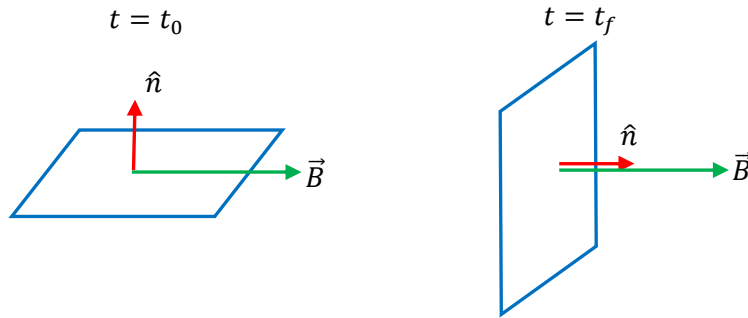


E/P29.1: Um solenóide com N espiras retangulares (ver Figura ao lado) de lados a e b é girado na presença de um campo magnético uniforme. Na Figura abaixo mostramos uma espira apenas deste solenóide:



O solenóide está se movendo e haverá então a indução de uma FEM de movimento ε_{MOV} , que é dada por (de acordo com a regra do fluxo):

$$\varepsilon_{MOV} = -\frac{d}{dt}\phi(t)$$

A FEM induzida média no intervalo de tempo Δt é dada por:

$$\langle \varepsilon_{MOV} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \varepsilon_{MOV}(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} -\frac{d}{dt}\phi(t) dt = -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} d\phi(t) = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\phi(t_f) - \phi(t_0)}{t_f - t_0}$$

O sinal negativo nessa expressão se relaciona com o sentido da FEM e da corrente induzida que vai resultar dessa FEM. Apontando o polegar no sentido de $\hat{n}$ (escolhido arbitrariamente na hora de calcular o fluxo $\phi(t)$), os outros dedos da mão direita vão apontar no sentido positivo de ε_{MOV} .

O fluxo magnético através do solenóide é dado por:

$$\phi = \int_{A.SOL.} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

sendo “A. SOL.” a área delimitada pelo solenóide que é “cortada” pelo campo $\vec{B}$. Para um campo magnético uniforme e apenas uma espira planar ($\hat{n}$ uniforme) essa expressão se reduz a:

$$\phi_1 = \int_{A_1} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \vec{B} \cdot \hat{n} \int_{A_1} dA = \vec{B} \cdot \hat{n} A_1$$

sendo A_1 a área da figura plana delimitada por uma espira apenas. Nesse caso um retângulo de lados a e b .

Para um solenóide com N espiras iguais, todas no mesmo campo $\vec{B}$:

$$\phi = N\phi_1 = N\vec{B} \cdot \hat{n} A_1$$

Portanto, sendo $A_1 = a b$, obtemos:

$$\phi(t_0) = N \vec{B} \cdot \hat{n} ab = NB \cos(90^\circ) ab = 0$$

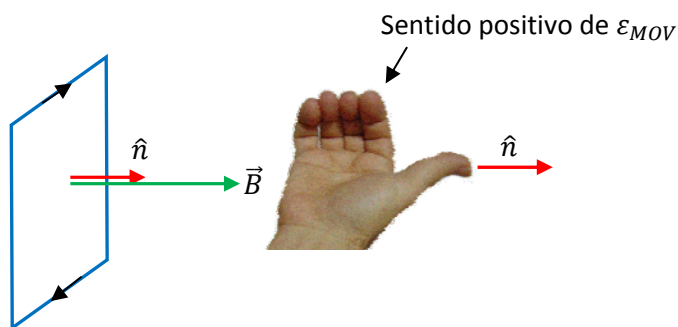
$$\phi(t_f) = N \vec{B} \cdot \hat{n} ab = NB \cos(0^\circ) ab = N B ab$$

Em $t = t_0$ o campo magnético tangencia o plano da espira e não há fluxo. Em $t = t_f$ o fluxo é máximo. Concluindo a FEM induzida média nesse intervalo de tempo $[t_0, t_f]$ foi:

$$\langle \varepsilon_{MOV} \rangle = - \frac{\phi(t_f) - \phi(t_0)}{\Delta t} = - \frac{N B a b}{t_f - t_0}$$

Note que obtivemos uma FEM média negativa (pois $t_f > t_0$), o que significa que o sentido da FEM é oposto ao que foi indicado como positivo de acordo com a regra da mão direita. A Figura abaixo ilustra a regra da mão direita e o sentido de $\varepsilon_{MOV}(t)$ e de $\langle \varepsilon_{MOV} \rangle$.

Apontando o polegar da mão direita ao longo do $\hat{n}$ utilizado no cálculo do fluxo, os (outros) dedos da mão direita apontam no sentido da FEM positiva. Como obtivemos uma FEM negativa, segue que $\langle \varepsilon_{MOV} \rangle$ tem o sentido oposto ao indicado por esses dedos, ela tem o sentido das setas na espira.



Note que esse sentido de ε_{MOV} é (como não poderia deixar de ser) compatível com a lei de Lenz: o fluxo magnético no solenóide se dá para a direita e aumenta à medida que ela realiza o giro em questão. Portanto, a FEM induzida resultará em uma corrente induzida com um sentido tal que produz um fluxo magnético oposto ao fluxo magnético de $\vec{B}$, se opondo a esse aumento de fluxo no solenóide. Aplicando a regra da mão direita para o campo da espira, apontando para a esquerda, obtemos o mesmo resultado já obtido acima para o sentido da corrente e da FEM induzidas.

A escolha do sentido de $\hat{n}$ é arbitrária e nesse exercício adotamos uma prática comum que é a de escolher sempre o vetor $\hat{n}$ paralelo ao vetor $\vec{B}$, de tal forma que $\vec{B} \cdot \hat{n} > 0$.

A FEM de movimento poderia ser determinada também através da força magnética $\vec{F}_{MAG} = q \vec{V} \times \vec{B}$ nos portadores de carga q dentro das espiras desse solenóide, sem o uso da regra do fluxo. A definição primitiva de FEM de movimento em um circuito é:

$$\varepsilon_{MOV} = \oint_{\text{circuito}} \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

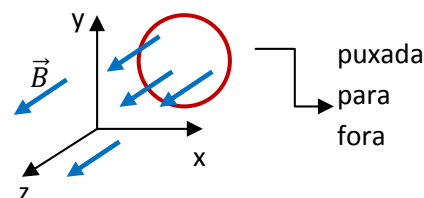
sendo $\vec{V}$ a velocidade de movimento do circuito, $\vec{B}$ o campo magnético na região em que o circuito está e $d\vec{l}$ um campo de vetores tangentes ao circuito. A FEM de movimento ε_{MOV} é o trabalho da força magnética $\vec{F}_{MAG}$

ao longo do circuito, por unidade de carga. Se fizermos essa conta, vamos obter a mesma FEM induzida obtida através da regra do fluxo, pois o que a regra do fluxo diz é que:

$$\varepsilon_{MOV} = \oint_{\text{circuito}} \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt} \int_{\text{área do circuito}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

A regra do fluxo nos poupa de pensar na força (magnética) que impulsiona os portadores de carga no circuito e que produz, portanto, a FEM e a corrente induzidas. Ela é um atalho que fornece a FEM apenas através da derivada do fluxo magnético no circuito. Mas, é sempre bom termos em mente que a causa da FEM de movimento e da corrente induzida no circuito é uma força sobre os portadores de carga no circuito e não uma “variação de fluxo magnético”. Discutiremos um pouco mais sobre isso no exercício 29.10 adiante.

E/P29.5: Uma espira circular de raio R é puxada para fora de uma região onde existe um campo magnético uniforme de módulo B . O campo magnético $\vec{B}$ atravessa o plano da espira ortogonalmente. A Figura ao lado ilustra essa ideia.



Trata-se de uma FEM de movimento. Adotando uma normal $\hat{n}$ paralela a $\vec{B}$, o fluxo magnético inicial na espira é $\phi_i = BA = B \pi R^2$. Após ser retirada dessa região com campo, o fluxo vai a zero, ou seja: $\phi_f = 0$. Portanto, a variação de fluxo na espira foi $\Delta\phi = \phi_f - \phi_i = -B \pi R^2$. A variação é negativa porque o fluxo diminuiu. Da regra do fluxo:

$$\varepsilon_{MOV} = -\frac{d}{dt}\phi(t)$$

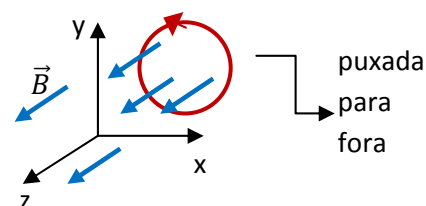
A FEM induzida média no intervalo de tempo Δt é dada por:

$$\langle \varepsilon_{MOV} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \varepsilon_{MOV}(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} -\frac{d}{dt}\phi(t) dt = -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} d\phi(t) = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Portanto, se a espira é puxada para fora da região com campo magnético em um tempo T , segue que a FEM média induzida na espira nesse intervalo de tempo T é:

$$\langle \varepsilon_{MOV} \rangle = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{B \pi R^2}{T}$$

O sinal positivo significa uma FEM média $\langle \varepsilon_{MOV} \rangle$ no sentido anti-horário na nossa Figura ao lado. Isso porque com $\hat{n}$ ao longo de $+z$, as FEMs positivas tem esse sentido, de acordo com a regra da mão direita da regra do fluxo: polegar ao longo de $\hat{n}$, outros dedos da mão direita ao longo do sentido

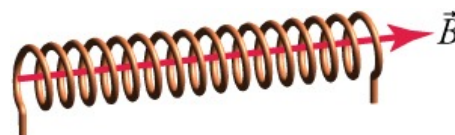


positivo de ε . A lei de Lenz prevê esse mesmo sentido, posto que o fluxo ao longo de $+z$ está diminuindo e a corrente induzida deve então produzir, ela mesma, um fluxo magnético ao longo de $+z$.

E/P29.6: Uma bobina helicoidal com seção transversal circular de raio r e N espiras está em uma região do espaço onde existe um campo magnético uniforme dependente do tempo tal que:

$$B(t) = a t + b t^4$$

com a e b constantes positivas. O campo $\vec{B}$ a travessa as espiras da bobina ortogonalmente, conforme ilustrado ao lado.



Adotando uma normal $\hat{n}$ paralela a $\vec{B}$, o fluxo magnético em uma espira do solenóide é $\phi_1 = BA = B \pi r^2$. Portanto, sendo todas as espiras iguais e estando elas no mesmo campo magnético (uniforme), segue que o fluxo magnético no solenóide é $\phi_{SOL} = N \phi_1 = N B \pi r^2$.

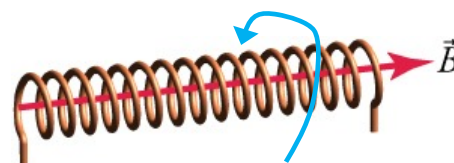
Enquanto o campo magnético varia no tempo esse fluxo magnético varia no tempo:

$$\phi_{SOL}(t) = N B(t) \pi r^2 = N \pi r^2 (a t + b t^4)$$

Da regra do fluxo, a FEM induzida no solenóide é:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \phi(t) = -\frac{d}{dt} N \pi r^2 (a t + b t^4) = -N \pi r^2 (a + 4 b t^3)$$

Note que o fluxo cresce com o tempo e o sentido da FEM seria aquele que se opõe a esse crescimento, ou seja, como mostrado ao lado (a corrente induzida deve criar um fluxo magnético oposto ao fluxo de $\vec{B}$). Esse é o sentido com que a corrente induzida vai circular nesse solenóide quando fecharmos o circuito.



Conectando um resistor R aos terminais desse solenóide, a corrente induzida que circulará nesse circuito será dada por (desprezando a resistência elétrica do fio do solenóide):

$$I(t) = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{N \pi r^2 (a + 4 b t^3)}{R}$$

A corrente no circuito é crescente. Quanto mais rapidamente o campo $\vec{B}$ varia, maior a corrente induzida.

E/P29.7: Uma espira retangular de lados L e $b - a$ está mergulhada no campo magnético de um fio longo e reto que transporta uma corrente $I(t)$, conforme a Figura ao lado. Fio e espira estão no plano da página.

a) Usando a lei de Ampère, podemos mostrar que o campo magnético do fio reto é dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2 \pi s} \hat{\phi}$$

sendo s a distância (raio) até o fio e $\hat{\phi}$ a direção tangente aos círculos centrados no fio, orientada de acordo com a regra da mão direita (polegar ao longo da corrente). A Figura ao lado ilustra a ideia de que no plano da espira quadrada, o campo $\vec{B}$ estará entrando ortogonalmente na página. Vale registrar que essa expressão para $\vec{B}$ só é exata no caso de uma corrente constante: $I(t) = I$. Para uma corrente $I(t)$ a lei de Ampère não vale exatamente e a expressão acima para $\vec{B}$ é apenas uma aproximação, uma aproximação boa para correntes que variam lentamente no tempo. Aqui assumiremos que esse é o caso.

b/c) O fluxo magnético na espira é? Considere o elemento infinitesimal de área (o retângulo cinza na Figura, de lados L e ds):

$$dA = L ds$$

e $\hat{n}$ um vetor normal apontando para dentro da página (paralelo a $\vec{B}$, portanto).

Obtemos:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{s=a}^{s=b} B L ds = \int_{s=a}^{s=b} \frac{\mu_0 I(t)}{2 \pi s} L ds = \frac{\mu_0 I(t)}{2 \pi} L \int_a^b \frac{ds}{s} = \frac{\mu_0 I(t)}{2 \pi} L \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

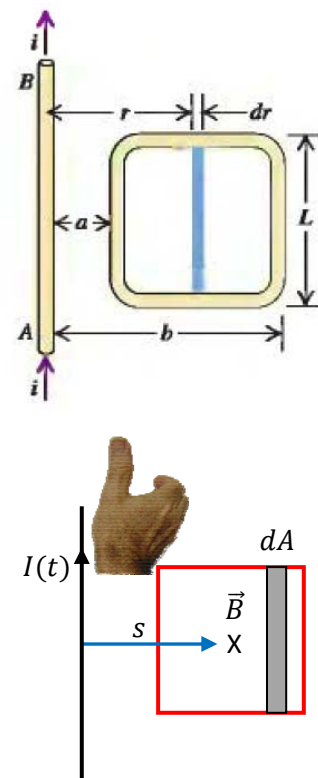
$\ln$ é a função logaritmo natural.

d) A FEM induzida na espira é, de acordo com a lei de Faraday (ou regra do fluxo se você preferir):

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d}{dt} \phi(t) = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 I(t)}{2 \pi} L \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] = -\frac{\mu_0}{2 \pi} L \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{d}{dt} I(t)$$

O que podemos dizer sobre o sentido da FEM?

Note que, ao calcularmos o fluxo magnético, adotamos uma normal para dentro da página. A regra da mão direita diz, então, que as FEMs positivas terão o sentido horário. A Figura ao lado ilustra essa ideia (polegar no sentido de $\hat{n}$). Portanto, se a corrente $I(t)$ estiver crescendo no tempo, então:



$$\frac{d}{dt}I(t) > 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{IND} < 0$$

Concluimos que a FEM induzida, por ser negativa, terá o sentido anti-horário. Esse resultado é compatível com a lei de Lenz: fluxo magnético na espira para dentro da página e aumentando implica em corrente induzida que produz um fluxo para fora da página, ou seja, uma corrente no sentido anti-horário. Se a corrente $I(t)$ estivesse diminuindo no tempo, então:

$$\frac{d}{dt}I(t) < 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{IND} > 0$$

Nesse caso a FEM induzida teria o sentido horário. Esse resultado é compatível com a lei de Lenz: fluxo magnético na espira para dentro da página e diminuindo implica em corrente induzida que produz um fluxo para dentro da página, ou seja, uma corrente no sentido horário.

A FEM induzida nessa espira poderia ser determinada também através da força produzida pelo campo elétrico induzido nos portadores de carga dentro da espira, sem o uso da regra do fluxo. A definição primitiva de FEM induzida nesse caso é:

$$\varepsilon_{IND} = \oint_{\text{espira}} \vec{E}_I \cdot d\vec{l}$$

sendo $\vec{E}_I$ o campo elétrico induzido produzido pela corrente variável no tempo $I(t)$ no fio reto. A FEM induzida ε_{IND} é o trabalho da força elétrica $\vec{F}_{EL} = q \vec{E}_I$ em um portador de carga ao longo do circuito, por unidade de carga.

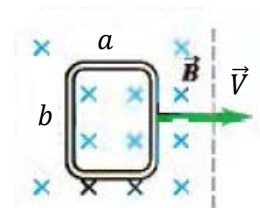
Essa foi a principal descoberta do Faraday, correntes variáveis no tempo produzem campo magnético, como qualquer corrente, mas também campo elétrico, um campo elétrico não conservativo, que chamamos de campo elétrico induzido, para diferenciá-lo do campo elétrico dado pela lei de Coulomb. Se fizermos essa integral de $\vec{E}_I$ ao longo do circuito, vamos obter a mesma FEM induzida obtida através da variação do fluxo magnético, pois o que a lei de Faraday diz é que os campos $\vec{E}_I$ e $\vec{B}$ produzidos pela corrente $I(t)$ estão relacionados entre si por:

$$\varepsilon_{IND} = \oint_{\text{espira}} \vec{E}_I \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt} \int_{\text{área da espira}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

A lei de Faraday (ou regra do fluxo) nos poupa de pensar na força (elétrica) que impulsiona os portadores de carga no circuito e que produz, portanto, a FEM e a corrente induzidas. Ela é um atalho que fornece a FEM apenas através da derivada do fluxo magnético no circuito. É bem mais fácil calcular a FEM induzida através da derivada do fluxo magnético do que através de uma integral do campo elétrico induzido. Essa é a prática que é geralmente adotada. Mas é sempre bom termos em mente que a causa da FEM induzida e da corrente

induzida em um circuito parado próximo de uma corrente variável no tempo é uma força $\vec{F}_{EL} = q \vec{E}_I$ sobre os portadores de carga no circuito e não uma “variação de fluxo magnético”.

E/P29.10: Uma espira retangular de lados a e b é puxada para fora de uma região do espaço onde existe um campo magnético uniforme de módulo B que entra ortogonalmente no plano da página. A espira é puxada paralelamente ao plano da página com velocidade constante de módulo V .



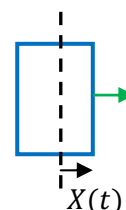
a) Considere que a espira ainda está totalmente imersa no campo magnético.

Então, o fluxo do campo magnético (adotando um vetor normal $\hat{n}$ para dentro da página, paralelo a $\vec{B}$) na espira é constante e vale:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B dA = B \int dA = B A = B a b$$

Da regra do fluxo, vemos que não há FEM induzida na espira enquanto ela viaja dentro da região onde existe campo. Isso porque a derivada de uma constante é nula.

b) Considere agora que a espira ainda está parcialmente imersa no campo magnético. Vamos chamar de $X(t)$ o comprimento da espira que já está para fora da região com campo (ver Figura ao lado). Então, o comprimento da espira (ao longo de a) que ainda está mergulhado no campo é $a - X(t)$. O fluxo do campo magnético (com $\hat{n}$ para dentro da página) na espira vale:



$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B dA = B \int dA = B A = B b [a - X(t)]$$

Portanto, a FEM (de movimento) induzida na espira enquanto ela deixa a região com campo é:

$$\varepsilon_{MOV} = -\frac{d}{dt} \phi(t) = -\frac{d}{dt} B b [a - X(t)] = \frac{d}{dt} B b X(t) = B b \frac{d}{dt} X(t) = B b V$$

Qual o sentido dessa FEM? No cálculo do fluxo, adotamos uma normal para dentro da página. Portanto, apontando o polegar da mão direita para dentro da página, vemos que a FEM positiva terá o sentido horário. Como obtivemos uma FEM positiva, segue que ela tem o sentido horário. Esse resultado está de acordo com a lei de Lenz: fluxo magnético para dentro da página diminuindo, segue que a corrente induzida vai ter o sentido que produz um fluxo magnético, ela mesma, paralelo ao fluxo indutor, ou seja, para dentro da página. Segue que o sentido da corrente induzida, e da FEM induzida, é o horário.

Note que essa FEM pode ser determinada também através da força magnética nos portadores de carga dentro da espira, sem o uso da regra do fluxo. A definição primitiva de FEM de movimento é

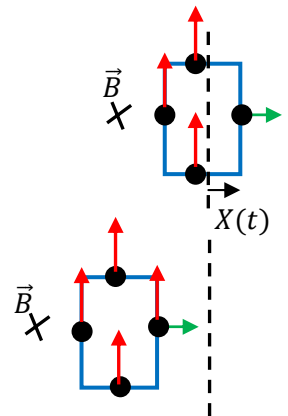
$$\varepsilon_{MOV} = \oint_{\text{espira}} \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

sendo $\vec{V}$ a velocidade de movimento do circuito, $\vec{B}$ o campo magnético na região em que o circuito está e $d\vec{l}$ um campo de vetores tangentes ao circuito.

Vamos começar pelo caso em que há FEM na espira, enquanto ela está saindo da região com campo magnético. Considere a primeira Figura abaixo, onde mostramos quatro portadores de carga elétrica q positiva (bolinhas pretas) que fazem parte e compartilham do movimento dessa espira para a direita. Esses portadores estão sendo puxados com a velocidade de módulo V (seta verde) e sofrem uma força magnética para cima (setas vermelhas), de módulo $F_{MAG} = q V B$, com exceção do portador da direita que está no lado que já saiu da região com campo magnético. Considere que $d\vec{l}$ são vetores comprimento ao longo da espira orientados no sentido horário de giro. Ao percorrer o comprimento b da esquerda, o trabalho no portador nesse fio é $W_{MAG} = F_{MAG} b = q V B b$. Nos outros dois fios a força é ortogonal a $d\vec{l}$ e não há trabalho. Portanto, o trabalho da força magnética por unidade de carga na espira, que é a FEM, é $V B b$, sendo positivo porque esta FEM está no sentido horário (mesmo sentido de $d\vec{l}$). Esse é o mesmo resultado fornecido pela regra do fluxo. Agora podemos repetir o cálculo para o caso em que a espira está toda na região com campo magnético. Utilizamos a segunda Figura ao lado. Agora a espira está toda mergulhada no campo magnético e todos os portadores sofrem força magnética (setas vermelhas). A integral da força magnética no comprimento b da esquerda continua sendo $W_{MAG} = F_{MAG} b = q V B b$, mas há trabalho também no comprimento b da direita, que é negativo e igual a $W'_{MAG} = -F_{MAG} b = -q V B b$ ($d\vec{l}$ está para baixo nesse lado). Nos outros dois lados da espira a força continua ortogonal a $d\vec{l}$ e não há trabalho. Portanto, o trabalho da força magnética por unidade de carga na espira, que é a FEM, é $V B b + (-V B b) = 0$. Conclusão: mesmo havendo a força magnética $q\vec{V} \times \vec{B}$ nos portadores de carga dentro do circuito que se move com velocidade $\vec{V}$, pode não haver FEM de movimento na espira, pois a integral dessa força pode ser nula ao longo do circuito. Não havendo trabalho sobre os portadores de carga ao longo do circuito, não há como haver corrente no circuito. Como vamos saber quando a integral da força é nula ou não? Simples, a integral é não nula quando:

$$\frac{d}{dt} \phi(t) \neq 0$$

Pois, o que a regra do fluxo diz é que:



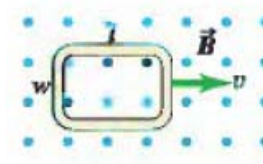
$$\varepsilon_{MOV} = \oint_{\text{espira}} \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt} \int_{\text{área da espira}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

A regra do fluxo nos poupa de pensar na força que impulsiona os portadores de carga no circuito e que produz, portanto, a FEM e a corrente induzidas. Ela é um atalho que fornece a FEM apenas através da derivada do fluxo magnético no circuito.

c) Considere que a espira está totalmente fora da região com campo magnético.

Então, o fluxo do campo magnético na espira é nulo e constante. Sendo nula a derivada de uma constante, segue que não há FEM induzida na espira enquanto ela viaja fora da região onde existe campo. Pensando a FEM como a integral da força magnética, vemos que agora não há força nenhuma nos portadores de carga na espira, pois não há campo magnético na região onde a espira está. Se não há força, não há integral de força e não há ε_{MOV} .

E/P29.14: Uma espira retangular de lados l e w é puxada com velocidade constante em um campo magnético uniforme, conforme a Figura ao lado.



Adotando uma normal ao plano da espira para fora da página (mesmo sentido de $\vec{B}$) obtemos o fluxo magnético na espira:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B dA = B \int dA = B A = B l w$$

Portanto, não há FEM (de movimento) induzida na espira, pois o fluxo magnético é constante (da regra do fluxo):

$$\varepsilon_{MOV} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt}B l w = 0$$

Esse resultado vale para qualquer valor de B ou da velocidade v .

A FEM induzida não está associada ao fluxo magnético, mas à derivada no tempo dessa grandeza. A simples existência de fluxo magnético não implica em FEM induzida.

A força que atua nos portadores de carga e que é responsável pela FEM de movimento nesse caso é a força magnética gerada pelo movimento da espira no campo $\vec{B}$. A FEM pode ser obtida da integral de caminho da força magnética (por unidade de carga):

$$\varepsilon_{MOV} = \oint_{\text{espira}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

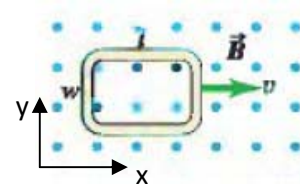
O caminho no caso é a própria espira retangular (que podemos percorrer no sentido horário). Usando o referencial mostrado na Figura ao lado obtemos:

$\vec{v} \times \vec{B} = v \hat{x} \times B \hat{z} = -v B \hat{y}$. A espira (caminho C) tem quatro lados de tal forma que: no lado superior: $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -v B \hat{y} \cdot dx \hat{x} = 0$, analogamente

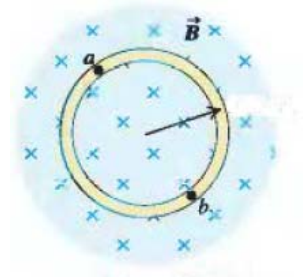
para o lado inferior. Para o lado lateral esquerdo obtemos $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} =$

$-v B \hat{y} \cdot dy \hat{y} = -v B dy$ enquanto que para o lado lateral direito obtemos $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -v B \hat{y} \cdot dy (-\hat{y}) = v B dy$. Concluindo, obtemos o mesmo resultado fornecido pela regra do fluxo $\varepsilon_{MOV} = 0$. Os

portadores de carga na espira estão submetidos a uma força magnética, mas o resultado final é nulo, pois há duas forças iguais e opostas nos dois lados da espira ao longo de y. Ao integrar essa força em todo o comprimento da espira, vamos obter um resultado nulo. Se os portadores não ganham energia, não há como circular corrente na espira.



E/P29.15: Uma espira circular de raio R está mergulhada em um campo magnético uniforme e dependente do tempo ($B = B(t)$) que entra ortogonalmente no plano da página, conforme a Figura ao lado.



Adotando uma normal ao plano da espira para dentro da página (mesmo sentido de $\vec{B}$) obtemos o fluxo magnético na espira:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B(t) dA = B(t) \int dA = B(t) A = B(t) \pi R^2$$

A FEM induzida na espira é, de acordo com a lei de Faraday (que coincide com a regra do fluxo):

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d}{dt} \phi(t) = -\frac{d}{dt} B(t) \pi R^2 = -\pi R^2 \frac{d}{dt} B(t)$$

O que podemos dizer sobre o sentido da FEM?

Note que, ao calcularmos o fluxo magnético, adotamos uma normal para dentro da página, como de praxe (paralelo a $\vec{B}$). A regra da mão direita diz, então, que as FEMs positivas terão o sentido horário. A Figura ao lado ilustra essa ideia (polegar no sentido de $\hat{n}$). Portanto, se o campo B estiver crescendo no tempo, então:



$$\frac{d}{dt} B(t) > 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{IND} < 0$$

A FEM induzida terá o sentido anti-horário. Esse resultado é compatível com a lei de Lenz: fluxo magnético na espira para dentro da página e aumentando implica em corrente induzida que produz um fluxo para fora da página, ou seja, uma corrente no sentido anti-horário. Se o campo B estiver diminuindo no tempo, então:

$$\frac{d}{dt}B(t) < 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{IND} > 0$$

A FEM induzida terá o sentido horário. Esse resultado é compatível com a lei de Lenz: fluxo magnético na espira para dentro da página e diminuindo implica em corrente induzida que produz um fluxo para dentro da página, ou seja, uma corrente no sentido horário.

Se o campo B for constante no tempo, não haverá FEM induzida na espira. A simples existência de fluxo magnético não implica em FEM induzida. Um campo magnético constante no tempo não coexiste com um campo elétrico induzido e não produz, portanto, FEMs induzidas em espiras paradas (pode produzir FEM de movimento, se a espira se mover no campo magnético estático).

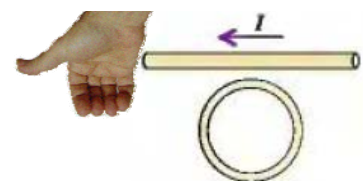
Esta situação é descrita pela lei de Faraday que diz que:

$$\varepsilon_{IND} = \oint_{\text{espira}} \vec{E}_I \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt} \int_{\text{área da espira}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \varepsilon_{IND}$$

Portanto, olhando essa equação pelo lado direito, na última igualdade, vemos a regra do fluxo, que é comum a todos os fenômenos de indução em circuitos, estejam eles parados (que é o caso aqui) ou se movendo (FEM de movimento). Olhando pelo lado esquerdo, na primeira igualdade, vemos a FEM em sua definição primitiva, como o trabalho de uma força (por unidade de carga). Para um circuito parado em uma região em que há um campo magnético variável no tempo, essa força que dá a FEM é o campo elétrico induzido $\vec{E}_I$, que coexiste com esse campo magnético (constituindo um campo eletromagnético). Essa foi a principal descoberta do Faraday: a existência de campos elétricos não conservativos, que não são dados pela lei de Coulomb. Campos elétricos induzidos são campos elétricos produzidos pelo movimento de cargas elétricas (assim como os campos magnéticos). Correntes elétricas estacionárias (independentes do tempo) produzem apenas campo magnético, enquanto que correntes variáveis no tempo produzem campo magnético e também campo elétrico $\vec{E}_I$, ou seja, produzem um campo eletromagnético no espaço

E/P29.16: Uma espira circular está mergulhada no campo magnético de um fio reto e longo que transporta uma corrente $I(t)$, conforme a Figura ao lado. A corrente no fio reto varia no tempo de acordo com:

$$I(t) = I_0 e^{-b t}$$



com $b > 0$ e $t > 0$. Note que essa corrente diminui exponencialmente no tempo. Quando $t \rightarrow \infty$, $I(t) \rightarrow 0$. O fluxo magnético na espira circular é:

$$\phi = \int_{ESP.CIRC.} \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

sendo $\vec{B}$ o campo magnético do fio reto. Sabemos (da regra da mão direita, ilustrada na Figura) que o campo magnético do fio reto está saindo ortogonalmente da página, no plano que contém a espira circular. Portanto, o fluxo magnético na espira circular está saindo da página e diminuindo no tempo, pois quando $I(t)$ diminui, $\vec{B}$ diminui e ϕ diminui. A lei de Lenz afirma, então, que a corrente induzida na espira irá se opor a essa diminuição de fluxo, ou seja, a corrente induzida na espira vai produzir, ela mesma, um fluxo magnético saindo da página, paralelo ao fluxo de $\vec{B}$. Para que isso ocorra, a corrente induzida deverá ter o sentido anti-horário (de acordo com a regra da mão direita para o campo de uma espira). Concluindo: a FEM induzida, que produz a corrente induzida, deverá ter o sentido anti-horário.

Esse resultado pode ser obtido da lei de Faraday/regra do fluxo, através da escolha do sentido de $\hat{n}$ e da regra da mão direita:

1. Suponha que $\hat{n}$ esteja para fora da página. Então

$$\phi = \int_{ESP.CIRC.} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{ESP.CIRC.} B dA$$

Não importa quanto vai dar essa integral, ela não é simples de ser calculada, porque o campo magnético não é uniforme e a espira tem a forma circular. O que importa é que a integral é certamente positiva, pois B é um módulo e dA é uma área. Então ϕ é positivo e está diminuindo no tempo ($\frac{d}{dt}\phi(t) < 0$), pois quando $I(t)$ diminui, B diminui. Da lei de Faraday/regra do fluxo:

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d}{dt}\phi(t)$$

Concluimos que ε_{IND} é positivo.

Se adotamos um $\hat{n}$ para fora da página, a regra da mão direita diz que a FEM positiva estará no sentido anti-horário, conforme a regra da mão direita ilustrada na Figura ao lado. Concluimos, então que ε_{IND} , sendo positivo, estará mesmo no sentido anti-horário. Esse foi o resultado indicado pela lei de Lenz.



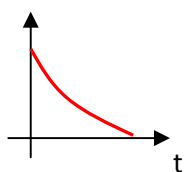
2. Suponha que adotemos um $\hat{n}$ para dentro da página. Vamos obter um resultado diferente? Considere que agora:

$$\phi = \int_{ESP.CIRC.} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{ESP.CIRC.} B (-1) dA = - \int_{ESP.CIRC.} B dA$$

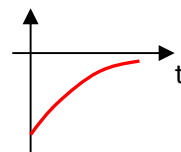
Agora a integral é negativa, pois B é um módulo, dA é uma área e há um sinal de $-$ na frente da integral (o cosseno de 180° que veio do produto escalar entre dois vetores anticolineares). Então ϕ é negativo e está diminuindo (em módulo) no tempo, ou seja, tendendo para zero, pois quando $I(t)$ diminui, B diminui e o fluxo magnético vai para zero. Concluimos então que:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) > 0$$

Pois uma função negativa que vai para zero é uma função crescente, ou seja, de derivada positiva. A Figura abaixo resume essa ideia. Anteriormente $\phi(t)$ era positivo e concluimos que sua derivada era negativa. Agora, vemos que $\phi(t)$ é negativo e sua derivada é positiva. Tudo depende da escolha da normal. Os dois gráficos abaixo ilustram a ideia do sinal da derivada nos dois casos. Fato é que $|\phi|$ está sempre diminuindo com o tempo. Se escolhermos $\hat{n}$ de tal forma que $\phi > 0$, então sua derivada é negativa. Se, por outro lado, escolhermos $\hat{n}$ de tal forma que $\phi < 0$, então sua derivada é positiva.



Uma função positiva que vai para zero é uma função decrescente, de derivada negativa.



Uma função negativa que vai para zero é uma função crescente, de derivada positiva.

Da lei de Faraday:

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d}{dt}\phi(t)$$

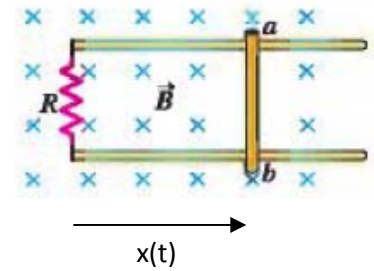
Portanto, agora concluimos que ε_{IND} é negativo.

Estando $\hat{n}$ para dentro da página, a regra da mão direita diz que a FEM positiva estará no sentido horário, conforme a Figura ao lado. Concluimos, então que ε_{IND} , sendo negativa, estará no sentido anti-horário, como determinado anteriormente.



Concluindo: a lei de Lenz fornece facilmente o sentido da FEM induzida. A lei de Faraday/regra do fluxo também fornece esse sentido. Basta que escolhamos um sentido arbitrário para $\hat{n}$ no cálculo do fluxo magnético e que sejamos coerentes com a regra da mão direita na interpretação do sinal da FEM. No final das contas a conclusão é a mesma. Não importa se usamos a lei de Faraday, com um $\hat{n}$ em um sentido arbitrário, ou a lei de Lenz. Sempre vamos obter o mesmo resultado para o sentido da FEM e da corrente induzida.

E/P29.20: Uma haste condutora de comprimento L (distância entre os dois trilhos) é puxada com velocidade constante de módulo V , em uma região onde existe um campo magnético constante de módulo B (entrando ortogonalmente na página). A haste fecha um circuito que contém um resistor R , através de dois trilhos condutores. A resistência elétrica dos trilhos e da haste é desprezível.



a) A haste se move e há uma FEM de movimento.

i) Um portador de carga positiva (q) que estiver perdido dentro da haste vai compartilhar da velocidade da haste e estará submetido a uma força magnética paralela à haste:

$$\vec{F}_{MAG} = q \vec{V} \times \vec{B}$$

Note que, estando $\vec{V}$ para a direita e $\vec{B}$ para dentro da página, $\vec{F}_{MAG}$ estará para cima, ou seja, a corrente induzida (desses portadores) nesse circuito fechado pela haste estará no sentido anti-horário. Quando um portador percorre a haste, o trabalho dessa componente da força magnética (note que há uma outra componente da força magnética, ortogonal à haste e que se opõe ao movimento da haste) nesse portador é:

$$W = \int_{HASTE} \vec{F}_{MAG} \cdot d\vec{l} = F_{MAG} L = q V B L$$

O trabalho por unidade de carga, que é a FEM de movimento no circuito, é:

$$\varepsilon_{MOV} = \frac{W}{q} = V B L$$

O sentido dessa FEM é o anti-horário.

ii) Seja $x(t)$ a distância já percorrida pela haste, em relação ao resistor (ver figura acima). O circuito fechado pela haste e pelo resistor possui, portanto, área $A = L x(t)$. O fluxo magnético através desse circuito é (adotando uma normal para dentro da página, paralelo ao campo $\vec{B}$):

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B dA = B \int dA = BA = BL x(t)$$

Portanto, da regra do fluxo, a FEM de movimento nesse circuito é:

$$\varepsilon_{MOV} = -\frac{d}{dt} \phi(t) = -\frac{d}{dt} BL x(t) = -B L \frac{d}{dt} x(t) = -B L V$$

A FEM é negativa e a regra da mão direita diz que (com $\hat{n}$ para dentro da página) a FEM positiva estaria no sentido horário. Portanto, ε_{MOV} estará no sentido anti-horário, o que é compatível com a lei de Lenz (fluxo magnético para dentro e aumentando, corrente induzida no sentido anti-horário) e com o resultado de (i).

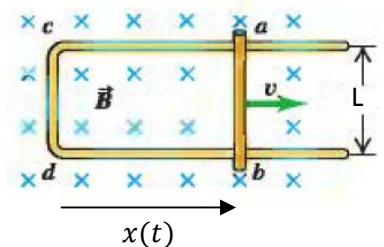
Concluindo, a FEM de movimento pode ser calculada através do trabalho da força magnética por unidade de carga ao longo do circuito ou pela regra do fluxo. Geralmente a segunda abordagem é a mais simples. O resultado é sempre o mesmo.

b) Tudo funciona como se a haste fosse uma bateria de FEM ε_{MOV} ligada a um resistor de resistência R . A corrente (induzida) nesse circuito possui magnitude:

$$I = \frac{|\varepsilon_{MOV}|}{R} = \frac{B L V}{R}$$

e flui no sentido anti-horário. Note que esse movimento dos portadores vai produzir uma outra componente de força magnética (ver o problema 29.25 abaixo), ortogonal à haste e que se opõe ao movimento da haste. Infelizmente essa componente da força existe e faz com que tenhamos que aplicar uma força na haste e realizar trabalho sobre a haste para que o sistema funcione. Temos que gastar energia para que a corrente flua e o resistor aqueça. O campo magnético não realiza trabalho nesse processo. O trabalho, e a energia, vêm do agente externo que empurra a haste para a direita, vencendo a força magnética de freio. Esse é o princípio de funcionamento de um gerador de energia elétrica. Nesses geradores o agente externo que move o circuito e realiza trabalho nele pode ser uma queda d'água, o vento ou um motor de combustão. Não existe milagre nesse caso: para produzir energia elétrica precisamos de uma outra fonte de energia.

E/P29.25: Uma haste condutora de comprimento L (distância entre os dois trilhos) é puxada com velocidade constante de módulo V , em uma região onde existe um campo magnético constante de módulo B (entrando ortogonalmente na página). A haste fecha um circuito $abcd$ cuja resistência é constante e igual a R . Trata-se do mesmo sistema abordado no exercício anterior.



a/b) A haste se move e há uma FEM de movimento (já abordamos essa FEM no exercício anterior).

Seja $x(t)$ a distância já percorrida pela haste, em relação ao lado fixo cd . O circuito fechado $abcd$ possui área $A = L x(t)$. O fluxo magnético através desse circuito é (adotando uma normal para dentro da página, paralelo ao campo $\vec{B}$):

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B dA = B \int dA = BA = BL x(t)$$

Portanto, da regra do fluxo, a FEM de movimento nesse circuito é:

$$\varepsilon_{MOV} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt}BL x(t) = -B L \frac{d}{dt}x(t) = -B L V$$

A FEM é negativa e a regra da mão direita diz que (com $\hat{n}$ para dentro da página) a FEM positiva estaria no sentido horário. Portanto, ε_{MOV} estará no sentido anti-horário, o que é compatível com a lei de Lenz (fluxo magnético para dentro e aumentando, corrente induzida no sentido anti-horário).

c) Tudo funciona como se a haste móvel fosse uma bateria de FEM ε_{MOV} ligada a um resistor de resistência R , que é a resistência do circuito $abcd$. A corrente (induzida) nesse circuito possui magnitude:

$$I = \frac{|\varepsilon_{MOV}|}{R} = \frac{B L V}{R}$$

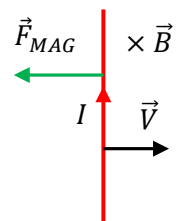
e flui no sentido anti-horário. Note que esse movimento dos portadores vai produzir uma outra componente de força magnética, ortogonal à haste e que se opõe ao movimento da haste, freando seu movimento (freio magnético).

A Figura ao lado mostra a corrente induzida fluindo na haste e a força magnética que se opõe à velocidade $\vec{V}$ da haste (seta verde):

$$\vec{F}_{MAG} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

A magnitude dessa força é:

$$F_{MAG} = I L B = \frac{(B L)^2 V}{R}$$



Não havendo outras forças na haste, a força $\vec{F}_{MAG}$ vai fazer com que ela vá freando e finalmente pare. Para que essa haste esteja viajando com velocidade constante, que é nossa hipótese nesse exercício, é necessário que atue nela outra força $\vec{F}_{EXT} = -\vec{F}_{MAG}$, produzida por um agente externo, que puxa a haste para a direita (paralelamente à $\vec{V}$), conferindo a ela a velocidade constante. A taxa (potência) com que essa força externa vai realizar trabalho é:

$$P_{EXT} = F_{EXT} V = F_{MAG} V = \frac{(B L V)^2}{R}$$

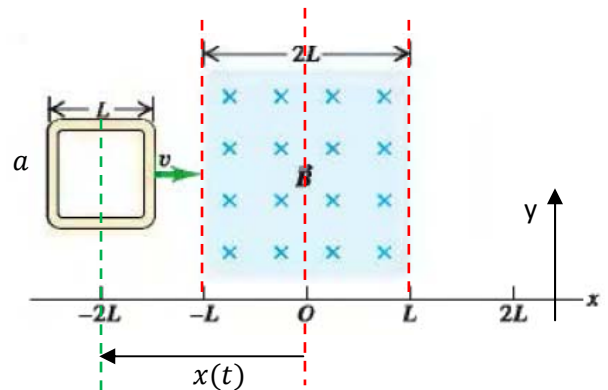
Note que essa potência é exatamente a que é dissipada na forma de calor (efeito Joule) no circuito de resistência R :

$$P_{CALOR} = R I^2 = R \left(\frac{B L V}{R} \right)^2 = P_{EXT}$$

Concluindo: Se não houvesse a força $\vec{F}_{EXT}$ atuando na haste móvel, ela iria parando até que toda a energia cinética inicial do circuito fosse dissipada na forma de calor pela resistência elétrica do circuito. Esse é o princípio de funcionamento do freio magnético, que é utilizado na frenagem de trens de alta velocidade e de outros veículos. Imagine que a haste é o trem e que o simples acionamento de um interruptor, fechando o circuito, vai fazer com o trem freie. Uma vantagem desse tipo de freio é que ele não se desgasta com o tempo, como acontece com os freios convencionais que funcionam por ação do atrito cinético de contato. Para que a

haste se mova com velocidade constante, é necessário que a força $\vec{F}_{EXT}$ puxe constantemente a haste para a direita, vencendo a força magnética $\vec{F}_{MAG}$. O trabalho que o agente externo realiza para fazer isso não é em vão, ele aparece na forma de calor na resistência elétrica do circuito (a energia cinética da haste é constante nesse caso). Esse é o princípio de funcionamento de um gerador de energia elétrica e, no caso de uma usina hidrelétrica, a força externa que move o circuito, contra a força de freio magnético, é a força da queda d'água.

E/P29.26: Uma espira retangular de lados L e a e resistência elétrica R é puxada com velocidade constante de módulo V em um região onde existe um campo magnético confinado a uma região quadrada de largura $2L$ (região azulada na Figura). Seja $x(t)$ a posição do centro da espira (linha tracejada verde) até o centro da região com campo magnético ($x = 0$).



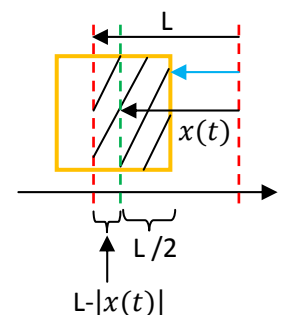
Primeiramente vamos calcular a FEM (de movimento) induzida na espira.

Para $x(t) < -3L/2$ a espira ainda está (à esquerda) toda fora da região com campo. O fluxo magnético através dela é nulo e constante e, portanto, não há FEM.

Para $-3L/2 < x(t) < -L/2$ a espira está entrando na região com campo e o fluxo magnético (para dentro da página, ou seja, adotamos $\hat{n}$ apontando para dentro da página, paralelo a $\vec{B}$) nela é:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B dA = B \int dA = BA = Ba \left[\frac{3L}{2} + x(t) \right]$$

A Figura ao lado pretende mostrar a área da espira que está mergulhada no campo magnético, enquanto a espira entra nessa região. Essa área (hachurada) é dada por $A = a [L/2 + L - |x(t)|]$. Como $x(t)$ é negativo nesse caso, segue que $|x(t)| = -x(t)$ e, portanto: $A = a [3L/2 + x(t)]$. Note que para $x = -3L/2$ vale $\phi = 0$ e que para $x = -L/2$ vale $\phi = BaL$. Outra forma de calcular A é considerar que a coordenada do lado direito da espira (seta azul) é $x_D = x + L/2$ e que $A = a (L - |x_D|) = a (L - (-x_D)) = a (L + x + L/2)$.



Da regra do fluxo, a FEM de movimento nesse circuito é:

$$\varepsilon_{MOV} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt}Ba \left[\frac{3L}{2} + x(t) \right] = -B a \frac{d}{dt}x(t) = -B a V$$

Note que:

$$\frac{d}{dt}x(t) = V$$

pois $x(t)$ é uma função negativa monótona crescente (está tendendo a zero) e V é positivo (é o módulo de um vetor).

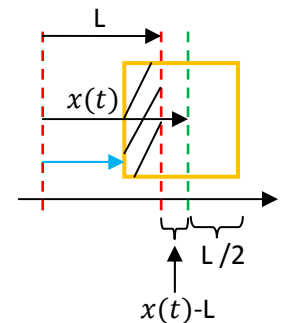
A FEM é negativa, o que significa que ela tem o sentido anti-horário. Da lei de Lenz: fluxo magnético para dentro da página e aumentando no tempo, corrente induzida no sentido anti-horário.

Para $-L/2 < x(t) < L/2$ a espira está toda dentro da região com campo. O fluxo magnético através dela é e constante e vale $B L a$, portanto, não há FEM.

Para $L/2 < x(t) < 3L/2$ a espira está saindo na região com campo e o fluxo magnético (para dentro da página) nela é:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B dA = B \int dA = BA = Ba \left[\frac{3L}{2} - x(t) \right]$$

A Figura ao lado pretende mostrar a área da espira que está mergulhada no campo magnético, enquanto a espira sai dessa região. Essa área (hachurada) é dada por $A = a [L/2 - (x(t) - L)]$. Portanto: $A = a [3L/2 - x(t)]$. Note que $x(t)$ agora é positivo. Outra forma de calcular A é considerar que a coordenada do lado esquerdo da espira (seta azul) é $x_E = x - L/2$ e que $A = a (L - x_E) = a (L - x + L/2)$.



Da regra do fluxo, a FEM de movimento nesse circuito é:

$$\varepsilon_{MOV} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt}Ba \left[\frac{3L}{2} - x(t) \right] = Ba \frac{d}{dt}x(t) = BaV$$

Note que:

$$\frac{d}{dt}x(t) = V$$

pois $x(t)$ é uma função positiva monótona crescente e V é positivo (é o módulo de um vetor).

A FEM é positiva, o que significa que ela tem o sentido horário. Da lei de Lenz: fluxo magnético para dentro da página e diminuindo no tempo, corrente induzida no sentido horário.

Para $x(t) > 3L/2$ a espira está novamente toda fora da região com campo. O fluxo magnético através dela é nulo e constante e, portanto, não há FEM.

A corrente induzida na espira tem magnitude:

$$I = \frac{|\varepsilon_{MOV}|}{R}$$

e sentido igual ao da FEM.

A espira sofre uma força magnética que tenta frear seu movimento. Essa força atua nos lados de comprimento a que estiverem imersos no campo magnético e é dada por:

$$\vec{F}_{MAG} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

A força externa que puxa a espira e a mantém se movendo deve vencer essa força magnética, ou seja:

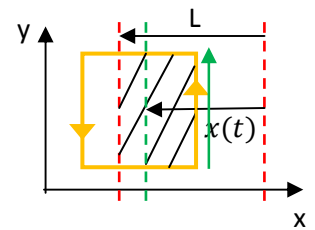
$$\vec{F}_{EXT} = -I \vec{L} \times \vec{B}$$

Concluindo:

Para $x(t) < -3L/2$: $\vec{F}_{EXT} = \vec{0}$.

Para $-3L/2 < x(t) < -L/2$: $\vec{F}_{EXT} = -I a \hat{y} \times B(-\hat{z}) = I a B \hat{x} = \frac{B a V}{R} a B \hat{x}$.

A Figura ao lado ilustra o vetor $\vec{L} = a \hat{y}$ nesse caso (em verde). Note que o eixo z está orientado para fora da página e, por isso, $\vec{B} = B(-\hat{z})$.



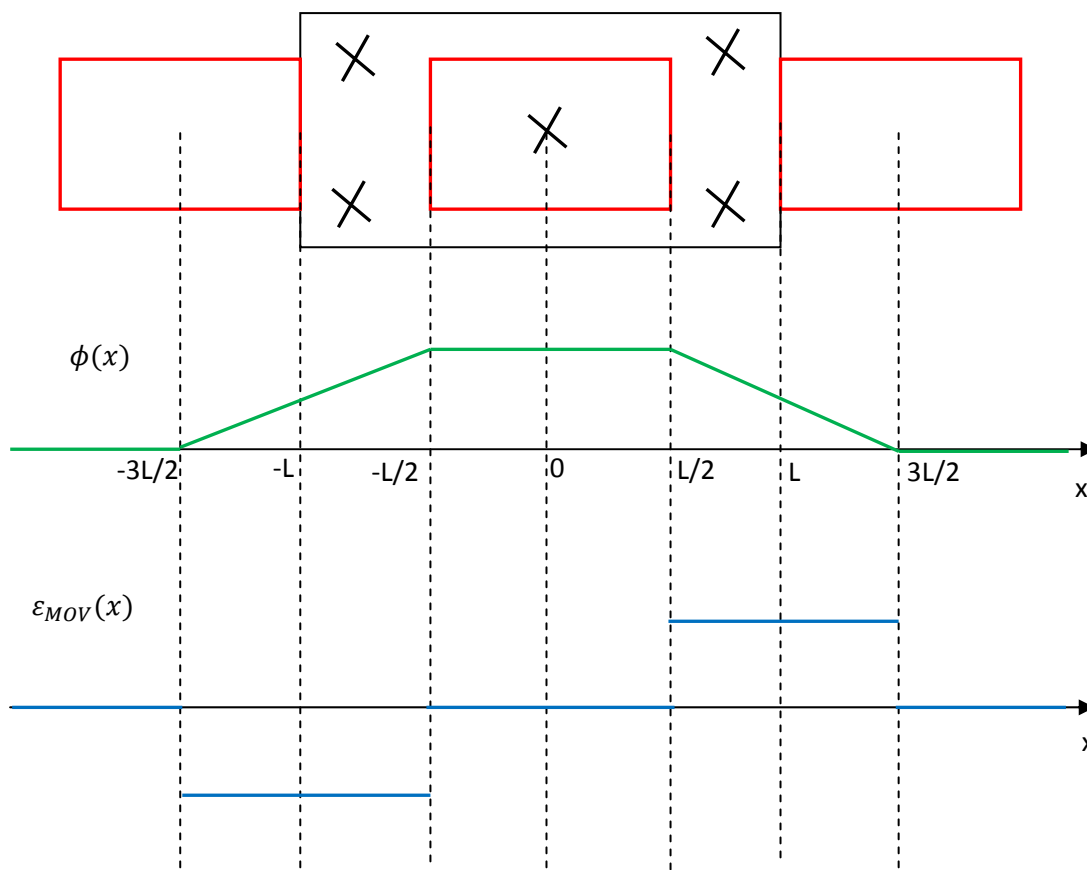
Para $-L/2 < x(t) < L/2$: $\vec{F}_{EXT} = \vec{0}$.

Para $L/2 < x(t) < 3L/2$: $\vec{F}_{EXT} = -I a \hat{y} \times B(-\hat{z}) = I a B \hat{x} = \frac{B a V}{R} a B \hat{x}$

Para $x(t) > 3L/2$: $\vec{F}_{EXT} = \vec{0}$.

Portanto, notamos que temos que puxar a espira, não importa se ela está entrando ou saindo da região com campo magnético. A corrente induzida na espira sempre freia a espira e sempre temos que vencer essa força de freio. Sempre temos que gastar energia, realizar um trabalho externo positivo, para que a corrente flua no circuito e produza calor por efeito Joule. Esse resultado é compatível com a conservação da energia: se você cria uma forma de energia, então gasta outra forma de energia. Enquanto não circula corrente na espira não precisamos puxá-la, ela se move com velocidade constante sem nenhuma força atuando nela. Não há produção de calor por efeito Joule e não precisamos gastar energia para que a espira se mova com velocidade constante.

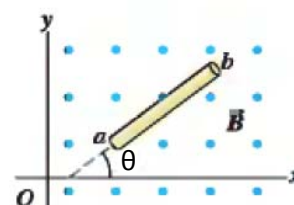
Na Figura abaixo esboçamos o comportamento do fluxo magnético na espira, enquanto ela se move e da FEM induzida na espira. Note que a coordenada x é a posição do centro da espira em relação ao centro da região com campo. Note também que o fluxo é calculado com a normal para dentro da página, e por isso é sempre positivo. De acordo com a regra da mão direita (polegar para dentro da página), uma FEM positiva é uma FEM no sentido horário enquanto que uma FEM negativa é uma FEM no sentido anti-horário.



O gráfico da força externa F_{EXT} é parecido com o gráfico de ε_{MOV} , só que sempre positivo, ou seja, $\vec{F}_{EXT}$ sempre aponta no sentido positivo do eixo x . Enquanto a espira entra na região com campo a corrente induzida tem sentido anti-horário e a corrente sobe no lado do fio de comprimento a que está dentro do campo e sofrendo a força magnética $\vec{F}_{MAG} = I \vec{L} \times \vec{B}$. Enquanto a espira sai da região com campo a corrente induzida inverte de sentido, ou seja, tem o sentido horário, mas a corrente continua subindo no lado do fio de comprimento a que está dentro do campo e sofrendo a força magnética $\vec{F}_{MAG} = I \vec{L} \times \vec{B}$. Por isso, mesmo que a corrente inverta de sentido na espira, a força magnética na espira não inverte de sentido e nem a força externa que vence essa força.

E/P29.27:

Uma haste reta de comprimento L se move com velocidade de módulo em uma região onde existe um campo magnético uniforme e constante tempo $\vec{B} = B \hat{z}$ (saindo do plano da página).



A ideia aqui é a de que haverá FEM de movimento na haste. Como não se trata de um circuito fechado, fica difícil aplicar a regra do fluxo para o cálculo da FEM, afinal, qual a área em que devemos calcular o fluxo magnético? Assim sendo, vamos apelar para a definição primitiva de FEM de movimento, como sendo a integral da força magnética nos portadores de carga na haste:

$$\varepsilon_{MOV} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L}$$

ou seja, a integral de caminho vai ser realizada não em um caminho fechado, mas no caminho reto (a haste) de comprimento $\vec{L}$ (apontando de a para b , por hipótese). No presente caso temos: $\vec{B} = B \hat{z}$ e $\vec{L} = L \cos(\theta) \hat{x} + L \sin(\theta) \hat{y}$. Falta apenas definir a direção da velocidade da haste. O exercício considera alguns casos:

a) Se $\vec{V} = V \hat{x}$, então: $\vec{v} \times \vec{B} = V \hat{x} \times B \hat{z} = V B (-\hat{y})$. Portanto:

$$\varepsilon_{MOV} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L} = V B (-\hat{y}) \cdot (L \cos(\theta) \hat{x} + L \sin(\theta) \hat{y}) = -V B L \sin(\theta)$$

A FEM é negativa, o que significa que ela aponta de b para a (lembre-se que $\vec{L}$ aponta de a para b). Isso porque os portadores de carga positiva na haste serão empurrados em direção à extremidade a da haste pela força magnética (você pode usar a regra da mão direita para a força magnética em um portador e se convencer disso). Note que a extremidade a da haste ficará carregada positivamente enquanto que a extremidade b ficará carregada negativamente. Esse “carregamento” se dará durante um breve transiente, pois enquanto ele ocorre vai surgindo um campo elétrico $\vec{E}_q$ que aponta de a para b e que se opõe ao movimento dos portadores de carga positiva na haste. Quando esse campo elétrico se tornar igual à força magnética por unidade de carga, o movimento dos portadores em direção à extremidade a para e o carregamento cessa. O campo $\vec{E}_q$ sempre aponta no sentido do decaimento do potencial e, por isso, a extremidade a possuirá um potencial maior que a extremidade b : $V(a) - V(b) > 0$.

b) Se $\vec{V} = -V \hat{y}$, então: $\vec{v} \times \vec{B} = -V \hat{y} \times B \hat{z} = V B (-\hat{x})$. Portanto:

$$\varepsilon_{MOV} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L} = V B (-\hat{x}) \cdot (L \cos(\theta) \hat{x} + L \sin(\theta) \hat{y}) = -V B L \cos(\theta)$$

Novamente a FEM é negativa, o que significa que ela aponta de b para a , os portadores de carga positiva na haste serão empurrados em direção à extremidade a da haste pela força magnética. Novamente a extremidade a possuirá um potencial maior que a extremidade b : $V(a) - V(b) > 0$.

c) Se $\vec{V} = V \hat{z}$, então: $\vec{v} \times \vec{B} = -V \hat{z} \times B \hat{z} = \vec{0}$. Portanto:

$$\varepsilon_{MOV} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L} = \vec{0} \cdot (L \cos(\theta) \hat{x} + L \sin(\theta) \hat{y}) = 0$$

Não há FEM, pois não há força magnética nos portadores de carga na haste. Não há, portanto, acúmulo de cargas elétricas em nenhum ponto da haste e $V(a) - V(b) = 0$.

d) Suponha agora o caso geral $\vec{V} = V_x \hat{x} + V_y \hat{y} + V_z \hat{z}$. Então:

$$\vec{v} \times \vec{B} = (V_x \hat{x} + V_y \hat{y} + V_z \hat{z}) \times B \hat{z} = B [V_x (-\hat{y}) + V_y \hat{x}]$$

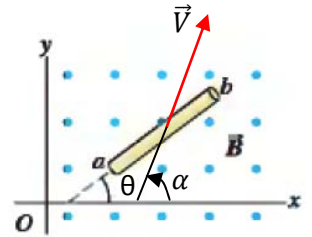
Concluindo:

$$\varepsilon_{MOV} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L} = B [V_x (-\hat{y}) + V_y \hat{x}] \cdot (L \cos(\theta) \hat{x} + L \sin(\theta) \hat{y}) = B L (V_y \cos(\theta) - V_x \sin(\theta))$$

Podemos conferir os casos particulares anteriores: em (a) $V_x = V$ e $V_y = 0$, em (b) $V_x = 0$ e $V_y = -V$ e em (c) $V_x = 0$ e $V_y = 0$.

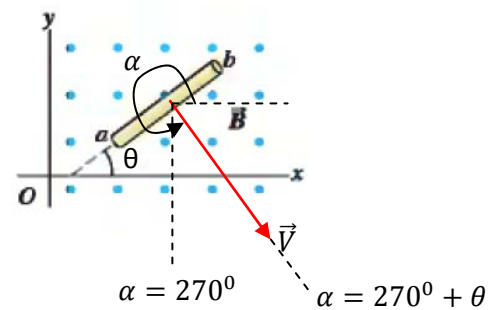
Seja α o ângulo de $\vec{v}$ com o eixo x (conforme a Figura ao lado), então: $V_x = V \cos(\alpha)$ e $V_y = V \sin(\alpha)$. Logo:

$$\varepsilon_{MOV} = BL (V \sin(\alpha) \cos(\theta) - V \cos(\alpha) \sin(\theta)) = B L V \sin(\alpha - \theta)$$



No item (a) fizemos $\alpha = 0$ e no item (b) fizemos $\alpha = -90^\circ$. O item (c) corresponde a $V = 0$ (apenas V_z é não nula).

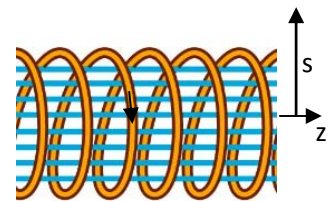
Portanto, para θ fixo, ε_{MOV} será máxima em módulo e negativa para o caso $\sin(\alpha - \theta) = -1$, ou seja $\alpha - \theta = 270^\circ$. Nesse caso a haste está se movendo paralelamente a ela mesma, para baixo, como na Figura ao lado. Esse é o caso em que a força magnética $\vec{v} \times \vec{B}$ está paralela à haste, apontando de b para a e $\varepsilon_{MOV} = -B L V$.



Enfim, a FEM de movimento será máxima quando a força magnética nos portadores de carga na haste for paralela à haste, ou seja, $\vec{v} \times \vec{B}$ for paralelo a $\vec{L}$. Como $\vec{v} \times \vec{B}$ é ortogonal a $\vec{v}$, $\vec{v}$ deve ser ortogonal a $\vec{L}$ para que $\vec{v} \times \vec{B}$ seja paralelo a $\vec{L}$.

E/P29.28:

Um solenóide cilíndrico longo possui n espiras por unidade de comprimento e raio R de seção transversal. A corrente $I(t)$ neste solenóide está aumentando linearmente no tempo.



Sendo z o eixo do solenóide, conforme ilustrado na Figura acima, sabemos que o campo magnético estará confinado ao interior do solenóide (região de raios $s < R$) e será dado por (da lei de Ampère):

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t) \hat{z}$$

Na região externa do solenóide (região de raios $s > R$) o campo magnético é nulo (vale registrar que essas expressões para $\vec{B}$ só são exatas no caso de uma corrente constante. Para uma corrente $I(t)$ a lei de Ampère não vale exatamente e os resultados acima para $\vec{B}$ são apenas uma aproximação, uma aproximação boa para uma corrente $I(t)$ que varia lentamente).

O campo elétrico induzido no espaço é dado pela forma integral da lei de Faraday:

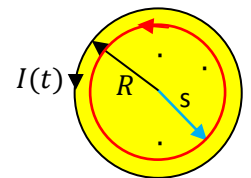
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi(t)$$

A simetria do solenóide, análoga à simetria de um fio reto muito longo (se você fizer um paralelo entre a corrente no fio e o campo magnético no solenóide), nos diz que:

$$\vec{E} = E(s) \hat{\phi}$$

ou seja, a magnitude de $\vec{E}$ só depende da distância (raio s) ao eixo do solenóide e a direção de $\vec{E}$ é tangente aos círculos centrados no eixo coaxiais ao eixo do solenóide.

O “pulo do gato” para o cálculo de $E(s)$ consiste em se escolher uma curva C de tal forma que a função $E(s)$ saia de dentro da integral na lei de Faraday. Para que isso ocorra $E(s)$ deve ser uma constante sobre a curva, ou seja, a curva deve ser uma curva em que o raio s é constante. Essa curva é um círculo concêntrico ao eixo do solenóide. Portanto, adotemos C =círculo de raio s orientado no sentido horário. A Figura ao lado ilustra a seção transversal do solenóide (em amarelo). O campo magnético está saindo ortogonalmente da página. A curva C , um círculo de raio $s < R$, é mostrada em vermelho, orientada no sentido anti-horário (paralela ao $\vec{E}$).



Obtemos:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E(s)dl$$

Na lei de Faraday obtemos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(s) \oint_C dl = E(s) 2\pi s$$

Agora devemos considerar as diferentes regiões do espaço, pois para cada região haverá um fluxo magnético diferente através da área delimitada pela curva C (a área de um disco, já que C é um círculo).

Região $s < R$, dentro do solenóide: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido anti-horário, como na Figura anterior. De acordo com a regra da mão direita, como orientamos a curva C no sentido anti-horário, o vetor normal $\hat{n}$ no cálculo do fluxo através da área do disco delimitado pela curva C deverá estar para fora da página, ou seja, paralelo à $\vec{B}$. Portanto, o fluxo magnético nesse disco delimitado por C é:

$$\phi = \int_{Ds} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{Ds} \mu_0 n I(t) \hat{z} \cdot \hat{z} dA = \mu_0 n I(t) \int_{Ds} dA = \mu_0 n I(t) \pi s^2$$

sendo D_s a superfície do disco de raio s subentendida pela curva C .

Da lei de Faraday:

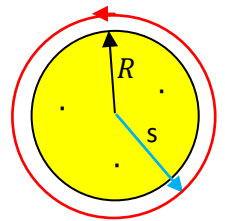
$$E(s) 2 \pi s = -\frac{d}{dt} \mu_0 n I(t) \pi s^2 = -\mu_0 n \pi s^2 \frac{d}{dt} I(t)$$

Portanto:

$$E(s) = -\frac{1}{2} \mu_0 n s \frac{d}{dt} I(t)$$

Note que assumimos lá atrás que o campo elétrico estava no sentido anti-horário na Figura. O sinal negativo na expressão acima indica que o campo elétrico induzido nessa região estará no sentido horário, se a corrente no solenóide estiver crescendo, ou seja, se $\frac{d}{dt} I(t) > 0$.

Região $s > R$, no vácuo fora do solenóide: a curva C é o círculo vermelho de raio s , orientado no sentido anti-horário, como na Figura ao lado. Portanto, o fluxo magnético no disco de raio s delimitado por C é:



$$\phi = \int_{D_s} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{D_s} \mu_0 n I(t) \hat{z} \cdot \hat{z} dA = \mu_0 n I(t) \int_{D_s} dA = \mu_0 n I(t) \pi R^2$$

Da lei de Faraday:

$$E(s) 2 \pi s = -\frac{d}{dt} \mu_0 n I(t) \pi R^2 = -\mu_0 n \pi R^2 \frac{d}{dt} I(t)$$

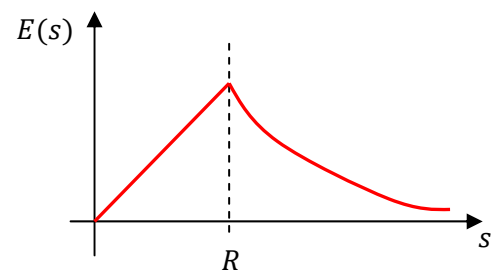
Portanto:

$$E(s) = -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{R^2}{s} \frac{d}{dt} I(t)$$

Aqui vale a mesma observação para o sentido do campo elétrico: o sinal negativo na expressão acima indica que o campo elétrico induzido nessa região estará no sentido horário, se a corrente no solenóide estiver crescendo, ou seja, se $\frac{d}{dt} I(t) > 0$.

Na Figura ao lado esboçamos um gráfico de $E(s)$ versus s .

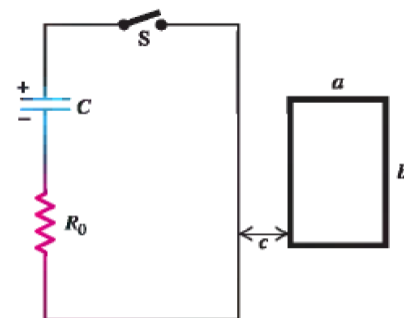
O campo elétrico cresce com s dentro do solenóide, e decai com $1/s$ na região exterior. Note que o campo é contínuo na superfície do solenóide. No centro do solenóide ($s=0$) o campo elétrico induzido é nulo.



Note que concluímos que se a corrente no solenóide estiver crescendo, então o campo elétrico induzido estará no sentido horário. Esse resultado é compatível com a lei de Lenz. Assumimos em nossas figuras da seção transversal do solenóide que o campo magnético está

para fora da página. Da regra da mão direita para os solenóides, concluímos que a corrente no solenóide deve estar no sentido anti-horário. Portanto, se essa corrente crescer no tempo, o campo elétrico induzido (e a FEM induzida) deve estar no sentido oposto ao da corrente, para tentar frear os portadores e se opor a esse crescimento (enquanto ele ocorre).

E/P29.45: A Figura ao lado ilustra um circuito RC e um circuito retangular ao lado dele (com N espiras e resistência elétrica R), ambos fixos no plano da página. O capacitor foi previamente carregado com uma diferença de potencial V_0 entre seus terminais e a chave S é fechada em $t=0$.



A ideia é que ao fechar a chave o capacitor vai descarregar e um pulso de corrente vai circular no circuito do capacitor, no sentido horário (da placa + para a placa -). O fio reto mais longo vai produzir um pulso de campo magnético (e de campo elétrico induzido), e um pulso de fluxo magnético no circuito próximo retangular. Com isso haverá uma FEM induzida nesse circuito, um pulso de FEM.

a) Pensando primeiro no circuito RC, já sabemos que no processo de descarga a carga elétrica $q(t)$ na placa positiva do capacitor varia de acordo com:

$$q(t) = q_0 e^{-t/R_0 C}$$

sendo q_0 o valor inicial da carga, que nesse caso é $q_0 = C V_0$. A corrente de descarga vai circular no sentido horário e terá magnitude:

$$I(t) = -\frac{d}{dt} q(t) = \frac{q_0}{R_0 C} e^{-t/R_0 C} = \frac{V_0}{R_0} e^{-t/R_0 C}$$

O sinal – na expressão acima para $I(t)$ vem do fato de que $q(t)$ está diminuindo no tempo e $I(t)$ é a magnitude positiva da corrente no circuito.

Daqui para diante tudo funciona como no exercício 29.7 resolvido anteriormente. O segmento de fio longo e reto terá circulando nele uma corrente para baixo que produzirá um campo magnético saindo ortogonalmente da página na região do circuito retangular (da regra da mão direita para o fio reto).

Usando a lei de Ampère, podemos mostrar que o campo magnético do fio reto tem módulo dado por:

$$B(s, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2 \pi s}$$

sendo s a distância (raio) até o fio reto. A Figura abaixo ilustra a ideia de que no plano do circuito retangular, o campo $\vec{B}$ estará saindo ortogonalmente da página (vale registrar que essa expressão para $\vec{B}$ só é exata no caso

de uma corrente constante. Para uma corrente $I(t)$ a lei de Ampère não vale exatamente e a expressão acima para $\vec{B}$ é apenas uma aproximação).

b) O fluxo magnético no circuito retangular é?

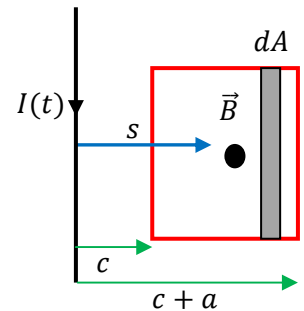
Considere o elemento infinitesimal de área (o retângulo cinza na Figura abaixo, de lados b e ds):

$$dA = b ds$$

com um vetor normal apontando para fora da página (paralelo a $\vec{B}$, portanto).

Obtemos, em uma espira do circuito retangular:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_{s=c}^{s=c+a} B b ds = \int_{s=c}^{s=c+a} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi s} b ds = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} b \int_c^{c+a} \frac{ds}{s} \\ &= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} b \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right)\end{aligned}$$



Como este circuito retangular possui N espiras iguais, o fluxo magnético através dele é: $\phi = N \phi_1$.

A FEM induzida neste circuito é, de acordo com a lei de Faraday (ou regra do fluxo):

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d}{dt} \phi(t) = -\frac{d}{dt} \left[N \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} b \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right) \right] = -\frac{\mu_0 N}{2\pi} b \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right) \frac{d}{dt} I(t)$$

Sendo:

$$I(t) = \frac{V_0}{R_0} e^{-t/R_0 C}$$

Segue que:

$$\frac{d}{dt} I(t) = -\frac{V_0}{R_0^2 C} e^{-t/R_0 C}$$

A derivada da corrente é negativa porque ela está decaindo no tempo. Portanto:

$$\varepsilon_{IND} = \frac{\mu_0 N V_0}{2\pi R_0^2 C} b \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right) e^{-t/R_0 C}$$

O que podemos dizer sobre o sentido da FEM?

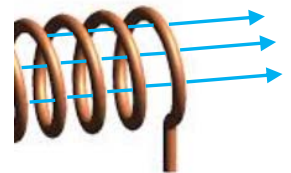
Note que, ao calcularmos o fluxo magnético, adotamos uma normal para fora da página (paralela a $\vec{B}$, como fazemos sempre). A regra da mão direita diz, então, que as FEMs positivas terão o sentido anti-horário. Como obtivemos uma FEM induzida positiva, esta terá mesmo o sentido anti-horário. Esse resultado é compatível com a lei de Lenz: fluxo magnético na espira para fora da página e diminuindo implica em corrente induzida que produz um fluxo para fora da página, ou seja, uma corrente no sentido anti-horário.

Note que consideramos apenas o fluxo magnético na espira produzido pelo segmento de fio reto mais próximo da espira retangular, porque este está mais próximo da espira e produzirá um fluxo magnético mais intenso nessa região. Os dados numéricos do problema sugerem que o circuito do capacitor é bem maior que o circuito retangular próximo. Portanto, o campo magnético das outras partes do circuito RC na região do circuito retangular foi desprezado.

E/P29.46: Um solenóide helicoidal de N espiras tem sua área de seção transversal (digamos A) atravessada por um campo magnético uniforme ortogonal a essa área e cuja magnitude varia no tempo de acordo com o gráfico acima.



A Figura ao lado ilustra um pedaço desse solenóide e as linhas do campo magnético (em azul) uniforme que atravessam sua seção transversal. O fluxo magnético através do solenóide (ou seja, através das N espiras) é, adotando uma normal $\hat{n}$ paralela ao campo :

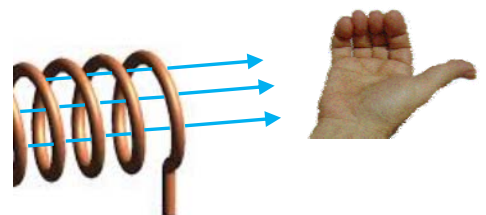


$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B dA = N B A$$

A FEM induzida no solenóide é, da lei de Faraday:

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt}N B A = -NA \frac{d}{dt}B(t)$$

Olhando para o gráfico de $B(t)$, vemos que no intervalo de tempo $(0, t_1)$ a derivada de $B(t)$ é constante e positiva. Portanto, nesse intervalo de tempo a FEM é constante e negativa. O fato de ε_{IND} ser negativa significa que essa FEM terá o sentido oposto ao determinado pela regra da mão direita como sendo positivo. A Figura ao lado ilustra esse sentido. Apontando o polegar da mão



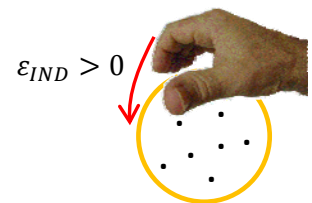
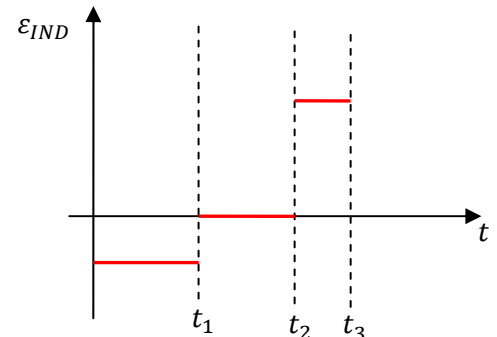
direita no sentido escolhido para $\hat{n}$ (paralelo ao $\vec{B}$), os dedos dessa mão indicam o sentido positivo de ε_{IND} . No intervalo de tempo $(0, t_1)$ ε_{IND} é negativa e terá o sentido oposto a esse sentido indicado pelos dedos da mão direita. No intervalo de tempo (t_1, t_2) a derivada de $B(t)$ é nula e a FEM é nula. No intervalo de tempo (t_2, t_3) a derivada de $B(t)$ é constante e negativa. Portanto, nesse intervalo de tempo a FEM é constante e positiva, ou seja, ε_{IND} terá o sentido indicado pelos dedos da mão direita na Figura acima. Todos esses resultados para o sentido de ε_{IND} são compatíveis com a lei de Lenz.

O gráfico de ε_{IND} em função do tempo fica como mostrado na Figura ao lado. Note que no intervalo de tempo (t_2, t_3) a magnitude de ε_{IND} é maior porque a derivada de $B(t)$ tem magnitude maior nesse intervalo de tempo. A inversão no sinal de ε_{IND} reflete apenas uma inversão em seu sentido, de acordo com o que já discutimos anteriormente.

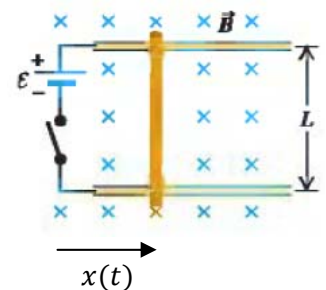
A Figura que segue resume a determinação do sentido de ε_{IND} . $\vec{B}$ está para fora da página. Adotando $\hat{n}$ para fora da página obtemos:

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -NA \frac{d}{dt}B(t)$$

A regra da mão direita diz que, com o polegar para fora (sentido de $\hat{n}$), a FEM positiva estará no sentido anti-horário. Portanto, em (t_1, t_2) a FEM possui sentido horário e em (t_2, t_3) a FEM possui sentido anti-horário. Conferindo com a lei de Lenz: em (t_1, t_2) o fluxo está para fora da página e aumentando, FEM no sentido horário; em (t_2, t_3) o fluxo está para fora da página e diminuindo, FEM no sentido anti-horário



E/P29.56: A situação aqui é parecida com a do exercício 29.25 já resolvido anteriormente. Uma haste condutora de comprimento L (distância entre os dois trilhos) fecha um circuito através de dois trilhos deslizantes. Aqui há uma bateria que alimenta o circuito com uma FEM constante. A resistência elétrica da haste é R e as outras resistências são desprezíveis. A chave é fechada em $t=0$. Um campo magnético uniforme entra no plano da página. Veja a Figura ao lado.



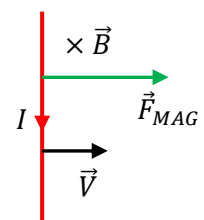
a) Quando a chave é fechada a haste está ainda parada e circula no circuito uma corrente:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

Essa corrente tem o sentido que desce na haste (do + para o -). Nesse instante nasce uma força magnética na haste (seta verde), que empurra ela para a direita, conforme a Figura ao lado. A força em $t=0$ será:

$$\vec{F}_{MAG}(0) = I_0 \vec{L} \times \vec{B} = \frac{\varepsilon}{R} \vec{L} \times \vec{B}$$

sendo $\vec{L}$ um vetor comprimento no sentido da corrente I_0 (para baixo, portanto).



Quando a haste começar a se mover vai haver indução de FEM de movimento no circuito e uma nova corrente induzida vai surgir, com o sentido que sobe na haste, de acordo com a lei de Lenz. De fato, com o movimento da haste para a direita o fluxo magnético (na espira que contém a bateria) para dentro da página vai aumentar. Portanto, a corrente induzida circulará no circuito no sentido anti-horário, se opondo a esse aumento.

Seja $x(t)$ a distância já percorrida pela haste, em relação ao lado fixo que tem a bateria. O circuito fechado possui área $A = L x(t)$. O fluxo magnético através desse circuito é (adotando uma normal para dentro da página, paralela ao campo $\vec{B}$):

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B dA = B \int dA = BA = BL x(t)$$

Portanto, da regra do fluxo, a FEM de movimento nesse circuito é:

$$\varepsilon_{MOV} = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt}BL x(t) = -BL \frac{d}{dt}x(t) = -BL V$$

A FEM é negativa e a regra da mão direita diz que (com $\hat{n}$ para dentro da página) a FEM positiva estaria no sentido horário. Portanto, ε_{MOV} estará no sentido anti-horário, o que é compatível com a lei de Lenz.

Concluindo, com a haste se movendo com velocidade $V(t)$, a corrente que circula nela, para baixo, é:

$$I(t) = I_0 - \frac{|\varepsilon_{MOV}|}{R} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{BL V(t)}{R}$$

A bateria produz I_0 , como se nada estivesse acontecendo. O movimento da haste produz ε_{MOV} e a corrente $|\varepsilon_{MOV}|/R$ oposta a I_0 . Note que enquanto $V(t)$ vai aumentando, $I(t)$ vai diminuindo.

Com a haste se movendo, a força magnética na haste, para a direita, passará a ser:

$$\vec{F}_{MAG}(t) = I(t)\vec{L} \times \vec{B} = \left(\frac{\varepsilon}{R} - \frac{BL V(t)}{R}\right)\vec{L} \times \vec{B}$$

Note então que em $t=0$ a haste está ainda parada ($V(0) = 0$) e ela é empurrada para a direita por uma força magnética de módulo:

$$F_{MAG} = \left(\frac{\varepsilon}{R} - \frac{BL V(0)}{R}\right)LB = \frac{\varepsilon}{R}LB$$

Ela ganha velocidade $V(t)$ e passa a ser empurrada por uma força menor, de magnitude:

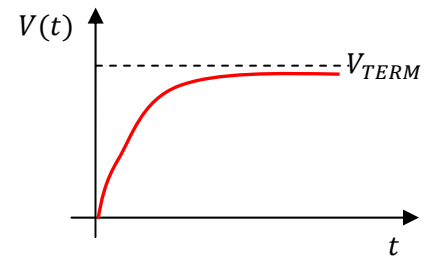
$$F_{MAG}(t) = \left(\frac{\varepsilon}{R} - \frac{BL V(t)}{R}\right)LB$$

À medida que a haste ganha velocidade a força nela vai diminuindo, até que vai chegar um instante em que essa força se anula, a aceleração da haste se anula e ela passa a viajar com velocidade constante, uma velocidade terminal. A velocidade terminal, que anula a força magnética na haste é:

$$F_{MAG}(t) = \left(\frac{\varepsilon}{R} - \frac{B L V(t)}{R} \right) LB = 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} - \frac{B L V_{TERM}}{R} = 0 \Rightarrow V_{TERM} = \frac{\varepsilon}{B L}$$

A situação da haste é análoga a de um paraquedista que cai na atmosfera na presença de um arraste proporcional a sua velocidade de queda. Esse paraquedista vai acelerar no início da queda, mas vai finalmente atingir uma velocidade terminal constante, devido ao arraste com o ar, que cresce com a velocidade e, a partir de um certo instante, se equilibra com o peso do paraquedista.

Um esboço do gráfico do módulo da velocidade da haste em função do tempo é mostrado ao lado. Para calcular a função $V(t)$ bastaria resolver a equação diferencial dada pela segunda lei de Newton:



$$F_{MAG}(t) = \left(\frac{\varepsilon}{R} - \frac{B L V(t)}{R} \right) LB = M \frac{d}{dt} V(t)$$

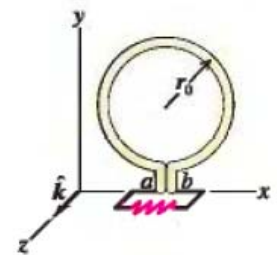
sendo M a massa da haste. Não vamos fazer isso aqui.

E/P29.60:

A Figura ao lado mostra uma espira circular de raio r_0 mergulhada em um campo magnético uniforme dado por:

$$\vec{B}(t) = B_0 \left[1 - 3 \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^3 \right] \hat{z}$$

O campo magnético sai ortogonalmente da página, que é o plano da espira (plano xy). A espira está conectada a um resistor de resistência R (em vermelho).



a) O fluxo magnético através da espira é (adotando uma normal ao longo de $\hat{z}$, pois a espira está no plano xy, ou seja, $\hat{n} = \hat{z}$. Poderíamos adotar também $\hat{n} = -\hat{z}$, mas estamos escolhendo $\hat{n} = \hat{z}$, pois é nossa prática escolher $\hat{n}$ sempre paralela a $\vec{B}$):

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int B_0 \left[1 - 3 \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^3 \right] \hat{z} \cdot \hat{z} dA = B_0 \left[1 - 3 \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^3 \right] \int dA$$

Finalmente:

$$\phi = B_0 \left[1 - 3 \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^3 \right] \pi r_0^2$$

Portanto, da lei de Faraday (regra do fluxo), a FEM induzida nessa espira circular é:

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d}{dt} \phi(t) = -\frac{d}{dt} B_0 \left[1 - 3 \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^3 \right] \pi r_0^2 = B_0 \left[6 \left(\frac{t}{t_0} \right) - 6 \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right] \pi r_0^2$$

Simplificando:

$$\varepsilon_{IND} = 6 B_0 \left(\frac{t}{t_0} \right) \left[1 - \left(\frac{t}{t_0} \right) \right] \pi r_0^2$$

Como a normal no cálculo do fluxo está ao longo de +z, a regra da mão direita diz que a FEM positiva estará no sentido anti-horário (veja a Figura acima e pense em uma normal para fora da página).

c) Se a resistência elétrica da espira circular for R_{ESP} , a corrente que fluirá no circuito espira+resistor será:

$$I = \frac{\varepsilon_{IND}}{R + R_{ESP}}$$

pois R e R_{ESP} estão em série.

d) Note que a FEM induzida dada por:

$$\varepsilon_{IND} = 6 B_0 \left(\frac{t}{t_0} \right) \left[1 - \left(\frac{t}{t_0} \right) \right] \pi r_0^2$$

é positiva no intervalo de tempo $(0, t_0)$, ou seja, tem o sentido anti-horário, e é negativa no intervalo de tempo seguinte (t_0, ∞) , ou seja, tem o sentido horário (basta olhar a Figura da espira mostrada acima).

A Figura ao lado ilustra os gráficos de $\phi(t)$ (curva vermelha) e $\varepsilon_{IND}(t)$ (curva verde) em função do tempo para $t_0 = 4$. O fluxo magnético (ao longo de z) começa diminuindo, atinge o valor zero em $t = t_0$ e depois começa a crescer. A FEM induzida, que é a derivada da curva vermelha com o sinal trocado, começa positiva (sentido anti-horário), se anula em $t = t_0$ e passa a ser negativa (sentido horário). Se você usar a lei de Lenz olhando para a Figura da espira, vai se convencer de que esses são os sentidos corretos da FEM.

