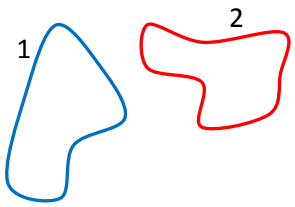
E/P30.1: Duas bobinas (1 e 2) possuem geometrias tais e estão dispostas no espaço de uma forma tal que resulta em uma indutância mútua M. Lembre-se que uma bobina é apenas um circuito com várias espiras.



a) Na bobina 1 circula uma corrente que aumenta uniformemente no tempo (ou seja, que tem derivada constante): $I_1(t) = k_1 t$, sendo k_1 uma constante positiva. Portanto, na vizinhança da bobina 1 haverá um campo magnético variável no tempo $\vec{B}_1$ e um campo elétrico induzido $\vec{E}_1$. Da lei de Faraday (ou regra do fluxo), na bobina 2, que está mergulhada no campo eletromagnético da bobina 1, a FEM induzida em 2 terá magnitude:

$$|\varepsilon_2| = \left|-\frac{d}{dt}\phi_{1/2}\right|$$

sendo $\phi_{1/2}$ o fluxo magnético que a bobina 1 produz na bobina 2. Usando a definição de indutância mútua:

$$\phi_{1/2} = \int_{ESP.\ 2} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 dA_2 = M I_1(t)$$

Portanto, a FEM induzida ε_2 é constante e dada por:

$$|\varepsilon_2| = \left|-\frac{d}{dt} M I_1(t)\right| = \left|-M\frac{d}{dt} I_1(t)\right| = M\ k_1$$

b) Agora esquecemos a corrente em 1 e imaginamos essa mesma corrente fluindo em 2: $I_2(t) = k_1 t$. Então, da lei de Faraday, na bobina 1, que está mergulhada nos campos magnético $\vec{B}_2$ e elétrico $\vec{E}_2$ da bobina 2, a FEM induzida em 1 terá magnitude:

$$|\varepsilon_1| = \left|-\frac{d}{dt}\phi_{2/1}\right|$$

sendo $\phi_{2/1}$ o fluxo magnético que a espira 2 produz na espira 1. Usando a definição de indutância mútua:

$$\phi_{2/1} = \int_{ESP.\ 1} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_1 dA_1 = M I_2(t)$$

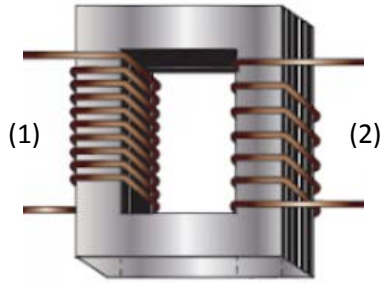
Portanto, a FEM induzida ε_1 é constante e dada por:

$$|\varepsilon_1| = \left|-\frac{d}{dt} M I_2(t)\right| = \left|-M\frac{d}{dt} I_2(t)\right| = M\ k_1 = |\varepsilon_2|$$

Vemos claramente a simetria: se uma corrente $I_1(t)$ circulando em 1 induz em 2 uma FEM ε_2, então, a mesma corrente circulando em 2 vai induzir em 1 uma FEM $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

Esta simetria ($M_{12} = M_{21} = M$) é de validade geral e pode ser útil porque às vezes estamos interessados em uma FEM ε_1 que é muito difícil de ser calculada analiticamente. Então recorremos à simetria e calculamos ε_2. O exercício 30.43 que veremos mais adiante é um exemplo simples e didático dessa estratégia.



E/P30.2: Duas bobinas (1 e 2) helicoidais são enroladas em torno de um núcleo comum. Trata-se da ideia de um transformador de voltagem, como ilustrado na Figura ao lado. O campo magnético criado pela corrente em um solenóide produz fluxo (mútuo) no outro solenóide e dessa forma ocorre a indução mútua. Vamos supor que se a corrente I_1 diminui no tempo em uma taxa constante k_1 então a FEM induzida no solenóide 2 (pelo solenóide 1) possui magnitude (módulo) constante ε_2. Traduzindo: vamos supor que $I_1(t) = I_{01} - k_1\, t$, sendo $k_1 > 0$ uma constante.

a) Se $\phi_{1/2}$ é o fluxo magnético (mútuo) que o solenóide 1 produz no solenóide 2, então a indutância mútua M é definida por: $\phi_{1/2} = M\, I_1$. Portanto: $\phi_{1/2}(t) = M\, I_1(t) = M\, (I_{01} - k_1\, t)$. Da regra do fluxo:

$$\varepsilon_2 = \left| -\frac{d}{dt}\phi_{1/2} \right| = \left| -\frac{d}{dt}[M\, (I_{01} - k_1\, t)] \right| = M\, k_1$$

Portanto, concluímos que $M = \varepsilon_2 / k_1$ (que são dados no exercício).

b) O fluxo magnético no solenóide 2 (produzido pelo solenóide 1) é $\phi_{1/2} = M\, I_1$. Se o solenóide 2 possui N_2 espiras, o fluxo magnético mútuo que atravessa cada espira do solenóide 2 (supondo que são todas iguais) é $\phi_{1/2}/N_2 = M\, I_1/N_2$.

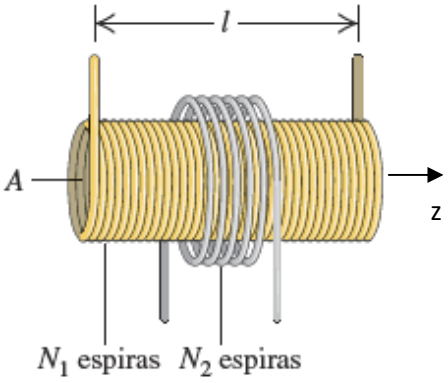
c) Analogamente, se I_2 cresce com uma taxa constante k_2, $I_2(t) = I_{02} + k_2\, t$, sendo $k_2 > 0$ uma constante, a FEM induzida no solenóide 1 possui magnitude:

$$\varepsilon_1 = \left| -\frac{d}{dt}\phi_{2/1} \right| = \left| -\frac{d}{dt}[M\, (I_{02} + k_2\, t)] \right| = M\, k_2$$

Isso porque a indutância mútua é simétrica, ou seja, valem $\phi_{1/2} = M\, I_1$ e $\phi_{2/1} = M\, I_2$ simultaneamente.

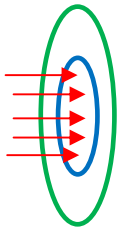
Os fluxos mútuos são iguais ($\phi_{1/2} = \phi_{2/1}$) se as correntes forem iguais ($I_1 = I_2$).

E/P30.4: Duas bobinas (1 e 2) helicoidais são enroladas em torno de um núcleo comum, como ilustrado na Figura ao lado. O campo magnético criado pela corrente em um solenóide produz fluxo (mútuo) no outro solenóide e dessa forma ocorre a indução mútua. Vamos supor que o solenóide 1 (interno) é longo com N_1 espiras,



Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

comprimento l e área de seção transversal A. O solenóide 2 (externo) possui N_2 espiras e está enrolado na região mais central do solenóide 1 (longe das bordas do solenóide 1). Vamos supor que nos solenóide 1 circula uma corrente crescente $I_1(t) = I_{01} + k_1\, t$, sendo $k_1 > 0$ uma constante.



a) Já vimos que para um solenóide longo, longe das bordas, o campo magnético está restrito ao seu interior e é axial e uniforme nessa região. O campo magnético nessa região interior do solenóide 1 é dado por: $\vec{B}_1 = \mu_0\,(N_1/l)\,I_1\,\hat{z}$. Por hipótese, o solenóide 2 está nessa região e, portanto, suas espiras são atravessadas por esse campo magnético. É importante notar que, conforme ilustrado na Figura ao lado, o campo $\vec{B}_1$ (setas vermelhas) não atravessa toda a área maior de uma espira do solenóide 2 (em verde), pois ele está restrito ao interior (menor) do solenóide 1 (espira azul). Portanto, o fluxo magnético através de uma espira do solenóide 2 é (adotando $\hat{n}_2 = \hat{z}$):

$$\phi^{(1)}{}_{1/2} = \int\limits_{1\,ESP} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2\, dA_2 = \int\limits_{1\,ESP} \mu_0 \left(\frac{N_1}{l}\right) I_1\, \hat{z}\cdot\hat{z}\, dA_2 = \mu_0 \left(\frac{N_1}{l}\right) I_1\, A$$

Note, portanto, que $\phi^{(1)}{}_{1/2}$ não é igual a $B_1\, A_2$ mas sim a $B_1\, A_1 = B_1\, A$, posto que só há $\vec{B}_1$ dentro do tubo de área menor $A_1 = A$.

b) Cada uma das N_2 espiras do solenóide 2 é atravessada pelo fluxo magnético $\phi^{(1)}{}_{1/2}$. Portanto, o fluxo magnético (total) através desse solenóide é:

$$\phi_{1/2} = N_2\, \phi^{(1)}{}_{1/2} = \mu_0 \left(\frac{N_1 N_2}{l}\right) I_1\, A$$

A indutância mútua M é definida por: $\phi_{1/2} = M\, I_1$. Portanto:

$$M = \mu_0 \left(\frac{N_1 N_2}{l}\right) A$$

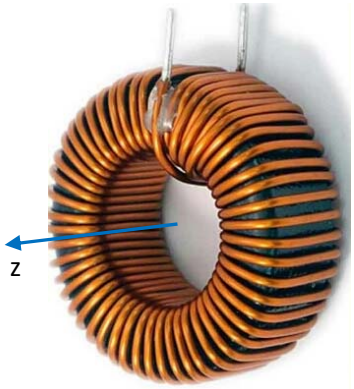
Note que trata-se de uma grandeza basicamente geométrica, mas que envolve também uma característica do vácuo (μ_0) que, por hipótese, "ocupa" o espaço em volta desses solenóides. Preenchendo o espaço com um material magnético, como, por exemplo, um material magnético "mole", deve-se trocar μ_0 por $\mu = K_m\, \mu_0$ (o campo magnético, o fluxo magnético e a indutância mútua aumentam nesse caso).

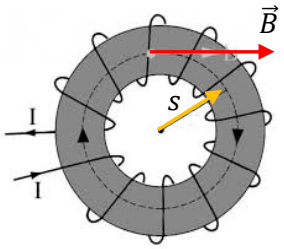
c) Da regra do fluxo:

$$\varepsilon_2 = \left|-\frac{d}{dt}\phi_{1/2}\right| = \left|-\frac{d}{dt}[M\,(I_{01} + k_1\, t)]\right| = M\, k_1 = \mu_0 \left(\frac{N_1 N_2}{l}\right) A\, k_1$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

E/P30.6: Um solenóide (ou bobina) toroidal é formado por N espiras enroladas em torno de um núcleo toroidal, como na Figura ao lado. Nessa Figura o núcleo possui seção transversal retangular. Passando corrente pelo fio, haverá um campo magnético concentrado na região do núcleo e nenhum campo magnético na região exterior ao solenóide. Note que não há bordas e, portanto, não há efeito de bordas. O campo magnético deve ser paralelo aos círculos centrados no eixo do solenóide (direção $\hat{\varphi}$ de um sistema de coordenadas cilíndricas com o eixo z mostrado em azul) e só deve depender, em módulo, do raio s medido em relação a esse eixo. Portanto, a simetria simples do campo nos permite usar a lei de Ampère para determiná-lo. A Figura ao lado ilustra um corte do solenóide toroidal, mostrando o campo $\vec{B}$ em um ponto qualquer no interior do núcleo e o raio s de uma curva amperiana (tracejada), que é um círculo de raio s. O raio s pode ter qualquer valor, desde um s_{MIN} até um s_{MAX} (que delimitam o núcleo do solenóide).





Agora vamos usar a lei de Ampère para determinar a função $B(s)$. A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

sendo C uma curva fechada qualquer, orientada, $d\vec{l}$ vetores comprimento infinitesimais tangentes à curva C, com sentido ao longo da orientação de C e I_{INT} a corrente interna à essa curva, ou seja, o saldo de corrente que atravessa a superfície aberta (um disco) delimitada pela curva C. Essa corrente possui um sinal, de acordo com a orientação de C. Orientando os dedos da mão direita no sentido da orientação de C, o polegar dessa mão vai definir o sentido positivo das correntes que contribuem para I_{INT}.

O "pulo do gato" consiste em se escolher uma curva C de tal forma que a função $B(s)$ saia de dentro da integral na lei de Ampère. Para que isso ocorra, $B(s)$ deve ser uma constante sobre a curva, ou seja, a curva deve ser uma curva em que o raio s é constante. Essa curva é um círculo com centro no eixo z do solenóide, conforme a Figura acima. Portanto, adotemos C=círculo de raio s orientado no sentido horário. Assumindo um $\vec{B}$ também no sentido horário (que já sabemos ser o sentido correto, de acordo com a regra da mão direita para um solenóide) obtemos:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s)dl$$

Na lei de Ampère obtemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s) \oint_C dl = B(s)\, 2\,\pi\, s$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

De acordo com a regra da mão direita, a corrente positiva será a corrente entrando na página. Portanto, vemos que a corrente interna a essa curva é positiva e é dada por:

$$I_{INT} = N\ I$$

pois todas as N espiras mergulham no plano da página, por dentro dessa curva circular.

Da lei de Ampère:

$$B(s)\ 2\ \pi\ s = \mu_0\ N\ I \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0 N\ I}{2\ \pi\ s}$$

para $s_{MIN} < s < s_{MAX}$. Vemos que o campo magnético é mais intenso na região mais próxima do eixo z do solenóide e vai ficando mais fraco quando nos afastamos desse eixo. Fora do núcleo toroidal a lei de Ampère mostra que $\vec{B} = \vec{0}$ (basicamente por que $I_{INT} = 0$ nesses dois casos, próximo do eixo, $s < s_{MIN}$, e longe do eixo, $s > s_{MAX}$).

No enunciado desse exercício não estão fornecidos os valores dos raios s_{MIN} e s_{MAX} que definem as dimensões do núcleo toroidal. Apena um raio médio é fornecido: $\langle s \rangle$. Portanto, deduzimos que se está considerando que a variação do raio s não é importante, assim como a variação de B(s). Devemos assumir que dentro do núcleo toroidal o campo magnético assume um valor médio constante dado por:

$$\langle B \rangle = \frac{\mu_0 N\ I}{2\ \pi\ \langle s \rangle}$$

Para calcular a auto-indutância do solenóide toroidal devemos usar a definição:

$$\phi = L\ I$$

O fluxo magnético que o solenóide produz nele mesmo (auto-fluxo) é:

$$\phi = N \int_{1\ ESP} \vec{B} \cdot \hat{n}\ dA = N \int_{1\ ESP} \frac{\mu_0 N\ I}{2\ \pi\ s}\ dA$$

Note que para realizar essa integral deveríamos conhecer os raios s_{MIN} e s_{MAX}, que seriam os limites de integração. Como eles não foram dados, assumimos então um campo magnético médio constante:

$$\phi = N \int_{1\ ESP} \frac{\mu_0 N\ I}{2\ \pi\ \langle s \rangle}\ dA = N\ \frac{\mu_0 N\ I}{2\ \pi\ \langle s \rangle} \int_{1\ ESP} dA = N\ \frac{\mu_0 N\ I}{2\ \pi\ \langle s \rangle} A$$

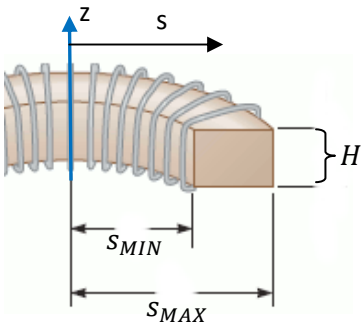
sendo A a área plana delimitada por uma espira (qualquer), a área da seção transversal do núcleo toroidal.

Portanto:

$$N\ \frac{\mu_0 N\ I}{2\ \pi\ \langle s \rangle} A = L\ I \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2}{2\ \pi\ \langle s \rangle} A$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

Se estivessem especificados nos dados do exercício os raios s_{MIN} e s_{MAX} que demarcam os limites do núcleo do solenóide, o resultado acima poderia ser mais preciso. Supondo que a seção transversal do solenóide tenha altura H e largura $s_{MAX} - s_{MIN}$, conforme a Figura ao lado, o auto-fluxo fica:



$$\phi = N \int_{1\ ESP} \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA = N \int_{1\ ESP} \frac{\mu_0 N\, I}{2\,\pi\, s}\, dA = N \int_{s_{MIN}}^{s_{MAX}} \frac{\mu_0 N\, I}{2\,\pi\, s}\, H\, ds$$

$$= \frac{\mu_0 N^2\, I}{2\,\pi} H \ln\left(\frac{s_{MAX}}{s_{MIN}}\right)$$

sendo $\ln$ a função logaritmo natural. Note, a integral foi realizada na área do retângulo, que é a seção transversal do solenóide toroidal. Este retângulo tem altura H ao longo do eixo z e se estende desde o raio s_{MIN} até o raio s_{MAX} ao longo da direção radial s.

Basicamente, a aproximação de raio médio feita acima consiste em considerar que os raios s_{MIN} e s_{MAX} não são muito diferentes, ou seja, que o solenóide não é muito largo. Nesse caso, sendo δ (pequeno) a metade da largura do solenóide, segue que $s_{MAX} = \langle s \rangle + \delta$ e $s_{MIN} = \langle s \rangle - \delta$, portanto:

$$\phi = \frac{\mu_0 N^2\, I}{2\,\pi} H \ln\left(\frac{s_{MAX}}{s_{MIN}}\right) = \frac{\mu_0 N^2\, I}{2\,\pi} H \ln\left(1 + \frac{2\,\delta}{\langle s \rangle}\right) \cong \frac{\mu_0 N^2\, I}{2\,\pi} H\, \frac{2\,\delta}{\langle s \rangle} = \frac{\mu_0 N^2\, I}{2\,\pi\,\langle s \rangle} A$$

sendo $A = H\ 2\,\delta$ a área da seção transversal do solenóide. Usamos a aproximação $\ln(1+\varepsilon) \cong \varepsilon$ para $\varepsilon \cong 0$. Usamos também que (para $\delta/\langle s \rangle \cong 0$) :

$$\frac{s_{MAX}}{s_{MIN}} = \frac{\langle s \rangle + \delta}{\langle s \rangle - \delta} = \frac{\langle s \rangle + \delta}{\langle s \rangle}\left(1 - \frac{\delta}{\langle s \rangle}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\delta}{\langle s \rangle}\right)^2 = 1 + \frac{2\,\delta}{\langle s \rangle}$$

b) Se a corrente fluindo no solenóide é $I(t)$, a lei de Faraday diz que a FEM auto-induzida terá magnitude:

$$|\varepsilon| = \left|\frac{d}{dt}\phi\right| = \left|\frac{d}{dt} L\, I(t)\right| = \left|L \frac{d}{dt} I(t)\right| = L\ \left|\frac{d}{dt} I(t)\right| = \frac{\mu_0 N^2}{2\,\pi\,\langle s \rangle} A\ \left|\frac{d}{dt} I(t)\right|$$

Se a corrente estiver decaindo linearmente no tempo: $I(t) = I_0 - k\,t$, com $k > 0$, então:

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 N^2}{2\,\pi\,\langle s \rangle} A\, k$$

Por exemplo, se $I(t=0) = 5$ A e $I(t = 3 \times 10^{-3}) = 2$ A, segue que $I_0 = 5$ A e $2 = 5 - k\ 3 \times 10^{-3}$. Portanto: $k = 3/(3 \times 10^{-3}) = 10^3$ A/s.

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

c) Chamando de a e b os dois terminais do solenóide, se essa corrente $I(t)$ estiver fluindo de a para b, então, como ela está diminuindo no tempo, a FEM auto-induzida vai se opor a essa diminuição, ou seja, ela terá o mesmo sentido da corrente: ε vai ter o sentido de a para b. Isso é o que dizem a lei de Faraday e, mais diretamente, a lei de Lenz.

E/P30.9: O indutor da Figura ao lado possui auto-indutância L e a corrente nele está diminuído no tempo de acordo com: $I(t) = I_0 - k\,t$, com $k > 0$.

a) A magnitude da FEM auto-induzida é:

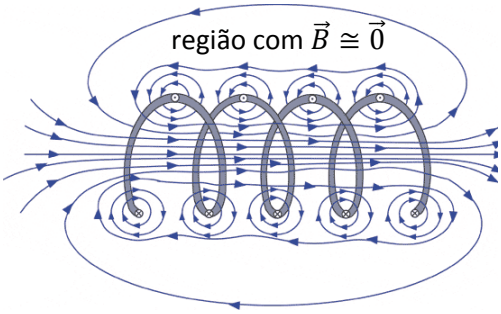
$$|\varepsilon| = \left|\frac{d}{dt}\phi\right| = \left|\frac{d}{dt}L\,I(t)\right| = \left|L\frac{d}{dt}I(t)\right| = L\,\left|\frac{d}{dt}I(t)\right| = L\,k$$

b) A corrente flui de b para a e está diminuindo no tempo. Logo, da lei de Lenz, a FEM ε se oporá a essa diminuição, ou seja, será paralela à corrente: ε terá o sentido de b para a. Portanto, o campo elétrico induzido, cuja integral de caminho é ε, estará apontando de b para a. Isso acarretará um acúmulo de cargas positivas em a e negativas em b (como se esses pontos fossem os terminais de uma bateria). O terminal a será o terminal positivo desse "gerador". Então $V_a > V_b$. Podemos chegar nessa mesma conclusão lembrando que o indutor é um objeto ideal, sem resistência interna. Um indutor ideal é feito de um material sem resistência elétrica, um condutor perfeito. Por isso ele é "ideal". Portanto, não pode haver campo elétrico (resultante) nesse condutor, pois isso levaria a uma corrente divergente (considere a lei de Ohm: $\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$ com $\sigma \to \infty$). Então, além do campo elétrico induzido, apontando de b para a, há o campo elétrico produzido pelo acúmulo de cargas em a e b, apontando de a para b. Esses dois campos elétricos se cancelam dentro do material condutor do indutor ideal e $\vec{J} = \sigma\,\vec{E} = \infty\,\vec{0}$ = qualquer valor finito. O campo elétrico de acúmulos de cargas sempre aponta no sentido do decaimento do potencial elétrico. Concluindo, como o campo elétrico dos acúmulos de cargas na região do indutor aponta de a para b, o ponto b terá potencial elétrico menor que o ponto a: $V_a - V_b > 0$. Um indutor não ideal, ou seja, feito de um condutor que possui uma resistência elétrica, pode ser pensado como a associação de um indutor ideal com um resistor ideal.

Devemos sempre lembrar que um indutor é, por definição, um dispositivo ideal, que apresenta apenas a propriedade de indução eletromagnética e nenhuma resistência elétrica ou capacitância. Portanto, dentro do material condutor do indutor (o fio das espiras de um solenóide, por exemplo) não pode haver campo elétrico resultante. Se há campo elétrico induzido, tem que haver um campo elétrico produzido por acúmulos de cargas, oposto ao primeiro. A esse campo elétrico produzido por acúmulos de cargas elétricas está associada uma diferença de potencial elétrico. Um acúmulo de cargas não significa necessariamente um saldo grande de cargas concentrado apenas nas duas extremidades do solenóide. Basta uma distribuição minúscula

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

de cargas ao longo e em toda a extensão dos condutores do solenóide (principalmente nas superfícies desses condutores) para produzir um campo elétrico intenso em seu interior.

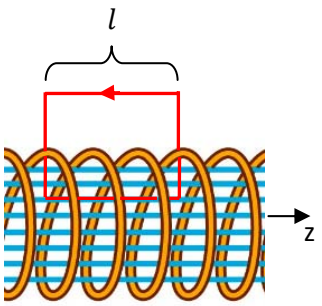


E/P30.11: Vamos calcular a auto-indutância de um solenóide helicoidal longo com N espiras, comprimento C e área de seção transversal A.

Primeiro devemos calcular o campo magnético do solenóide, o que já fizemos no capítulo 28, mas que vamos repetir aqui, para completeza do raciocínio.

A Figura acima ilustra como os campos magnéticos com linhas de força circulares das espiras se superpõem no espaço para resultar no campo magnético do solenóide.

Na região dentro do núcleo a superposição produz um campo intenso e basicamente axial, mas cujas linhas de força se espalham próximo das bordas, refletindo o fato de que o campo é mais fraco nessas regiões de bordas. Na região exterior a superposição é tal que resulta em um campo fraco. Na região central o campo magnético é axial e intenso. Esses fatos serão mais verdadeiros à medida que as espiras forem mais juntas, mais apertadas umas contra as outras, e o solenóide for mais longo. Em um solenóide infinito não há efeitos de borda: o campo interno é axial e uniforme (constante) e o campo externo é nulo. A Figura ao lado mostra um segmento de um solenóide infinito, com as linhas de $\vec{B}$ em azul. Se a corrente estiver descendo nos lados da frente das espiras, o campo magnético no interior do solenóide terá o sentido +z, ou seja: $\vec{B} = B\,\hat{z}$



Queremos calcular o valor de B nessa região central, que será uma aproximação razoável para o campo magnético em toda e extensão do núcleo do solenóide, se desprezarmos os efeitos de borda. A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

sendo C uma curva fechada qualquer, orientada, $d\vec{l}$ vetores comprimento infinitesimais tangentes à curva C, com sentido ao longo da orientação de C e I_{INT} a corrente interna à essa curva, ou seja, o saldo de corrente que atravessa a superfície aberta delimitada pela curva C.

No caso do solenóide sem efeitos de borda obtemos:

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

$$\oint_C B\,\hat{z}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

Considere então a curva vermelha mostrada na Figura acima. Trata-se de um retângulo orientado com um dos lados (L1, de comprimento l) dentro do solenóide, orientado paralelamente ao campo $\vec{B}$, um lado (L2) no exterior do solenóide, onde não há campo, e dois lados (L3 e L4) ortogonais ao campo $\vec{B}$. Na integral acima, realizada em cada um desses quatro lados, só resta a integral no lado L1, de onde obtemos:

$$\oint_C B\,\hat{z}\cdot d\vec{l} = B\int_{L1} dl = B\,l = \mu_0 I_{INT}$$

Note que a curva subentende uma superfície retangular que é cortada por algumas espiras. Cada espira que corta essa superfície contribui com $+I$ para a corrente interna I_{INT} (lembre-se que, de acordo com a regra da mão direita, as correntes saindo do plano da página são positivas). A quantidade de espiras que corta essa superfície é $(N/C)\,l$ e, portanto:

$$B\,l = \mu_0 I_{INT} = \mu_0\,\frac{N}{C}\,l\,I \;\Rightarrow B = \mu_0\,\frac{N}{C}\;I$$

O vetor campo magnético é dado por: $\vec{B} = \mu_0\frac{N}{C}\,I\,\hat{z}$.

O fluxo magnético que o solenóide produz nele mesmo (o auto-fluxo) é:

$$\phi = N\int_{1\,ESP}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dA = N\int_{1\,ESP}\mu_0\frac{N}{C}\,I\,dA = N\,\mu_0\frac{N}{C}\,I\int_{1\,ESP}dA = N\,\mu_0\frac{N}{C}\,IA$$

Concluindo, como $\phi = L\,I$:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{C}A$$

Um solenóide de grande auto-indutância é basicamente um solenóide com muitas espiras. O fator μ_0 na expressão acima reflete o fato de que supomos que o núcleo do solenóide está vazio (vácuo). Se preenchermos esse núcleo com uma liga de ferro especial, podemos mudar esse valor, aumentando bastante o campo magnético interior e a auto-indutância do solenóide. O Permalloy (níquel+ferro), por exemplo, possui $\mu_{Per} \cong 100.000\,\mu_0$, ou seja, ao preenchermos o núcleo de um solenóide com Permalloy, aumentamos seu campo magnético e sua auto-indutância em cerca de 10^5 vezes, com a mesma corrente e mesma densidade de espiras. Essa amplificação do campo magnético se dá porque as correntes elétricas microscópicas (orbitais e de spin) que existem dentro do Permalloy se organizam, sob ação do campo magnético fraco da corrente no solenóide, e passam a gerar, elas mesmas, um campo magnético intenso no espaço. Chamamos essa organização das correntes microscópicas de magnetização.

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

E/P30.13: Um solenóide toroidal é percorrido por uma corrente I. A energia magnética armazenada nesse solenóide é:

$$U_M = \frac{1}{2} L\, I^2$$

Já vimos (exercício 30.6) que para esse solenóide vale ($\langle s \rangle$ é o raio médio):

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\,\pi\,\langle s \rangle} A$$

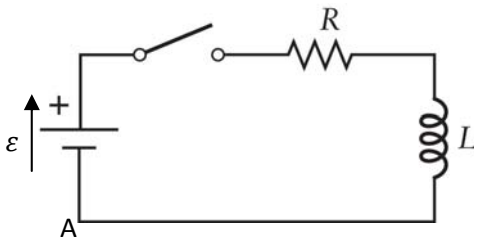
Estamos supondo que $\mu_{AR} = \mu_0$, o que não está muito longe da verdade. Portanto:

$$U_M = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2}{2\,\pi\,\langle s \rangle} A\, I^2$$

Com os dados desse exercício podemos calcular o número de espiras no solenóide:

$$N^2 = \frac{4\,\pi\,\langle s \rangle\, U_M}{\mu_0\, A\, I^2}$$

E/P30.19:



Um circuito RL como na Figura ao lado. A chave vai ser fechada no instante t=0.

A lei das malhas aplicada no sentido horário (mesmo sentido da corrente), partindo de A, fornece a equação:

$$V_A + \varepsilon - R\, I(t) - L\, \frac{d}{dt} I(t) = V_A$$

Portanto, obtemos a equação diferencial:

$$R\, I(t) + L\, \frac{d}{dt} I(t) = \varepsilon$$

com a condição inicial $I(0) = 0$.

a) Em t=0 vale $I(0) = 0$ e, portanto:

$$R\, I(0) + L\, \frac{d}{dt} I(t)|_{t=0} = \varepsilon \Rightarrow \frac{d}{dt} I(t)|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{L}$$

A corrente começa a crescer com essa taxa. Quanto maior a indutância L, mais lento é esse crescimento inicial. A auto-indução se opõe ao crescimento da corrente no circuito (enquanto ele ocorre).

b) Nos instantes posteriores, a taxa de crescimento da corrente é:

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{\varepsilon}{L} - \frac{R}{L}\, I(t)$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

À medida que a corrente cresce, mais lentamente ela vai crescendo. Ela vai finalmente atingir um valor constante no tempo, vai parar de crescer quando $dI(t)/dt = 0$, ou seja:

$$\frac{\varepsilon}{L} - \frac{R}{L} I(t) = 0 \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R}$$

c) A solução da equação diferencial para a corrente é (com a condição inicial $I(0) = 0$):

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/(L/R)})$$

Notamos que, como não poderia deixar de ser:

$$I(0) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{0)}\right) = 0$$

e que:

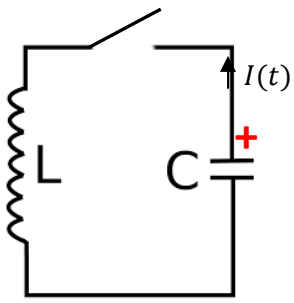
$$I(t \to \infty) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\infty}) = \frac{\varepsilon}{R}$$

que é a corrente estacionária final.

Vemos, então, que o indutor se comporta como um circuito aberto no momento em que a chave é fechada e como um curto-circuito (um simples condutor perfeito) para tempos muito longos ($t \to \infty$). Trata-se de um comportamento oposto ao do capacitor que, no circuito RC alimentado por uma bateria, varia seu comportamento desde o de um curto-circuito até o de um circuito aberto.

E/P30.28: Um capacitor de capacitância C é carregado através de uma bateria de FEM ε. Ele adquire a carga:

$$q_0 = C\,\varepsilon$$



Após isso esse capacitor é conectado a um indutor de indutância L, formando um circuito LC. Se a chave na Figura ao lado for fechada em t=0, a partir desse instante o capacitor vai descarregar sobre o indutor e uma corrente inicial $I(t)$ vai circular no sentido anti-horário. Depois a corrente passa a oscilar, alternando de sentido, à medida que um dispositivo descarrega sua energia elétrica/magnética sobre o outro. O indutor armazena energia magnética e o capacitor armazena energia potencial elétrica. Percorrendo a malha no sentido anti-horário (mesmo sentido da corrente) partindo da placa negativa do capacitor (ponto A) obtemos:

$$V_A + \frac{q(t)}{C} - L\frac{d}{dt}I(t) = V_A$$

Note que no instante mostrado na Figura o capacitor está descarregando e, portanto:

$$I(t) = -\frac{d}{dt}q(t)$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

pois $I(t)$ é a magnitude da corrente no sentido anti-horário (positiva por definição). Quando a corrente for negativa, entenderemos que ela estará circulando no sentido horário.

A equação que governa a carga elétrica na placa superior do capacitor ao longo do tempo é:

$$\frac{q(t)}{C} + L\frac{d^2}{dt^2}q(t) = 0$$

Ou seja:

$$\frac{d^2}{dt^2}q(t) = -\frac{1}{LC}q(t)$$

Com a condição inicial $q(0) = q_0 = C\ \varepsilon$.

Não é difícil mostrar que a solução dessa equação com essa condição inicial é:

$$q(t) = C\ \varepsilon \cos(\omega_0\ t)$$

com a freqüência natural de oscilação dada por:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A carga elétrica na placa superior do capacitor oscila no tempo com a frequência angular ω_0. O valor máximo (amplitude) que a carga $q(t)$ pode assumir é $q_{MAX} = C\ \varepsilon$, pois a função $\cos(\omega_0\ t)$ oscila entre +1 e -1.

A corrente no circuito é:

$$I(t) = -\frac{d}{dt}q(t) = \frac{C\ \varepsilon}{\sqrt{LC}}\text{sen}(\omega_0\ t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\varepsilon\,\text{sen}(\omega_0\ t)$$

A corrente elétrica no circuito oscila no tempo com a frequência angular natural/intrínseca ω_0. Ela alterna de sentido, circulando ora no sentido horário (quando ela for negativa) ora no sentido anti-horário (quando ela for positiva). O valor máximo (amplitude) que a corrente $I(t)$ pode assumir é $I_{MAX} = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\varepsilon$, pois a função $\text{sen}(\omega_0\ t)$ oscila entre +1 e -1.

A energia potencial elétrica armazenada no capacitor é:

$$U_E(t) = \frac{[q(t)]^2}{2\ C} = \frac{1}{2}C\ \varepsilon^2\cos^2(\omega_0\ t)$$

A energia magnética armazenada no indutor é:

$$U_M(t) = \frac{L}{2}[I(t)]^2 = \frac{1}{2}C\ \varepsilon^2\,\text{sen}^2(\omega_0\ t)$$

A energia total armazenada no circuito é:

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

$$U_E(t) + U_M(t) = \frac{1}{2} C\ \varepsilon^2\ [\text{sen}^2(\omega_0\ t) + \cos^2(\omega_0\ t)] = \frac{1}{2} C\ \varepsilon^2 = \frac{q_0^2}{2\ C}$$

Vemos que a energia (eletromagnética) total é constante, pois o circuito é conservativo (sem resistência elétrica, sem efeito Joule). O capacitor e o indutor trocam energia entre si, da forma elétrica para a forma magnética, mantendo o total de energia eletromagnética armazenada no circuito $U_E(t) + U_M(t)$ constante no tempo.

E/P30.43:

Dois solenóides helicoidais coaxiais, um por dentro do outro, como ilustrado na Figura ao lado. O solenóide externo (maior) possui N_1 espiras, comprimento C_1 e raio R_1. O solenóide interno possui N_2 espiras, comprimento C_2 e raio $R_2 < R_1$. O eixo z é o eixo comum dos dois solenóides. Para calcular a indutância mutua entre esses dois solenóides devemos calcular o fluxo magnético que um produz no outro, o fluxo mútuo. Imagine uma corrente I_1 circulando no solenóide maior. Na região mais central do núcleo, longe das bordas, o campo magnético que esse solenóide produz é:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{C_1}\ I_1\ \hat{z}$$

O solenóide 2 está mergulhado nesse campo pois, por hipótese ele é menor que o solenóide 1 e está longe das bordas do solenóide 1. O fluxo magnético que o solenóide 1 produz no solenóide 2 é:

$$\phi_{1/2} = N_2 \int\limits_{1\ ESP} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2\ dA_2 = N_2 \int\limits_{1\ ESP} \mu_0 \frac{N_1}{C_1}\ I_1\ \hat{z} \cdot \hat{z}\ dA$$

Note que a área de uma espira do solenóide 2 é um disco de raio R_2 e que a normal (ao disco delimitado por essa espira) é $\hat{z}$. Portanto:

$$\phi_{1/2} = N_2\ \mu_0 \frac{N_1}{C_1}\ I_1 \int\limits_{1\ ESP} dA = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{C_1}\ I_1\ \pi R_2^2$$

Da definição de indutância mútua:

$$\phi_{1/2} = M\ I_1\ \Rightarrow M = \mu_0\ \frac{N_1 N_2}{C_1} \pi R_2^2$$

b) Suponha que circule uma corrente $I_1(t)$ no solenóide 1. Da lei de Faraday, A FEM induzida no solenóide 2 terá módulo dado por:

$$|\varepsilon_2| = \left| -\frac{d}{dt}\phi_{1/2}(t) \right| = M\ \left| \frac{d}{dt} I_1(t) \right| = \mu_0\ \frac{N_1 N_2}{C_1} \pi R_2^2\ \left| \frac{d}{dt} I_1(t) \right|$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

Se a corrente estiver crescendo com uma taxa constante: $I_1(t) = K\,t$, com K uma constante positiva, então:

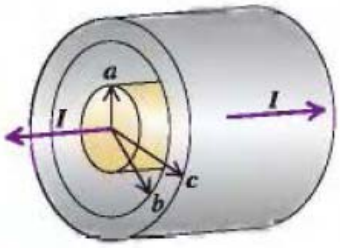
$$|\varepsilon_2| = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{C_1} \pi R_2^2\, K$$

A simetria na indutância mútua ($M_{1/2} = M_{2/1} = M$) implica que se a mesma corrente $I(t) = K\,t$ circular no solenóide 2, a FEM induzida no solenóide 1 terá magnitude:

$$|\varepsilon_1| = M \left|\frac{d}{dt} I_2(t)\right| = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{C_1} \pi R_2^2\, K$$

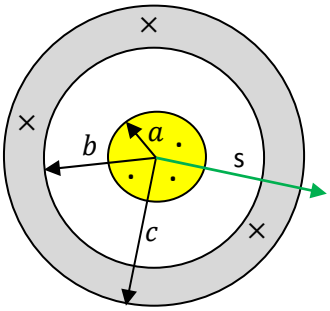
Note que o cálculo explícito de $\phi_{2/1}$ seria bem difícil porque o solenóide 2 é um solenóide pequeno, por hipótese, e não poderíamos usar nesse cálculo a aproximação de solenóide infinito, que foi o que fizemos para calcular $\phi_{1/2}$. O campo magnético $\vec{B}_2$ de um solenóide curto é difícil de calcular porque não podemos apelar para simetrias simples no uso da lei de Ampère, como fazemos para o solenóide infinito. Por isso usamos a ideia de calcular $\phi_{1/2}$ (fluxo do sol. longo no sol. curto) para obter o valor de M. Fazer o contrário, calcular $\phi_{2/1}$ (fluxo do sol. curto no sol. longo) seria bem mais difícil, mas levaria ao mesmo resultado para M, dada a simetria que já conhecemos para a indutância mútua: $M_{1/2} = M_{2/1} = M$.

E/P30.48:



Um cabo coaxial é formado por um fio cilíndrico maciço de raio a envolvido por uma casca cilíndrica coaxial de raio menor $b > a$ e raio maior c. A mesma corrente I vai pelo fio interior e volta pelo fio exterior. A Figura ao acima ilustra um segmento desse cabo.

Ao lado mostramos uma Figura de um cabo coaxial real, como os utilizados em conexões de antenas de TV e internet. Um fio central é circundado por uma malha de fios que constitui a casca cilíndrica exterior. A mesma corrente vai por um fio e volta pelo outro. O campo magnético na região exterior do cabo é muito fraco, o que reduz a possibilidade de interferências eletromagnéticas.



a) Já abordamos o cálculo do campo magnético desse cabo, através da lei de Ampère, no exercício E/P 28.37. Aqui queremos calcular o campo apenas na região cilíndrica entre os dois fios ($a < s < b$). Vamos repetir abaixo o cálculo desse campo nessa região:

A Figura que nos ajuda mais a resolver este exercício é a que mostra a seção transversal do cabo, como mostrado ao lado. Se s é a distância até o eixo

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

do fio (eixo z), esperamos, dada a simetria da distribuição de corrente, que a magnitude do campo magnético produzido por esse cabo dependa apenas de s, ou seja:

$$B = B(s)$$

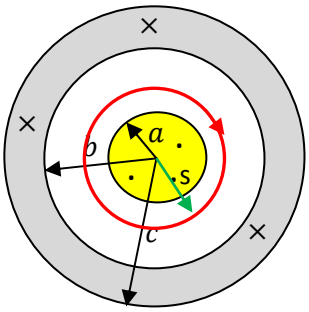
Quanto à direção e sentido, serão dadas pela regra da mão direita. $\vec{B}$ tem a direção tangente aos círculos concêntricos ao cabo e com sentido dos dedos da mão direita, quando o polegar dessa mão aponta no sentido da corrente. Vemos então que a corrente no fio interno vai contribuir com campos no sentido anti-horário, pois a corrente nesse fio sai do plano da página. A corrente no fio externo vai contribuir com campos no sentido horário, pois a corrente nesse fio entra no plano da página. Pensando em um sistema de coordenadas cilíndricas, com o eixo z saindo ortogonalmente da página, o fio interno contribui com campos na direção $+\hat{\varphi}$ enquanto que o fio externo contribui com campos na direção $-\hat{\varphi}$.

Agora vamos usar a lei de Ampère para determinar a função $B(s)$. A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{INT}$$

sendo C uma curva fechada qualquer, orientada, $d\vec{l}$ vetores comprimento infinitesimais tangentes à curva C, com sentido ao longo da orientação de C e I_{INT} a corrente interna à essa curva, ou seja, o saldo de corrente que atravessa a superfície aberta delimitada pela curva C. Essa corrente possui um sinal, de acordo com a orientação de C. Orientando os dedos da mão direita no sentido da orientação de C, o polegar dessa mão vai definir o sentido positivo das correntes que contribuem para I_{INT}.

O "pulo do gato" consiste em se escolher uma curva C de tal forma que a função $B(s)$ saia de dentro da integral na lei de Ampère. Para que isso ocorra $B(s)$ deve ser uma constante sobre a curva, ou seja, a curva deve ser uma curva em que o raio s é constante. Essa curva é um círculo concêntrico ao cabo coaxial. Portanto, adotemos C=círculo de raio s orientado no sentido horário, conforme a Figura ao lado (curva vermelha). Assumindo um $\vec{B}$ também no sentido horário obtemos:



$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s)dl$$

Na lei de Ampère obtemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(s) \oint_C dl = B(s)\, 2\,\pi\, s$$

Na região $a < s < b$, no vácuo entre os fios, vemos que a corrente interna a essa curva é dada por:

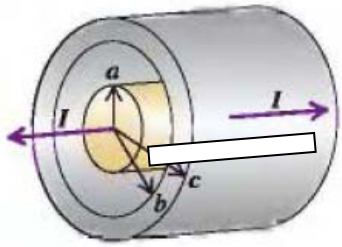
$$I_{INT} = -I$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

Da lei de Ampère:

$$B(s)\,2\,\pi\,s = -\mu_0 I \Rightarrow B(s) = -\frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,s}$$

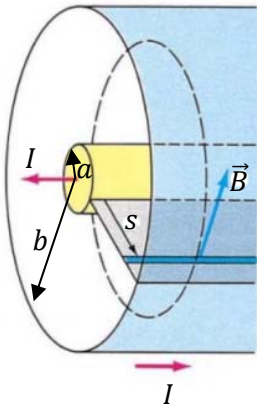
O sinal negativo na expressão acima indica que o campo magnético nessa região está no sentido anti-horário. Trata-se do campo do fio interno. O fio externo não produz campo magnético em seu interior.



b) Para calcular a auto-indutância do cabo coaxial devemos calcular o fluxo magnético que ele produz nele mesmo. Para isso consideramos uma pequena fita de área $dA = l\,ds$, localizada na posição de raio s, conforme a Figura abaixo. A fita é paralela ao eixo (z) do cabo, está localizada entre os dois fios, e possui comprimento l e espessura infinitesimal ds ao longo da direção radial s. Note que o campo magnético do cabo corta essa fita ortogonalmente e que, portanto, o fluxo magnético nela é:

$$d\phi = B(s)dA = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,s}\,l\,ds$$

A Figura ao lado tenta ilustrar melhor essa fita de área $l\,ds$ (em azul escuro) localizada em um plano (em cinza) que é cortado ortogonalmente pelo campo magnético do cabo coaxial. O plano se estende desde o raio $s = a$ até o raio $s = b$ (região entre os dois fios do cabo: fio central e casca exterior).



Não estamos preocupados com sinais aqui, calculamos o fluxo positivo, pois a indutância, que calcularemos a seguir, é uma grandeza estritamente positiva. O fluxo magnético total entre os dois fios que constituem o cabo é:

$$\phi = \int_{s=a}^{s=b} d\phi = \int_{s=a}^{s=b} \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,s}\,l\,ds = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi}\,l \int_{s=a}^{s=b} \frac{ds}{s} = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi}\,l\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Da definição de auto-indutância (para um segmento de cabo de comprimento l):

$$\phi = L\,I \;\Rightarrow L = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\,l\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A auto-indutância por unidade de comprimento é:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Se estiver circulando uma corrente I no cabo, a energia magnética armazenada em um segmento de cabo de comprimento l será:

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

$$U_M = \frac{L}{2} I^2 = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\, l \ln\left(\frac{b}{a}\right) I^2$$

Nos cálculos acima desprezamos o campo magnético dentro do fio interno de raio a, consideramos apenas o campo magnético, e o fluxo magnético, na região entre esse fio e a casca cilíndrica exterior. Por isso, essa indutância que calculamos acima é chamada de indutância "externa" do cabo coaxial. Desprezamos esse campo interno na hipótese de que o fio interno é suficientemente fino. Se levarmos em conta esse campo magnético dentro do fio de raio a, obtemos a chamada indutância "interna" do cabo coaxial. A indutância total, interna+externa, fica:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{8\,\pi} + \frac{\mu_0}{2\,\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

E/P30.51:

Um solenóide helicoidal com corrente I deve armazenar uma quantidade de energia magnética U_M.

a) Sua auto-indutância deve ser:

$$U_M = \frac{L}{2} I^2 \Rightarrow L = 2\frac{U_M}{I^2}$$

b) Já sabemos que:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{C} A$$

sendo N o número de espiras, C o comprimento do solenóide e A área de sua seção transversal. Em termos de $n = N/C$, a densidade de espiras por unidade de comprimento, a auto-indutância fica:

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{C} A = \frac{\mu_0 N^2\, C}{C^2} A = \mu_0 n^2\, C\, A$$

Portanto:

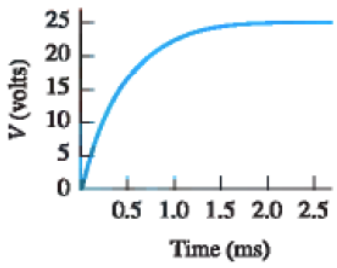
$$\mu_0 n^2\, C\, A = 2\frac{U_M}{I^2}$$

Se conhecermos todo o restante, o comprimento do solenóide será:

$$C = \frac{2}{\mu_0} \frac{U_M}{I^2 n^2 A}$$

E/P30.60:

A Figura ao lado mostra a diferença de potencial em função do tempo medida entre os terminais de um elemento de um circuito RL série alimentado por uma bateria de FEM ε. A DDP parte do zero e vai



Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

assintoticamente para um valor máximo $V_{MAX} \cong 25\,V$. Uma curva de DDP como essa pode ser observada diretamente através de um osciloscópio, uma espécie de voltímetro, que ao invés de medir apenas um valor da DDP, registra graficamente o comportamento da curva da DDP em função do tempo. A Figura ao lado mostra um osciloscópio exibindo duas DDPs em sua tela, uma DDP senoidal e uma DDP quadrada (um osciloscópio típico possui dois canais, para exibir duas DDPs simultaneamente).

a) Neste caso, o osciloscópio está conectado entre os terminais do resistor ou do indutor?

Um indutor ideal em um circuito RL conectado a uma bateria transita entre dois extremos: no início, logo após o circuito ser ligado, o indutor se comporta como um circuito aberto e a DDP entre seus terminais é máxima. No final, assintoticamente, o indutor se comporta como um simples condutor perfeito (um curto-circuito) e a DDP entre seus terminais vai a zero. Vemos claramente que a curva V(t) X t acima não pode ser a DDP entre os terminais do indutor. Portanto, esse osciloscópio está conectado entre os terminais do resistor.

De fato, a DDP entre os terminais do resistor é $R\,I(t)$. No início, logo após o circuito ser ligado (t=0), o indutor se auto-induz e não passa corrente no circuito, portanto, $R\,I(t) = 0$. No final, assintoticamente, o indutor se comporta como um simples condutor perfeito e a corrente vai assintoticamente para seu valor máximo I_{MAX} e, portanto, $R\,I(t)$ vai assintoticamente para um valor máximo constante $R\,I_{MAX}$. Esse é o comportamento mostrado no gráfico acima. O osciloscópio está conectado entre os terminais do resistor.

b) Mais especificamente, no circuito RL a corrente (no processo de carga) se comporta como:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R_{CIRC}}(1 - e^{-t/(L/R)})$$

sendo R_{CIRC} a resistência total do circuito, que pode incluir a resistência interna da bateria não-ideal, a resistência interna de um indutor não-ideal e a resistência R do resistor ligado em série com o indutor (resistores em série). O valor máximo da corrente no circuito é (lembre-se que $e^{-\infty} = 1/e^{\infty} = 0$):

$$I_{MAX} = I(t \to \infty) = \frac{\varepsilon}{R_{CIRC}}$$

No gráfico vemos que $R\,I_{MAX} \cong 25\,V$, portanto:

$$R\,I_{MAX} = R\frac{\varepsilon}{R_{CIRC}} = \frac{R}{R_{CIRC}}\varepsilon \cong 25\,V$$

Como o enunciado da questão diz que $\varepsilon = 25\,V$, só podemos concluir que $R_{CIRC} \cong R$, ou seja, que a bateria e o indutor nesse circuito têm resistências internas desprezíveis. A bateria e o indutor são ambos ideais.

Para estimar a autoindutância L do circuito podemos fazer $t = L/R$ em $I(t)$ para obter:

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

$$I(t = L/R\,) = \frac{\varepsilon}{R_{CIRC}}(1 - e^{-1}) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \cong 0{,}6321\ \frac{\varepsilon}{R}$$

Portanto, a DDP no resistor nesse instante deve valer:

$$R\ I(t = L/R) \cong R\ 0{,}6321\ \frac{\varepsilon}{R} = 0{,}6321\ \varepsilon \cong 15{,}8\ V$$

Olhando no gráfico de $R\ I(t)$ vemos que o instante em que essa DDP atinge o valor $15{,}8\ V$ é:

$$t' \cong 0{,}5\ \text{ms}$$

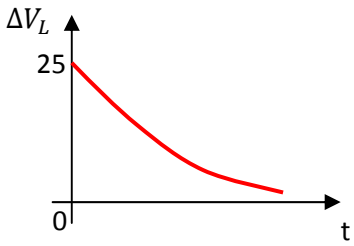
Concluindo, nossa estimativa numérica (grosseira) para L fica (levando em conta que $R = 150\ \Omega$):

$$t' \cong \frac{0{,}5}{1000} = \frac{L}{R} = \frac{L}{150} \Rightarrow L \cong \frac{150}{1000}\ 0{,}5 = 75 \times 10^{-3} H = 75\ \text{mH}$$

c) Ligando os dois terminais do osciloscópio nos dois terminais do indutor vamos observar o comportamento da DDP que é, em magnitude, igual à FEM induzida no indutor:

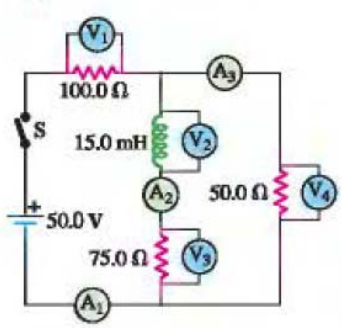
$$\Delta V_L = L\ \frac{d}{dt} I(t) = L\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/(L/R)})\right] = \varepsilon\ e^{-t/(L/R)}$$

Vemos então que, como já havíamos mencionado, em t=0 vale $\Delta V_L = \varepsilon$ e por isso não passa corrente no circuito. Com o passar do tempo, $t \to \infty$ e $\Delta V_L \to 0$, ou seja, o indutor ideal se comporta como um simples curto-circuito entre seus terminais. Um esboço do gráfico de ΔV_L versus t fica como mostrado ao lado.



E/P30.62:

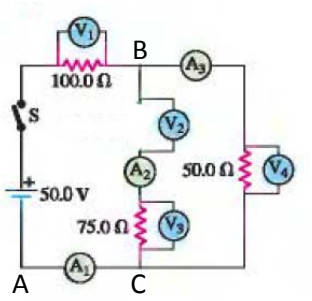
Considere o circuito ao lado, com vários amperímetros (A) e voltímetros (V) ideais. A chave vai ser fechada em t=0.



O circuito parece bastante complicado, mas, para nossa sorte, o exercício se refere apenas a instantes extremos no funcionamento do circuito. Durante a solução consideraremos que os amperímetros ideais se comportam como simples condutores perfeitos (resistência interna nula) e que os voltímetros ideais se comportam como simples circuitos abertos (resistência interna infinita), ou seja, para os cálculos das correntes no circuito podemos esquecer (apagar) todos os amperímetros e voltímetros. Usaremos também o fato de que um voltímetro ligado a um resistor R (em paralelo) em que circula uma corrente I mede a DDP entre os terminais desse resistor que vale, de acordo com a lei de Ohm, $R\ I$.

a) Logo após a chave ser fechada o indutor se auto-induz e não deixa passar corrente por ele, ou seja, o indutor se comporta como um circuito aberto, conforme a Figura abaixo:

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6



Fica claro que só circula corrente (I no sentido horário) na malha externa, pois o ramo central está aberto (não passa e nunca vai passar corrente pelo voltímetro ideal V_2, ele tem resistência interna infinita). Usando a lei das malhas, partindo de A no sentido horário, concluímos que:

$$V_A + 50 - 100\,I - 50\,I = V_A$$

Portanto, a corrente nessa malha é:

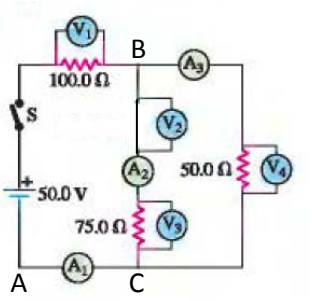
$$I = \frac{50}{150}\ A$$

Vemos então que as leituras de A_1 e A_3 são iguais a I e a leitura de A_2 é nula. A leitura de V_1 é a DDP $100\,I$, a leitura de V_4 é a DDP $50\,I$. A leitura de V_3 é nula, pois não passa corrente pelo resistor de 75 Ω. Quanto à leitura de V_2, vemos que, pelo ramo mais à direita:

$$V_B - 50\,I = V_C$$

Pelo ramo central vemos claramente que a leitura de V_2 é exatamente $V_B - V_C = 50\,I$. A leitura desse voltímetro também é $R\,I$, como nos outros voltímetros, mas com $R \to \infty$ e $I = 0$. Como não sabemos avaliar esse produto $\infty\,0$, temos que apelar para a lei das malhas e calcular $V_B - V_C$ como foi feito acima, através de um ramo fechado do circuito.

b) Muito tempo após a chave ser fechada o indutor ideal deixa de se auto-induzir e passa a se comportar como um curto-circuito entre seus terminais, um simples condutor perfeito, conforme a Figura ao lado:



Agora circula corrente na malha externa e no ramo central. Vemos que o resistor de 50 Ω está em paralelo com o de 75 Ω, resultando em:

$$R' = \frac{50 \times 75}{50 + 75}\ \Omega$$

Esse resistor está em série com o resistor de 100 Ω, resultando em:

$$R_{eq} = R' + 100$$

Portanto, a corrente na bateria é:

$$I_{BAT} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{50}{R' + 100}\ A$$

Concluímos logo que a leitura de A_1 é I_{BAT} e que a leitura de V_1 é a DDP $100\,I_{BAT}$.

Partindo de C e indo até B pela bateria obtemos:

$$V_C + 50 - 100\,I_{BAT} = V_B \Rightarrow V_B - V_C = 50 - 100\,I_{BAT}$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

Essa é a DDP entre os terminais dos resistores de 75 Ω e 50 Ω. Portanto, a corrente no ramo do resistor de 75 Ω é:

$$I_2 = \frac{V_B - V_C}{75} = \frac{50 - 100\, I_{BAT}}{75} \;\; A$$

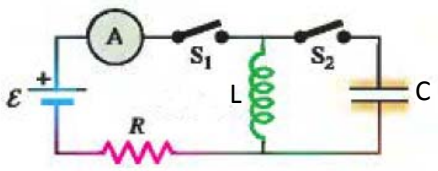
Essa é a leitura do amperímetro A_2. O voltímetro V_2 mede zero porque seus terminais estão curto-circuitados ($V_2 = I_2 \times 0 = 0$). O voltímetro V_3 mede a DDP $75\, I_2 = V_B - V_C$.

A corrente no ramo do resistor de 50 Ω é:

$$I_3 = \frac{V_B - V_C}{50} = \frac{50 - 100\, I_{BAT}}{50} \;\; A$$

Essa é a leitura do amperímetro A_3. O voltímetro V_4 mede a DDP $50\, I_3 = V_B - V_C$.

E/P30.66:



Considere o circuito RLC ao lado. A chave S_1 ficou fechada por um bom tempo, de tal forma que o amperímetro mede uma corrente constante I_1. Em um certo instante a chave S_1 é aberta e a chave S_2 é fechada (simultaneamente).

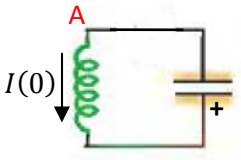
Inicialmente, com apenas a chave S_1 fechada, o circuito é um RL em processo de carga. A corrente cresce lentamente até que atinge o valor assintótico:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R}$$

pois o indutor vai parando de se auto-induzir e se comporta assintoticamente como um curto-circuito (condutor perfeito). Se em t=0 há a comutação das chaves, abrindo S_1 e fechando S_2, o circuito passa a ser um LC, em que a corrente e a carga no capacitor oscilam periodicamente no tempo. A condição inicial para essas oscilações é:

$$q(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad I(0) = I_1 = \frac{\varepsilon}{R}$$

A Figura ao lado ilustra esse circuito nos instantes iniciais. O indutor se auto-induz e mantém a corrente que estava descendo nele, passando a carregar positivamente a placa inferior do capacitor. Depois o capacitor vai descarregar sobre o indutor e a corrente vai inverter de sentido, oscilando periodicamente. Percorrendo a malha no sentido anti-horário (mesmo sentido da corrente), partindo da extremidade superior do indutor (ponto A), obtemos:



Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

$$V_A - L\frac{d}{dt}I(t) - \frac{q(t)}{C} = V_A$$

Note que no instante mostrado na Figura o capacitor está carregando e, portanto:

$$I(t) = \frac{d}{dt}q(t)$$

Logo, a equação que governa a carga elétrica na placa inferior do capacitor ao longo do tempo é:

$$\frac{q(t)}{C} + L\frac{d^2}{dt^2}q(t) = 0$$

Ou seja:

$$\frac{d^2}{dt^2}q(t) = -\frac{1}{LC}q(t)$$

Não é difícil mostrar que a solução dessa equação com a condição inicial $q(0) = 0$ é:

$$q(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t)$$

com A uma constante arbitrária e a freqüência natural dada por:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A carga elétrica na placa inferior do capacitor oscila no tempo com a frequência angular ω_0. O valor máximo (amplitude) que a carga $q(t)$ pode assumir é $q_{MAX} = A$, pois a função $\mathrm{sen}(\omega_0\, t)$ oscila entre +1 e -1.

A corrente no circuito é:

$$I(t) = \frac{d}{dt}q(t) = \frac{A}{\sqrt{LC}}\cos(\omega_0\, t)$$

Sabendo que:

$$I(0) = \frac{A}{\sqrt{LC}}\cos(0) = \frac{A}{\sqrt{LC}} = I_1 = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow A = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{LC} = \frac{\varepsilon}{\omega_0 R}$$

Portanto:

$$q(t) = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{LC}\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t) = \frac{\varepsilon}{\omega_0 R}\mathrm{sen}(\omega_0\, t)$$

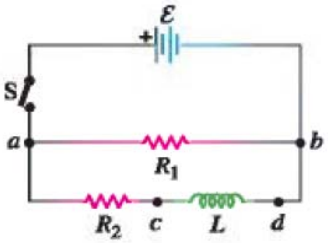
A carga máxima que o capacitor vai acumular é:

$$q_{MAX} = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{LC} = \frac{\varepsilon}{\omega_0 R}$$

Nesse instante a corrente será nula, caso contrário essa não seria a carga máxima. Visto de outra forma: nos instantes em que $\mathrm{sen}(\omega_0\, t) = 1$ e a carga á máxima, segue que $\cos(\omega_0\, t) = 0$ e a corrente é nula.

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

E/P30.67: Considere o circuito ao lado. A chave S é fechada em t=0.



a) Considere o instante logo após a chave ter sido fechada ($t \to 0$). Nesse instante o indutor está se auto induzindo e não passa corrente por ele (circuito aberto). Portanto, o circuito se resume à bateria e ao resistor R_1. A corrente que flui de a para b nesse instante através de R_1 é:

$$I_1 = \varepsilon / R_1$$

Por R_2 e L não passa corrente.

A DDP entre os terminais de R_1 é $\Delta V_1 = V_a - V_b = R_1 I_1 = \varepsilon$. A corrente flui de a para b o que significa que o potencial em a é maior do que em b. Não poderia ser diferente pois "a" está conectado ao terminal + da bateria e "b" ao terminal -. De fato, um resistor obedece à lei de Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ e a corrente ($\vec{J}$) nele sempre flui no mesmo sentido do campo elétrico ($\vec{E}$) que existe dentro dele. Esse campo elétrico é produzido por acúmulos de cargas elétricas nos terminais e na superfície do resistor. O campo elétrico produzido por acúmulos de cargas sempre aponta no sentido do decaimento do potencial. No presente caso a corrente flui de a para b, então $\vec{E}$ dentro do resistor aponta de a para b, então $V_a > V_b$.

Vemos logo que, como $V_a = V_c$ (pois não passa corrente por R_2) e $V_b = V_d$, segue que a DDP entre os terminais do indutor é $\Delta V_L = V_c - V_d = V_a - V_b = \varepsilon$. No instante em que a chave é fechada o indutor se auto induz uma FEM de magnitude ε, com a polaridade invertida em relação à bateria, e não passa corrente por ele. Essa FEM induzida tem o sentido de d para c, que é o mesmo sentido do campo elétrico induzido $\vec{E}_I$ que o indutor está produzindo no espaço próximo dele. A FEM induzida é o trabalho desse campo elétrico induzido. Dentro do indutor ideal (mais especificamente dentro do material condutor que constitui esse indutor) não pode haver campo elétrico, pois o material de que ele é feito é condutor perfeito (por hipótese). Havendo o campo elétrico induzido $\vec{E}_I$, apontando de d para c, deve haver outro campo elétrico, apontando de c para d. Esse segundo campo elétrico $\vec{E}_q$ é produzido por acúmulos de cargas na superfície do condutor que compõe o indutor, de tal forma que $\vec{E}_I + \vec{E}_q = \vec{0}$ dentro desse condutor. Como $\vec{E}_q$ aponta de c para d, segue que $V_c > V_d$ (como não poderia deixar de ser, pois nesse instante vale $V_c - V_d = V_a - V_b = \varepsilon$).

Se a chave for mantida fechada por um longo tempo o indutor vai relaxar e vai deixar de se auto-induzir ($\vec{E}_I = \vec{E}_q = \vec{0}$), passando a funcionar como um curto-circuito (entre c e d). R_1 fica em paralelo com R_2 e a resistência equivalente do circuito é:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

A corrente na bateria passa a ser:

$$I_{BAT} = \varepsilon / R_{eq}$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

A DDP entre os terminais de R_1 continua sendo $\Delta V_1 = V_a - V_b = R_1 I_1 = \varepsilon$, ou seja, através de R_1 circula a corrente $I_1 = \varepsilon/R_1$. A DDP entre os terminais de R_2 é $\Delta V_2 = V_a - V_c = R_2 I_2$. Note que agora $V_c = V_d = V_b$ (indutor=curto-circuito) e que, portanto, $\Delta V_2 = V_a - V_b = \varepsilon$ (R_2 está em paralelo com R_1, portanto, mesma DDP). Através de R_2 circula a corrente $I_2 = \varepsilon/R_2$. Apenas para conferir, aplicando a lei dos nós ao nó "a" obtemos:

$$I_{BAT} = I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}}$$

Vemos que $V_c - V_d = 0$, pois o indutor é um curto-circuito (não vale mais $V_c - V_d = V_a - V_b$).

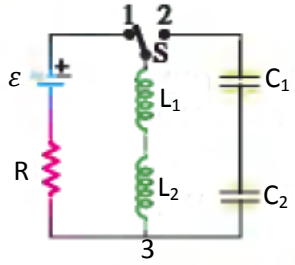
b) Agora abrimos a chave S e não passa mais corrente na bateria, podemos esquecê-la. Logo após a chave ter sido aberta o indutor se auto-induz novamente, se opondo à diminuição da corrente, que fatalmente vai ocorrer, sofrendo oposição do indutor. Nesse instante em que abrimos S o indutor mantém a corrente que estava passando por ele no instante imediatamente anterior à chave ser aberta, ou seja, $I_L = I_2 = \varepsilon/R_2$, fluindo de c para d. A FEM auto-induzida aponta agora de c para d, pois é ela que produz I_L. Essa mesma corrente vai circular por R_1, de b para a. Então note que a corrente em R_1 inverte de sentido quando abrimos a chave, enquanto que a corrente no indutor e em R_2 se mantém no mesmo valor e sentido. As DDPs nesse instante são $\Delta V_1 = V_a - V_b = -R_1 I_1 = -R_1 I_2 = -(R_1/R_2)\,\varepsilon$. A polaridade de ΔV_1 se inverteu porque o sentido da corrente em R_1 se inverteu; $\Delta V_2 = V_a - V_c = R_2 I_2 = \varepsilon$. A polaridade de ΔV_2 se manteve porque o sentido da corrente em R_2 se manteve. Entre os terminais do indutor vale $\Delta V_L = V_c - V_d$. Percorrendo o caminho de c a d através dos resistores obtemos: $V_c + R_2 I_2 + R_1 I_1 = V_d$. Portanto: $\Delta V_L = -(R_2 I_2 + R_1 I_1) = -(1 + R_1/R_2)\,\varepsilon$. Note que $V_c < V_d$ pois ΔV_L é negativo. Agora $\vec{E}_I$ está apontando de c para d e $\vec{E}_q$ está no sentido oposto, de tal forma que $\vec{E}_I + \vec{E}_q = \vec{0}$ dentro do material condutor (ideal) que compõe o indutor ideal. Como $\vec{E}_q$ aponta de d para c, segue que $V_d > V_c$. Note também que $|\Delta V_L| > \varepsilon$. Nesse instante o indutor tem que suplantar a FEM da bateria (que ela estabelecia quando estava no circuito) para conseguir manter a corrente que passava por ele e que vai ter que passar pelos dois resistores também.

Resumindo: quando fechamos a chave o indutor se auto-induz tentando impedir o aumento da corrente, que fatalmente vai ocorrer (o indutor se opõe ao aumento da corrente, enquanto esse aumento ocorre, algo como a força de atrito cinético, que se opõe ao movimento, enquanto ele ocorre). A corrente vai circular no indutor de c para d e por isso a FEM induzida aponta de d para c. O campo elétrico induzido dentro do material condutor do indutor aponta de d para c, tentando frear os portadores de carga (de carga positiva). O sentido da FEM induzida é o sentido do campo elétrico induzido. Não pode haver campo elétrico (resultante) dentro do material (condutor perfeito) do indutor ideal. Isso é obtido através de acúmulos de cargas elétricas nos terminais e na superfície do indutor, que produzem um outro campo elétrico $\vec{E}_q$ dentro do

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

material do indutor, se opondo ao campo elétrico induzido. A superposição desses dois campos elétricos dentro do material do indutor resulta em um campo elétrico nulo. $\vec{E}_q$ deve apontar de c para d. O campo $\vec{E}_q$ sempre aponta no sentido do decaimento do potencial e, por isso, $V_c > V_d$. Após a chave ter ficado fechada por um bom tempo, quando abrimos a chave o indutor novamente se auto-induz, se opondo à redução na corrente através dele, que fatalmente vai ocorrer (o indutor se opõe ao decaimento da corrente, enquanto esse decaimento ocorre). A corrente estava circulando de c para d e, por isso, a FEM induzida e o campo elétrico induzido apontam de c para d. O campo $\vec{E}_q$ aponta agora de d para c e, por isso, $V_c < V_d$.

E/P30.72:



Considere o circuito a lado. Note que é o mesmo circuito do exercício anterior E/P 30.66, mas com dois capacitores em série e dois indutores em série. Se reduzirmos esses capacitores a um capacitor equivalente e esses indutores a um indutor equivalente, o circuito se torna igual ao que já discutimos anteriormente. Para dois capacitores em série já sabemos que eles equivalem a um capacitor apenas de capacitância:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Quanto aos indutores em série, percorrendo o ramo dos dois indutores, partindo do ponto 1 obtemos:

$$V_1 - L_1 \frac{d}{dt} I(t) - L_2 \frac{d}{dt} I(t) = V_3$$

sendo o ponto 3 a extremidade inferior do indutor inferior e $I(t)$ a corrente que passa pelos dois indutores. Portanto, a DDP entre os terminais 1 e 3 do indutor equivalente é:

$$V_1 - V_3 = L_1 \frac{d}{dt} I(t) + L_2 \frac{d}{dt} I(t) = (L_1 + L_2) \frac{d}{dt} I(t) = L_{eq} \frac{d}{dt} I(t)$$

Concluímos que entre os terminais 1 e 3 a indutância equivalente é: $L_{eq} = L_1 + L_2$ (indutores em série, sem indução mútua, obedecem à mesma regra de resistores em série).

Se a chave comutadora ficar muito tempo na posição 1 a corrente vai finalmente atingir o valor assintótico constante:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R}$$

pois os indutores vão parando de se auto-induzir e se comportam assintoticamente como um curto-circuito (condutor perfeito). Em t=0 há a comutação da chave para a posição 2 e o circuito passa a ser um LC. A corrente e a carga nos capacitores oscilam no tempo. A condição inicial para essas oscilações é:

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

$$q(0) = 0 \text{ e } I(0) = I_1 = \frac{\varepsilon}{R}$$

sendo q a carga no capacitor equivalente.

De acordo com o que já discutimos no problema anterior, a equação que governa a carga elétrica na placa inferior do capacitor equivalente ao longo do tempo é:

$$\frac{q(t)}{C_{eq}} + L_{eq}\frac{d^2}{dt^2}q(t) = 0$$

Ou seja:

$$\frac{d^2}{dt^2}q(t) = -\frac{1}{L_{eq}C_{eq}}q(t)$$

A solução dessa equação com a condição inicial $q(0) = 0$ é:

$$q(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t)$$

com A uma constante arbitrária e a frequência natural:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{eq}C_{eq}}}$$

A carga elétrica na placa inferior do capacitor equivalente oscila no tempo com a frequência angular ω_0. O valor máximo que a carga $q(t)$ pode assumir é $q_{MAX} = A$, pois a função $\mathrm{sen}(\omega_0\, t)$ oscila entre +1 e -1.

A corrente no circuito é:

$$I(t) = \frac{d}{dt}q(t) = \frac{A}{\sqrt{L_{eq}C_{eq}}}\cos(\omega_0\, t)$$

Sabendo que:

$$I(0) = \frac{A}{\sqrt{L_{eq}C_{eq}}}\cos(0) = \frac{A}{\sqrt{L_{eq}C_{eq}}} = I_1 = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow A = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{L_{eq}C_{eq}}$$

Portanto:

$$q(t) = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{L_{eq}C_{eq}}\,\mathrm{sen}(\omega_0\, t)$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\cos(\omega_0\, t)$$

A carga máxima no capacitor equivalente é:

$$q_{MAX} = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{L_{eq}C_{eq}}$$

Essa é a carga máxima que vai se acumular na placa inferior do capacitor C_2 logo após a chave ser comutada (pois a corrente inicia descendo nos indutores e carregando essa placa positivamente). Esse processo de carga

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

inicia-se em t=0 (quando a chave vai de 1 para 2) e termina quando $\mathrm{sen}(\omega_0\, t) = 1$ logo em seguida, ou seja, quando:

$$\omega_0\, t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_{eq}C_{eq}}$$

Note que esse tempo é 1/4 do período T das oscilações, dado por:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega_0}$$

De fato, no período T a carga na placa inferior sai do zero, atinge o valor máximo calculado acima (após ¼ de T), passa a diminuir e passa pelo zero de novo (após 2/4 de T), inverte de sinal e atinge o valor mínimo $-q_{MAX}$ (após 3/4 de T) e finalmente começa a diminuir de novo voltando ao valor zero (após 4/4 de T), completando um ciclo. Ao final do primeiro quarto de período a carga está no seu valor máximo.

Como os capacitores estão em série, a carga máxima que cada um vai adquirir, em t=T/4 é:

$$q_{1MAX} = q_{2MAX} = q_{MAX} = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{L_{eq}C_{eq}}$$

Essa carga máxima pode ser encontrada também pela conservação da energia eletromagnética no circuito. Essa energia é dada por:

$$E_{EM} = U_E(t) + U_M(t) = \frac{q(t)^2}{2C_{eq}} + \frac{L_{eq}I(t)^2}{2}$$

No instante t=0, por exemplo, vale ($q(0) = 0$ e $I(0) = I_1 = \frac{\varepsilon}{R}$):

$$E_{EM} = 0 + \frac{L_{eq}\varepsilon^2}{2\,R^2}$$

Nesse instante a energia é puramente magnética, armazenada nos indutores.

As oscilações eletromagnéticas se dão sem dissipação, pois a resistência elétrica do circuito LC é nula. Portanto, no instante em que a corrente se anular e a carga no capacitor for máxima, a energia eletromagnética no circuito será puramente elétrica, mas ainda terá o mesmo valor definido na expressão anterior (E_{EM} é uma constante). Nesse instante vale:

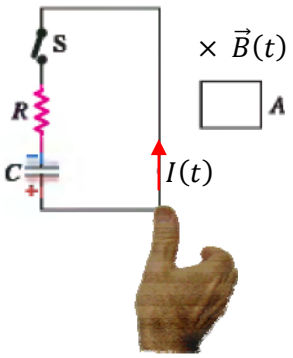
$$E_{EM} = \frac{q_{MAX}^2}{2C_{eq}} + 0 = \frac{L_{eq}\varepsilon^2}{2\,R^2}$$

Concluindo:

$$q_{MAX} = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{L_{eq}C_{eq}}$$

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

E/P30.74: Considere o circuito RC mostrado na Figura lado.



Uma pequena espira retangular (A) está colocada ao lado deste circuito.

Sabemos que após a chave S ser fechada vai circular corrente no circuito, no processo de descarga do capacitor. Essa corrente vai circular no sentido anti-horário no circuito RC (pois a placa inferior do capacitor é a placa positiva). Sabemos também que essa corrente vai decair no tempo, à medida que o capacitor vai descarregando. Portanto, no fio reto ao lado da espira A haverá uma corrente subindo e diminuindo no tempo. Da regra da mão direita (para o campo magnético do fio reto, ilustrada na Figura), sabemos que esse fio vai produzir na região da espira A um campo magnético $\vec{B}$ entrando no plano da página. O fluxo magnético na espira A estará para dentro da página, e diminuindo no tempo. Da lei de Lenz, sabemos que a corrente induzida na espira A terá o sentido tal que se oporá à diminuição desse fluxo magnético (enquanto essa diminuição ocorre). Da regra da mão direita (para o campo magnético de uma espira), vemos que a corrente induzida na espira A vai circular no sentido horário. De uma forma mais quantitativa:

Se q_0 é a carga elétrica inicial na placa inferior do capacitor, a carga nessa placa vai decair no tempo de acordo com:

$$q(t) = q_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

A corrente no circuito RC, no sentido anti-horário, será (capacitor descarregando, daí o sinal -):

$$I(t) = -\frac{d}{dt}q(t) = \frac{q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

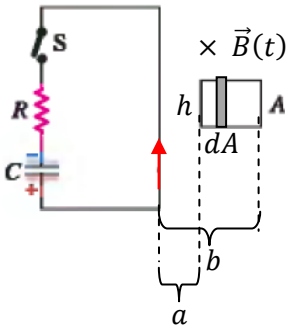
O campo magnético na vizinhança do fio reto próximo à espira A terá magnitude:

$$B(s,t) = \frac{\mu_0\, I(t)}{2\,\pi\, s} = \frac{\mu_0}{2\,\pi\, s}\frac{q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

sendo s a distância até esse fio. Esse campo estará orientado para dentro da página nessa região.

O fluxo magnético para dentro da página na espira A será (adotando $\hat{n}$ para dentro da página, paralelo a $\vec{B}$):

$$\phi = \int_{ESP.A} \vec{B}\cdot\hat{n}\, dA = \int_{s=a}^{s=b} \frac{\mu_0}{2\,\pi\, s}\frac{q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, h\, ds$$



sendo a e b as distâncias dos lados paralelos ao fio reto até esse fio e h o comprimento do lado da espira paralelo ao fio reto (a espira tem lados de comprimentos h e $b-a$ e $dA = h\, ds$ (retângulo cinza), ver a Figura ao lado).

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6

Portanto:

$$\phi = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\frac{q_0}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}\,h\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A FEM induzida na espira A é, de acordo com a lei de Faraday/regra do fluxo:

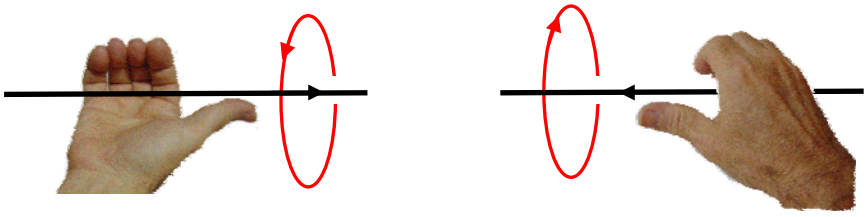
$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\phi = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\frac{q_0}{(RC)^2}\,e^{-\frac{t}{RC}}\,h\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Note que ao calcular o fluxo magnético adotamos uma normal para dentro da página, paralela ao campo $\vec{B}$ (por isso o fluxo deu positivo). Portanto, o sentido positivo de ε é, de acordo com a regra da mão direita (da lei de Faraday/regra do fluxo), o sentido horário. Como a FEM que calculamos resultou positiva, então ε está mesmo no sentido horário. A corrente induzida na espira A possui o mesmo sentido da FEM induzida nessa espira. Esse é o sentido já previsto pela lei de Lenz.

Note que na discussão desse exercício usamos três regras da mão direita distintas. Vamos revisá-las sucintamente:

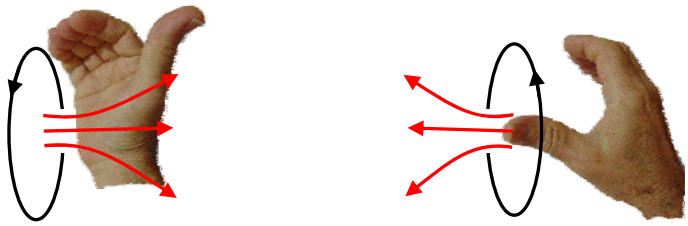
1. Regra da mão direita do fio reto:

Apontando o polegar da mão direita no sentido da corrente I em um fio reto, os outros dedos dessa mão indicarão o sentido das linhas (circulares) do campo magnético $\vec{B}$ produzido por esse fio.



2. Regra da mão direita da espira:

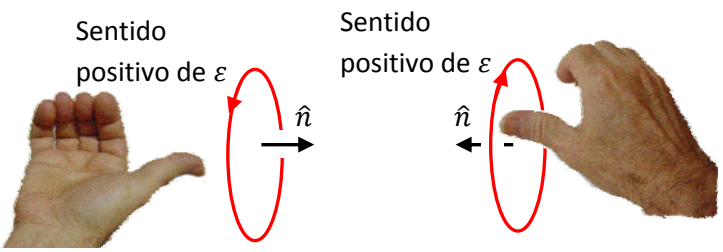
Circulando com os dedos da mão direita no sentido da corrente I em uma espira, o polegar dessa mão indicará o sentido das linhas do campo magnético $\vec{B}$ produzido por essa espira na região mais próxima do centro.



3. Regra da mão direita da lei de Faraday/regra do fluxo.

Apontando o polegar da mão direita no sentido do vetor normal $\hat{n}$ utilizado no cálculo do fluxo magnético em uma espira, os outros dedos dessa mão indicarão o sentido da FEM induzida positiva nessa espira.

Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6



Direitos reservados ao autor: José Arnaldo Redinz / Universidade Federal de Viçosa – MG (Nov. 2022) Ver. 1.6