os elétrons livres fluem por entre os íons positivos e a soma das cargas elétricas é zero. Não há excessos de carga elétrica nos fios transportando corrente, com exceção das densidades de carga superficiais necessárias para produzir o campo elétrico dentro do fio, de acordo com a lei de Ohm: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. Já discutimos um pouco sobre essas densidades de carga em um capítulo anterior. Fato é que essas densidades de carga são minúsculas, porque geralmente $\sigma \gg 1$ e, portanto, $\vec{E} \cong \vec{0}$, e seus efeitos de força podem ser desprezados.

c) Invertendo o sentido da velocidade de q' , de tal forma que as duas partículas se movam no mesmo sentido, as forças magnéticas passam a ser:

A força em q' por ela estar imersa no campo magnético de q com velocidade $\vec{V}' = V' \hat{y}$ é:

$$\vec{F}_{q/q'} = q' \vec{V}' \times \vec{B}_q(\vec{r}) = q' V' \hat{y} \times \frac{\mu_0}{16\pi} \frac{q V}{d^2} (-\hat{x}) = \frac{\mu_0}{16\pi} \frac{q q' V V'}{d^2} \hat{z}$$

Essa força inverte de sentido.

Para a partícula de carga q' , a posição de q é $\vec{r}' = 2d \hat{z}$. A velocidade dessa partícula agora é $\vec{V}' = V' \hat{y}$. Portanto:

$$\vec{B}_{q'}(\vec{r}') = \frac{\mu_0 q \vec{V}' \times \vec{r}'}{4 \pi r^3} = \frac{\mu_0 q' V' \hat{y} \times 2d \hat{z}}{4 \pi (2d)^3} = \frac{\mu_0 q' V'}{16 \pi d^2} \hat{x}$$

O campo magnético de q' inverte de sentido.

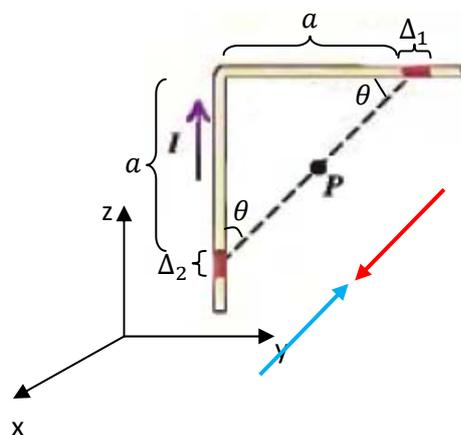
A força em q por ela estar imersa no campo magnético de q' com a mesma velocidade $\vec{V} = V \hat{y}$ é:

$$\vec{F}_{q'/q} = q \vec{V} \times \vec{B}_{q'}(\vec{r}') = q V \hat{y} \times \frac{\mu_0 q' V'}{16 \pi d^2} \hat{x} = \frac{\mu_0 q q' V V'}{16 \pi d^2} (-\hat{z})$$

Essa força também inverte de sentido (ação e reação).

Se as duas cargas tiverem o mesmo sinal, elas vão se atrair (q é empurrada para baixo e q' é empurrada para cima (ação e reação)). Duas correntes de mesmo sentido se atraem mutuamente.

E/P28.13: Um fio fino que é dobrado em forma de L transporta uma corrente I . A Figura ao lado mostra dois pequenos segmentos de fio, de comprimentos Δ_1 e Δ_2 e um ponto P localizado próximo ao fio. Considere o referencial mostrado, em que o fio está no plano yz (o plano da página).



O campo magnético produzido por um pequeno elemento de corrente $d\vec{l}$, que é um pequeno segmento de fio de comprimento dl em que a corrente flui no sentido de $d\vec{l}$, é dado pela lei de Biot-Savart:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4 \pi r^3}$$

(note que estou usando \vec{r} no lugar de \hat{r} no numerador). Note que nessa expressão o vetor posição \vec{r} é a posição onde o campo está sendo calculado: posição tendo o próprio elemento de corrente como origem/referência.

Para o elemento de corrente superior vemos que $d\vec{l} = \Delta_1 \hat{y}$. A posição do ponto P tendo esse elemento de corrente como origem/referência é (seta vermelha):

$$\vec{r} = -r \cos(\theta) \hat{y} - r \sin(\theta) \hat{z}$$

com: $r = \sqrt{a^2 + a^2}/2 = a/\sqrt{2}$ (metade da diagonal de um quadrado de lado a , a linha tracejada na Figura).

Portanto:

$$d\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta_1 \hat{y} \times (-r \cos(\theta) \hat{y} - r \sin(\theta) \hat{z})}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta_1}{r^2} \sin(\theta) (-\hat{x})$$

Note na Figura que:

$$\sin(\theta) = \frac{a}{2r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ou seja, $\theta = 45^\circ$ (é um quadrado). Portanto:

$$d\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \Delta_1}{a^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{x})$$

$d\vec{B}_1(P)$ está para dentro da página.

Para o elemento de corrente lateral vemos que $d\vec{l} = \Delta_2 \hat{z}$. A posição do ponto P tendo esse elemento de corrente como origem/referência é (seta azul):

$$\vec{r} = r \sin(\theta) \hat{y} + r \cos(\theta) \hat{z}$$

Portanto:

$$d\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta_2 \hat{z} \times (r \sin(\theta) \hat{y} + r \cos(\theta) \hat{z})}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta_2}{r^2} \sin(\theta) (-\hat{x})$$

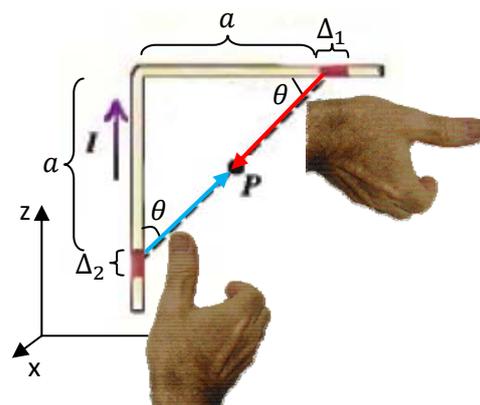
Concluindo:

$$d\vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \Delta_2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{x})$$

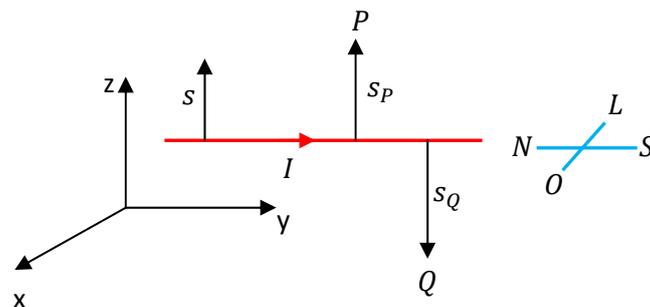
$d\vec{B}_2(P)$ também está para dentro da página.

Os dois elementos de corrente têm contribuições para o campo magnético que se somam em P.

As direções e sentidos obtidos aqui para o campo magnético podem ser conferidas utilizando-se a regra da mão direita: se o polegar da mão direita está na direção e sentido de $d\vec{l}$, os outros dedos dessa mão vão apontar no sentido de $d\vec{B}(\vec{r})$. A Figura ao lado ilustra o uso dessa regra, mostrando que os dois $d\vec{B}$ s em P estão apontando para dentro da página ($-\hat{x}$). São mostrados também os dois vetores posição \vec{r} (em vermelho e azul) usados nos cálculos acima.



E/P28.20: Um fio horizontal transporta uma corrente I no sentido do norte para o sul. Na Figura ao lado adotamos um referencial em que o fio está ao longo de y e o eixo x sai ortogonalmente da página.



Sabemos que o campo magnético de um fio reto muito longo tem a direção tangente aos círculos coaxiais e concêntricos ao fio e o sentido dado pela regra da mão direita: se o polegar da mão direita aponta no sentido da corrente, os outros dedos da mão direita vão apontar no sentido de \vec{B} . A magnitude do campo é (de acordo com a lei de Ampère):

$$B(s) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s}$$

sendo s o raio (distância) medido em relação ao fio (s é o raio das coordenadas cilíndricas com o eixo z ao longo do fio). Portanto, no ponto P mostrado na Figura o campo magnético é:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s_P} \hat{x}$$

Esse campo sai ortogonalmente da página. Está no sentido de leste para oeste.

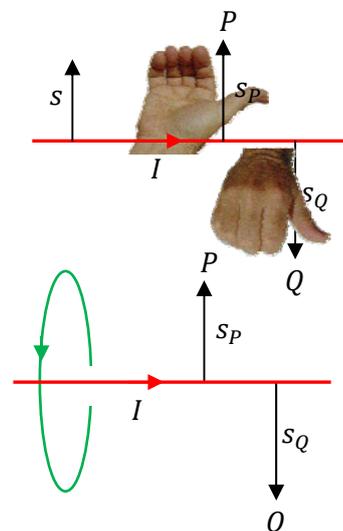
No ponto Q mostrado na Figura o campo magnético é:

$$\vec{B}(Q) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s_Q} (-\hat{x})$$

Esse campo entra ortogonalmente na página. Está no sentido de oeste para leste.

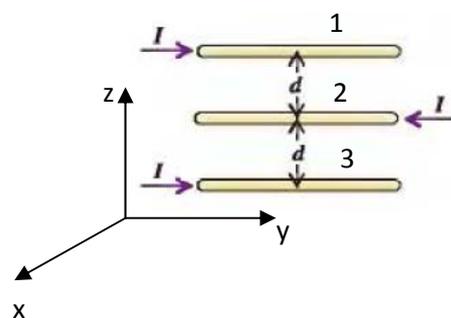
O enunciado do problema menciona um ponto abaixo do fio, ou seja, como o ponto Q da Figura, com $s_Q = 5,5$ m e uma corrente no fio $I = 800$ A. Com esses dados obtemos $B(Q) \cong 2,9 \times 10^{-5}$ T, apontando de oeste para leste (ao longo de $-\hat{x}$).

Na Figura ao lado ilustramos o uso da regra da mão direita para determinação do sentido de \vec{B} . Com o polegar no sentido da corrente, os outros dedos da mão direita estarão apontando no sentido de \vec{B} . Para o ponto P esses dedos apontam para fora do plano da página, enquanto que para o ponto Q eles apontam para dentro desse plano. Esses resultados são compatíveis com um campo magnético cujas linhas de força são círculos centrados no fio, orientados de acordo com a regra da mão direita (polegar no sentido de I , os outros dedos circulam no sentido de \vec{B}), conforme a Figura ao lado.



O campo magnético da Terra tem o sentido de sul para norte, com magnitude da ordem de 5×10^{-5} T, que é comparável ao campo do fio no ponto Q. Portanto, utilizar uma bússola no ponto Q pode não ser uma boa idéia, pois a agulha da bússola vai apontar na direção do campo magnético resultante, que nesse caso seria a direção nordeste (norte+leste). Foi através de um evento como esse, em que a orientação de uma bússola era perturbada pelo campo magnético de um fio, que Hans Oersted descobriu, em 1820, que correntes elétricas produzem campos magnéticos. Antes dessa descoberta se acreditava que não havia nenhuma relação entre os fenômenos elétricos e os fenômenos magnéticos. Hoje sabemos que esses dois fenômenos têm uma mesma origem, as cargas elétricas. Portanto, são dois fenômenos intimamente ligados entre si.

E/P28.28: Três fios retos longos transportam correntes conforme a Figura ao lado. Vamos chamar de I_1 a corrente no fio 1 e assim por diante. Adotamos um referencial em que todas as correntes estão ao longo do eixo y e o eixo x aponta ortogonalmente para fora da página. A página é o plano yz.



Sabemos que o campo magnético de um fio reto muito longo tem a direção tangente aos círculos coaxiais e concêntricos ao fio e o sentido dado pela regra da mão direita: se o polegar da mão direita aponta no sentido da corrente, os outros dedos da mão direita vão apontar no sentido de \vec{B} . A magnitude do campo é (de acordo com a lei de Ampère):

$$B(s) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s}$$

sendo s o raio (distância) medido em relação ao fio (s é o raio das coordenadas cilíndricas com o eixo z ao longo do fio).

Vamos começar calculando a força magnética no fio 1. A força magnética em um fio reto de comprimento L que transporta uma corrente I , imerso em um campo magnético uniforme \vec{B} é:

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

sendo \vec{L} um vetor comprimento de módulo L que aponta na direção do fio e no sentido da corrente no fio. Para um fio infinito, como os definidos nessa questão, essa força será infinita. Portanto, só está bem definida a força por unidade de comprimento \vec{F}/L , que é o que calcularemos aqui.

Para o fio 1 devemos calcular:

$$\vec{F}_1 = I_1 \vec{L}_1 \times (\vec{B}_2(1) + \vec{B}_3(1))$$

sendo $\vec{B}_2(1)$ o campo magnético produzido pelo fio 2 sobre o fio 1 e assim por diante. Vemos na Figura que:

$$\vec{B}_2(1) = \frac{\mu_0 I_2}{2 \pi d} (-\hat{x}) \quad \vec{B}_3(1) = \frac{\mu_0 I_3}{2 \pi (2d)} \hat{x} \quad \vec{L}_1 = L_1 \hat{y}$$

Portanto:

$$\vec{F}_1 = I_1 L_1 \hat{y} \times \frac{\mu_0}{2 \pi d} \left(-I_2 + \frac{I_3}{2} \right) \hat{x} \Rightarrow \frac{\vec{F}_1}{L_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi d} \left(-I_2 + \frac{I_3}{2} \right) (-\hat{z})$$

Se as correntes I_2 e I_3 tiverem a mesma magnitude, o fio 1 vai ser empurrado para cima, ao longo de $+z$. Isso porque o fio 2 (mais próximo) repele mais intensamente do que o fio 3 atrai. Lembrando que: correntes paralelas se atraem e correntes antiparalelas se repelem.

Analogamente, para o fio 2 devemos calcular:

$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{L}_2 \times (\vec{B}_1(2) + \vec{B}_3(2))$$

Obtemos:

$$\vec{B}_1(2) = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi d} (-\hat{x}) \quad \vec{B}_3(2) = \frac{\mu_0 I_3}{2 \pi d} \hat{x} \quad \vec{L}_2 = L_2 (-\hat{y})$$

Portanto:

$$\vec{F}_2 = I_2 L_2 (-\hat{y}) \times \frac{\mu_0}{2 \pi d} (-I_1 + I_3) \hat{x} \Rightarrow \frac{\vec{F}_2}{L_2} = \frac{\mu_0 I_2}{2 \pi d} (-I_1 + I_3) \hat{z}$$

Se as correntes I_1 e I_3 tiverem a mesma magnitude, o fio 2 vai sofrer uma força resultante nula. O fio 2 será igualmente repelido pelos fios 1 e 3. Correntes opostas se repelem.

Para o fio 3 devemos calcular:

$$\vec{F}_3 = I_3 \vec{L}_3 \times (\vec{B}_1(3) + \vec{B}_2(3))$$

Obtemos:

$$\vec{B}_1(3) = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi (2d)} (-\hat{x}) \quad \vec{B}_2(3) = \frac{\mu_0 I_2}{2 \pi d} \hat{x} \quad \vec{L}_3 = L_3 \hat{y}$$

Portanto:

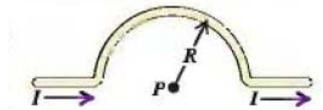
$$\vec{F}_3 = I_3 L_3 \hat{y} \times \frac{\mu_0}{2 \pi d} \left(-\frac{I_1}{2} + I_2 \right) \hat{x} \Rightarrow \frac{\vec{F}_3}{L_3} = \frac{\mu_0 I_3}{2 \pi d} \left(-\frac{I_1}{2} + I_2 \right) (-\hat{z})$$

Se as correntes I_1 e I_2 tiverem a mesma magnitude, o fio 3 vai ser empurrado para baixo, ao longo de $-z$. Isso porque o fio 2 (mais próximo) repele mais intensamente do que o fio 1 atrai.

Note que a expressão $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$ para a força em um fio só se aplica se o campo \vec{B} for uniforme sobre o fio, ou seja, se ele tiver o mesmo valor em todos os pontos do fio. Caso contrário, teríamos que fazer uma integral de $d\vec{F} = I d\vec{L} \times \vec{B}$. O campo \vec{B} de um fio reto não é uniforme, pois ele depende do raio s e tem

direção diferente em cada ponto do espaço. Mas, nesse caso específico, estamos calculando a força que um fio faz em outro fio paralelo ao primeiro. Nesse caso \vec{B} é uniforme sobre o fio que está sofrendo a força. \vec{B} não tem que ser uniforme no espaço todo, para que valha $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$, ele tem que ser uniforme apenas no fio sobre o qual estamos calculando a força magnética. O campo \vec{B} deve ter o mesmo valor em todos os pontos do fio sobre o qual estamos calculando a força magnética. Nesse caso podemos usar $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$.

E/P28.30: Um fio fino que transporta uma corrente I tem a forma mostrada na Figura ao lado. O campo magnético em P é?



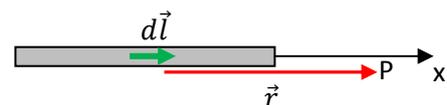
Devemos separar o fio em três partes, dois fios retos longos e um fio curvo com a forma de um arco de círculo de raio R . O princípio da superposição diz que o campo magnético em P é a soma vetorial dos campos magnéticos dessas três partes.

Para cada parte usaremos a lei de Biot-Savart que diz que:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

(note que estou usando \vec{r} no lugar de \hat{r} no numerador). Note que nessa expressão o vetor posição \vec{r} é a posição onde o campo está sendo calculado: posição tendo o próprio elemento de corrente $I d\vec{l}$ como origem/referência. O vetor $d\vec{l}$ é um vetor comprimento infinitesimal paralelo ao fio e orientado no sentido da corrente.

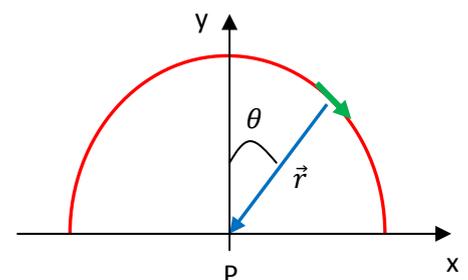
Para o fio reto da esquerda obtemos, conforme a Figura ao lado:



$$d\vec{l} = dl \hat{x} \text{ e } \hat{r} = r \hat{x}$$

Portanto: $d\vec{l} \times \vec{r} = r dl (\hat{x} \times \hat{x}) = \vec{0}$. A mesma idéia vale para o fio reto da direita (apenas $\hat{r} = -r \hat{x}$). Portanto, os fios retos não contribuem para o campo magnético em P. Resta apenas calcular o campo do fio curvo.

Considere a Figura ao lado onde adotamos um referencial com origem no ponto P. O eixo z está saindo ortogonalmente da página. Note que $d\vec{l}$ (seta verde) é tangente ao arco de círculo, em uma posição θ com $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, para varrer todo o arco de círculo. Note também que \vec{r} é radial, ou seja, ortogonal à $d\vec{l}$ e de módulo constante igual a R , o raio do arco de círculo. Portanto, usando a regra da mão direita para o produto



vetorial vemos que:

$$d\vec{l} \times \vec{r} = R dl (-\hat{z})$$

Segue que:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R dl}{4 \pi R^3} (-\hat{z}) = \frac{\mu_0 I dl}{4 \pi R^2} (-\hat{z})$$

Integrando no arco todo (de comprimento πR) obtemos:

$$\vec{B}(P) = \int_{ARCO} d\vec{B}(\vec{r}) = \int_{ARCO} \frac{\mu_0 I dl}{4 \pi R^2} (-\hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{4 \pi R^2} (-\hat{z}) \int_{ARCO} dl = \frac{\mu_0 I}{4 \pi R^2} (-\hat{z}) (\pi R) = \frac{\mu_0 I}{4 R} (-\hat{z})$$

Concluindo: o fio formado pelos segmentos retos e pelo segmento curvo produz no ponto P um campo magnético para dentro da página de magnitude:

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4 R}$$

E/P28.31: Dois fios se juntam para formar o circuito mostrado na Figura ao lado.

O campo magnético em P é?

Nesse exercício podemos aproveitar nossos resultados obtidos no exercício anterior. Os (4) segmentos retos não contribuem para o campo magnético em P. O segmento curvo de cima contribui com um campo entrando ortogonalmente na página ($-\hat{z}$) de magnitude:

$$\frac{\mu_0 I_1}{4 R}$$

Para o segmento curvo de baixo o raciocínio é o mesmo, mas note que a regra da mão direita diz que o campo magnético desse fio está saindo ortogonalmente da página ($+\hat{z}$). A magnitude desse campo será:

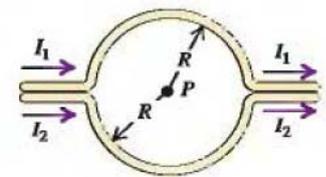
$$\frac{\mu_0 I_2}{4 R}$$

Portanto, o campo magnético em P será:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4R} (I_2 - I_1) \hat{z}$$

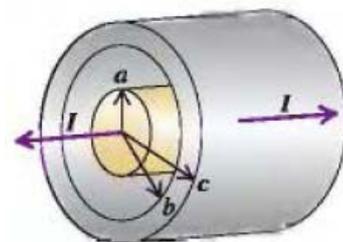
(lembre que o eixo z está saindo ortogonalmente da página). Se as duas correntes tiverem a mesma magnitude, o campo magnético em P será nulo. Se fizermos $I_2 = -I_1$ o circuito se torna equivalente a uma espira circular com corrente I_1 no sentido horário e o campo no centro dessa espira é:

$$\vec{B}_{esp}(P) = \frac{\mu_0}{2R} I_1 (-\hat{z})$$



Se fizermos $I_1 = -I_2$ o circuito se torna equivalente a uma espira circular com corrente I_2 no sentido anti-horário e o campo no centro dessa espira apenas inverte de sentido.

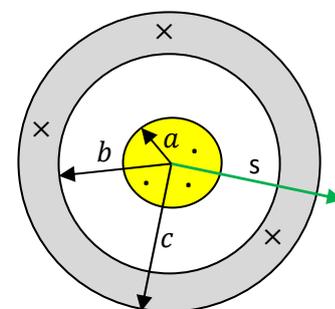
E/P28.37: Um cabo coaxial consiste em dois condutores cilíndricos coaxiais, um dentro do outro. A corrente I vai por um fio e volta pelo outro. Na Figura ao lado o condutor central é cilíndrico e maciço de raio a . O condutor externo é uma casca cilíndrica de raio menor b e raio maior c . Vamos assumir que as correntes fluam distribuídas uniformemente nas seções transversais desses condutores.



A Figura que nos ajuda mais a resolver esse problema é a que mostra as seções transversais dos fios, como mostrado ao lado. Se s é a distância até o eixo comum dos fios (eixo z), esperamos, dada a simetria da distribuição de corrente, que a magnitude do campo magnético produzido por esse cabo dependa apenas de s , ou seja:

$$B = B(s)$$

Quanto à direção e sentido, serão dadas pela regra da mão direita. \vec{B} tem a direção tangente aos círculos coaxiais e concêntricos ao cabo e o sentido dos dedos da mão direita, quando o polegar dessa mão aponta no sentido da corrente.



Vemos então que a corrente no fio interno vai contribuir com campos no sentido anti-horário, pois a corrente nesse fio sai do plano da página. A corrente no fio externo vai contribuir com campos no sentido horário, pois a corrente nesse fio entra no plano da página. Pensando em um sistema de coordenadas cilíndricas, com o eixo z saindo ortogonalmente da página, o fio interno contribui com campos na direção $+\hat{\phi}$ enquanto que o fio externo contribui com campos na direção $-\hat{\phi}$.

Agora vamos usar a lei de Ampère para determinar a função $B(s)$. A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

sendo C uma curva fechada qualquer (curva amperiana), orientada, $d\vec{l}$ vetores comprimento infinitesimal tangentes à curva C , com sentido ao longo da orientação de C e I_{INT} a corrente interna à essa curva, ou seja, o saldo de corrente que atravessa a superfície aberta delimitada pela curva C . Essa corrente possui um sinal, de acordo com a orientação de C . Orientando os dedos da mão direita no sentido da orientação de C , o polegar dessa mão vai definir o sentido positivo das correntes que contribuem para I_{INT} .

O “pulo do gato” consiste em se escolher uma curva C de tal forma que a função $B(s)$ saia de dentro da integral na lei de Ampère. Para que isso ocorra $B(s)$ deve ser uma constante sobre a curva, ou seja, a curva deve ser uma curva em que o raio s é constante. Essa curva é um círculo concêntrico ao cabo coaxial. Portanto, adotemos C=círculo de raio s orientado no sentido horário. Assumindo um \vec{B} também no sentido horário obtemos:

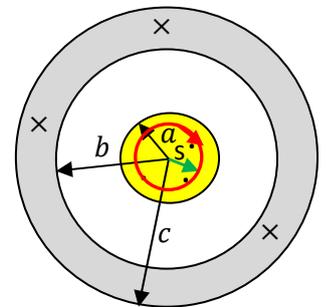
$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s)dl$$

Na lei de Ampère obtemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s) \oint_C dl = B(s) 2\pi s$$

Agora devemos considerar as diferentes regiões no cabo coaxial, pois para cada região haverá uma I_{INT} diferente.

Região $s < a$, dentro do fio interno: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário (ver a Figura ao lado). De acordo com a regra da mão direita, a corrente positiva será a corrente entrando na página. Portanto, vemos que a corrente interna a essa curva é negativa e é dada por:



$$I_{INT} = -J A = -\frac{I}{\pi a^2} \pi s^2 = -I \left(\frac{s}{a}\right)^2$$

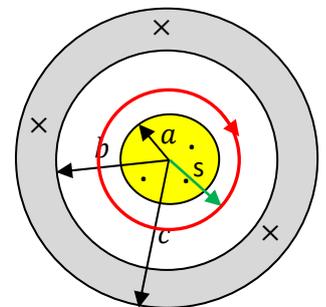
J é o módulo da densidade de corrente no fio de raio a : $J = I/\pi a^2$. A é a área do disco de raio s .

Da lei de Ampère:

$$B(s) 2\pi s = -\mu_0 I \left(\frac{s}{a}\right)^2 \Rightarrow B(s) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} s$$

Note que assumimos lá atrás que o campo magnético estava no sentido horário. O sinal negativo na expressão acima indica que o campo magnético nessa região está no sentido anti-horário. Esse resultado está de acordo com a regra da mão direita para o sentido do campo magnético.

Região $a < s < b$, no vácuo entre os fios: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário (Figura ao lado). Vemos que a corrente interna a essa curva é dada por:



$$I_{INT} = -I$$

Da lei de Ampère:

$$B(s) 2\pi s = -\mu_0 I \Rightarrow B(s) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

O sinal negativo na expressão acima indica que o campo magnético nessa região está no sentido anti-horário. Trata-se do campo (apenas) do fio interno (amarelo).

Região $b < s < c$, dentro do fio externo: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário (Figura ao lado). De acordo com a regra da mão direita, a corrente positiva será a corrente entrando na página. Portanto, vemos que a corrente interna a essa curva é dada por:

$$I_{INT} = -I + J' A' = -I + \frac{I}{\pi (c^2 - b^2)} \pi (s^2 - b^2) = I \left[-1 + \frac{s^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right]$$

ou seja, I_{INT} é dado pela corrente (toda) do fio interno (amarelo), $-I$ (negativa porque sai da página), mais a contribuição parcial:

$$I \frac{s^2 - b^2}{c^2 - b^2}$$

que é a corrente da casca externa (cinza) que passa por dentro da curva vermelha (positiva porque está para dentro da página). Essa corrente é simplesmente $J' A'$ com $J' = I/\pi (c^2 - b^2)$ a densidade de corrente na casca cilíndrica e $A' = \pi (s^2 - b^2)$ a área da coroa circular de raios b e $s > b$.

Da lei de Ampère:

$$B(s) 2 \pi s = \mu_0 I \left[-1 + \frac{s^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right] \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s} \left[-1 + \frac{s^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right]$$

Região $s > c$, fora do cabo: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário (Figura ao lado). De acordo com a regra da mão direita, a corrente positiva será a corrente entrando na página. Portanto, vemos que a corrente interna a essa curva é dada por:

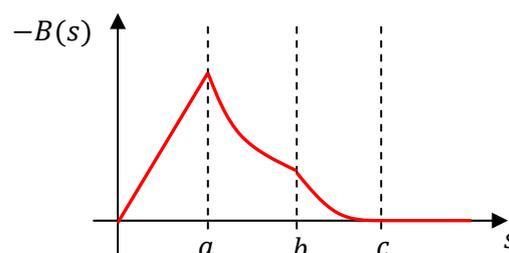
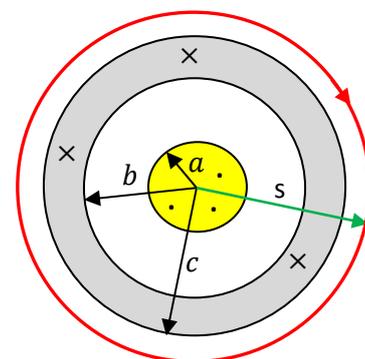
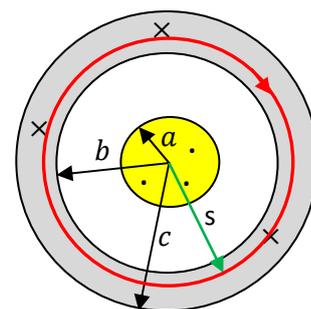
$$I_{INT} = -I + I = 0$$

Da lei de Ampère:

$$B(s) 2 \pi s = \mu_0 0 \Rightarrow B(s) = 0$$

Não há campo magnético fora do cabo. Essa é a razão de ser do cabo coaxial, minimizar o campo magnético externo e a interferência dos campos da corrente nesse cabo com outros dispositivos elétricos na sua vizinhança.

Na Figura ao lado esboçamos um gráfico do módulo do campo magnético, ou seja, de $-B(s)$, em função do raio s . Note que obtivemos um $B(s)$ sempre negativo porque assumimos em nossos cálculos que \vec{B} estava orientado no sentido horário. Mas, descobrimos que, tendo em vista os sentidos das correntes que assumimos nos fios, o campo \vec{B} está de fato no sentido anti-horário.



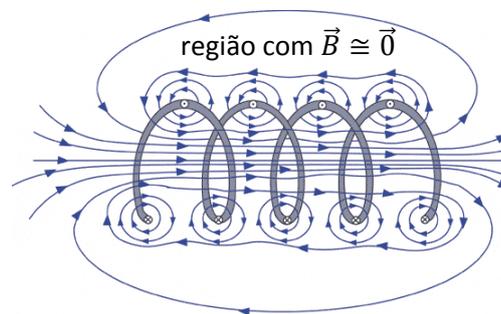
À medida que nos afastamos da origem o campo magnético vai aumentando, até que saímos do fio interno e o campo começa a decair. Quando entramos no fio externo o campo decai mais rapidamente até que ele se anula na superfície desse fio e em toda a região exterior ao cabo.

Ao lado mostramos uma Figura de um cabo coaxial real, como os utilizados em conexões de antenas de TV e internet. Um fio central é circundado por uma malha de fios que constitui a casca cilíndrica exterior. A mesma corrente vai por um fio e volta pelo outro. O campo magnético na região exterior do cabo é muito fraco, o que reduz a possibilidade de interferências eletromagnéticas. Para correntes constantes no tempo, o campo magnético exterior é identicamente nulo, conforme nossos resultados demonstraram.

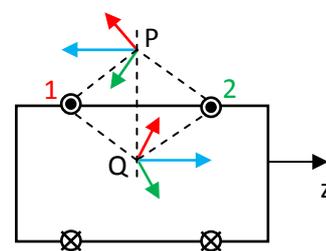


E/P28.40: Um solenóide cilíndrico longo possui N espiras, comprimento L e corrente I . Calcule o campo magnético próximo ao centro do solenóide.

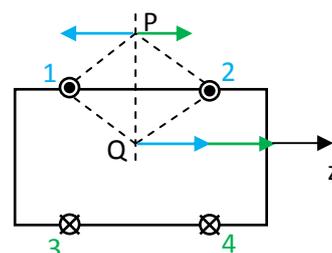
A Figura abaixo (copiada da internet) ilustra como os campos magnéticos com linhas de força circulares das espiras se superpõem no espaço para resultar no campo magnético do solenóide.



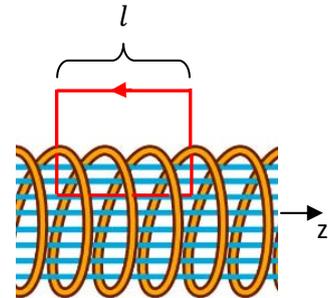
As Figuras que seguem tentam tornar essa ideia mais quantitativa. Considere um corte transversal do solenóide (o retângulo) em que vemos a corrente saindo do plano da página na seção superior (segmentos de corrente 1 e 2, bolinhas com pontinhos) e a corrente entrando no plano da página na seção inferior (segmentos de corrente 3 e 4, bolinhas com cruzinhas). Considere um ponto P fora do solenóide e um ponto Q dentro do solenóide. Vemos na Figura ao lado que os campos magnéticos produzidos pelos segmentos 1 e 2, que estão dispostos simetricamente em relação a P e Q , se superpõem produzindo um campo resultante ao longo de $+z$ no interior do solenóide e ao longo de $-z$ na região externa ao solenóide.



Na Figura ao lado levamos em conta a influência dos segmentos 3 e 4 que estão na porção inferior do solenóide. Vemos que, usando a mesma ideia anterior, o campo magnético resultante dos segmentos 3 e 4 (em verde) se opõe ao campo magnético dos segmentos 1 e 2 (em azul) na região exterior (P), enquanto que na região interior esses campos são paralelos.



A conclusão disso tudo é que na região dentro do núcleo do solenóide (Q) a superposição produz um campo intenso e basicamente axial, mas cujas linhas de força se espalham próximo das bordas (onde a simetria dos segmentos 1 e 2 e 3 e 4 deixa de existir), refletindo o fato de que o campo é mais fraco nessas regiões de bordas. Na região exterior (P) a superposição é menos efetiva e o campo é fraco. Na região central o campo magnético é axial e intenso. Esses fatos serão mais verdadeiros à medida que as espiras forem mais juntas, mais apertadas umas contra as outras, e o solenóide for mais longo. Em um solenóide infinito não há efeitos de borda: o campo interno é axial e uniforme (constante) e o campo externo é nulo. A Figura ao lado mostra um segmento de um solenóide infinito, com as linhas de \vec{B} em azul (a curva vermelha será utilizada mais adiante). Se a corrente estiver descendo nos lados da frente das espiras, o campo magnético no interior do solenóide terá o sentido +z, ou seja:



$$\vec{B} = B \hat{z}$$

Queremos calcular o valor exato de B , que será uma aproximação razoável para o campo magnético na região central de um solenóide longo de tamanho finito L .

Note que no caso de um solenóide infinito não podemos especificar seu tamanho L e seu número de espiras N , ambos são infinitos. Podemos especificar apenas a razão $n = N/L$ que é a densidade de espiras por unidade de comprimento.

A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

sendo C uma curva fechada qualquer, orientada, $d\vec{l}$ vetores comprimento infinitesimal tangentes à curva C , com sentido ao longo da orientação de C e I_{INT} a corrente interna a essa curva, ou seja, o saldo de corrente que atravessa a superfície aberta delimitada pela curva C .

No caso do solenóide infinito obtemos:

$$\oint_C B \hat{z} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

Considere então a curva vermelha mostrada na Figura anterior. Trata-se de um retângulo orientado com um dos lados (L_1 , de comprimento l) dentro do solenóide, orientado paralelamente ao campo \vec{B} , um lado (L_2) no exterior do solenóide, onde não há campo, e dois lados (L_3 e L_4) ortogonais ao campo \vec{B} (onde ele

existe, mas note que $\hat{z} \cdot d\vec{l} = 0$ em L3 e L4). Na integral acima, realizada em cada um desses quatro lados, só resta a integral no lado L1, de onde obtemos:

$$\oint_C B \hat{z} \cdot d\vec{l} = B \int_{L1} dl = B l = \mu_0 I_{INT}$$

Note que a curva subentende uma superfície retangular que é cortada por algumas espiras. Cada espira que corta essa superfície contribui com $+I$ para a corrente interna I_{INT} (lembre-se que, de acordo com a regra da mão direita, as correntes saindo do plano da página são positivas). A quantidade de espiras que corta essa superfície é $n l$ e, portanto:

$$B l = \mu_0 I_{INT} = \mu_0 n l I \Rightarrow B = \mu_0 n I$$

Voltando ao solenóide de tamanho finito, obtemos:

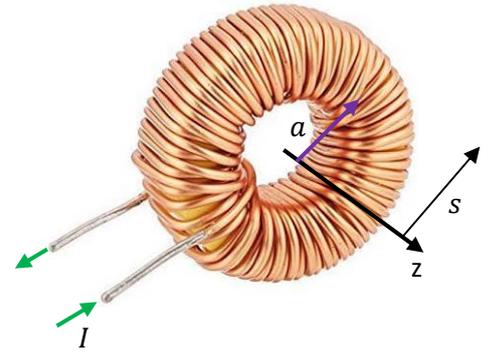
$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

O vetor campo magnético é dado por:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{L} I \hat{z}$$

O campo magnético de um solenóide muito longo é confinado ao interior de seu núcleo, axial, e de magnitude tanto maior quanto maior a corrente circulando nele e maior a densidade de espiras por unidade de comprimento. O fator μ_0 na expressão acima significa que supomos que o núcleo do solenóide está vazio (vácuo). Se preenchermos esse núcleo com uma liga de ferro especial, podemos mudar esse valor, aumentando bastante o campo magnético do solenóide. O Permalloy (níquel+ferro), por exemplo, possui $\mu_{per} \cong 100.000 \mu_0$, ou seja, ao preenchermos o núcleo de um solenóide com Permalloy, aumentamos seu campo magnético em cerca de 10^5 vezes, com a mesma corrente e mesma densidade de espiras. Essa amplificação do campo magnético se dá porque as correntes elétricas microscópicas (orbitais e de spin) que existem dentro do Permalloy se organizam, sob ação do campo magnético fraco da corrente no solenóide, e passam a gerar, elas mesmas, um campo magnético intenso no espaço. A essa organização dos momentos magnéticos do núcleo damos o nome de magnetização. A corrente elétrica no solenóide produz um campo \vec{B} que magnetiza (orienta os momentos de dipolo magnético em uma mesma direção) o material dentro do núcleo, que passa a produzir um campo magnético intenso no espaço.

E/P28.44: Um solenóide toroidal de raio médio $s = a$ e N espiras onde circula uma corrente I . A Figura ao lado ilustra esse solenóide e um sistema de coordenadas apropriado: z é o eixo do solenóide e s é o raio (cilíndrico) em relação a esse eixo. a é o raio médio do solenóide. Supondo espiras enroladas de forma bem compacta e uniforme, o campo magnético produzido pela corrente I que circula nesse solenóide fica confinado á região toroidal em seu interior, tem linhas “de força” circulares centradas no eixo z e módulo dado pela equação:

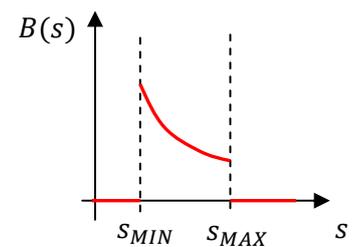


$$B(s)2\pi s = \mu_0 N I$$

Essa equação pode ser obtida da aplicação da lei de Ampère a essa simetria particular, qual seja: $\vec{B} = B(s) \hat{\phi}$. Portanto, a aplicação da lei de Ampère a uma curva amperiana circular de raio s fornece (exemplo 28.10):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT} \Rightarrow B(s)2\pi s = \mu_0 N I$$

Essa expressão é válida dentro da região toroidal no interior do solenóide, ou seja, com $s_{MIN} < s < s_{MAX}$ e $z_{MIN} < z < z_{MAX}$. A Figura ao lado mostra um gráfico de $B(s)$ versus o raio s (com $z_{MIN} < z < z_{MAX}$). Fora do solenóide o campo é nulo e dentro do volume do solenóide ele decai com $1/s$.



Para um solenóide de espessura radial $h = s_{MAX} - s_{MIN}$ não muito grande podemos assumir um raio médio $s = a$ e um campo magnético de módulo (médio) constante em seu interior:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi a}$$

Por exemplo, se a é a média aritmética de r_{MIN} e r_{MAX} , segue que o campo médio no interior do solenóide é:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi (r_{MIN} + r_{MAX})/2} = \frac{\mu_0 N I}{\pi (r_{MIN} + r_{MAX})}$$

Se a espessura do solenóide é h , então $r_{MAX} = r_{MIN} + h$ e, portanto:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\pi (r_{MIN} + r_{MIN} + h)} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_{MIN}} \left(1 + \frac{h}{2r_{MIN}}\right)^{-1} \cong \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_{MIN}} \left(1 - \frac{h}{2r_{MIN}}\right)$$

E/P28.46: Um solenóide toroidal de raio médio $s = a$ e N espiras onde circula uma corrente I , como no exercício anterior 28.46. Agora preenchamos o espaço interior do solenóide com um material magnético de permeabilidade relativa $K_m \cong 80$.

Os materiais magnéticos podem ser divididos basicamente em dois grupos: “duros” (hard) e “moles” (soft). Os materiais “duros” são aqueles capazes de preservar um estado magnetizado (pólos N e S em suas extremidades) e são geralmente utilizados na fabricação de ímãs. Os materiais “moles” se magnetizam intensamente pelo estímulo de um campo magnético externo e se desmagnetizam tão logo esse estímulo cessa. Por isso eles são usados em núcleos de motores e transformadores elétricos, tanto de corrente contínua (CC) quanto de corrente alternada (CA). Esses materiais amplificam o campo magnético produzido por correntes em solenóides, amplificando as forças, os torques e as potências. Um exemplo de material magnético “mole” é uma liga de aço-carbono-silício.

Na ausência do material magnético no núcleo, o campo magnético (médio) no interior do solenóide toroidal é aquele produzido unicamente pela corrente I que flui nas espiras do solenóide e vale (exercício 28.46):

$$B^{(v\u00e1cuo)} = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi a}$$

Na presença do material dentro do núcleo, basta substituir μ_0 por $K \mu_0$:

$$B^{(material)} = K \frac{\mu_0 N I}{2 \pi a} \cong 80 B^{(v\u00e1cuo)}$$

$B^{(material)}$ é o campo magnético no interior do solenóide criado pela corrente I nas espiras e pelos milhões e milhões ($\cong 10^{23}$) de correntes microscópicas dentro dos átomos que compõem o material magnético. Basicamente, o campo $\vec{B}^{(v\u00e1cuo)}$ atua sobre essas correntes microscópicas que estavam orientadas ao acaso e organiza essas correntes, orientando-as paralelamente entre si, fazendo com que seus campos magnéticos microscópicos se sobreponham e criem um campo magnético intenso no espaço.

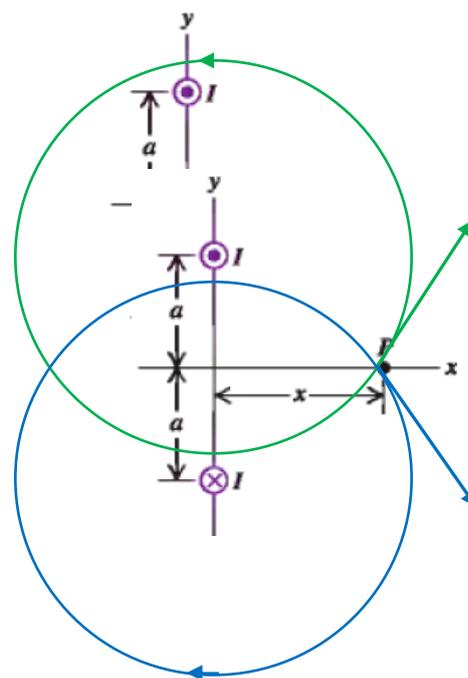
O campo magnético $B^{(material)}$ que existe no espaço dentro do núcleo é a superposição do campo magnético criado apenas por I , $B^{(v\u00e1cuo)}$, com o campo magnético criado pelas correntes atômicas (órbita+spin) no material, que podemos chamar de $B^{(correntes\ at\u00f4micas)}$. Portanto, sendo esses campos colineares, segue que:

$$B^{(material)} = B^{(vacuo)} + B^{(correntes\ at\u00f4micas)}$$

Concluindo: $B^{(correntes\ at\u00f4micas)} = B^{(material)} - B^{(vacuo)} \cong 79 B^{(vacuo)}$. A maior parte do campo magnético no espaço é oriunda das correntes atômicas no material magnético que ocupa o núcleo do solenóide.

E/P28.60:

A Figura ao lado mostra a visão de frente de dois fios retos muito longos transportando correntes de magnitude I em sentidos opostos. No fio de cima a corrente sai da página e no fio de baixo a corrente entra na página. Queremos calcular o campo magnético no ponto P, que é um ponto qualquer sobre o eixo equidistante dos dois fios: eixo x.



A Figura ao lado ilustra as linhas do campo \vec{B} produzido por cada um dos fios, linhas que passam por P. As linhas de \vec{B} do fio superior (em verde) são círculos centrados nele, orientadas no sentido anti-horário. As linhas de \vec{B} do fio inferior (em azul) são círculos centrados nele, orientadas no sentido horário. Os campos desses fios em P são tangentes a essas linhas de força que passam por P, são as setas verde e azul. Note que essas setas têm o mesmo tamanho, pois P está a uma mesma distância dos dois fios (e as correntes são iguais) e que, portanto, suas componentes y se cancelam. Suas componentes x são iguais e se somam. Conclusão: para calcular o campo \vec{B} que os dois fios produzem no eixo x basta calcular a componente B_x de um fio e multiplicar por dois, ou seja:

$$\vec{B} = 2 B_x \hat{x}$$

Para calcular o B_x de um fio usaremos a Figura que segue, que mostra apenas o fio superior. Da lei de Ampère sabemos que o módulo de \vec{B} em P (o tamanho da seta verde) é:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$$

Vemos na Figura que (B_x é a seta vermelha):

$$B_x = B \cos(\theta)$$

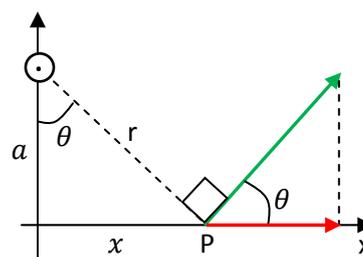
com $\cos(\theta) = a/r$. Portanto, como $r^2 = a^2 + x^2$ concluímos que:

$$B_x = B \cos(\theta) = \frac{\mu_0 I a}{2 \pi r r} = \frac{\mu_0 I a}{2 \pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

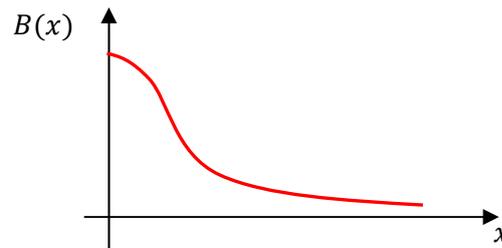
Concluindo, o campo magnético dos dois fios em P é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \hat{x}$$

c) Na Figura ao lado esboçamos um gráfico de $B(x)$ em função de x .



Note que o campo magnético tem um máximo em $x=0$, que corresponde ao ponto central na linha reta que liga os dois fios. Note também que o gráfico na região $x < 0$ é igual a esse, rebatido para a esquerda.



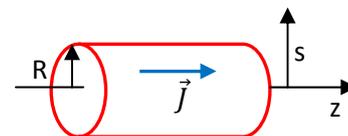
Para $x \gg a$ obtemos o comportamento assintótico:

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \rightarrow \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{x^2}$$

ou seja, o campo magnético produzido pelos dois fios decai rapidamente para zero, com o quadrado da distância x .

E/P28.71:

Um fio cilíndrico reto, longo, com seção transversal circular de raio R transporta uma corrente que não está distribuída uniformemente em sua seção transversal.



Se s é o raio medido em relação ao eixo do fio (eixo z na Figura ao lado), a densidade de corrente no fio é dada por:

$$\vec{J}(s) = \alpha s \hat{z}$$

com α uma constante (positiva). A corrente se concentra mais próximo à superfície do fio, pois $J(s)$ cresce com o raio s . Note que o fio é um cilindro maciço, com corrente fluindo em todo seu volume, na direção axial.

a) Se a corrente fluindo no fio é I , então:

$$I = \int_{SF} \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

sendo SF a superfície da seção transversal do fio (um disco de raio R), \hat{n} um vetor unitário ortogonal à essa superfície, $\hat{n} = \hat{z}$, e dA uma área infinitesimal nessa superfície. Note que I é o fluxo de \vec{J} através de SF . Portanto:

$$I = \int_{SF} \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \int_{SF} \alpha s \hat{z} \cdot \hat{z} 2\pi s ds = 2\pi \alpha \int_{s=0}^{s=R} s^2 ds = 2\pi \alpha \frac{R^3}{3}$$

O elemento de área conveniente aqui é a coroa circular de espessura infinitesimal ds : $dA = 2\pi s ds$.

Conclusão:

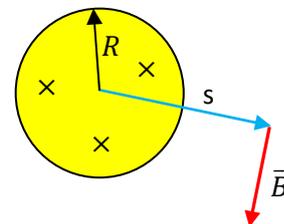
$$\alpha = \frac{3I}{2\pi R^3}$$

b) Vamos usar a lei de Ampère para calcular o campo magnético produzido por esse fio. Nosso ponto de partida será o reconhecimento de que essa distribuição de corrente produz um campo magnético com a simetria cilíndrica, ou seja:

$$B = B(s)$$

O vetor \vec{B} tem a direção tangente aos círculos concêntricos ao fio e com sentido dos dedos da mão direita, quando o polegar dessa mão aponta no sentido da corrente.

A Figura que nos ajuda mais a resolver esse problema é a que mostra a seção transversal do fio, como mostrado acima. A corrente está entrando no plano da página e o campo \vec{B} estará, portanto, no sentido horário. Pensando em um sistema de coordenadas cilíndricas, com o eixo z entrando ortogonalmente na página, \vec{B} tem a direção $+\hat{\phi}$.



Agora vamos usar a lei de Ampère para determinar a função $B(s)$. A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

sendo C uma curva fechada qualquer, orientada, $d\vec{l}$ vetores comprimento infinitesimal tangentes à curva C, com sentido ao longo da orientação de C e I_{INT} a corrente interna à essa curva, ou seja, o saldo de corrente que atravessa a superfície aberta delimitada pela curva C. Essa corrente possui um sinal, de acordo com a orientação de C. Orientando os dedos da mão direita no sentido da orientação de C, o polegar dessa mão vai definir o sentido positivo das correntes que contribuem para I_{INT} .

O “pulo do gato” consiste em se escolher uma curva C de tal forma que a função $B(s)$ saia de dentro da integral na lei de Ampère. Para que isso ocorra $B(s)$ deve ser uma constante sobre a curva, ou seja, a curva deve ser uma curva em que o raio s é constante. Essa curva é um círculo concêntrico ao fio. Portanto, adotemos C=círculo de raio s orientado no sentido horário. Já sabemos que \vec{B} também está no sentido horário e obtemos:

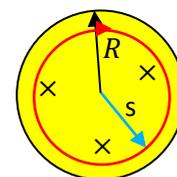
$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s)dl$$

Na lei de Ampère obtemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s) \oint_C dl = B(s) 2 \pi s$$

Agora devemos considerar as diferentes regiões no fio, pois para cada região haverá uma I_{INT} diferente.

Região $s < R$, dentro do fio: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário, como na Figura ao lado. De acordo com a regra da mão direita, a corrente positiva



será a corrente entrando na página. Portanto, vemos que a corrente interna a essa curva é positiva e é dada por:

$$I_{INT} = \int_{SDs} \vec{j} \cdot \hat{n} dA = \int_{SDs} \alpha s \hat{z} \cdot \hat{z} 2\pi s ds = 2\pi \alpha \int_{s=0}^{s=s} s^2 ds = 2\pi \alpha \frac{s^3}{3} = 2\pi \frac{3I}{2\pi R^3} \frac{s^3}{3} = I \left(\frac{s}{R}\right)^3$$

sendo SDs a superfície do disco de raio s subentendida pela curva amperiana. Novamente o elemento de área conveniente aqui é a coroa circular de espessura infinitesimal ds : $dA = 2\pi s ds$. Da lei de Ampère:

$$B(s) 2\pi s = \mu_0 I \left(\frac{s}{R}\right)^3 \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^3} s^2$$

Note que assumimos lá atrás que o campo magnético estava no sentido horário. O sinal positivo na expressão acima indica que o campo magnético nessa região está mesmo nesse sentido. Esse resultado está de acordo com a regra da mão direita para o sentido do campo magnético de um fio reto.

Região $s > R$, no vácuo fora do fio: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário, como na Figura ao lado. A corrente interna a essa curva é dada por:

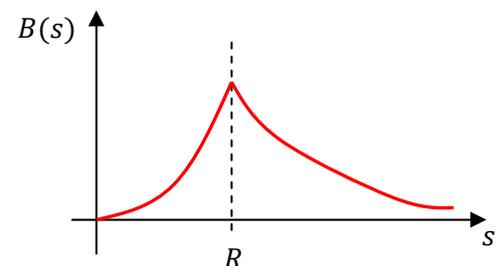
$$I_{INT} = I$$

Da lei de Ampère:

$$B(s) 2\pi s = \mu_0 I \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Na Figura ao lado esboçamos um gráfico de $B(s)$ versus s .

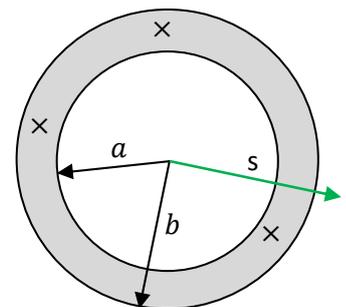
O campo cresce com s dentro do fio, porque a corrente vai aumentando com s . Fora do fio o campo decai com $1/s$, que é o decaimento usual do campo magnético (exterior) de um fio reto e longo. Note que o campo é contínuo na superfície do fio.



E/P28.74: Um fio reto cilíndrico tem a forma de um fio oco, de raio menor a e raio maior b . Esse fio transporta uma corrente I uniformemente distribuída em sua seção transversal.

A Figura que nos ajuda mais a resolver esse exercício é a que mostra a seção transversal do fio, como mostrado ao lado. A corrente está entrando no plano da página. Se s é a distância até o eixo do fio (eixo z), esperamos, dada a simetria da distribuição de corrente, que a magnitude do campo magnético produzido por esse fio dependa apenas de s , ou seja:

$$B = B(s)$$



Quanto à direção e sentido, serão dadas pela regra da mão direita. \vec{B} tem a direção tangente aos círculos concêntricos ao fio e com sentido dos dedos da mão direita, quando o polegar dessa mão aponta no sentido da corrente. Vemos então que a corrente no fio vai produzir um campo no sentido horário, pois a corrente entra no plano da página. Pensando em um sistema de coordenadas cilíndricas, com o eixo z entrando ortogonalmente na página, o campo está na direção $+\hat{\phi}$.

Agora vamos usar a lei de Ampère para determinar a função $B(s)$. A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

sendo C uma curva fechada qualquer, orientada, $d\vec{l}$ vetores comprimento infinitesimal tangentes à curva C, com sentido ao longo da orientação de C e I_{INT} a corrente interna à essa curva, ou seja, o saldo de corrente que atravessa a superfície aberta delimitada pela curva C. Essa corrente possui um sinal, de acordo com a orientação de C. Orientando os dedos da mão direita no sentido da orientação de C, o polegar dessa mão vai definir o sentido positivo das correntes que contribuem para I_{INT} .

O “pulo do gato” consiste em se escolher uma curva C de tal forma que a função $B(s)$ saia de dentro da integral na lei de Ampère. Para que isso ocorra $B(s)$ deve ser uma constante sobre a curva, ou seja, a curva deve ser uma curva em que o raio s é constante. Essa curva é um círculo concêntrico ao cabo coaxial. Portanto, adotemos C=círculo de raio s orientado no sentido horário. Sabendo que \vec{B} também está no sentido horário obtemos:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s)dl$$

Na lei de Ampère obtemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s) \oint_C dl = B(s) 2\pi s$$

Agora devemos considerar as diferentes regiões no fio, pois para cada região haverá uma I_{INT} diferente.

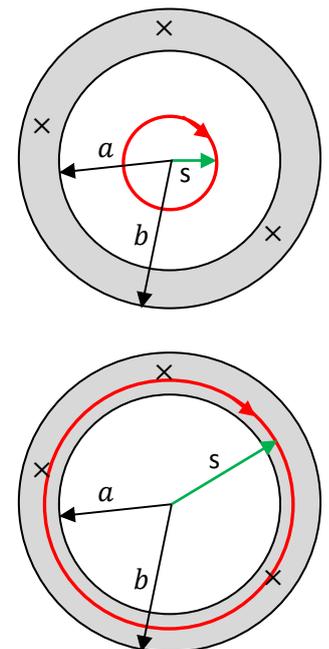
Região $s < a$, dentro da cavidade oca do fio: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário. De acordo com a regra da mão direita, a corrente positiva será a corrente entrando na página. Vemos que a corrente interna a essa curva é $I_{INT} = 0$.

Da lei de Ampère:

$$B(s) 2\pi s = 0 \Rightarrow B(s) = 0$$

Não há campo magnético dentro da cavidade axial ao fio.

Região $a < s < b$, dentro do material do fio: a curva C é o círculo vermelho de



raio s , orientado no sentido horário. Vemos que a corrente interna a essa curva é positiva e é dada por:

$$I_{INT} = JA' = \frac{I}{\pi (b^2 - a^2)} \pi (s^2 - a^2) = I \left[\frac{s^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right]$$

Na expressão acima, note que a densidade de corrente no fio é $J = I/A = I/\pi (b^2 - a^2)$ e a área do fio que passa por dentro da curva amperiana é a área da coroa circular de raios a e $s > a$: $A' = \pi (s^2 - a^2)$.

Da lei de Ampère:

$$B(s) 2 \pi s = \mu_0 I \left[\frac{s^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right] \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s} \left[\frac{s^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right]$$

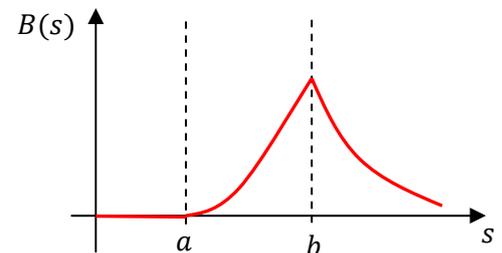
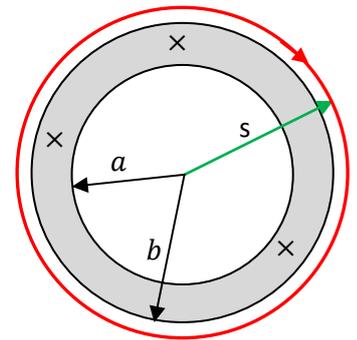
Região $s > b$, fora do fio: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário. A corrente interna a essa curva é:

$$I_{INT} = I$$

Aqui fizemos $A' = A$ e $I_{INT} = J A' = J A = I$. Da lei de Ampère:

$$B(s) 2 \pi s = \mu_0 I \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s}$$

Na Figura ao lado esboçamos um gráfico do módulo do campo magnético $B(s)$ em função do raio s . O campo magnético é nulo dentro da cavidade do fio. Dentro do fio o campo magnético vai ficando mais intenso com o aumento de s , porque a corrente vai aumentando com s , até que fora do fio o campo começa a decair com $1/s$, que é o comportamento esperado para a região fora de um fio reto longo. Note que $B(s)$ é uma função contínua.

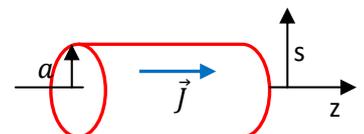


E/P28.77: Um fio cilíndrico reto, longo, com seção transversal circular de raio a transporta uma corrente que não está distribuída uniformemente em sua seção transversal. Se s é o raio medido em relação ao eixo do fio (eixo z na Figura acima), a densidade de corrente no fio é dada por:

$$\vec{J}(s) = \frac{2 I_0}{\pi a^2} \left[1 - \left(\frac{s}{a} \right)^2 \right] \hat{z}$$

A corrente se concentra mais próxima ao centro do fio, pois $J(s)$ decai com o raio s ($J(s = a) = 0$ e $J(s = 0) = 2 I_0/\pi a^2$). A curva de $J(s) \times s$ é uma parábola com a boca para baixo.

a) A corrente fluindo no fio é:



$$I = \int_{SF} \vec{j} \cdot \hat{n} dA$$

sendo SF a superfície da seção transversal do fio (um disco de raio a), \hat{n} um vetor unitário ortogonal à essa superfície, $\hat{n} = \hat{z}$, e dA uma área infinitesimal nessa superfície. Note que I é o fluxo de \vec{j} através de SF. Portanto:

$$I = \int_{SF} \vec{j} \cdot \hat{n} dA = \int_{SF} \frac{2 I_0}{\pi a^2} \left[1 - \left(\frac{s}{a} \right)^2 \right] \hat{z} \cdot \hat{z} 2\pi s ds = \frac{4 I_0}{a^2} \int_{s=0}^{s=a} \left[1 - \left(\frac{s}{a} \right)^2 \right] s ds$$

O elemento de área conveniente aqui é a coroa circular de espessura infinitesimal ds : $dA = 2\pi s ds$.

Conclusão:

$$I = \frac{4 I_0}{a^2} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4 a^2} \right] = I_0$$

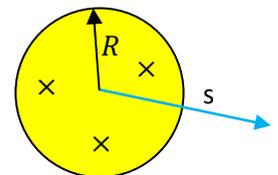
A constante I_0 na expressão de $\vec{j}(s)$ é exatamente a corrente que foi no fio.

b) Vamos usar a lei de Ampère para calcular o campo magnético produzido por esse fio. Nosso ponto de partida será o reconhecimento de que essa distribuição de corrente produz um campo magnético com a simetria cilíndrica, ou seja:

$$B = B(s)$$

e ainda \vec{B} tem a direção tangente aos círculos concêntricos ao fio e com sentido dos dedos da mão direita, quando o polegar dessa mão aponta no sentido da corrente.

A Figura que nos ajuda mais a resolver esse problema é a que mostra a seção transversal do fio, como mostrado ao lado. A corrente está entrando no plano da página e o campo \vec{B} estará, portanto, no sentido horário. Pensando em um sistema de coordenadas cilíndricas, com o eixo z entrando ortogonalmente na página, \vec{B} tem a direção $+\hat{\phi}$.



Agora vamos usar a lei de Ampère para determinar a função $B(s)$. A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

sendo C uma curva fechada qualquer, orientada, $d\vec{l}$ vetores comprimento infinitesimal tangentes à curva C, com sentido ao longo da orientação de C e I_{INT} a corrente interna à essa curva, ou seja, o saldo de corrente que atravessa a superfície aberta delimitada pela curva C. Essa corrente possui um sinal, de acordo com a orientação de C. Orientando os dedos da mão direita no sentido da orientação de C, o polegar dessa mão vai definir o sentido positivo das correntes que contribuem para I_{INT} .

O “pulo do gato” consiste em se escolher uma curva C de tal forma que a função $B(s)$ saia de dentro da integral na lei de Ampère. Para que isso ocorra $B(s)$ deve ser uma constante sobre a curva, ou seja, a curva deve ser uma curva em que o raio s é constante. Essa curva é um círculo concêntrico ao fio. Portanto, adotemos C=círculo de raio s orientado no sentido horário. Já sabemos que \vec{B} também está no sentido horário e obtemos:

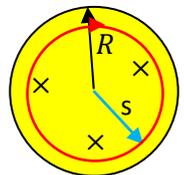
$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s)dl$$

Na lei de Ampère obtemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s) \oint_C dl = B(s) 2\pi s$$

Agora devemos considerar as diferentes regiões no fio, pois para cada região haverá uma I_{INT} diferente.

Região $s < a$, dentro do fio: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário, como na Figura ao lado. De acordo com a regra da mão direita, a corrente positiva será a corrente entrando na página. Portanto, vemos que a corrente interna a essa curva é positiva e é dada por:



$$I_{INT} = \int_{SDs} \vec{j} \cdot \hat{n} dA = \int_{SDs} \frac{2 I_0}{\pi a^2} \left[1 - \left(\frac{s}{a} \right)^2 \right] \hat{z} \cdot \hat{z} 2\pi s ds = \frac{4 I_0}{a^2} \int_{s=0}^{s=s} \left[1 - \left(\frac{s}{a} \right)^2 \right] s ds$$

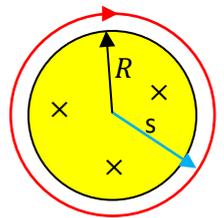
sendo SDs a superfície do disco de raio s subentendida pela curva amperiana. Portanto:

$$I_{INT} = \frac{2 I_0}{a^2} \left[s^2 - \frac{s^4}{2 a^2} \right]$$

Da lei de Ampère:

$$B(s) 2\pi s = \mu_0 \frac{2 I_0}{a^2} \left[s^2 - \frac{s^4}{2 a^2} \right] \Rightarrow B(s) = \mu_0 \frac{I_0}{\pi a^2} \left[s - \frac{s^3}{2 a^2} \right]$$

Região $s > a$, no vácuo fora do fio: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido horário, como na Figura ao lado. Vemos que a corrente interna a essa curva é dada por:

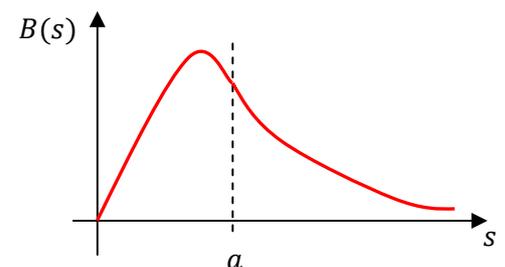


$$I_{INT} = I$$

Da lei de Ampère:

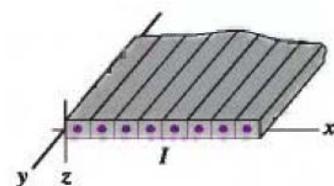
$$B(s) 2\pi s = \mu_0 I \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Na Figura ao lado esboçamos um gráfico de $B(s)$ versus s .

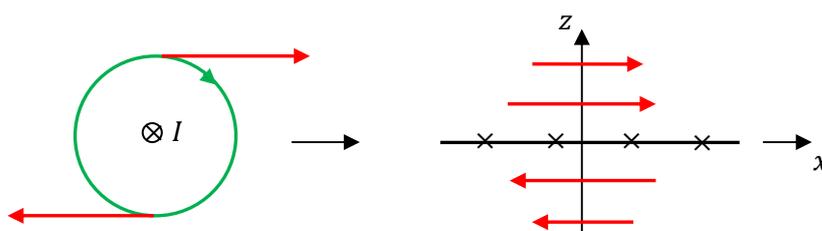


O campo inicialmente cresce com s dentro do fio, porque a corrente vai aumentando com s . Mas a corrente está mais concentrada próximo ao centro do fio e então o campo começa a decair com s próximo da periferia do fio (o crescimento da distância prevalece sobre o crescimento da corrente). Fora do fio o campo decai com $1/s$, que é o decaimento usual do campo magnético externo de um fio reto e longo. Note que o campo é contínuo na superfície do fio. O máximo de $B(s)$ dentro do fio pode ser obtido através da identificação do raio s^* onde a derivada de $B(s)$ se anula. Esse máximo ocorre em $s^* = \sqrt{6} a/3 \cong 0,82 a$.

E/P28.81: Uma placa plana infinita de espessura desprezível é formada através da união de infinitos fios retos longos, cada um transportando uma corrente I . A densidade de fios é n fios por unidade de comprimento ao longo de x . Tudo funciona como se o condutor fosse uma folha metálica plana e fina transportando corrente uniformemente distribuída em sua área. Calcule o campo magnético que essa placa produz em sua vizinhança.



A Figura ao lado mostra a seção transversal da placa (à direita), com a corrente entrando na página. Do lado esquerdo mostramos um fio reto infinito, também com corrente



entrando na página. Mostramos uma linha de força do campo magnético desse fio (em verde) e duas setas do campo magnético (em vermelho). A Figura tenta convencer que o campo magnético da placa (setas vermelhas à direita), que é a superposição dos campos de infinitos fios lado a lado, tem a direção do eixo x e os sentidos mostrados. A magnitude desse campo deve depender apenas da distância até a placa, ou seja:

$$B = B(|z|)$$

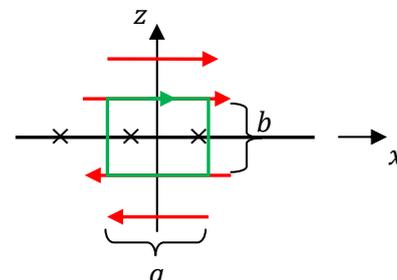
Agora vamos usar a lei de Ampère para determinar a função $B(|z|)$. A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

sendo C uma curva fechada qualquer, orientada, $d\vec{l}$ vetores comprimento infinitesimal tangentes à curva C , com sentido ao longo da orientação de C e I_{INT} a corrente interna à essa curva, ou seja, o saldo de corrente que atravessa a superfície aberta delimitada pela curva C . Essa corrente possui um sinal, de acordo com a orientação de C . Orientando os dedos da mão direita no sentido da orientação de C , o polegar dessa mão vai definir o sentido positivo das correntes que contribuem para I_{INT} .

O “pulo do gato” consiste em se escolher uma curva C de tal forma que a função $B(|z|)$ saia de dentro da integral na lei de Ampère. Para que isso ocorra $B(|z|)$ deve ser uma constante sobre a curva, ou seja, a curva deve ser uma curva em que a distância $|z|$ é constante. Essa curva é uma reta paralela à placa, já que o eixo z é ortogonal à placa. Portanto, adotemos C =retângulo de lados a e b orientado no sentido horário, conforme a Figura ao lado (retângulo em verde).

No lado de cima (L1) do retângulo vale $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(|z|)dl$ sendo z a coordenada z onde esse lado corta o eixo z . No lado de baixo (L2) do retângulo acontece a mesma coisa, $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(|z|)dl$ sendo z a coordenada z onde esse lado corta o eixo z . Estamos supondo aqui o retângulo está simétrico em relação à placa, ou seja, que $|z|$ é o mesmo nesses dois lados.



Então, o campo magnético tem o mesmo valor nesses dois lados: $B(|z|)$. Nos dois lados ortogonais à placa (L3 e L4) vale $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$. Portanto, obtemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{L1} B(|z|)dl + \int_{L2} B(|z|)dl + 0 + 0 = 2 B(|z|) \int_{L1} dl = 2B(|z|)a$$

Agora temos que computar a corrente que atravessa a área retangular delimitada por essa curva retangular. Cada fio que corta essa área contribui com uma corrente I positiva, pois I está entrando no plano da página. A quantidade de fios que atravessa esse retângulo é $n a$, portanto:

$$I_{INT} = n a I$$

Concluindo:

$$2B(|z|)a = \mu_0 n a I \Rightarrow B(|z|) = B = \frac{\mu_0 n I}{2}$$

Concluimos que o módulo do campo magnético produzido por essa placa independe da distância $|z|$, ou seja, o campo magnético é uniforme em cada um dos lados da placa (ele apenas inverte de sentido quando vamos de um lado para o outro).

Essa distribuição de correntes uniforme em uma placa plana infinita é análoga à distribuição uniforme de cargas (σ) em uma placa plana infinita, que também produz um campo elétrico uniforme em cada um dos lados da placa, apenas com uma inversão de sentido:

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

A Figura ao lado (retirada do site da *Mahavir metal corporation*) mostra um fio condutor de cobre com a geometria do tipo placa plana, similar a que foi considerada nesse exercício. Dentre suas vantagens, em relação ao condutor cilíndrico, estão a flexibilidade, a pouca exigência de espaço e a facilidade de dissipação de calor.

