Q23.2: O enunciado não explicita ao trabalho de qual força ele se refere. É sempre bom que prestemos bastante atenção no uso da linguagem, posto que na física tudo tem um significado preciso. Trabalho? De qual força? Na situação abordada no enunciado podemos identificar duas forças atuando nessa partícula. A força elétrica que as duas cargas iguais fazem na carga transportada e a força externa que o agente externo faz para transportar essa carga no espaço. Serie razoável supor que o enunciado se refere ao trabalho realizado por essa força externa, ou seja, ao trabalho que o agente externo realiza nesse transporte. Para simplificar, vamos imaginar que esse transporte é apenas uma mudança de posição, ou seja, que a carga transportada estava em repouso no infinito e vai ser colocada em repouso nessa posição final: $\Delta K = 0$.

O potencial elétrico a uma distância r de uma carga pontual q é (tomando como referência V=0 no infinito):

$$V(r) = k\frac{q}{r}$$

Portanto, é verdade que em um ponto qualquer (P) eqüidistante (digamos r=d) de duas cargas pontuais q e –q o potencial é nulo, pois nesse ponto o princípio da superposição diz que o potencial vale:

$$V(P) = V_+(d) + V_-(d) = k\frac{q}{d} + k\frac{(-q)}{d} = 0$$

que é o mesmo valor do potencial no infinito: $V(P) = V(\infty) = 0$.

Portanto, é verdade que se um agente externo transporta uma carga q' desde o infinito até o ponto P definido anteriormente (ponto central entre q e –q), sem variar a energia cinética de q' (um trabalho mínimo necessário para o transporte de q'), o trabalho que ele vai realizar será, de acordo com o teorema do trabalho energia para a partícula de carga q':

$$\Delta K = 0 = W_{EXT}(\infty \to P) + W_E(\infty \to P) \Rightarrow W_{EXT}(\infty \to P) = -W_E(\infty \to P)$$

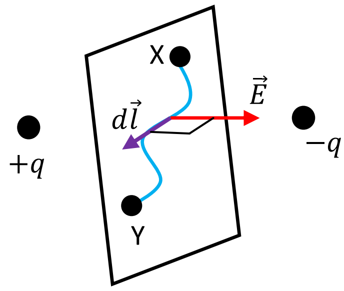
sendo $W_E(\infty \to P)$ o trabalho da força elétrica $q'\,\vec{E}$ oriunda do campo elétrico $\vec{E}$ que as cargas $\pm q$ produzem no espaço e $W_{EXT}(\infty \to P)$ o trabalho da força externa $\vec{F}_{EXT}$ oriunda do agente externo que transporta q'. Concluindo:

$$W_{EXT}(\infty \to P) = \int_{\infty}^{P} \vec{F}_{EXT} \cdot d\vec{l} = -W_E(\infty \to P) = -\int_{\infty}^{P} q'\,\vec{E} \cdot d\vec{l} = -q' \int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q'[V(\infty) - V(P)] = 0$$

Sim, um agente externo pode transportar a carga q' do infinito até o ponto P realizando um trabalho nulo. Isso vale qualquer que seja o caminho conectando um ponto qualquer no infinito ao ponto P, já que o campo eletrostático produzido por q e –q no espaço é conservativo. Esse cancelamento da integral que define o trabalho $W_E(\infty \to P)$ ocorre porque em algumas partes do caminho $\infty \to P$ o produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ é positivo

($\vec{E}$ empurra a carga q' para P), enquanto que em outras partes desse caminho esse produto escalar é negativo ($\vec{E}$ empurra a carga q' no sentido oposto ao de P) . O saldo total (a integral de $\vec{E} \cdot d\vec{l}$) é zero.

Podemos imaginar um caminho particular em que o produto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ é nulo em todos os pontos do caminho, de tal forma que o trabalho $W_{EXT}(X \rightarrow Y)$ para quaisquer dois pontos X e Y desse caminho é nulo. Considere o plano (infinito) eqüidistante das duas cargas, que contém o ponto P. Esse plano é uma superfície equipotencial V=0. Portanto, o campo $\vec{E}$ e a força $q'\vec{E}$ são ortogonais a esse plano em todos os pontos dele. A Figura ao lado ilustra uma visão oblíqua dessa situação em que podemos ver uma parte desse plano infinito, que contém dois pontos X e Y ligados por um caminho qualquer (em azul) contido nesse plano. O campo $\vec{E}$ é ortogonal a todos os pontos desse plano, pois ele é equipotencial e, portanto, $\vec{E}$ é ortogonal a $d\vec{l}$ em todos os pontos do caminho que liga X e Y. Conclusão: $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E\, dl \cos(90^o) = 0$ para todos os pontos do caminho e para quaisquer pontos X e Y nesse plano vale:

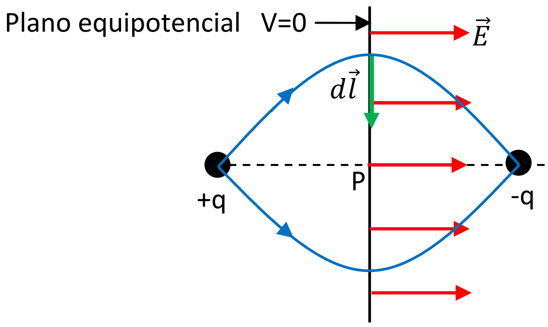


$$\int_X^Y \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Isso tem que ser necessariamente verdade, pois:

$$\int_X^Y \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(X) - V(Y) = 0 - 0 = 0$$

A questão que estamos discutindo aqui se refere ao caso particular $X \rightarrow \infty$ e $Y = P$. Na Figura ao lado mostramos uma visão de perfil da Figura anterior. Mostramos também duas linhas de força do campo elétrico (em azul). Pense nessa Figura em três dimensões, com um plano infinito (plano V=0) entre as duas cargas e um caminho contido nesse plano que vem do infinito e chega em P.



Conclusão: Para qualquer caminho que parte do ∞ e chega em P vale que $W_E(\infty \rightarrow P) = 0$, posto que $W_E(\infty \rightarrow P) = V(\infty) - V(P)$ e vale $V(\infty) = V(P) = 0$. Mas, é possível construir caminhos para os quais em cada deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ vale $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ e, obviamente, ao final vale $W_E(\infty \rightarrow P) = 0$. Esses são os caminhos que estão contidos nas superfícies equipotenciais, como o plano eqüidistante das duas cargas, em que $\vec{E}$ e $d\vec{l}$ são sempre ortogonais entre si.

Fazendo uma analogia gravitacional: considere uma pessoa que se desloca de A até B em uma superfície horizontal (o térreo de um edifício). Para qualquer caminho que parte do ponto A no térreo, sobe até o décimo andar e retorna ao ponto B, também no térreo, o trabalho do peso (da pessoa) é nulo. O caminho pode seguir pelas escadas, pelo elevador, ou pelos dois, não importa. Isso porque esse trabalho é negativo na subida (peso para baixo e deslocamento para cima) e positivo na descida (peso e deslocamento para baixo), o saldo é zero. Existem caminhos que conectam A e B totalmente contidos no térreo, em que o trabalho do peso é nulo em cada passo que a pessoa dá. Isso porque nesses caminhos o peso ($m\,\vec{g}$) é vertical (como sempre) e o passo/deslocamento ($d\vec{l}$) é horizontal.

Q23.3: A energia potencial elétrica de um arranjo de duas cargas elétricas q_1 e q_2 separadas por uma distância r_{12} é dada por:

$$U_E = k\,\frac{q_1\,q_2}{r_{12}} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q_1\,q_2}{r_{12}}$$

É importante ressaltar que U_E não é a energia potencial elétrica de q_1 ou de q_2. U_E é a energia potencial elétrica do par de cargas q_1 e q_2 quando elas estão separadas entre si pela distância r_{12}. Trata-se de uma energia de interação elétrica entre as duas cargas: é a capacidade de realizar trabalho das forças elétricas mútuas (lei de Coulomb) $\vec{F}_{1/2}$ e $\vec{F}_{2/1}$. Se quisermos separar essas duas cargas, partindo da distância r_{12}, até uma distância final infinita, vamos ter que "gastar" uma energia $-U_E$. Ao juntar as cargas acumulamos a energia U_E nessa configuração. Se queremos voltar ao início, com as cargas separadas por uma distância ∞, devemos fornecer a energia $-U_E$. Lembre-se que um "gasto" negativo é de fato um "ganho" etc.

Note que a expressão de U_E pode ser reescrita utilizando-se o conceito de potencial elétrico. De fato, se

$$V_1(r) = k\,\frac{q_1}{r}$$

é o potencial elétrico na vizinhança da carga q_1, então: $U_E = q_2\,V_1(r_{12}) = q_2\,[V_1(r_{12}) - V_1(\infty)]$. Portanto, com base no que já discutimos na Questão 23.2, U_E é o trabalho (mínimo) que um agente externo deve realizar para trazer a carga q_2 do infinito e colocá-la em uma posição fixa a uma distância r_{12} da carga q_1. Da mesma forma, $U_E = q_1\,V_2(r_{12})$, ou seja, U_E é o trabalho (mínimo) que um agente externo deve realizar para trazer a carga q_1 do infinito e colocá-la em uma posição fixa a uma distância r_{12} da carga q_2. Enfim, U_E é o trabalho (mínimo) que um agente externo deve realizar para construir, da forma e na ordem em que ele quiser, a distribuição (estática) de duas cargas q_1 e q_2 separadas por uma distância r_{12}, partindo de uma configuração qualquer em que essas cargas estavam separadas por uma distância infinita (quando $U_E = 0$).

A pergunta aqui é: pode ocorrer

$$U_E = k\,\frac{q_1\,q_2}{r_{12}} = 0$$

para uma distância r_{12} que não seja infinita? Obviamente não (só se q_1 e/ou q_2 fossem nulas, o que não teria graça). Duas cargas elétricas sempre se atraem ou se repelem mutuamente e sempre realizamos trabalho (negativo ou positivo) quando aproximamos essas cargas desde uma distância infinita. Para construir um átomo de hidrogênio, por exemplo, temos que colocar um próton e um elétron a uma distância de cerca de 1 Å (10^{-10} m). A energia que a natureza "gasta" para fazer isso é:

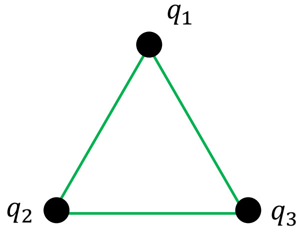
$$U_E = k\,\frac{e\,(-e)}{10^{-10}} \cong -27\ \mathrm{eV}$$

Note, trata-se de um "gasto" negativo, ou seja, a formação de átomos de hidrogênio na natureza se dá espontaneamente, e energia é liberada nesse processo (não gasta, porque o próton e o elétron se atraem), na forma de energia cinética ($\Delta K + \Delta U_E = 0$). Na prática não são liberados exatamente 27 eV de energia cinética (só a metade é liberada) porque uma parte dessa energia cinética (metade) fica dentro do átomo, na energia cinética orbital do elétron (e do próton). Um átomo de Hidrogênio não é uma configuração estática de cargas elétricas. Em contraste, para a formação dos núcleos atômicos, formados por vários prótons que se repelem mutuamente, a natureza gasta uma energia U_E positiva (gasta mesmo) e, por isso, os núcleos atômicos são produzidos dentro das estrelas (a altíssimas temperaturas), que podem ser consideradas, nesse contexto, fornalhas de síntese nuclear.

Considerando agora um arranjo de três cargas elétricas q_1 , q_2 e q_3 separadas entre si pelas distâncias r_{12}, r_{13} e r_{23} , obtemos a seguinte energia eletrostática para esse trio de cargas:

$$U_E = k\,\left(\frac{q_1\,q_2}{r_{12}} + \frac{q_1\,q_3}{r_{13}} + \frac{q_2\,q_3}{r_{23}}\right)$$

Agora, é possível $U_E = 0$? Para simplificar, considere três cargas separadas entre si pela mesma distância d, ou seja, as três cargas estão nos vértices de um triângulo eqüilátero (como na Figura ao lado). Então, simplificando:



$$U_E = \frac{k}{d}\,\left(q_1(q_2 + q_3) + q_2 q_3\right)$$

Portanto, $U_E = 0 \Rightarrow q_1(q_2 + q_3) + q_2 q_3 = 0 \Rightarrow q_1(q_2 + q_3) = -q_2 q_3$. Essa equação tem como solução o caso particular $q_2 = q_3 = q$ e $q_1 = -q/2$. Ao unir as duas cargas q vencemos a repulsão entre elas, realizando um trabalho positivo dado por:

$$q\,V_q(d) = q\,k\,\frac{q}{d} = k\,\frac{q^2}{d}$$

Ao trazer a carga $-q/2$ (do infinito) nos beneficiamos da atração que as duas cargas q exercem sobre ela e realizamos um trabalho negativo (ganhamos energia) dado por:

$$-\frac{q}{2}\,V_{qq}(d) = -\frac{q}{2}k\,\left(\frac{q}{d}+\frac{q}{d}\right) = -\frac{q}{2}k\,\left(\frac{2\,q}{d}\right) = -k\,\frac{q^2}{d}$$

O saldo (U_E) é zero. Se pensarmos que essa estrutura triangular de cargas é uma molécula, a natureza não gastaria e nem ganharia energia ao produzi-la a partir de três íons separados por distâncias infinitas. A molécula se formaria e se quebraria constantemente, não sendo encontrada em uma forma estável.

Q23.6: O potencial elétrico não tem um valor único definido em um dado ponto do espaço. Somente a diferença de potencial entre dois pontos está bem definida pela equação

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Essa equação não define o valor de $V(A)$ e nem de $V(B)$, mas apenas o valor de $V(A) - V(B)$, que é o que realmente interessa, é o que aparece no teorema do trabalho energia e é o que é medido por um voltímetro (que sempre tem dois terminais). Sempre que atribuímos um valor para o potencial em um ponto, como, por exemplo, para os pontos na vizinhança de uma carga pontual q:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r}$$

pressupõe-se que foi arbitrado um valor do potencial em algum outro ponto de referência específico. Nesse caso específico a referência é $V(\infty) = 0$.

Suponha que o campo elétrico seja nulo em uma região do espaço. Então, se A e B são dois pontos nessa região:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{0}\cdot d\vec{l} = \int_A^B 0 = 0 \Rightarrow V(A) = V(B)$$

Note que a integral acima independe do caminho, o que nos dá a liberdade de escolher um caminho de B até A todo contido na região em que o campo elétrico é nulo. Daí concluímos que essa região é uma região equipotencial, ou seja:

$$V(\vec{r}) = \text{constante}$$

sendo $\vec{r}$ um ponto qualquer nessa região de campo elétrico nulo. Note que nada nos leva a concluir que $V(\vec{r}) = 0$. Pelo contrário, o valor da constante vai depender de cada situação. Isso acontece, por exemplo, dentro de condutores em equilíbrio eletrostático. No interior desses condutores vale $\vec{E} = \vec{0}$ e $V(\vec{r})$ =constante. O valor da "constante" é arbitrário, depende de nossa referência.

Não há muita novidade nisso. Considere que seja dada a diferença de altura entre dois pontos A e B: $h(A) - h(B) = 100$ m. Qual a altura do ponto A? Não podemos saber, pois altura é uma grandeza relativa: altura em relação a quê? Não existe uma resposta para a pergunta: qual a altura desse ponto? A resposta só pode ser outra pergunta: altura em relação a quê? Analogamente, não existe uma resposta para a pergunta: qual o potencial elétrico nesse ponto? A resposta só pode ser outra pergunta: onde está e qual o valor do potencial no ponto fixo de referência?

Considere o exemplo de uma esfera metálica maciça de raio R que possui um excesso de carga elétrica Q, depositada uniformemente em sua superfície. No equilíbrio eletrostático, podemos mostrar facilmente que dentro dessa esfera vale (tomando $V(\infty) = 0$):

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R}$$

que é uma constante, não nula. Note que a variável $\vec{r}$ ou mesmo apenas $|\vec{r}| = r$ não aparecem no lado direito da equação. Trata-se de uma constante. $\vec{r}$ é um ponto qualquer dentro da esfera (uma variável), enquanto que R é o raio da esfera (uma constante). O volume interior da esfera é equipotencial.

Mas, nada nos impede de dizer que o potencial dentro da esfera é:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R} + C$$

sendo C uma constante arbitrária. Apenas mudamos a referência, de tal forma que $V(\infty) = C$.

Por exemplo, podemos escolher:

$$C = -\frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R}$$

de tal forma que o potencial no espaço seja dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r} - \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$$

Note que essa redefinição do potencial elétrico não tem nenhum efeito sobre as diferenças de potencial $V(A) - V(B)$. Portanto, nada muda no teorema do trabalho-energia, que é o que importa.

Mas, agora obtemos:

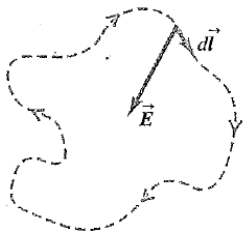
$$V(\infty) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right] = -\frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 R}$$

e dentro da esfera (região equipotencial):

$$V(\vec{r}) = V(R) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right] = 0$$

Moral da história: não é verdade que (em uma região do espaço) $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow V(\vec{r}) = 0$, mas nada impede que escolhamos nossa referência de potencial tal que $V(\vec{r}) = 0$ nessa região. Fato é que não vamos ganhar nada com essa mudança de referência e, portanto, podemos esquecê-la. Não vamos perder tempo com mudanças de referência de potencial. A referência $V(\infty) = 0$ é geralmente (mas nem sempre) a escolha mais simples (ela só falha em alguns casos especiais, como nos casos de distribuições de carga uniformes no plano e no cilindro infinitos).

Q23.7: Para qualquer campo eletrostático vale:



$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$$

sendo V o potencial eletrostático associado a esse campo elétrico. Note que do lado direito não há nenhuma referência ao caminho que conecta os pontos A e B, ao passo que do lado esquerdo há, pois $d\vec{l}$ é, por hipótese, um campo de vetores deslocamento tangentes ao caminho, apontando de A para B. Conclusão: a igualdade só faz sentido se a integral do campo elétrico for independente do caminho, ou seja, se o resultado dessa integral for sempre o mesmo, qualquer que seja o caminho que escolhemos conectando A e B. Portanto: a igualdade só faz sentido se o campo eletrostático for um campo conservativo. Esse é o caso.

Note que o enunciado faz referência a “cargas distribuídas ao longo da trajetória”, mas não esperamos que esse caminho passe por cima de cargas pontuais, pois nesses pontos o campo $\vec{E}$ não estaria bem definido (ele é divergente), o que requereria uma análise matemática mais sofisticada, coisa que tentamos sempre evitar. Considere que o caminho fechado C está no vácuo, e que nessa região há uma distribuição arbitrária de cargas que produz o campo $\vec{E}$.

Se tomarmos um caminho fechado C, ou seja, um caminho que começa em A, dá uma volta qualquer no espaço, e retorna para o ponto A (B=A) obtemos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(A) = 0$$

Esse resultado independe do caminho fechado C e da configuração de cargas elétricas (estáticas) que está produzindo o campo eletrostático $\vec{E}$ no espaço. Isso tudo é conseqüência do fato do campo eletrostático ser conservativo. Se o campo eletrostático não fosse conservativo não faria sentido definir uma função potencial elétrico de acordo com a primeira equação que escrevemos acima.

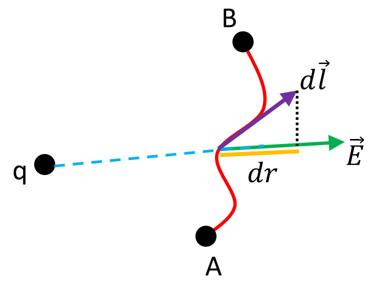
Podemos provar que o campo eletrostático é conservativo provando primeiramente que o campo eletrostático de uma carga pontual é conservativo. Isso é conseqüência da lei de Coulomb, pois:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right] = V(A)-V(B)$$

ou seja a função V existe nesse caso e é dada por:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r}$$

Note que na integral acima usamos a ideia de que o produto escalar é uma operação de projeção e que, portanto, a operação $\hat{r}\cdot d\vec{l}$ dá como resultado a projeção de $d\vec{l}$ ao longo da direção radial ($\hat{r}$), ou seja, $\hat{r}\cdot d\vec{l} = dr$. Nem nos preocupamos em especificar o caminho em que realizamos a integral, o caminho que conecta A e B. Mas ele existe, por hipótese, e poderia ser o caminho (em vermelho) ilustrado na Figura ao lado. Note nessa Figura que o campo $\vec{E}$ de q (seta verde) é radial e que a projeção de $d\vec{l}$ (seta roxa) ao longo de $\vec{E}$ é a projeção de $d\vec{l}$ ao longo de $\hat{r}$, ou seja $\hat{r}\cdot d\vec{l} = dr$ (segmento laranja). Mas enfim, a integral independe do caminho, como o próprio resultado que obtivemos demonstra e qualquer outro caminho poderia ser usado na realização da integral que dá a função $V(\vec{r})$. A ideia seria sempre a mesma, assim como o resultado. Escolhemos o caminho de acordo com nossa conveniência. Um pouco de bom-senso sempre ajuda.

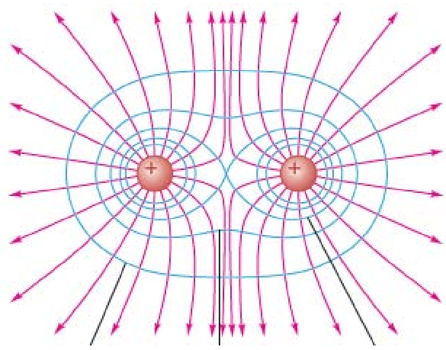


Agora apelamos para o princípio da superposição que diz que o campo elétrico de qualquer distribuição de cargas (ainda que tenhamos que tomar o limite do contínuo) pode ser escrito como:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\,\pi\,\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

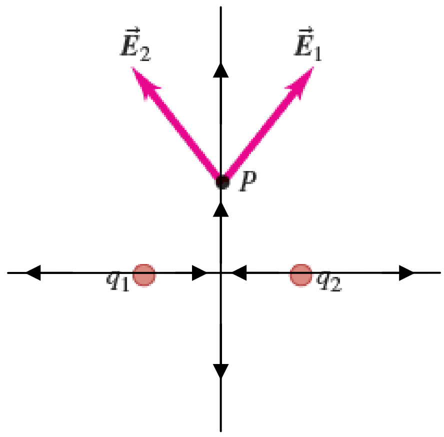
Portanto, o fato de $\vec{E}$ ser conservativo em geral decorre do fato do campo da carga pontual ser conservativo e do princípio da superposição, pois a operação de integração é uma operação linear (a integral da soma é a soma das integrais).

Q23.11: A Figura ao lado mostra duas cargas pontuais positivas q separadas por uma distância d: linhas de força em vermelho e superfícies equipotenciais (apenas cortes no plano da página) em azul. Duas superfícies equipotenciais se tocam em um ponto central. Há algum problema nisso? Já discutimos algo similar na questão 21.22,



relacionada a uma possível ambigüidade na direção de $\vec{E}$ nesse ponto de intercessão.

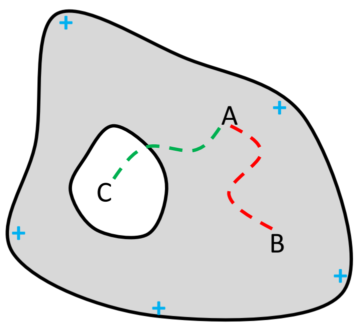
É comum se dizer que "duas linhas de força não podem se cruzar", pois isso criaria uma ambigüidade na direção de $\vec{E}$ nesse ponto de cruzamento ($\vec{E}$ não pode ser ao mesmo tempo tangente a duas linhas que se cruzam). Mas, vimos na questão 21.22, conforme a Figura ao lado, que existe um ponto especial entre duas cargas pontuais $q_1 = q_2 = q > 0$ onde linhas de força se cruzam. Nesse ponto vale $\vec{E} = \vec{0}$ e, portanto, não há ambigüidade na direção de $\vec{E}$. Portanto, reformulando a afirmação acima, podemos dizer que "duas linhas de força não podem se cruzar em pontos onde $\vec{E} \neq \vec{0}$".



Novamente vemos que essas linhas de força "problemáticas" não são mostradas na Figura que ilustra essa questão.

Algo similar ocorre em pontos onde duas superfícies equipotenciais se interceptam mutuamente. $\vec{E}$ é sempre ortogonal a uma superfície equipotencial. Então, em um ponto onde duas superfícies equipotenciais se interceptam há uma possível ambigüidade na direção de $\vec{E}$. Como $\vec{E}$ vai ser ao mesmo tempo ortogonal a duas superfícies que se cruzam? Mas enfim, a Figura dessa questão mostra um ponto onde isso ocorre, no centro entre duas cargas pontuais $q > 0$. Não por acaso, esse é exatamente o ponto onde $\vec{E} = \vec{0}$ já discutido acima. Portanto, a possível ambigüidade na direção de $\vec{E}$ não existe nesse caso. Concluindo, podemos ser mais específicos e dizer que "duas superfícies equipotenciais não podem se cruzar/interceptar/tocar em pontos onde $\vec{E} \neq \vec{0}$".

Q23.17: Um bloco condutor (de metal) possui um excesso de carga elétrica Q > 0 e uma cavidade em seu interior. Vamos supor inicialmente que a cavidade esteja vazia (vácuo), como dito no enunciado. A Figura ao lado ilustra a ideia (tente pensar nessa Figura em três dimensões). A e B são dois pontos dentro do condutor (no metal, na parte maciça) e C é um ponto dentro da cavidade (no vácuo). A Figura ilustra o fato, que pode ser demonstrado pela lei de Gauss, de que todo o excesso de carga Q vai se distribuir na superfície externa do condutor. Não haverá excessos de carga na superfície da cavidade. O campo elétrico vai se anular dentro do condutor (pela própria definição de equilíbrio eletrostático) e vai se anular também dentro da região da cavidade (uma gaiola de Faraday). Portanto, tomando um caminho entre A e B (em vermelho) obtemos (já que $\vec{E} = 0$ em todos os pontos desse caminho):



$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{0}\cdot d\vec{l} = 0 = V(A) - V(B) \Rightarrow V(A) = V(B)$$

Se ligarmos um voltímetro com seus dois terminais em A e B ele vai marcar zero. O volume do metal é equipotencial.

Analogamente, tomando um caminho entre A e C (em verde) obtemos (já que $\vec{E} = 0$ em todos os pontos desse caminho):

$$\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 = V(A) - V(C) \Rightarrow V(A) = V(C)$$

Se ligarmos um voltímetro com seus dois terminais em A e C ele vai marcar zero. O volume da cavidade também é equipotencial e o potencial nessa região tem o mesmo valor (qualquer que seja ele) do potencial na região do material condutor.

Concluindo: toda a região dentro do condutor, incluindo o volume da cavidade, é um volume equipotencial. O potencial dentro da cavidade possui o mesmo valor (constante) do potencial dentro do material condutor, que, por sua vez, possui o mesmo valor do potencial na superfície do condutor.

Esses resultados valem para uma cavidade vazia. Se houver carga elétrica dentro da cavidade, então haverá campo elétrico dentro da cavidade e haverá cargas elétricas concentradas na superfície da cavidade. Dentro do volume do metal, no equilíbrio eletrostático, continua não havendo campo elétrico.

Nesse caso, continua valendo (já que $\vec{E} = 0$ dentro do condutor):

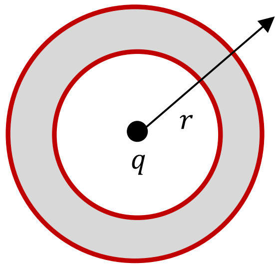
$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 = V(A) - V(B) \Rightarrow V(A) = V(B)$$

A região do material condutor continua sendo equipotencial.

Mas deixa de valer $\vec{E} = 0$ dentro da cavidade e, portanto:

$$\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = V(A) - V(C) \neq 0 \Rightarrow V(A) \neq V(C)$$

O potencial dentro do condutor continua sendo constante (pela própria definição de equilíbrio eletrostático), mas o potencial dentro da cavidade passa a ser uma função da distribuição de cargas elétricas que foi colocada dentro dessa cavidade: $V = V(\vec{r})$. Note que o potencial dentro do condutor continua sendo igual ao potencial nas superfícies desse condutor: superfície externa e superfície da cavidade. Apenas dentro do volume da cavidade (não vazia) vale $V = V(\vec{r})$, não constante.



Considere o exemplo simples (dada a simetria simples): uma carga pontual q no centro de uma cavidade esférica de raio a dentro de um condutor esférico de raio $b > a$: cavidade e condutor concêntricos. O campo elétrico no espaço é dado por (usando a lei de Gauss quando necessário):

$$\vec{E}(\vec{r}, r < a) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\hat{r}$$ Dentro da cavidade

$$\vec{E}(\vec{r}, a < r < b) = \vec{0}$$ Dentro do volume metálico

$$\vec{E}(\vec{r}, r > b) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\hat{r}$$ Fora da esfera metálica

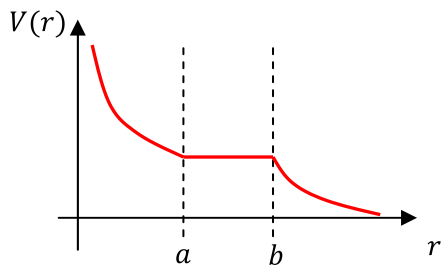
Fixando $V(\infty) = 0$, o potencial no espaço é dado por (que pode ser deduzido facilmente usando um caminho radial desde $\vec{r}$ até o infinito e a relação entre as funções $V(\vec{r})$ e $\vec{E}(\vec{r})$):

$$V(\vec{r}, r < a) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} - \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a} + \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,b}$$ Dentro da cavidade

$$V(\vec{r}, a < r < b) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,b}$$ Dentro do volume metálico (parte maciça)

$$V(\vec{r}, r > b) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}$$ Fora da esfera metálica

Concluindo: fora da esfera metálica existe o mesmo potencial de uma carga pontual q localizada no centro da esfera (de acordo com o teorema das cascas). Note a referência $V(\infty) = 0$. Na superfície exterior da esfera metálica vale: $V(r = b) = q/4\,\pi\,\varepsilon_0\,b$. Esse é o mesmo valor do potencial no volume metálico (onde $\vec{E} = \vec{0}$) e na superfície interior da esfera metálica (a superfície da cavidade): $V(r = a) = q/4\,\pi\,\varepsilon_0\,b$. Dentro da cavidade o potencial é o mesmo de uma carga pontual no centro, mas acrescido da constante $-q/4\,\pi\,\varepsilon_0\,a + q/4\,\pi\,\varepsilon_0\,b$. Essa constante torna a função $V(r)$ contínua, como ela sempre deve ser, de acordo com sua definição. O gráfico ao lado ilustra a função contínua $V(r)$ versus r. A região $r < a$ corresponde à região no interior da cavidade esférica. A região $a < r < b$ corresponde à região ocupada pelo metal (uma coroa esférica de raios a e $b > a$). A região $r > b$ corresponde à região de vácuo exterior à esfera metálica com a cavidade. Dentro de cada região o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ tem um comportamento próprio, assim como o potencial elétrico $V(r)$, tendo em vista que essas duas grandezas estão relacionadas entre si por:



$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$$

sendo A e B dois pontos quaisquer no espaço e os vetores $d\vec{l}$ vetores deslocamento infinitesimais tangentes a um caminho qualquer (uma curva suave orientada de A para B) que conecta A e B.