E/P31.1: Em um aparelho ligado a uma voltagem alternada (CA) senoidal $V(t)$ vai circular uma corrente alternada senoidal $I(t)$, com a mesma freqüência ω da voltagem:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi) \;\Rightarrow I(t) = I_0 \cos(\omega\, t)$$

sendo V_0 a amplitude da voltagem e I_0 a amplitude da corrente. φ é o ângulo da fase, o avanço da voltagem em relação à corrente.

O valor médio (temporal) da corrente é:

$$\langle I(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\, dt = 0$$

sendo $T = 2\pi/\omega$ o período das oscilações. Essa média é nula porque a corrente alterna simetricamente de sinal (ou sentido). Trata-se de uma média inútil, pois não diz muito sobre a corrente. Fato é que em circuitos CA os elétrons vão para frente e para trás, ficando no mesmo lugar, em média. Seus deslocamentos médios e velocidades médias são nulos e daí $\langle I(t)\rangle = 0$. Em um fio de cobre com raio da ordem de 1 mm, transportando uma corrente de 1 A, a velocidade de arraste v_A é da ordem de 10 cm/h. Para correntes alternadas de freqüência $f = 60$ Hz, o período das oscilações dos elétrons é $T = 1/f = 1/60$ s. Durante metade do período um elétron viaja (em um dado sentido) por uma distância d dada por:

$$d = v_A \frac{T}{2} \cong 0{,}0001 \text{ cm}$$

Conclusão, nesse circuito CA os elétrons se deslocam d em um dado sentido, param e retornam essa mesma distância d no sentido oposto. Eles ficam indo e voltando, sem sair do lugar.

O valor médio (temporal) quadrático da corrente (ou valor média da corrente ao quadrado) é:

$$\langle I^2(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\, dt = \frac{I_0^2}{2}$$

O valor RMS (raiz quadrada do valor médio quadrático), ou “eficaz”, ou “efetivo, ou “quadrático médio”, é:

$$I_{RMS} = \sqrt{\langle I^2(t)\rangle} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Se na “plaquinha” fixada atrás de um scanner de computador está escrito: 0,34 A 120 V 60 Hz, então, concluímos que:

$I_{RMS} = 0{,}34\ A$	$V_{RMS} = 120\ V$
$I_0 = I_{RMS}\sqrt{2} \cong 0{,}48\ \ A$	$V_0 = V_{RMS}\sqrt{2} \cong 170\ V$

$$\langle I(t)\rangle = 0$$

$$\langle I^2(t)\rangle = I_{RMS}^2 \cong 0{,}12\ A^2$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = 60\ Hz$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60}\ s$$

Das grandezas especificadas acima, apenas $\langle I(t)\rangle$ e $\langle I^2(t)\rangle$ não dizem muita coisa e, por isso, são simplesmente ignoradas.

E/P31.3: Uma fonte de voltagem CA tem entre seus terminais a voltagem alternada (CA) senoidal $V(t)$:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega\, t)$$

sendo $V_0 = 45$ V a amplitude da voltagem.

b) O valor médio (temporal) da voltagem é (T é o período da alternância de polaridade):

$$\langle V(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_0 \cos(\omega\, t)\ \ dt = \frac{V_0}{T}\int_0^T \cos(\omega\, t)\ \ dt = \frac{V_0}{T}\left[\frac{\text{sen}(\omega\, T)\ - \text{sen}(0)}{\omega}\right] = 0$$

A voltagem é ora positiva, ora negativa e sua média é zero.

b) O valor médio (temporal) do quadrado da voltagem é:

$$\langle [V(t)]^2\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T [V(t)]^2\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_0^2[\cos(\omega\, t)]^2\, dt = \frac{V_0^2}{T}\int_0^T [\cos(\omega\, t)]^2\, dt$$

$$= \frac{V_0^2}{T}\left[\frac{1}{2}\frac{\cos(\omega\, t)\,\text{sen}(\omega\, t) + \omega\, t}{\omega}\right]_0^T = \frac{V_0^2}{T}\left[\frac{T}{2}\right] = \frac{V_0^2}{2}$$

O valor RMS (efetivo ou eficaz) da voltagem é:

$$V_{RMS} = \sqrt{\langle [V(t)]^2\rangle} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

Portanto, se $V_0 = 45$ V, segue que $V_{RMS} = 45/\sqrt{2} \cong 31{,}8$ V. Se ligarmos um resistor de resistência R nos terminais dessa fonte ele vai dissipar a potência média (efeito Joule):

$$P_{MED} = \frac{V_{RMS}^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R}$$

E/P31.4: Um capacitor (ideal) de capacitância C é ligado a uma fonte de voltagem alternada dada por $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$. A amplitude da voltagem (e não de corrente) é $V_0 = 60\ V$.

Sabemos que em geral a amplitude da corrente em um circuito qualquer ligado a uma fonte AC senoidal é:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z}$$

sendo Z a impedância desse circuito. Nesse caso, sendo o circuito apenas um capacitor, segue que:

$$Z = X_C = \frac{1}{\omega\, C}$$

sendo X_C a reatância capacitiva do circuito. Portanto, a amplitude da corrente é:

$$I_0 = \omega\, C\, V_0$$

De fato, dada a definição de capacitância, segue que:

$$V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

e ainda:

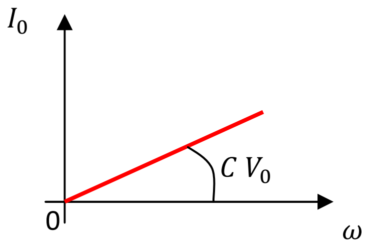
$$I(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

Portanto, assumindo $I(t) = I_0 \cos(\omega\, t)$:

$$I_0 \cos(\omega\, t) = \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} C\, V(t) = \frac{d}{dt} C V_0 \cos(\omega\, t + \varphi) = -\, C\, \omega\, V_0 \operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi)$$

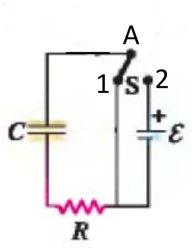
Concluindo: $I_0 = C\, \omega\, V_0$ e $\cos(\omega\, t) = -\operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi) \Rightarrow \varphi = -\pi/2$ (a voltagem está atrasada em relação à corrente, atrasada de $\pi/2$) . φ é o ângulo de avanço da voltagem, se φ é negativo, significa que a voltagem está atrasada.

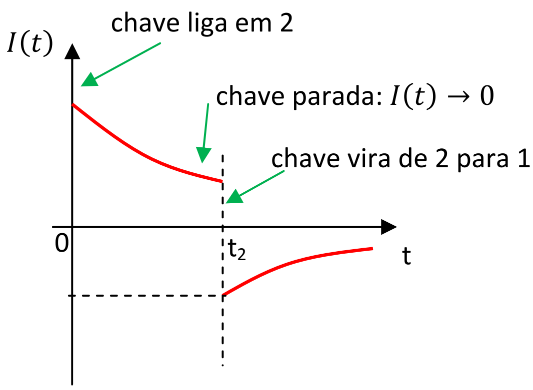
Fazendo um gráfico de $I_0 = \omega\, C\, V_0$ versus ω (para C e V_0 constantes) vamos obter uma reta que passa pela origem de inclinação $C\, V_0$, como na Figura ao lado.



Em resumo, o capacitor se opõe à passagem da corrente alternada no circuito através de sua reatância capacitiva. Note que a corrente elétrica não circula através das placas do capacitor, pois elas estão isoladas uma da outra por um material dielétrico (isolante elétrico). Mas enfim, cargas fluem para as placas, enquanto a corrente circula no circuito externo ligado ao capacitor e o capacitor influencia, portanto, essa corrente. Capacitores funcionam como circuitos abertos em corrente contínua (CC), que seria o caso $\omega = 0$, com exceção de um breve transiente, que já estudamos no capítulo 26. Por isso $X_C = 1/\omega\, C \to \infty$ e $I_0 = \omega\, C\, V_0 \to 0$ quando $\omega \to 0$. Capacitores se opõem fortemente à circulação de correntes de baixas freqüências. Por outro lado, $X_C = 1/\omega\, C \to 0$ e $I_0 = \omega\, C\, V_0 \to \infty$ quando $\omega \to \infty$. Capacitores basicamente não se opõem à circulação de correntes de altas freqüências. Por essa razão, capacitores são bons filtros de freqüência, usados em sistemas de som para separar os sons agudos dos sons graves. Ligando um capacitor em série com um tweeter garantimos que este alto-falante reproduza apenas, ou principalmente, os sons mais agudos do espectro sonoro.

Podemos entender esse comportamento dos capacitores, com relação à freqüência da corrente, relembrando o resultado do exercício 26.49, que trata do circuito mostrado na Figura ao lado. Um capacitor é alimentado por uma bateria. A chave comutadora S é ligada em 2 em $t = 0$ e no instante t_2 essa chave vira da posição 2 para a posição 1. O capacitor carrega pela ação da bateria e depois descarrega, através do resistor. Olhando o gráfico da corrente em função do tempo vemos que se deixarmos a chave parada na posição 2 (circuito alimentado pela bateria) a corrente vai a zero, ou seja, após um breve transiente o capacitor não vai deixar mais passar corrente no circuito, porque ele vai estar totalmente carregado. Por outro lado, em $t = 0$ e em $t = t_2$ a corrente atinge valores altos, ou seja, o capacitor deixa passar mais corrente no circuito nos instantes de chaveamento, ou mudança no circuito. O capacitor não se opõe às mudanças no circuito, pelo contrário, quando ligamos/desligamos a bateria a corrente varia bruscamente. Dessa forma, entendemos que a situação de chave parada na posição 2 nesse circuito corresponde ao limite $\omega \to 0$ no circuito CA e o capacitor oferece, no estado estacionário, alta oposição à circulação da corrente (alta reatância). Por outro lado, a situação de chave ligando/comutando rapidamente nesse circuito corresponde ao limite $\omega \to \infty$ no circuito CA e o capacitor oferece baixa oposição à circulação da corrente (baixa reatância). Por isso $X_C \propto 1/\omega$.





E/P31.5: Um indutor (ideal) de indutância L é ligado a uma fonte de voltagem alternada dada por $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$.

Sabemos que em geral a amplitude da corrente em um circuito qualquer ligado a uma fonte AC é:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z}$$

sendo Z a impedância desse circuito. Nesse caso, sendo o circuito apenas um indutor, segue que:

$$Z = X_L = \omega\, L$$

sendo X_L a reatância indutiva do circuito. Portanto, a amplitude da corrente é:

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega\, L}$$

De fato, de acordo com a lei de Faraday sabemos que:

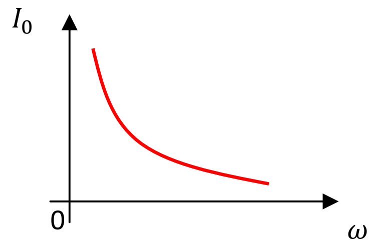
$$V(t) = L\,\frac{d}{dt} I(t)$$

Segue que, assumindo $I(t) = I_0 \cos(\omega\, t)$:

$$L\,\frac{d}{dt} I_0 \cos(\omega\, t) \;= -\omega\, L\, I_0\, \mathrm{sen}(\omega\, t) \;= V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$$

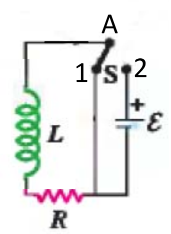
Portanto: $I_0 = V_0/\omega\, L$ e $-\mathrm{sen}(\omega\, t) \;= \cos(\omega\, t + \varphi) \Rightarrow \varphi = \pi/2$ (a voltagem está adiantada em relação à corrente, de $\pi/2$) .

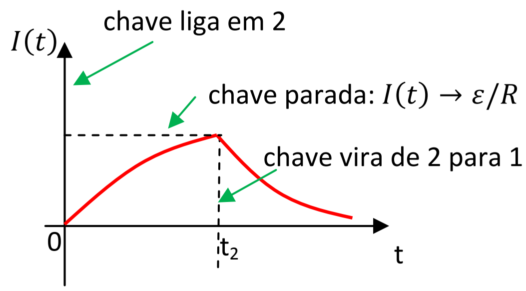
Fazendo um gráfico de $I_0 = V_0/\omega\, L$ versus ω (para L e V_0 constantes) vamos obter uma hipérbole, como na Figura ao lado.



Em resumo, o indutor se opõe à passagem da corrente alternada no circuito através de sua reatância indutiva. Indutores funcionam como curto-circuitos em corrente contínua (CC), que seria o caso $\omega = 0$, com exceção de um breve transiente, que já estudamos no capítulo 30. Por isso $X_L = \omega\, L \to 0$ e $I_0 = \; V_0/\omega\, L \to \infty$ quando $\omega \to 0$. Indutores basicamente não se opõem à circulação de correntes de baixas freqüências. Por outro lado, $X_L = \omega\, L \to \infty$ e $I_0 = V_0/\omega\, L \to 0$ quando $\omega \to \infty$. Indutores se opõem fortemente à circulação de correntes de altas freqüências. Por essa razão, indutores são bons filtros de freqüência, usados em sistemas de som para separar os sons agudos dos sons graves. Ligando um indutor em série com um woofer garantimos que este alto-falante reproduza apenas, ou principalmente, os sons mais graves.

Podemos entender esse comportamento dos indutores, com relação à freqüência da corrente, trocando no exercício 26.49 o capacitor por um indutor ideal de indutância L. O circuito fica como mostrado na Figura ao lado. Um indutor é alimentado por uma bateria. A chave comutadora S é ligada em 2 em $t = 0$ e no instante t_2 essa chave vira instantaneamente da posição 2 para a posição 1. O indutor carrega através da bateria e descarrega (sua energia magnética), através do resistor. Olhando o gráfico da corrente em função do tempo vemos que o indutor se opõe aos chaveamentos.





Primeiramente ele se opõe ao crescimento da corrente e depois ele se opõe ao decaimento da corrente. Se deixarmos a chave parada na posição 2 (circuito alimentado pela bateria) a corrente atinge um valor estacionário alto, ou seja, após um breve transiente o indutor deixa passar corrente livremente no circuito. Em $t = 0$ e em $t = t_2$ a corrente não sofre saltos bruscos, ela é amortecida pela auto-indução. O indutor deixa passar mais corrente no circuito em que não há chaveamento, pois nesse caso ele não sofre auto-indução. Dessa forma, entendemos que a situação de chave parada na posição 2 nesse circuito corresponde ao limite $\omega \to 0$ no circuito CA e o indutor oferece pouca oposição à circulação da corrente (pouca auto-indução e baixa reatância). Por outro lado, a situação de chave ligando/comutando rapidamente nesse circuito corresponde ao limite $\omega \to \infty$ no circuito CA e o indutor oferece alta oposição à circulação da corrente (muita auto-indução e alta reatância). Por isso $X_L \propto \omega$.

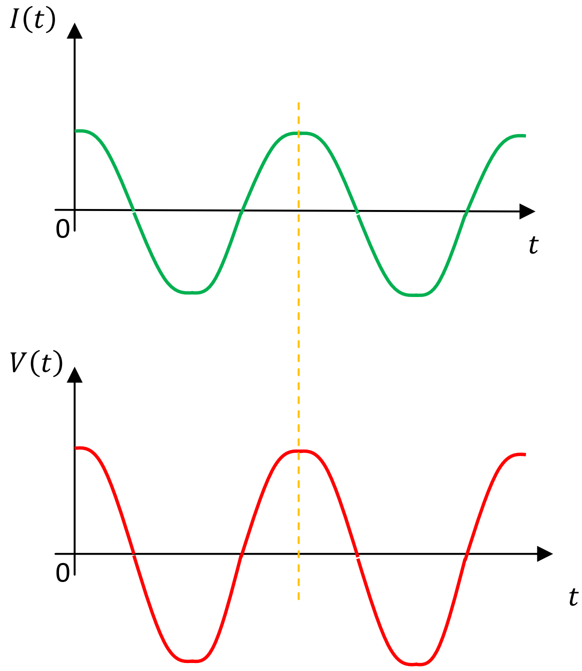
E/P31.7: Uma fonte CA produz uma corrente $I(t) = I_0 \cos(\omega\, t)$ em um circuito.

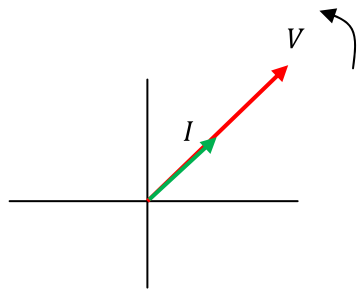
a) Se o circuito é um simples resistor R, da lei de Ohm:

$$V(t) = R\, I(t) = RI_0 \cos(\omega\, t)$$

Portanto, o gráfico de $V(t)$ é o mesmo de $I(t)$, apenas com amplitude (e dimensão/unidade) diferente. Os gráficos e o diagrama fasorial são mostrados abaixo.

O gráfico de $I(t)$ é um cosseno e o gráfico de $V(t)$ também é um cosseno. Os fasores V e I estão em fase (um sobre o outro), $\varphi = 0$. Olhando os gráficos de $I(t)$ e $V(t)$ versus t, vemos que os instantes em que a voltagem atinge seus máximos (o instante marcado pela linha amarela, por exemplo) são os mesmos instantes em que a corrente atinge seus máximos. Em um circuito puro-R, a corrente basicamente obedece à vontade da fonte: $V(t)$ máximo $\Rightarrow I(t)$ máxima, $V(t)$ mínimo $\Rightarrow I(t)$ mínima, $V(t) = 0 \Rightarrow I(t) = 0$ e assim por diante.





Um resistor é apenas um arraste e os portadores de carga se movem de acordo com a "vontade" da fonte de voltagem.

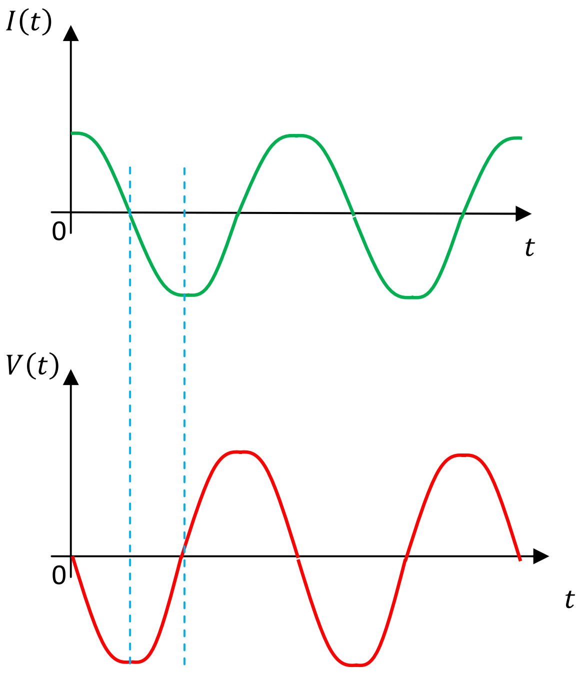
b) Se o circuito é um simples indutor ideal de indutância L, da lei de Faraday (com $I(t) = I_0 \cos(\omega\, t)$):

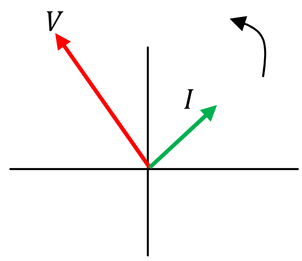
$$V(t) = L \frac{d}{dt}\, I(t) = -\, \omega\, L\, I_0\, \mathrm{sen}(\omega\, t) = \omega\, L\, I_0 \cos(\omega\, t + \pi/2)$$

Portanto, o gráfico de $V(t)$ é o gráfico de $I(t)$, com amplitude (e dimensão/unidade) diferente e deslocado no eixo do tempo, adiantado de $\pi/2$. Esse "adiantamento" é mais evidente no diagrama fasorial onde vemos claramente que o fasor de V gira na frente do fasor de I. Olhando os gráficos de $I(t)$ e $V(t)$ versus t, vemos que o instante em que a voltagem atinge seu primeiro mínimo é anterior ao instante em que a corrente atinge seu primeiro mínimo (linhas tracejadas azuis). A corrente está atrasada em relação à voltagem ou, equivalentemente, a voltagem está adiantada em relação à corrente.

Os gráficos e o diagrama fasorial são mostrados abaixo. O gráfico de $I(t)$ é um cosseno e o gráfico de $V(t)$ é um seno de "cabeça para baixo" (multiplicado por -1).

Em um circuito puro-L a corrente não obedece à vontade da fonte, pois o próprio indutor pode se auto-induzir e funcionar como uma fonte. O indutor é uma "fonte" que às vezes tem a mesma polaridade da fonte e outras vezes tem a polaridade oposta à da fonte (depende do sinal da derivada da corrente). A corrente fica à mercê dessa competição entre essas duas fontes.





Os portadores de carga se movem à mercê da competição entre a fonte de voltagem e a autoindução em L.

c) Se o circuito é um simples capacitor ideal de capacitância C, da definição de capacitância:

$$q(t) = C\, V(t)$$

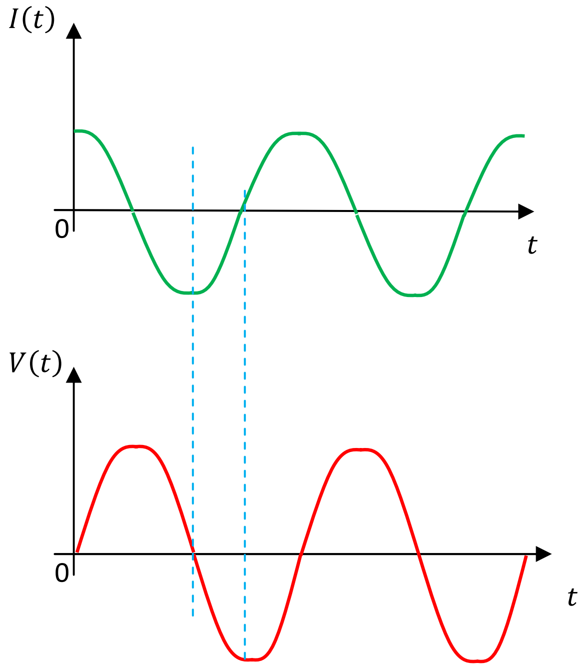
Segue que:

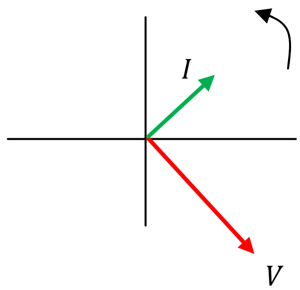
$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t) \;= \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} C\, V(t) \Rightarrow C\, V(t) = \frac{I_0}{\omega} \mathrm{sen}(\omega\, t) \Rightarrow V(t) = \frac{I_0}{\omega\, C} \cos(\omega\, t - \pi/2)$$

Portanto, o gráfico de $V(t)$ é o gráfico de $I(t)$, com amplitude (e dimensão/unidade) diferente e deslocado no eixo do tempo, atrasado de $\pi/2$. Esse "atraso" é mais evidente no diagrama fasorial onde vemos claramente que o fasor de V gira atrás do fasor de I. Olhando os gráficos de $I(t)$ e $V(t)$ versus t, vemos que o instante em que a voltagem atinge seu primeiro mínimo (linha tracejada azul) é posterior ao instante em que a corrente atinge seu primeiro mínimo. A voltagem está atrasada em relação à corrente.

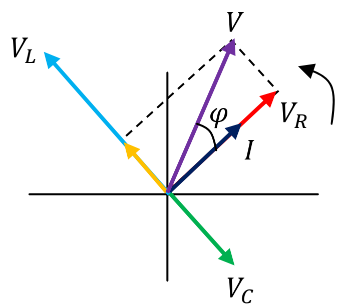
Os gráficos e o diagrama fasorial são mostrados abaixo. O gráfico de $I(t)$ é um cosseno e o gráfico de $V(t)$ é um seno.

Em um circuito puro-C a corrente não obedece à vontade da fonte, pois o próprio capacitor pode se descarregar e funcionar como uma fonte. O capacitor é uma "fonte" que às vezes tem a mesma polaridade da fonte e outras vezes tem a polaridade oposta à da fonte. A corrente fica à mercê dessa competição entre essas duas fontes.





Os portadores de carga se movem à mercê da competição entre a fonte de voltagem e a carga/descarga em C.



E/P31.19: Um circuito RLC série alimentado por uma fonte CA com voltagem $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$. A corrente no circuito é:

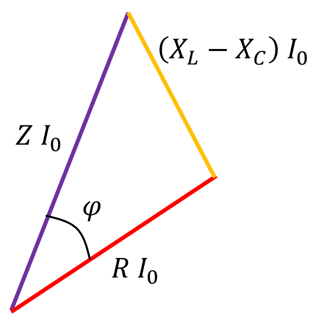
$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t) \ = \frac{V_0}{Z} \cos(\omega\, t)$$

sendo $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ a impedância do circuito e $X_L = \omega\, L$ e $X_C = 1/\omega\, C$ as reatâncias indutiva e capacitiva. A amplitude da corrente é $\frac{V_0}{Z}$. O ângulo de fase entre a corrente I e a voltagem na fonte V pode ser encontrado facilmente através de um diagrama fasorial, lembrando que há apenas uma corrente (circuito série), que a voltagem em R (V_R) está em fase com a corrente, que a voltagem no capacitor (V_C) está atrasada em relação à corrente de $\pi/2$ rad e que a voltagem no indutor (V_L) está adiantada em relação à corrente de $\pi/2$ rad. Portanto, o diagrama fica como mostrado acima (o fasor amarelo é a soma $V_L + V_C$).

Nesse diagrama estamos assumindo $V_{0L} > V_{0C}$ (por isso o fasor azul é maior que o verde), ou seja, $X_L > X_C$, já que: $V_{0L} = X_L\, I_0$ e $V_{0C} = X_C\, I_0$. Nesse caso o ângulo φ é positivo, ou seja, a voltagem na fonte está mesmo adiantada em relação à corrente. Nesse caso dizemos que o circuito é predominantemente indutivo. No caso oposto, $X_L < X_C$, o fasor verde será maior que o fasor azul, o fasor amarelo estará no sentido oposto ao mostrado na Figura e o ângulo φ será negativo, ou seja, a voltagem na fonte estará atrasada em relação à corrente. Nesse caso dizemos que o circuito é predominantemente capacitivo.

Entre o predominantemente indutivo ($\varphi > 0$) e o predominantemente capacitivo ($\varphi < 0$) está o circuito puramente resistivo ($\varphi = 0$).

No triângulo retângulo na Figura acima e repetido ao lado (de lados roxo, vermelho e amarelo = triângulo das impedâncias) podemos ver que:



$$\tan(\varphi) = \frac{V_{0L} - V_{0C}}{V_{0R}} = \frac{X_L\, I_0 - X_C\, I_0}{R\, I_0} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

com a restrição: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

d) As amplitudes das voltagens (os tamanhos dos fasores no diagrama fasorial) são:

$$V_{0L} = X_L\, I_0 = X_L\, \frac{V_0}{Z} = \frac{X_L}{Z} V_0 = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} V_0$$

$$V_{0C} = X_C\, I_0 = X_C\, \frac{V_0}{Z} = \frac{X_C}{Z} V_0 = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} V_0$$

$$V_{0R} = R\, I_0 = R\, \frac{V_0}{Z} = \frac{R}{Z} V_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} V_0$$

No diagrama fasorial (ou mais diretamente no triângulo das impedâncias) vemos que:

$$\cos(\varphi) = \frac{V_{0R}}{V_0} = \frac{R}{Z}$$

e, portanto, $V_{0R} = V_0 \cos(\varphi)$, sendo $\cos(\varphi)$ o fator de potência do circuito.

e) Para que a amplitude da voltagem no capacitor (V_{0C}) seja maior que a amplitude da voltagem na fonte (V_0) basta que:

$$V_{0C} > V_0 \;\Rightarrow X_C I_0 > Z\, I_0 \Rightarrow X_C > Z \;\Rightarrow X_C > \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

ou seja, basta que a reatância capacitiva seja maior que a própria impedância do circuito. Não há nada que impeça essa desigualdade de ser satisfeita. Basta que escolhamos valores de R, C, L e ω convenientes. Considere, por exemplo, $X_L \cong X_C$ e $R \ll X_C$. Nesse caso:

$$\frac{X_C}{Z} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cong \frac{X_C}{R} \gg 1 \Rightarrow \frac{V_{0C}}{V_0} = \frac{X_C}{Z} \cong \frac{X_C}{R} \gg 1$$

Mais especificamente:

$$X_C > Z \ \Rightarrow X_C > \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow X_C^2 > R^2 + (X_L - X_C)^2$$

Portanto, para que V_{0C} seja maior que V_0 basta que:

$$2\, X_L X_C > R^2 + X_L^2$$

Isso é basicamente verdade para um circuito com muita reatância capacitiva $(X_C > X_L, R)$.

Analogamente, se $X_L \cong X_C$ e $R \ll X_L$, a voltagem entre os terminais do indutor também pode ter amplitude maior que a amplitude da voltagem na fonte:

$$\frac{V_{0L}}{V_0} = \frac{X_L}{Z} \cong \frac{X_L}{R} \gg 1$$

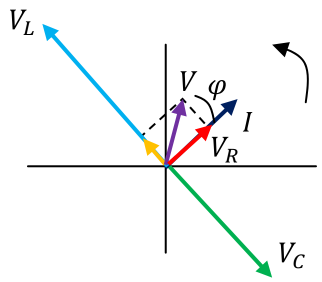
Mais especificamente:

$$X_L > Z \ \Rightarrow X_L > \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow X_L^2 > R^2 + (X_L - X_C)^2$$

Portanto, para que V_{0L} seja maior que V_0 basta que:

$$2\, X_L X_C > R^2 + X_C^2$$

Isso é basicamente verdade para um circuito com muita reatância indutiva $(X_L > X_C, R)$.



Nosso exemplo com $X_L \cong X_C$ e $R \ll X_L$ ou $R \ll X_C$ é um circuito próximo da ressonância com mais reatância do que resistência. O diagrama fasorial desse circuito ficaria como mostrado ao lado. Ainda estamos considerando um circuito predominantemente indutivo, mas próximo da ressonância: $X_L \gtrsim X_C$. Vemos que o fasor de V (roxo) é bem menor que o fasor de V_C (verde) ou de V_L (azul), significando que as amplitudes das voltagens no capacitor e no indutor são bem maiores que a amplitude da voltagem na fonte (note que o fasor de V_R (vermelho) pequeno permitiu que isso ocorra). As amplitudes das voltagens são exatamente os tamanhos desses fasores. Esse circuito pode amplificar uma voltagem: entra nele (através da fonte) uma voltagem de baixa amplitude e sai (através dos terminais do indutor ou do capacitor) uma voltagem de grande amplitude. Isso só vai ocorrer se essa voltagem que entra tiver freqüência ω próxima de $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, que é a freqüência de ressonância do circuito RLC série.

Enfim, a condição $V_{0C} > V_0$ pode ocorrer em outros casos, mesmo longe da ressonância, basta que valha $X_C > Z$. Com os dados numéricos que o livro fornece para esse problema obtemos $X_C \cong 667\ \Omega$ e $Z \cong 601\ \Omega$. Portanto:

$$\frac{V_{0C}}{V_0} = \frac{X_C}{Z} \cong 1{,}11$$

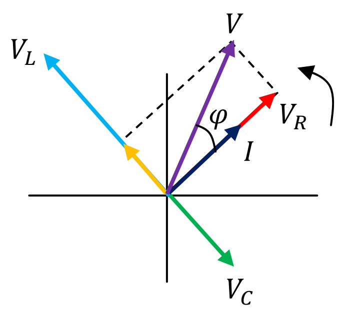
e ainda $\varphi \cong -71^o$, ou seja, o circuito está longe da ressonância (ele é predominantemente capacitivo, pois $X_L = 100\ \Omega$).

Note que essa pergunta, sobre as amplitudes, é diferente da pergunta sobre os valores instantâneos, feita na questão 31.8 que já resolvemos. Lá é feita a pergunta: pode ocorrer $V_C(t) > V(t)$? Em algum instante a voltagem entre os terminais do capacitor pode ser maior que a voltagem entre os terminais da fonte? Vimos que a resposta é sim, pois o capacitor pode estar carregado em um instante em que $V(t) = 0$ e nesse instante $V_C(t) = q(t)/C$ será maior que $V(t)$. Isso pode ocorrer independentemente da relação entre as amplitudes V_{0C} e V_0, que é o que foi abordado aqui neste exercício.

Apenas para concluir, a lei das malhas diz que nesse circuito vale:

$$V(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t)$$

e, portanto, alguém poderia achar absurda a ideia de que $V_L(t)$ ou $V_C(t)$ tenham amplitude maior que a voltagem $V(t)$ da fonte (já que a fonte é o "total"). Mas enfim, não há nada de absurdo nisso, pois esse fato já pode ser observado no diagrama fasorial ao lado, que é um diagrama fasorial padrão para a discussão de um circuito predominantemente indutivo. Note que o fasor azul é maior que o fasor roxo, ou seja, $V_{0L} > V_0$ (o fato da seta vermelha ser pequena, ou seja, baixo valor de R, ajuda isso a acontecer).



E/P31.20: Um circuito RLC série, como no exercício anterior. A voltagem na fonte CA é dada por $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$ e a corrente no circuito é:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t) \ = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega\, t)$$

sendo $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ a impedância do circuito e $X_L = \omega\, L$ e $X_C = 1/\omega\, C$ as reatâncias indutiva e capacitiva. O ângulo de fase é

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L\ - X_C}{R}$$

com a restrição: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

A voltagem entre os terminais do resistor é (da lei de Ohm):

$$V_R(t) = R\, I(t) = R\, \frac{V_0}{Z}\cos(\omega\, t)\ = \frac{R}{Z} V_0 \cos(\omega\, t)$$

A voltagem entre os terminais do indutor é (da lei de Faraday):

$$V_L(t) = L\, \frac{d}{dt} I(t) = L\, \frac{d}{dt}\left[\frac{V_0}{Z}\cos(\omega\, t)\right] = L\frac{V_0}{Z}\, [-\omega\, \mathrm{sen}(\omega\, t)\,] = -\frac{X_L}{Z}\, V_0\, \mathrm{sen}(\omega\, t)$$

A voltagem entre os terminais do capacitor é (da definição de C):

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

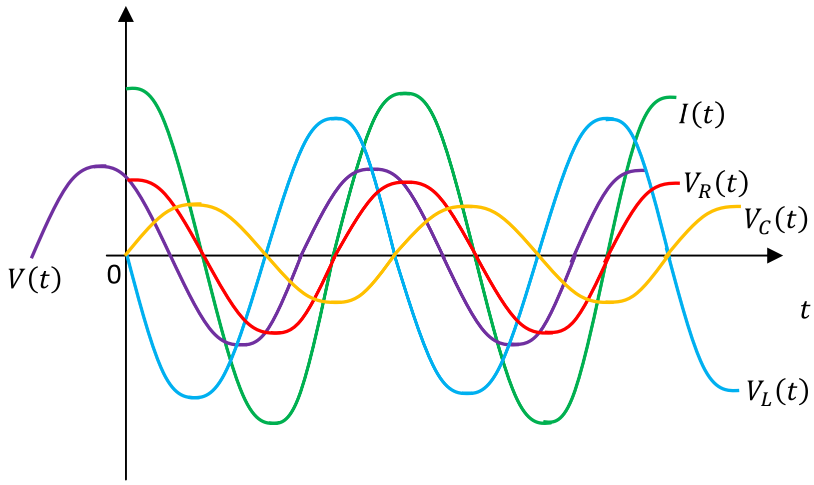
Sabendo que:

$$I(t) = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega\, t)\ = \frac{d}{dt} q(t) \Rightarrow q(t) = \frac{V_0}{\omega\, Z}\mathrm{sen}(\omega\, t)$$

Portanto:

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\frac{V_0}{\omega\, Z}\mathrm{sen}(\omega\, t)\ = \frac{X_C}{Z} V_0\, \mathrm{sen}(\omega\, t)$$

Para fazer os gráficos das voltagens (e da corrente) vamos assumir primeiramente que $X_L > X_C$, ou seja, um φ positivo. Esses gráficos ficam como na Figura abaixo.

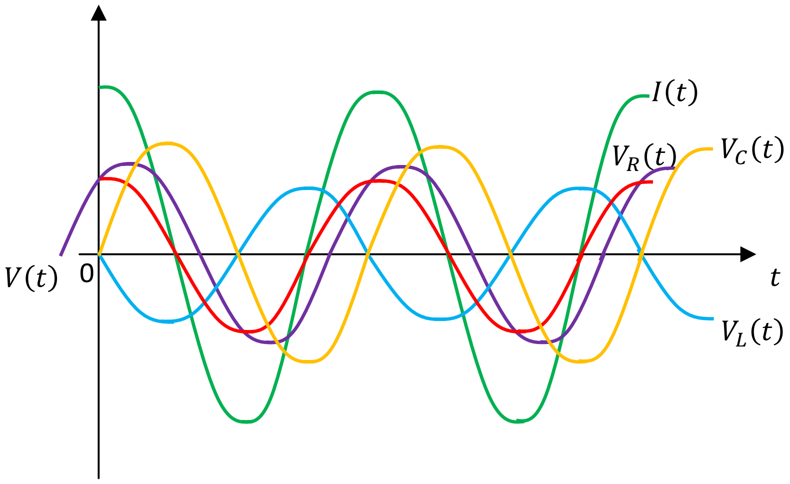


A curva de $I(t)$ é um simples cosseno (curva verde). A curva de $V_R(t)$ também é um simples cosseno (curva vermelha), pois a voltagem no resistor está sempre em fase com a corrente. A curva de $V_C(t)$ é um simples seno (curva amarela) e a curva de $V_L(t)$ (curva azul) é um seno de cabeça para baixo. Representamos a amplitude de $V_L(t)$ maior que a amplitude de $V_C(t)$ por causa da hipótese $X_L > X_C$. A curva de $V(t)$ (curva roxa) é simplesmente a soma das três curvas das voltagens (essa é a parte mais difícil de fazer as curvas (na mão) fisicamente corretas):

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

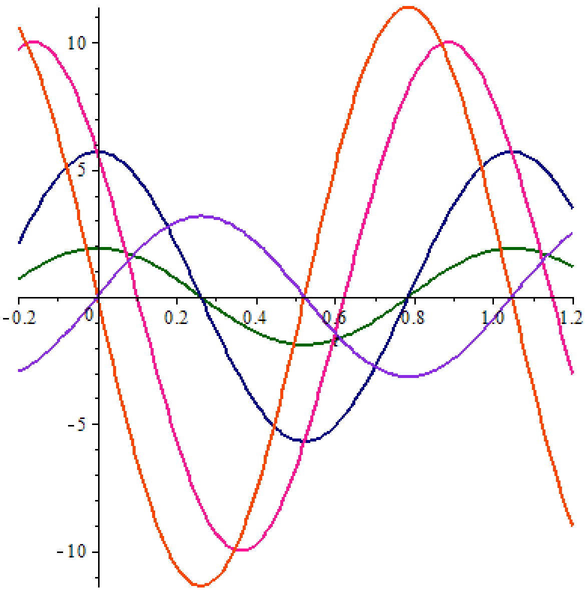
Nossas curvas são apenas qualitativas (feitas na mão) e temos esperança de que elas satisfaçam minimamente essa condição. Note que há instantes em que $V_L(t) = V_C(t) = 0$ e, portanto, $V(t) = V_R(t)$. Isso ocorre, por exemplo, em t=0. $V(t)$ está adiantada em relação à $I(t)$, pois o circuito é predominantemente indutivo. Note que em t=0 $I(t)$ está no máximo, mas o máximo de $V(t)$ já ocorreu um pouco antes. Por isso V está adiantado.

Vamos repetir agora os gráficos das voltagens (e da corrente) assumindo que $X_L < X_C$, ou seja, um φ negativo. Agora a amplitude de $V_L(t)$ será menor que a amplitude de $V_C(t)$.

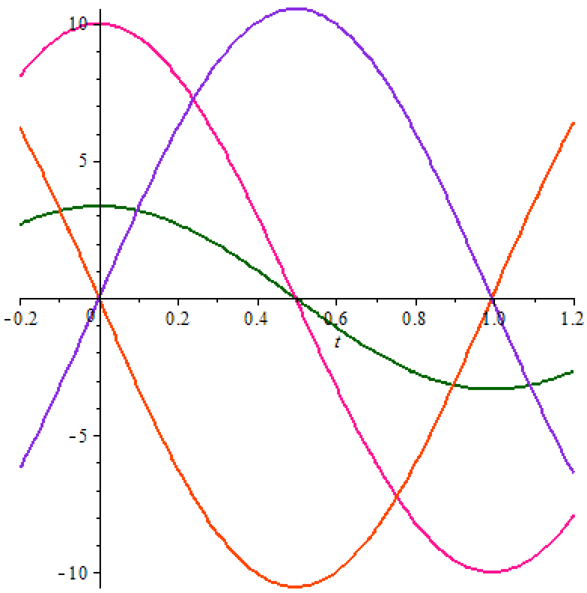


$V(t)$ está atrasada em relação à $I(t)$, pois trata-se de um circuito predominantemente capacitivo. Note que em t=0 $I(t)$ está no máximo, mas o máximo de $V(t)$ vai ocorrer um pouco depois. Por isso V está atrasada.

A melhor forma de visualizar essas curvas é introduzir as funções do tempo em um programa de computação algébrica, como o Maple. Obtemos um gráfico como o mostrado ao lado, em que não há nenhuma aproximação. Variando os parâmetros das curvas podemos observar todos os casos possíveis rapidamente. No gráfico ao lado adotamos $V_0 = 10$ V, R=3 Ω, L=1 H, C=0,1 F e $\omega = 6$ rad/s. A curva verde é a de $I(t)$ e a azul é a de $V_R(t)$. O circuito é predominantemente indutivo, por isso a curva laranja ($V_L(t)$) tem maior amplitude que a curva violeta ($V_C(t)$). A curva rosa é a de $V(t)$.



Na freqüência de ressonância, por exemplo, que é $\omega = 3{,}1622\ldots$ rad/s (para os valores de parâmetros adotados), obtemos as curvas ao lado. Note que a escala horizontal é a mesma do gráfico anterior e, por isso, a freqüência menor aqui faz com que as curvas não cheguem a varrer um período completo das oscilações. Agora as curvas laranja ($V_L(t)$) e violeta ($V_C(t)$) possuem a mesma amplitude e, portanto, se cancelam. A corrente possui a amplitude máxima V_0/R. Aparentemente há uma curva a menos nesse gráfico, mas, de fato, as curvas de $V_R(t)$ e $V(t)$ estão uma sobre a outra, pois nesse caso $V_R(t) = V(t)$ (a curva azul está atrás da curva rosa). Note que $V(t)$ e $I(t)$ estão em fase, pois na ressonância vale $\varphi = 0$.



E/P31.25: Um aparelho de CD se comporta com se fosse uma simples resistência R. Então:

A voltagem na fonte AC é $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$ e a corrente no aparelho é:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t) \;= \frac{V_0}{Z} \cos(\omega\, t)$$

sendo $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ a impedância do circuito e $X_L = \omega\, L = 0$ e $X_C = 1/\omega\, C = 0$ as reatâncias indutiva e capacitiva. Portanto, nesse caso, $Z = R$. O ângulo de fase é

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L \;- X_C}{R}$$

com a restrição: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Nesse caso, $X_L \;- X_C = 0$ e $\tan(\varphi) = 0$, levando a $\varphi = 0$.

Concluindo, em um circuito puro R vale: $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t)$

A voltagem RMS é: $V_{RMS} = \sqrt{\langle V^2(t) \rangle} = \sqrt{V_0^2 \langle \cos^2(\omega\, t)\, \rangle} = V_0/\sqrt{2}$.

Como:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega\, t)$$

A corrente RMS é: $I_{RMS} = \sqrt{\langle I^2(t) \rangle} = I_0/\sqrt{2} = V_0/R/\sqrt{2} = V_{RMS}/R$.

A potência instantânea é:

$$P(t) = V(t)\,I(t) = \frac{V_0^2}{R}\cos^2(\omega\,t)$$

Note que o valor máximo de $P(t)$ é $P_{MAX} = \frac{V_0^2}{R}$ pois a função $\cos^2(\omega\,t)$ oscila entre 0 e 1.

A potência média é:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{V_0^2}{R}\langle\cos^2(\omega\,t)\,\rangle = \frac{V_0^2}{R}\frac{1}{2} = \frac{V_0^2/2}{R} = \frac{V_{RMS}^2}{R} = V_{RMS}\,I_{RMS}$$

Segue que $\langle P(t)\rangle = P_{MAX}/2$.

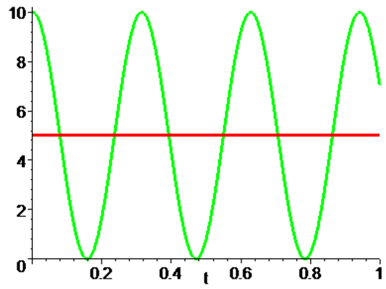
Se $V_{RMS} = 120$ V e $\langle P(t)\rangle = 20$ W, segue que:

A potência instantânea máxima é: $P_{MAX} = 2\,\langle P(t)\rangle = 40$ W.

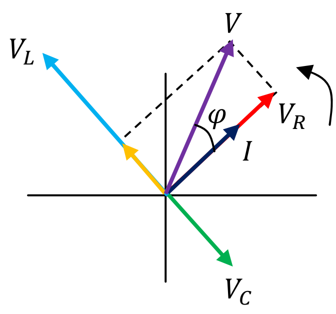
A corrente RMS é: $I_{RMS} = \langle P(t)\rangle / V_{RMS} = 20/120$ A.

A resistência R é: $R = V_{RMS}/I_{RMS} = 120/(20/120) = \frac{120^2}{20} = 720\ \Omega$.

O gráfico ao lado ilustra a potência instantânea $P(t)$ (curva verde) e a potência média $\langle P(t)\rangle$ (5 W nesse exemplo) (reta vermelha). Um chuveiro elétrico também se encaixa nesse caso de um circuito puramente resistivo. A potência do chuveiro, que resulta no aquecimento da água, oscila como a curva verde ao lado. No entanto, sentimos a água em uma temperatura constante, que está definida pela potência média $\langle P(t)\rangle$ do chuveiro.



E/P31.27: Considere o diagrama fasorial ao lado, para o circuito RLC série. O ângulo de fase entre a corrente I e a voltagem na fonte V pode ser encontrado facilmente através de um diagrama fasorial, lembrando que há apenas uma corrente (circuito série), que a voltagem em R (V_R) está em fase com a corrente, que a voltagem no capacitor (V_C) está atrasada em relação à corrente de $\pi/2$ rad e que a voltagem no indutor (V_L) está adiantada em relação à corrente de $\pi/2$ rad (o fasor amarelo é a soma $V_L + V_C$) :



Nesse diagrama estamos assumindo, para ilustrar, que $V_{0L} > V_{0C}$ (por isso o fasor azul é maior que o verde), ou seja, $X_L > X_C$, já que: $V_{0L} = X_L\,I_0$ e $V_{0C} = X_C\,I_0$. Nesse caso o ângulo φ é positivo, ou seja, a voltagem na fonte está mesmo adiantada em relação à corrente. O circuito é predominantemente indutivo.

a) Podemos ver na Figura que o fator de potência do circuito é:

$$\cos(\varphi) = \frac{V_{0R}}{V_0} = \frac{R\, I_0}{V_0} = \frac{R}{V_0}\frac{V_0}{Z} = \frac{R}{Z}$$

E também (como já sabemos):

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L \; - X_C}{R}$$

b) Para qualquer circuito AC vale: a voltagem na fonte AC é $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$ e a corrente no circuito é:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t) \;\; = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega\, t)$$

Portanto, a potência instantânea entregue ao circuito pela fonte AC é:

$$P(t) = V(t)\, I(t) = \frac{V_0^2}{Z}\cos(\omega\, t)\cos(\omega\, t + \varphi)$$

Expandindo o cosseno da soma obtemos:

$$P(t) = \frac{V_0^2}{Z}\cos(\omega\, t)[\cos(\omega\, t)\cos(\varphi) \; - \mathrm{sen}(\omega\, t)\; \mathrm{sen}(\varphi) \;]$$

Portanto:

$$P(t) = \frac{V_0^2}{Z}\; [\cos^2(\omega\, t)\cos(\varphi) \; - \cos(\omega\, t)\; \mathrm{sen}(\omega\, t)\; \mathrm{sen}(\varphi) \;]$$

Tomando a média temporal obtemos:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{V_0^2}{Z}\; [\langle \cos^2(\omega\, t)\, \rangle^2 \cos(\varphi) \; - \langle \cos(\omega\, t)\; \mathrm{sen}(\omega\, t)\, \rangle \,\mathrm{sen}(\varphi) \;] = \frac{V_0^2}{Z}\left[\frac{1}{2}\cos(\varphi) \; + 0\right]$$

Concluindo:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{V_{RMS}^2}{Z}\cos(\varphi)$$

Como já mostramos que para qualquer circuito RLC série vale $\cos(\varphi) \; = R/Z$, segue que:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{V_{RMS}^2}{Z}\frac{R}{Z} = \left(\frac{V_{RMS}}{Z}\right)^2 R = I_{RMS}^2\, R$$

Essa última expressão vale (apenas) para qualquer circuito RLC série, enquanto que a penúltima expressão para $\langle P(t)\rangle$ vale para qualquer circuito AC (não necessariamente série).

E/P31.31: Em um circuito RLC série a voltagem na fonte é $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$ e a corrente no circuito é:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t) \;\; = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega\, t)$$

sendo $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ a impedância do circuito e $X_L = \omega\, L$ e $X_C = 1/\omega C$ as reatâncias indutiva e capacitiva. O ângulo de fase é:

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L \; - X_C}{R}$$

com a restrição: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

A amplitude da corrente é:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Ajustando a freqüência ω da fonte, vamos encontrar uma freqüência especial ω_0 tal que:

$$X_L = X_C$$

Essa frequência é:

$$X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 \, L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

O que acontece (primeiro) de especial nessa freqüência (de ressonância) é o pico em I_0, pois:

$$I_0(\omega_0) = \frac{V_0}{R}$$

que é o maior valor possível para a amplitude I_0 nesse circuito.

Conhecendo $I_0(\omega_0)$ (a amplitude da corrente na ressonância) e R podemos obter a amplitude da voltagem na fonte, pois $I_0 = V_0/Z$ e $Z = R$ nesse caso: $V_0 = I_0(\omega_0)\,R$.

A voltagem entre os terminais do resistor é:

$$V_R(t) = R\,I(t) = \frac{R}{Z} V_0 \cos(\omega\,t)$$

A amplitude dessa voltagem na frequência de ressonância é:

$$V_{0R} = \frac{R}{Z} V_0 = \frac{R}{R} V_0 = V_0$$

A voltagem entre os terminais do indutor é:

$$V_L(t) = L\,\frac{d}{dt} I(t) = -\frac{X_L}{Z}\,V_0 \operatorname{sen}(\omega\,t)$$

A amplitude dessa voltagem na frequência de ressonância é:

$$V_{0L} = \frac{X_L}{Z} V_0 = \frac{X_L}{R} V_0$$

A voltagem entre os terminais do capacitor é:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{X_C}{Z} V_0 \operatorname{sen}(\omega\,t)$$

A amplitude dessa voltagem na frequência de ressonância é:

$$V_{0C} = \frac{X_C}{Z} V_0 = \frac{X_C}{R} V_0$$

Como na ressonância $X_L = X_C$, segue que $V_{0L} = V_{0C}$. Vemos que na ressonância $V_L(t) = -V_C(t)$ e, da lei das malhas: $V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V_R(t)$. Na ressonância o indutor e o capacitor se complementam (em vários aspectos), e a fonte só "enxerga" o resistor.

A potência média entregue ao circuito pela fonte (entregue ao resistor) é:

$$\langle P(t)\rangle = \langle V(t)\, I(t)\rangle = \frac{V_{RMS}^2}{Z} \cos(\varphi) = V_{RMS}\, I_{RMS}\, \cos(\varphi) = \frac{V_0^2}{2\,Z} \cos(\varphi)$$

Como

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L - X_C}{R}$$

segue que na ressonância ($X_L = X_C$) $\varphi = 0$ e $\cos(\varphi) = 1$. Visto de outra forma: $\cos(\varphi) = R/Z$ e, como na ressonância $R = Z$, segue que na ressonância $\cos(\varphi) = 1$.

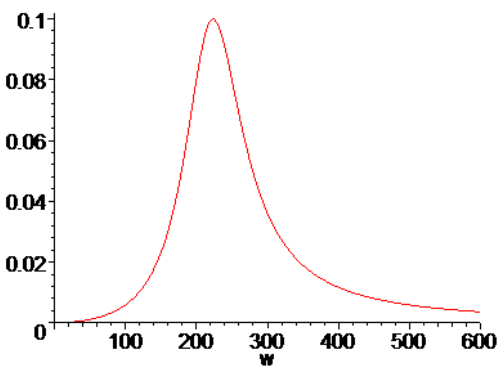
Portanto, na ressonância:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{V_0^2}{2\,Z} \cos(\varphi) = \frac{V_0^2}{2\,R} = \frac{V_{RMS}^2}{R}$$

Na ressonância a impedância do circuito é mínima e o fator de potência é máximo, fazendo com que a fonte otimize a entrega de energia para o circuito: $\langle P(t)\rangle$ é máxima. Se o resistor fosse uma simples lâmpada incandescente, veríamos que na freqüência de ressonância do circuito seu brilho seria máximo. O brilho da lâmpada estaria definido pela potência média $\langle P(t)\rangle$ cuja dependência com a freqüência ω da voltagem da fonte pode ser explicitada por:

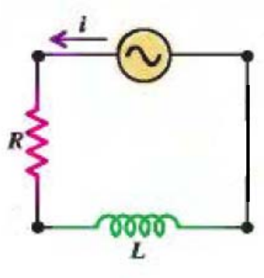
$$\langle P(t)\rangle = \frac{V_0^2}{2\,Z} \cos(\varphi) = \frac{V_0^2}{2\,Z}\frac{R}{Z} = \frac{V_0^2}{2} \frac{R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{V_0^2}{2} \frac{R}{R^2 + (\omega\, L - 1/\omega C)^2}$$

Um gráfico de $\langle P(t)\rangle$ versus a freqüência ω é mostrado ao lado, para valores numéricos fixos de V_0, R, L e C. Para esses valores de L e C a freqüência de ressonância é $\omega_0 = 1/\sqrt{L\,C} \cong 224$ rad/s. O fenômeno da ressonância é um dos mais interessantes na física e pode ser observado em uma variedade de fenômenos, como os eletromagnéticos, que é o caso aqui, os mecânicos, os acústicos, os ópticos, os quânticos etc. A ressonância é definida em geral como uma condição de um sistema oscilatório forçado em que alguma resposta desse



sistema apresenta um máximo em uma determinada freqüência especial. No caso do circuito RLC série as respostas do sistema (à excitação oscilatória da fonte de voltagem) que apresentam esse máximo são a corrente, o fator de potência e a potência média dissipada no resistor, conforme podemos ver aqui.

E/P31.44:



Um solenóide ideal seria aquele sem resistência elétrica, ou seja, construído com um fio de material condutor perfeito. Os solenóides reais, construídos com fios de cobre, por exemplo, possuem uma resistência elétrica, além da indutância. Um solenóide real pode ser representado por um circuito RL série, de acordo com a Figura ao lado. R é sua resistência interna (a resistência do fio) e L é sua auto-indutância (sua capacidade de produzir fluxo magnético nele mesmo e de se auto-induzir FEM).

Vimos que em um circuito RLC série ligado a uma voltagem AC, dada por $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$, a corrente no circuito é:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t) \ = \frac{V_0}{Z} \cos(\omega\, t)$$

sendo $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ a impedância do circuito e $X_L = \omega\, L$ e $X_C = 1/\omega C$ as reatâncias indutiva e capacitiva. O ângulo de fase é

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L \ - X_C}{R}$$

com a restrição: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

A amplitude da corrente é:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Na situação do solenóide real devemos fazer $X_C = 0$, obtendo:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \qquad \tan(\varphi) = \frac{X_L}{R} \qquad I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

Um fato interessante que chama atenção aqui é que para “eliminar” o capacitor do circuito devemos substituí-lo por um curto circuito e para isso não devemos fazer $C = 0$, mas sim $X_C = 0$. Como $X_C = 1/\omega C$, vemos que para curto-circuitar o capacitor devemos fazer $C \to \infty$. Em contraste, nos casos do resistor e do indutor a situação é mais simples e podemos torná-los um curto-circuito fazendo simplesmente $R = 0$ e $L = 0$. Dessa forma, eles “desaparecem” do circuito série.

De fato, sendo a resistência de um resistor cilíndrico dada por:

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

com ρ a resistividade do material, l o comprimento e A a área da seção transversal do cilindro e sabendo que curto-circuitar é juntar as pontas, ou seja, fazer $l \to 0$, vemos que isso leva naturalmente a $R \to 0$.

Analogamente, a indutância de um solenóide helicoidal é

$$L = \mu_0 \, n^2 \, A \, l$$

sendo n a densidade de espiras (por unidade de comprimento), l o comprimento e A a área da seção transversal do cilindro/solenóide. Juntamos as pontas fazendo $l \to 0$, e, portanto, $L \to 0$ (fazemos também $N \to 0$, sendo N o número de espiras).

Por outro lado, a capacitância de um capacitor de placas paralelas é:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

sendo A a área das placas e d a distância entre elas. Juntamos as pontas fazendo $d \to 0$, e, portanto, $C \to \infty$. Resumindo, curto-circuitar significa juntar/fundir dois terminais em um só, e, portanto, fazer a DDP entre esses terminais $\Delta V \to 0$. No caso do resistor vale $\Delta V = R\, I$ e $\Delta V \to 0$ se $R \to 0$. No caso do indutor $\Delta V = L dI/dt$ e $\Delta V \to 0$ se $L \to 0$. No caso do capacitor $\Delta V = q/C$ e $\Delta V \to 0$ se $C \to \infty$. O limite $C \to \infty$ não significa um acúmulo infinito de cargas elétricas, pelo contrário, pois $q = C\, \Delta V \ \to \infty\, 0$ = uma constante qualquer.

a) Dada a frequência f de oscilação de $V(t)$ obtemos logo $\omega = 2\,\pi\, f$. Dado o valor de X_L obtemos a indutância do solenóide:

$$L = \frac{X_L}{\omega}$$

b) Dada a potência média dissipada pelo solenóide $\langle P(t) \rangle$ (dissipada pela resistência do solenóide) e o valor da resistência R, podemos calcular a voltagem RMS da fonte:

Sabemos que a energia é dissipada na resistência, ou seja:

$$P(t) = R\, I^2(t) \Rightarrow \ \langle P(t) \rangle = R\, \langle I^2(t) \rangle = R\, I_{RMS}^2 = R \left(\frac{V_{RMS}}{Z} \right)^2$$

Portanto:

$$V_{RMS} = Z \sqrt{\frac{\langle P(t) \rangle}{R}}$$

Para o solenóide real obtemos:

$$V_{RMS} = \sqrt{R^2 + X_L^2}\sqrt{\frac{\langle P(t)\rangle}{R}} = \sqrt{\frac{(R^2 + X_L^2)}{R}\langle P(t)\rangle}$$

E/P31.48:

Na freqüência ω_1 as reatâncias de um indutor ideal e de um capacitor ideal são iguais, então, a indutância e a capacitância desses dispositivos são tais que:

$$X_L = X_C \Rightarrow \omega_1\, L = \frac{1}{\omega_1 C} \Rightarrow LC = \frac{1}{\omega_1^2}$$

Portanto, um circuito RLC série contendo esse capacitor e esse indutor estará em ressonância se for alimentado por uma fonte CA de freqüência ω_1. O ângulo de fase será:

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L\ - X_C}{R} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

a) Se ligarmos esses mesmos dispositivos em uma frequência maior, $\omega_2 = 2\,\omega_1$, a razão entre as reatâncias nesse circuito será:

$$\frac{X_L}{X_C} = \frac{\omega_2\, L}{1/\omega_2 C} = \omega_2^2 L\, C = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{2\,\omega_1}{\omega_1}\right)^2 = 4$$

X_L é maior que X_C, pois $X_L = 4\, X_C$.

Portanto, se um circuito RLC série contendo esse capacitor e esse indutor for alimentado por uma fonte CA de freqüência $\omega_2 = 2\,\omega_1$, o ângulo de fase será tal que:

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L\ - X_C}{R} > 0 \Rightarrow \varphi > 0$$

ou seja, o circuito será predominantemente indutivo e a voltagem estará adiantada em relação à corrente.

b) Se ligarmos esses mesmos dispositivos em uma frequência menor, $\omega_3 = \omega_1/3$, a razão entre as reatâncias será:

$$\frac{X_L}{X_C} = \frac{\omega_3\, L}{1/\omega_3 C} = \omega_3^2 L\, C = \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{\omega_1/3}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

X_L é menor que X_C, pois $X_L = X_C/9$.

Portanto, se um circuito RLC série contendo esse capacitor e esse indutor for alimentado por uma fonte CA de freqüência $\omega_3 = \omega_1/3$, o ângulo de fase será tal que:

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L\ - X_C}{R} < 0 \Rightarrow \varphi < 0$$

ou seja, o circuito será predominantemente capacitivo e a voltagem estará atrasada em relação à corrente.

Resumindo, como $X_C = 1/\omega C$ e $X_L = \omega\, L$, segue que o aumento da freqüência no circuito aumenta X_L e diminui X_C, ou seja, torna o circuito mais indutivo. Por outro lado, a redução da freqüência no circuito aumenta X_C e diminui X_L, ou seja, torna o circuito mais capacitivo. Existe uma freqüência especial em que o circuito é igualmente capacitivo e indutivo ($X_C = X_L$), que é a freqüência de ressonância $\omega_0 = 1/\sqrt{L\, C}$.

c) Já respondida. Um circuito RLC série contendo esse capacitor e esse indutor estará em ressonância se for alimentado por uma fonte CA de freqüência ω_1.

E/P31.51: Um circuito RLC série alimentado por uma fonte CA de freqüência ω ajustável (desde zero até ∞). Já sabemos que se voltagem CA é dada por $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$ então, a corrente no circuito é:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t) \; = \frac{V_0}{Z} \cos(\omega\, t)$$

sendo $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ a impedância do circuito e $X_L = \omega\, L$ e $X_C = 1/\omega C$ as reatâncias indutiva e capacitiva. O ângulo de fase é:

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L \; - X_C}{R}$$

com a restrição: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

A amplitude da corrente é:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Substituindo as reatâncias obtemos a amplitude da corrente em função (explícita) de ω:

$$I_0(\omega) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega\, L - 1/\omega C)^2}}$$

Sabemos também que a energia média dissipada na resistência é:

$$P(t) = R\, I^2(t) \Rightarrow \langle P(t) \rangle = R\, \langle I^2(t) \rangle = R\, \left\langle \left(\frac{V_0}{Z} \cos(\omega\, t) \right)^2 \right\rangle = R\, \frac{V_0^2}{Z^2} \frac{1}{2}$$

Portanto obtemos a potência média em função (explícita) de ω:

$$\langle P(t) \rangle(\omega) = \frac{R\, V_0^2/2}{R^2 + (\omega\, L - 1/\omega C)^2}$$

Derivando a amplitude da corrente em relação a ω obtemos:

$$\frac{d}{d\omega} I_0(\omega) = \frac{V_0}{\omega} \frac{(\omega\, L + 1/\omega C)(\omega\, L - 1/\omega C)}{(R^2 + (\omega\, L - 1/\omega C)^2)^{3/2}}$$

Igualando essa derivada a zero obtemos a freqüência em que o máximo de I_0 ocorre, que é:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\, C}}$$

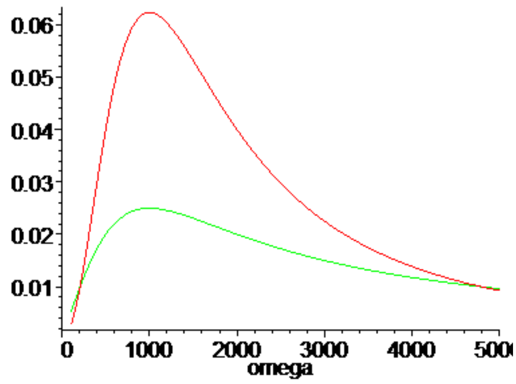
ω_0 é a frequência de ressonância do circuito.

Analogamente para a potência média:

$$\frac{d}{d\omega} \langle P(t) \rangle(\omega) = -\frac{R\, V_0^2}{2\, \omega} \frac{(\omega\, L + 1/\omega C)(\omega\, L - 1/\omega C)}{(R^2 + (\omega\, L - 1/\omega C)^2)^2}$$

Não por acaso, o máximo de $\langle P(t) \rangle(\omega)$ também ocorre na mesma frequência ω_0. Basicamente, esses dois máximos ocorrem no mínimo da impedância $Z(\omega)$ pois: $I_0(\omega) = V_0/Z(\omega)$ e $\langle P(t) \rangle(\omega) = R\, V_0^2/2\, Z(\omega)$.

Assumindo os valores numéricos: $V_0 = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, L=2 H e $C = 0{,}5 \times 10^{-6}$ F, obtemos (utilizando o programa Maple) os gráficos ao lado para $I_0(\omega)$ (curva verde) e $\langle P(t) \rangle(\omega)$ (curva vermelha) versus ω (omega). Para esses valores numéricos a frequência de ressonância é:



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\, C}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 1.000\ \ \text{rad/s}$$

A amplitude máxima da corrente é:

$$I_0(\omega_0) \cong 0{,}025\ \text{A}$$

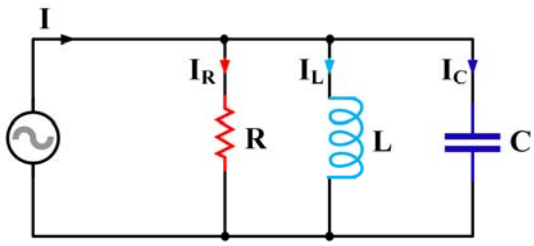
A potência média máxima é:

$$\langle P(t) \rangle(\omega_0) \cong 0{,}062\ \text{W}$$

Note que no limite $\omega \to 0$ a reatância capacitiva diverge, que é um resultado que já conhecíamos. Em um circuito de corrente contínua (CC) um capacitor se carrega durante um transiente e depois deixa de conduzir, ou seja, a corrente vai a zero. No regime estacionário, o capacitor de comporta como um circuito aberto. Estando o capacitor em série com R e L, a corrente no circuito vai a zero no limite CC e o resistor deixa de dissipar energia, ou seja, $\langle P(t) \rangle$ também vai a zero . No limite oposto, $\omega \to \infty$, vemos que novamente I_0 e $\langle P(t) \rangle$ vão a zero. Isso porque a reatância indutiva diverge nesse limite. Um indutor se opõe à variação da corrente nele, através de sua auto-indução. Se essa variação da corrente se dá muito rapidamente, que é o que ocorre quando $\omega \to \infty$, o indutor se opõe intensamente o tempo todo e impede a corrente de circular através dele e através do circuito: o resistor deixa de dissipar energia.

E/P31.54:

Um circuito RLC paralelo alimentado por uma fonte AC, conforme a Figura ao lado.



A lei dos nós diz que $I = I_R + I_L + I_C$.

Se a voltagem na fonte é $V(t) = V_0 \cos(\omega\, t)$, é claro que a voltagem entre os terminais do resistor também é $V(t)$ (eles estão em paralelo) e da lei de Ohm:

$$I_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R}\cos(\omega\, t)$$

A corrente no resistor está em fase com a voltagem nele (analogamente ao que ocorre no circuito série).

A voltagem entre os terminais do indutor também é $V(t)$ e da lei de Faraday (e mais especificamente da definição de indutância):

$$V(t) = V_L(t) = L\frac{d}{dt}I_L(t) \Rightarrow V_0\cos(\omega\, t) = L\frac{d}{dt}I_L(t) \Rightarrow I_L(t) = \frac{V_0}{\omega\, L}\operatorname{sen}(\omega\, t) = \frac{V_0}{X_L}\operatorname{sen}(\omega\, t)$$

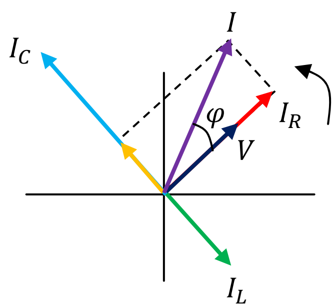
sendo $X_L = \omega\, L$ a reatância indutiva do indutor. A corrente no indutor está atrasada de $\pi/2$ em relação à voltagem nele, pois $\operatorname{sen}(\omega\, t) = \cos(\omega\, t - \pi/2)$ (analogamente ao que ocorre no circuito série).

A voltagem entre os terminais do capacitor também é $V(t)$ e da definição de capacitância:

$$V(t) = V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow V_0\cos(\omega\, t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow I_C(t) = \frac{d}{dt}q(t) = -C\,\omega\, V_0\operatorname{sen}(\omega\, t) = -\frac{V_0}{X_C}\operatorname{sen}(\omega\, t)$$

sendo $X_C = 1/\omega\, C$ a reatância capacitiva do capacitor. A corrente no capacitor está adiantada de $\pi/2$ em relação à voltagem nele, pois $-\operatorname{sen}(\omega\, t) = \cos(\omega\, t + \pi/2)$ (analogamente ao que ocorre no circuito série).

b) O diagrama de fasores para o circuito RLC paralelo fica como mostrado ao lado. V é o fasor da voltagem na fonte e também da voltagem entre os terminais dos três dispositivos, pois eles estão em paralelo. O fasor de I_R está em fase com V. O fasor de I_L está atrasado em relação a V de $\pi/2$ rad. O fasor de I_C está adiantado em relação a V de $\pi/2$ rad. Estamos supondo aqui um circuito mais indutivo, $X_L > X_C$, e por isso o tamanho de fasor I_C é maior que o fasor I_L (porque $\frac{V_0}{X_C} > \frac{V_0}{X_L}$). O fasor amarelo é a soma $I_C + I_L$. Do teorema de Pitágoras (no triângulo retângulo de lados vermelho, amarelo e roxo) vemos que as amplitudes (tamanhos) dos fasores se relacionam por:



$$I_0^2 = (I_{0C} - I_{0L})^2 + I_{0R}^2$$

sendo I_0 a amplitude da corrente na fonte e assim por diante. Portanto:

$$I_0^2 = \left(\frac{V_0}{X_C} - \frac{V_0}{X_L}\right)^2 + \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 = V_0^2\left[\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\right]$$

Definindo a impedância Z do circuito paralelo por (como no circuito série ou em qualquer circuito):

$$I_0 = \frac{V_0}{Z}$$

obtemos:

$$\frac{1}{Z^2} = \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2 + \frac{1}{R^2} = \left(\omega\, C - \frac{1}{\omega\, L}\right)^2 + \frac{1}{R^2} \Rightarrow \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\omega\, C - \frac{1}{\omega\, L}\right)^2 + \frac{1}{R^2}}$$

O ângulo de atraso da voltagem em relação à corrente é:

$$\tan\varphi = \frac{I_{0C} - I_{0L}}{I_R} = \frac{1/X_C - 1/X_L}{1/R} = \frac{\omega\, C - \dfrac{1}{\omega\, L}}{1/R}$$

E/P31.57: O mesmo circuito RLC paralelo discutido no exercício 31.54.

a) Já vimos que as amplitudes das correntes são:

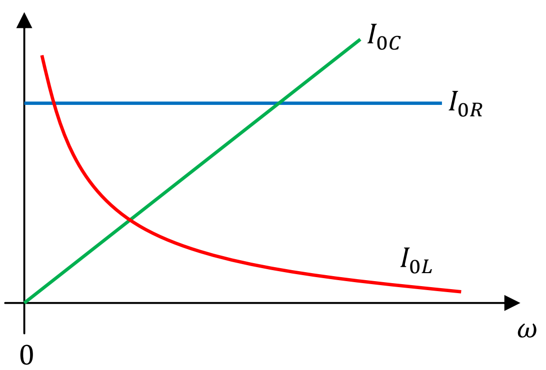
$$I_{0R} = \frac{V_0}{R} \qquad I_{0L} = \frac{V_0}{X_L} = \frac{V_0}{\omega\, L} \qquad I_{0C} = \frac{V_0}{X_C} = V_0\omega\, C \qquad I_0 = \frac{V_0}{Z}$$

com:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\omega\, C - \frac{1}{\omega\, L}\right)^2 + \frac{1}{R^2}}$$

b) Os gráficos das amplitudes das correntes em função da freqüência ω são mostrados abaixo.

A amplitude da corrente no resistor independe da freqüência da voltagem na fonte. Isso porque a resistência do resistor independe da freqüência. A amplitude da corrente no indutor decai com o aumento da freqüência. Isso porque a reatância do indutor cresce com a freqüência. Quanto mais rapidamente a corrente oscila no tempo, mais o indutor se opõe a ela. A amplitude da corrente no capacitor cresce com o aumento da freqüência.

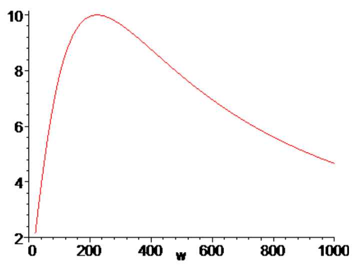


Isso porque a reatância do capacitor diminui com a freqüência. Quanto mais rapidamente a corrente oscila no tempo, menos o capacitor se opõe a ela. No limite $\omega \to 0$ o indutor não se opõe à passagem da corrente nele, pois não há auto-indução para corrente contínua. Como a resistência elétrica do indutor é idealmente nula, a corrente através dele diverge (curto-circuito). Nesse mesmo limite o capacitor se carrega totalmente (em um transiente) e passa a impedir a passagem da corrente por ele (circuito aberto). No limite oposto, $\omega \to \infty$, o indutor "trava" a corrente através dele (circuito-aberto) e o capacitor se comporta como um curto-circuito.

c) A ressonância corresponde ao mínimo na amplitude da corrente I_0, que vai ocorrer na freqüência (de ressonância) em que a impedância do circuito é máxima. Vimos que:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\omega\, C - \frac{1}{\omega\, L}\right)^2 + \frac{1}{R^2}}$$

A Figura ao lado ilustra o comportamento de Z versus ω, para valores numéricos selecionados de R, L e C. Vemos claramente o pico na função $Z(\omega)$.



Derivando a impedância em relação à ω obtemos:

$$\frac{d}{d\omega} Z(\omega) = -\frac{1}{\omega} \frac{(\omega\, L + 1/\omega C)(\omega\, L - 1/\omega C)}{(R^2 + (\omega\, L - 1/\omega C)^2)^{3/2}}$$

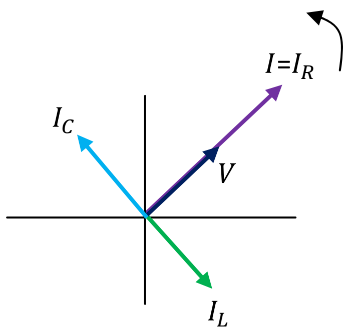
Vemos que essa derivada se anula quando:

$$\omega\, L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{L\, C}}$$

que é a mesma freqüência de ressonância do circuito RLC série (só que lá a impedância tem um mínimo e a amplitude da corrente tem um máximo na ressonância).

Na ressonância vale $X_L = X_C = \sqrt{L/C}$, $I_{0L} = I_{0C} = \sqrt{\frac{C}{L}} V_0$, $Z = R$ e $I_0 = I_{0R} = \frac{V_0}{R}$. Vale ainda $\varphi = 0$.

O diagrama fasorial na ressonância fica como mostrado ao lado. As correntes no indutor e no capacitor estão defasadas de π, uma em relação à outra, e possuem a mesma amplitude. Portanto, elas se anulam mutuamente e a corrente na fonte passa a ser apenas a corrente que passa pelo resistor, que está em fase com a voltagem na fonte. Basicamente, fora da ressonância o circuito possui três ramos em paralelo para a circulação da corrente. Na ressonância os ramos de C e de L se anulam mutuamente (o capacitor carrega o indutor e vice-versa, sem a participação da fonte) e sobra apenas um ramo, o de R. A impedância tem um máximo e a amplitude da corrente no circuito tem um mínimo.



E/P31.72:

Um circuito RLC série consome uma potência média P_{MED} de uma fonte CA com voltagem RMS V_{RMS} e frequência ω. O fator de potência é FP (0,560 no enunciado) e a voltagem na fonte está adiantada em relação à corrente na fonte.

a) A resistência do circuito é?

Sabemos que:

$$P_{MED} = V_{RMS}\, I_{RMS} \cos(\varphi) = V_{RMS}\, I_{RMS}\, FP$$

(FP= fator de potência). Portanto, com os dados do problema conseguimos calcular o valor RMS da corrente no circuito:

$$I_{RMS} = \frac{P_{MED}}{V_{RMS}\, FP}$$

Sabemos também que:

$$I_{RMS} = \frac{V_{RMS}}{Z}$$

Portanto, conseguimos calcular a impedância desse circuito:

$$Z = \frac{V_{RMS}}{I_{RMS}} = \frac{FP}{P_{MED}} V_{RMS}^2$$

Por outro lado, sabemos que:

$$FP = \frac{R}{Z}$$

Portanto, obtemos finalmente o valor da resistência do circuito:

$$R = Z\, FP = \frac{(FP)^2}{P_{MED}} V_{RMS}^2$$

b) Sabendo R e Z podemos calcular a diferença entre as reatâncias no circuito, pois:

$$Z^2 = (X_L - X_C)^2 + R^2$$

Segue que:

$$|X_L - X_C| = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{Z^2 - (Z\, FP)^2} = Z\sqrt{1 - (FP)^2} = \frac{FP}{P_{MED}} V_{RMS}^2 \sqrt{1 - (FP)^2}$$

Por exemplo, na ressonância vale $FP = 1$ e $|X_L - X_C| = 0$.

Como está dito que a voltagem está adiantada em relação à corrente, sabemos que o circuito é predominantemente indutivo, e por isso $X_L > X_C$. Segue que:

$$|X_L - X_C| = X_L - X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} \Rightarrow X_L = X_C + \frac{FP}{P_{MED}} V_{RMS}^2 \sqrt{1 - (FP)^2}$$

Seja C a capacitância do circuito, então:

$$X_C = \frac{1}{\omega\ C}$$

Se associarmos mais um capacitor de capacitância C_1 em série com esse capacitor, obteremos a nova capacitância equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1}$$

A nova reatância capacitiva do circuito será:

$$X'_C = \frac{1}{\omega\ C_{eq}} = \frac{1}{\omega\ C} + \frac{1}{\omega\ C_1} = X_C + \frac{1}{\omega\ C_1} = X_C + X_{C1}$$

Para que a adição desse capacitor ao circuito faça com que ele entre em ressonância é necessário que:

$$X'_C = X_L$$

Portanto:

$$X_C + X_{C1} = X_L = X_C + \frac{FP}{P_{MED}} V_{RMS}^2 \sqrt{1 - (FP)^2}$$

Segue que:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega\ C_1} = \frac{FP}{P_{MED}} V_{RMS}^2 \sqrt{1 - (FP)^2}$$

Resumindo: vimos que no circuito original (sem C_1) valia $X_L > X_C$, de tal forma que $X_L = X_C + \Delta$ com:

$$\Delta = \frac{FP}{P_{MED}} V_{RMS}^2 \sqrt{1 - (FP)^2}$$

Para levar o circuito à ressonância, a nova reatância capacitiva deve ser tal que:

$$X'_C = X_L = X_C + \Delta$$

Como vale:

$$X'_C = X_C + \frac{1}{\omega\ C_1}$$

Segue que:

$$\frac{1}{\omega\ C_1} = \Delta$$

O novo capacitor C_1 adiciona ao circuito a reatância capacitiva Δ, que era exatamente o quanto a reatância indutiva era maior que a capacitiva. Isso iguala finalmente as reatâncias e leva o circuito à ressonância.

c) Nessa nova configuração, com o capacitor C_1 e o circuito em ressonância, segue que $FP' = 1$ e que, portanto, a nova potência consumida pelo circuito é:

$$P'_{MED} = V_{RMS}\, I'_{RMS}\, FP' = V_{RMS}\, I'_{RMS}$$

A nova corrente RMS no circuito é (lembrando que $Z' = R$):

$$I'_{RMS} = \frac{V_{RMS}}{Z'} = \frac{V_{RMS}}{R}$$

Portanto:

$$P'_{MED} = \frac{V_{RMS}^2}{R}$$

Para comparar com a potência que o circuito consumia fora da ressonância lembramos que já deduzimos a relação que valia nesse regime:

$$R = \frac{(FP)^2}{P_{MED}} V_{RMS}^2$$

Note que nessa expressão FP é o fator de potência antes da correção. Portanto:

$$P'_{MED} = \frac{P_{MED}}{(FP)^2}$$

Para um $FP = 0{,}56$ (fator de potência antes da correção) obtemos:

$$P'_{MED} \cong 3{,}19\, P_{MED}$$

Conseguimos, com a adição de C_1 ao circuito, o triplo de dissipação de energia no resistor.

Esse é um exemplo do que poderíamos chamar de "correção do fator de potência". Imagine que a resistência é um chuveiro elétrico que estava ligado a um circuito predominantemente indutivo. O chuveiro estava esquentando pouco a água. Isso ocorria porque a voltagem e a corrente estavam fora de fase ($\varphi \neq 0$ e $FP \neq 1$) e a impedância do circuito era alta. Ao colocar o circuito em ressonância (adicionando o capacitor C_1) fazemos com que a voltagem e a corrente fiquem em fase, que a impedância do circuito caia, que a amplitude da corrente no circuito cresça e que a produção de calor no chuveiro melhore: passe a ser o triplo da anterior.

Na prática a correção do fator de potência visa melhorar a eficiência de um circuito AC, fazendo com que ela possa dissipar a mesma potência com a mesma voltagem e com uma corrente de amplitude menor. Uma corrente de amplitude menor implica em menores perdas por efeito Joule (calor) na transmissão e na distribuição da energia elétrica. Olhando para a expressão:

$$P_{MED} = V_{RMS}\, I_{RMS} \cos(\varphi) = V_{RMS}\, I_{RMS}\, FP$$

Vemos que podemos manter P_{MED} e V_{RMS} fixos com uma corrente I_{RMS} menor, desde que FP aumente. Se quisermos diminuir a corrente à metade, devemos dobrar o fator de potência. Como os circuitos industriais são em geral predominantemente indutivos, pela presença maciça de motores e transformadores, a correção do fator de potência desses grandes consumidores se dá pela adição de capacitores ao circuito. Esses capacitores são geralmente conectados em paralelo com o circuito original, para não modificar o valor de V_{RMS} nesse circuito.

A Figura ao lado mostra capacitores de alta voltagem usados em correção de fator de potência. Eles podem ser comprados no site da Indiamart (https://www.indiamart.com/).