Q24.1: A capacitância de um capacitor de placas paralelas na aproximação de efeitos de borda desprezíveis é:

$$C = K\frac{\varepsilon_0\, A}{d}$$

sendo $K > 1$ a constante dielétrica de um meio isolante que ocupe todo o espaço entre as placas. Capacitores de grandes capacitâncias possuem diversas aplicações e podemos ver na expressão acima que isso pode ser atingido com: área A das placas grande, dielétricos com K grande e distância d entre as faces internas das placas pequena. Limitações de tamanho tornam o aumento indiscriminado de A uma alternativa não muito prática. Materiais especiais com $K \cong 4.000$, como o titanato de bário ($BaTiO_3$), cumprem a tarefa de aumentar C sem a necessidade de aumentar o tamanho do capacitor. A redução de d esbarra na possibilidade de transporte de cargas elétricas (corrente elétrica) entre as placas através do meio dielétrico, a chamada quebra de rigidez dielétrica do material (em princípio) isolante. Imagine um capacitor projetado para funcionar com uma DDP ΔV entre suas placas. Desprezando efeitos de borda, o módulo do campo elétrico (uniforme) na região entre as placas, dentro do meio dielétrico será:

$$\Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E}\cdot d\vec{l} = E\int_{+}^{-} dl = E\, d \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{d}$$

Vemos que a redução em d, para um ΔV fixo, aumenta o campo elétrico dentro do meio dielétrico. Esse aumento em E aumenta a chance de ionização dos átomos/moléculas que compõem o meio dielétrico. Havendo essa ionização e o transporte de carga através do meio, o capacitor deixa de cumprir sua função e corre o sério risco de incendiar ou explodir devido ao calor produzido pela corrente elétrica (efeito Joule) em seu interior. O valor máximo permitido para o campo E, E_{MAX}, é chamado de rigidez dielétrica do material dielétrico. Somente com $E < E_{MAX}$ está garantida a propriedade de isolamento elétrico desse material. Para o ar, por exemplo, $E_{MAX} \cong 3$ kV/mm, ou seja, se as placas do capacitor estiverem isoladas pelo ar e distanciadas de 1 mm, então a DDP máxima permitida entre as placas é $\Delta V_{MAX} = E_{MAX} d \cong 3$ kV (3.000 V). Se $\Delta V > \Delta V_{MAX}$, serão observadas descargas elétricas atravessando o espaço entre as placas, como pequenos raios em miniatura (centelhas). Portanto, para um dado ΔV, a distância mínima entre as placas seria dada por:

$$d_{MIN} = \frac{\Delta V}{E_{MAX}}$$

Por exemplo, para fabricar um capacitor que vai funcionar com ar entre as placas e conectado a uma DDP $\Delta V = 100$ V, a distância mínima entre as placas seria:

$$d_{MIN} = \frac{100}{3.000} \cong 0{,}033\ \mathrm{mm}$$

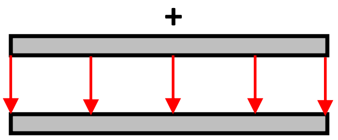
Basicamente 1/3 da espessura de uma folha de papel comum.

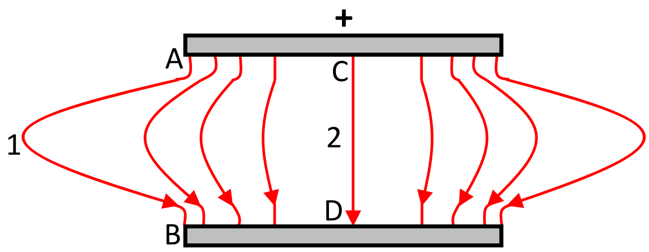
Q24.5:

a) Não. Quanto mais afastamos as placas do capacitor de placas paralelas, maiores são os efeitos de borda. Isso significa que mais curvas se tornam as linhas de força do campo elétrico próximas às bordas das placas. Se as linhas de força do campo elétrico são curvas, então o campo elétrico não é uniforme (um campo uniforme é um campo constante no espaço, constante em módulo, em direção (linhas de força retas) e em sentido). A intensidade do campo elétrico entre as placas também deixa de ser constante. De fato, sendo as linhas de força curvas, significa que menor é a intensidade do campo elétrico, para uma mesma diferença de potencial ΔV entre as placas. Considere que a diferença de potencial entre as placas é dada por:

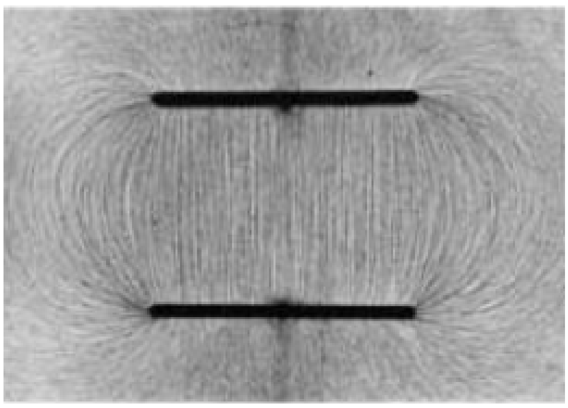
$$\Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

sendo a integral realizada ao longo de qualquer caminho que vai da placa positiva (+) para a placa negativa (-). Considere então que o caminho de integração é uma linha de força de $\vec{E}$. Para obtermos uma mesma ΔV, quanto mais longo o caminho (mais curva a linha de força), menor deve ser a intensidade de $\vec{E}$. A Figura abaixo ilustra essa idéia. Se formos pelo caminho AB através da linha de força 1 ou pelo caminho CD através da linha de força 2 obtemos a mesma ΔV. Portanto, como, as linhas de força são mais curvas próximas às bordas das placas (caminho mais longo), o campo elétrico é mais fraco nessa região.





Então, na presença de efeitos de borda, o campo elétrico deixa de ser uniforme na região entre as placas. Ele deixa de ser uniforme porque suas linhas de força deixam de ser retas. Concomitantemente, sua magnitude vai ficando mais fraca próximo das bordas. Pensando na distribuição de carga nas placas, que geram o campo elétrico entre as placas, vemos que ela também é uniforme para placas próximas e não-uniforme para placas afastadas.



A Figura ao lado exibe um resultado experimental que permite a visualização das linhas de força do campo elétrico para um capacitor de placas paralelas com placas distantes (Ref.: Harold M. Waage, Princeton University). Note que o campo é basicamente dipolar e que as linhas de força tocam as superfícies das placas ortogonalmente, pois elas (as placas) são equipotenciais. No centro do capacitor o campo elétrico é razoavelmente uniforme, porque essa região está longe das bordas.

b e c) Para o capacitor com placas próximas, sabemos que o campo elétrico entre as placas possui magnitude constante igual a $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/(\varepsilon_0\ A)$, sendo Q a carga elétrica depositada na placa positiva e A a área de qualquer uma das placas (elas são iguais). $\sigma = Q/A$ é a densidade (uniforme) de carga elétrica nas superfícies internas das placas. Portanto, a diferença de potencial entre as placas é:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{\varepsilon_0\ A} d$$

sendo d a distância entre as faces internas das placas (imagine que realizamos essa integral através do caminho CD na Figura acima, para o qual vale $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E\ dl$). Ao afastarmos as placas, aumentando d, mas mantendo a carga Q constante (capacitor não conectado a nada), vemos que a diferença de potencial entre as placas aumenta. No entanto, essa expressão para ΔV só vale enquanto as placas estiverem suficientemente próximas, para que os efeitos de borda sejam desprezíveis. Quando os efeitos de borda se tornarem importantes, a expressão para ΔV será outra, difícil de ser calculada, porque as distribuições de cargas nas placas deixam de ser uniformes, de uma maneira que não podemos prever. Podemos dizer apenas que o comportamento exibido pelo capacitor com placas próximas deve continuar valendo à medida que as placas se afastam, ou seja, a diferença de potencial entre as placas continua aumentando indefinidamente. De fato, note que a capacitância de um conjunto de dois condutores é um efeito de interação elétrica entre eles. As cargas acumuladas em uma placa atraem as cargas na outra placa (eletrização por indução) e assim mais carga pode ser armazenada nessas placas (maior capacitância). Mais carga pode ser armazenada quando compararmos com a situação em que os dois condutores não interagissem entre eles, ou seja, na situação em que eles estivessem infinitamente afastados um do outro ($d \to \infty$). Portanto, esperamos que a capacitância de um capacitor diminua à medida que suas placas se afastem, porque elas vão acumular menor quantidade de carga (devido à falta de atração mútua), para uma mesma ΔV. Note que esse comportamento já é exibido pelo capacitor de placas paralelas com placas próximas, situação em que vale:

$$C = \frac{\varepsilon_0\ A}{d}$$

Aumentando d, diminuimos C. Estamos dizendo aqui que para placas distantes (com efeitos de borda) o aumento de d continua diminuindo o valor de C, mas não mais com o comportamento simples previsto por essa fórmula, que foi deduzida no contexto de ausência de efeitos de borda (placas próximas).

Portanto, como vale sempre (estejam as placas próximas ou não):

$$Q = C\,\Delta V$$

segue que se C diminui quando afastamos as placas, então ΔV aumenta, para manter a mesma carga Q (já que o capacitor não está conectado a nada e Q é constante, por hipótese).

A mesma conclusão pode ser obtida da expressão da energia potencial elétrica U_E armazenada no capacitor. Essa energia é exatamente a capacidade de realizar trabalho das forças elétricas (de atração entre as placas do capacitor). Portanto, se afastamos as placas uma da outra, essas forças realizam um trabalho negativo (força e deslocamento anticolineares), ou seja, U_E aumenta com o afastamento das placas (o agente externo que afasta as placas realiza um trabalho positivo e esse trabalho fica "guardado" na forma de U_E). Portanto, como (existam efeitos de borda ou não):

$$U_E = \frac{Q^2}{2C}$$

e o afastamento das placas faz com que U_E aumente, segue que C diminui (para uma Q fixa). Finalmente, como: $Q = C\,\Delta V$, segue que o afastamento das placas faz com que ΔV aumente (independentemente de haver efeitos de borda ou não).

Fato é que para placas muito afastadas (d grande) não podemos dizer que vale:

$$\Delta V = \frac{Q}{\varepsilon_0\,A} d$$

pois essa expressão vale apenas na aproximação de d pequeno (sem efeitos de borda), ou seja:

$$\Delta V(d\ \text{grande}) \neq \frac{Q}{\varepsilon_0\,A} d = \Delta V(d\ \text{pequeno})$$

De fato, $\Delta V(d\ \text{pequeno})$ foi deduzido na hipótese de um campo elétrico uniforme entre as placas, um campo independente da distância d: $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/(\varepsilon_0\,A)$. Isso significa que na aproximação em que não há efeitos de borda o campo elétrico entre as placas não muda quando afastamos as placas (mas a distância entre elas ainda é pequena). Mas, já concluímos que o afastamento grande das placas encurva as linhas de força de $\vec{E}$ e faz com que o campo elétrico entre as placas diminua de fato (no limite $d \to \infty$ deveríamos obter $\vec{E} \to \vec{0}$ na região mais central entre as placas). Portanto, para uma d grande, esperamos que valha a relação:

$$\Delta V(d\ \text{grande}) < \frac{Q}{\varepsilon_0\,A} d$$

Novamente, como: $Q = C\,\Delta V$, segue que para uma d grande, esperamos que valha a relação:

$$C(d\ \text{grande}) = \frac{Q}{\Delta V(d\ \text{grande})} > \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

ou seja, a estimativa $C = \varepsilon_0 A/d$ subestima o valor da capacitância quando d é grande.

Essa conclusão está de acordo com expressões aproximadas para $C(d\,\text{grande})$ que encontramos na literatura. Por exemplo, para placas quadradas, de lado $\sqrt{A}$, encontramos a fórmula aproximada (ver *Electrodynamics of continuous media*, Landau e Lifschitz):

$$C(d\,\text{grande}) = \varepsilon_0 \frac{A}{d} + \varepsilon_0 \frac{\sqrt{A}}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{A}}{d}\right) = C(d\,\text{pequeno}) + \varepsilon_0 \frac{\sqrt{A}}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{A}}{d}\right)$$

Q24.6: Essa questão é parecida com a anterior, mas agora mantemos o capacitor conectado a uma bateria, que fixa a diferença de potencial entre as placas em um certo valor ΔV. Na questão anterior a carga Q estava fixa, porque o capacitor estava isolado, mas agora é a DDP ΔV que está fixa e o capacitor pode trocar carga com uma bateria conectada a ele, para que ΔV fique fixo, igual ao ΔV entre os terminais da bateria. Não está dito no enunciado, mas tudo indica que, para simplificar, podemos considerar que os efeitos de borda são sempre desprezíveis. Se não fosse assim, a questão se tornaria bem mais difícil (bem mesmo).

a) Se dobrarmos a distância entre as placas, $d \to 2d$, a diferença de potencial não muda (por causa da bateria). O campo elétrico entre as placas é uniforme (desprezando efeitos de borda), de tal forma que:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = E\, d$$

(imagine que realizamos essa integral através do caminho CD na Figura da questão 24.5, para o qual vale $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E\, dl$).

Portanto:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

Concluindo: se $d \to 2d$, enquanto ΔV não muda, então $E \to E/2$. O campo elétrico entre as placas diminui, é a metade do original. Por que o campo elétrico diminuiu? Ele é produzido pelas cargas elétricas depositadas nas placas. O item (b) abaixo explica a redução em E.

b) Da lei de Gauss, sabemos que, sendo $\sigma = Q/A$ a densidade superficial de carga elétrica na face interna da placa positiva:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

E é o campo elétrico resultante entre as placas produzido pelas cargas elétricas concentradas uniformemente nas faces internas das duas placas: Q na placa positiva e $-Q$ na placa negativa. Portanto:

$$Q = \varepsilon_0 A\, E$$

Concluindo, se $d \rightarrow 2d$, então $E \rightarrow E/2$ e, finalmente $Q \rightarrow Q/2$. Se as placas ficam mais distantes, menor é a interação/atração entre as cargas nelas e menor o próprio acúmulo de cargas, para uma mesma ΔV, conforme discutido na questão anterior. Se há menos carga nas placas, o campo elétrico é menor.

Enfim, para manter a diferença de potencial entre as placas, com o aumento da distância, a bateria precisa diminuir a quantidade de carga nas placas, diminuindo concomitantemente o campo elétrico entre as placas. Essas cargas fluem das placas para a bateria. As cargas nas placas refluem para os terminais da bateria, porque a atração entre elas (através do espaço entre as placas) diminuiu.

c) A energia eletrostática armazenada nas cargas depositadas nas placas é:

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \, Q \, \Delta V$$

Usaremos aqui a última expressão (já que ΔV é constante), para concluir que se $d \rightarrow 2d$, $Q \rightarrow Q/2$ e, finalmente $U \rightarrow U/2$. Note que a energia eletrostática armazenada no capacitor pode ser também expressa em termos do campo elétrico entre as placas:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A \, d$$

sendo $VOL = A \, d$ o volume do espaço entre as placas do capacitor. Portanto, aumentando d ($d \rightarrow 2d$) aumentamos o volume ($VOL \rightarrow 2 \, VOL$), mas o campo elétrico diminui ($E \rightarrow E/2$) e, no final das contas, a energia diminui ($U \rightarrow U/2$), pois ela é quadrática em E.

Podemos considerar que U é a energia que gastamos para carregar o capacitor, e que fica, portanto, armazenada nele, na forma de energia potencial elétrica. Um capacitor é geralmente carregado através de uma bateria, mas podemos pensar em um processo equivalente em que as cargas + são simplesmente transportadas da placa – para a placa +, na presença do campo elétrico entre as placas, que se opõe a esse transporte (analogamente à energia potencial gravitacional que é armazenada em livros que são depositados em uma prateleira, sob oposição da gravidade). No capacitor com placas mais afastadas transportamos menos carga ($Q/2$) na presença de um campo elétrico mais fraco ($E/2$), por uma distância maior ($2d$). No final das contas, realizamos um trabalho W' menor (quando comparado ao capacitor com placas mais próximas, em que realizamos um trabalho W). Grosso modo: $W' = F' \, d' = (Q/2)(E/2)(2d) \; = \; Q \, E \, d \, / \, 2 = W/2$.

Q24.7: Essa questão é parecida com a anterior, mas agora o capacitor é previamente carregado e depois desconectado, o que implica que a carga elétrica nas placas está fixa em um certo valor, digamos Q (na placa positiva). Não está dito no enunciado, mas tudo indica que, para simplificar, podemos considerar que os efeitos de borda são sempre desprezíveis. A mesma idéia foi usada na questão anterior.

a) Da lei de Gauss, sabemos que, sendo $\sigma = Q/A$ a densidade superficial de carga elétrica na face interna da placa positiva:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Portanto, se Q não muda quando afastamos as placas, E também não muda.

b) O campo elétrico entre as placas é uniforme (desprezando efeitos de borda), de tal forma que:

$$\Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E\ d$$

Portanto:

$$\Delta V = E\ d$$

(imagine que realizamos essa integral através do caminho CD na Figura da questão 24.5, para o qual vale $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E\ dl$). Concluindo, se $d \to 2d$, então $E \to E$ e $\Delta V \to 2\ \Delta V$. A diferença de potencial entre as placas aumenta.

c) A energia eletrostática armazenada nas placas é:

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\ Q\ \Delta V$$

Usaremos aqui a última expressão (considerando Q constante), para concluir que se $d \to 2d$, $Q \to Q$, $\Delta V \to 2\ \Delta V$ e finalmente $U \to 2\ U$. A energia eletrostática armazenada no capacitor pode ser também expressa em termos do campo elétrico entre as placas:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A\ d$$

sendo $VOL = A\ d$ o volume do espaço entre as placas do capacitor. Portanto, aumentando d ($d \to 2d$) aumentamos o volume ($VOL \to 2\ VOL$), mas mantemos o mesmo campo elétrico ($E \to E$) e, no final das contas, a energia aumenta ($U \to 2\ U$).

Podemos considerar que U é a energia que gastamos para carregar o capacitor, e que fica, portanto, armazenada nele. Um capacitor é geralmente carregado através de uma bateria, mas podemos pensar em um processo equivalente em que as cargas + são simplesmente transportadas da placa – para a placa +, na presença do campo elétrico entre as placas, que se opõe a esse transporte. No capacitor com placas mais afastadas transportamos a mesma carga (Q) na presença do mesmo campo elétrico (E), mas por uma distância maior ($2d$). No final das contas, realizamos um trabalho W' maior (quando comparado ao capacitor com placas mais próximas, em que realizamos um trabalho W). Grosso modo: $W' = F'd' = (Q)(E)(2d) = 2\ Q\ E\ d = 2\ W$.

Q24.9: Consideremos um capacitor de placas paralelas com placas de área A, distanciadas de d e com carga Q na placa positiva (e não conectado a nada). Não está dito no enunciado, mas tudo indica que, para simplificar, podemos considerar que os efeitos de borda são sempre desprezíveis. A energia eletrostática armazenada no capacitor é:

$$U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{d}{\varepsilon_0 A}Q^2$$

Se considerarmos um capacitor com a distância entre as placas maior, dada por $d + \Delta$, a energia se torna:

$$U \to \frac{1}{2}\frac{d+\Delta}{\varepsilon_0 A}Q^2 = U_0 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\,\Delta = U_0 + \Delta U$$

Vemos que a energia armazenada no capacitor com placas mais afastadas é maior (com os mesmos valores de Q e A), conforme discutido na questão anterior (se $\Delta = d$, então $U \to 2U_0$ pois $\Delta U = U_0$).

Consideremos agora um processo em que partimos de um capacitor com distância entre as placas d e afastamos as placas até $d + \Delta$. As placas se atraem mutuamente e o afastamento das placas requer um trabalho de um agente externo. Se as duas placas carregadas (+ e -) produzem na região entre as placas um campo elétrico E, então, por simetria, o campo produzido por uma placa apenas é $E/2$. Então, a força atrativa que um elemento infinitesimal de carga dQ em uma das placas sofre é, em módulo:

$$dF_{ATR} = \frac{E}{2}dQ$$

Esse é o módulo da força atrativa que um elemento infinitesimal de carga dQ na placa X sofre devido à atração das cargas que estão na placa Y.

Concluindo, a força atrativa total que uma placa (digamos X) sofre (devido à placa Y) possui magnitude:

$$F_{ATR} = \int_{PLACA} dF_{ATR} = \int_{PLACA} \frac{E}{2}dQ = \frac{E}{2}\int_{PLACA} dQ = \frac{QE}{2}$$

Portanto, um agente externo que pretende (somente) vencer essa força e afastar as placas de Δ deve realizar um trabalho positivo dado por (supondo que a força é constante durante o deslocamento, que é o caso aqui, porque Q e E são constantes):

$$W_{EXT} = F_{EXT}\,\Delta = F_{ATR}\,\Delta = \frac{QE}{2}\,\Delta$$

Sendo:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Concluímos que:

$$W_{EXT} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\,\Delta = \Delta U$$

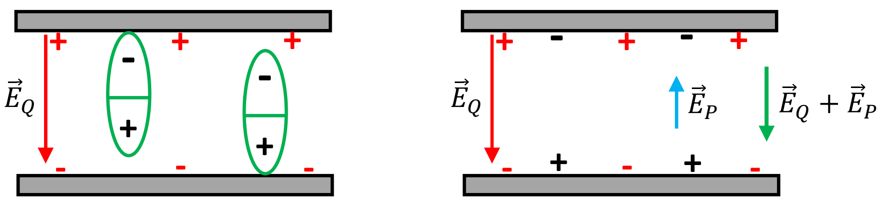
que é exatamente o acréscimo ΔU na energia potencial eletrostática armazenada no capacitor, quando comparamos o capacitor com distância d com o capacitor com distância $d + \Delta$. Conclusão: o trabalho W_{EXT} que o agente externo faz para separar as placas, se opondo à atração mútua entre elas, não é perdido, ou desperdiçado, ele fica armazenado na forma de energia potencial elétrica no capacitor (trata-se de uma situação análoga àquela de se esticar uma mola, acumulando nela energia potencial elástica).

Podemos considerar que U é a energia que gastamos para carregar o capacitor, e que fica, portanto, armazenada nele, na forma potencial. Nesse caso, mostramos que carregar um capacitor com carga Q e distância $d + \Delta$ requer a mesma energia que carregar um capacitor com carga Q e distância d e depois afastar as placas de Δ, vencendo a atração entre elas. O resultado final é o mesmo, o gasto energético é o mesmo e as energias eletrostáticas acumuladas são, portanto, iguais.

A situação discutida aqui já foi abordada na questão 24.5 em que comentamos que a energia potencial elétrica U armazenada no capacitor é a capacidade de realizar trabalho das forças elétricas (de atração entre as placas do capacitor). Portanto, se afastamos as placas uma da outra, essas forças realizam um trabalho negativo (força e deslocamento anticolineares), ou seja, U aumenta com o afastamento das placas (o agente externo que afasta as placas realiza um trabalho positivo e esse trabalho fica “guardado” na forma de U).

Q24.10: Consideremos um capacitor de placas paralelas com placas de área A, distanciadas de d e com carga Q na placa positiva (e não conectado a nada). Não está dito no enunciado, mas tudo indica que, para simplificar, podemos considerar que os efeitos de borda são sempre desprezíveis.

Em seguida esse capacitor é mergulhado em um tanque cheio de óleo. Seja $K > 1$ a constante dielétrica desse óleo. Sabemos que o campo elétrico $\vec{E}_Q$ produzido pelas cargas depositadas nas placas (cargas vermelhas na Figura) vai polarizar as moléculas que compõem o óleo, fazendo com que elas se tornem pequenos dipolos elétricos. Os dipolos elétricos dessas moléculas ficarão orientados paralelamente a $\vec{E}_Q$, com suas pontas + e – ao longo de $\vec{E}_Q$. Portanto, as pontas + das moléculas ficarão aglutinadas próximas da placa negativa e as pontas – ficarão aglutinadas próximas da placa positiva, conforme a Figura ao lado (exagerando bastante o tamanho das moléculas, em



verde). No final das contas, do ponto de vista macroscópico, tudo se resume à criação de densidades de carga de polarização nas interfaces óleo/placas (cargas pretas na Figura), que criam na região entre as placas do capacitor um campo elétrico $\vec{E}_P$ contrário ao campo $\vec{E}_Q$. Daí, o campo elétrico resultante entre as placas $(\vec{E}_Q + \vec{E}_P)$ diminui, ou seja, passa a valer: $|\vec{E}_Q + \vec{E}_P| < |\vec{E}_Q|$.

Para uma discussão quantitativa podemos partir do fato de que a capacitância do capacitor com óleo entre as placas é:

$$C_{OLEO} = K\, C_{VACUO} > C_{VACUO}$$

pois $K > 1$. Portanto, como $Q = C\, \Delta V$, vemos que como Q (a carga elétrica depositada nas placas) não muda com a inserção no óleo, então $\Delta V_{OLEO} < \Delta V_{VACUO}$. De fato:

$$\Delta V_{OLEO} = \frac{Q}{C_{OLEO}} = \frac{Q}{K\, C_{VACUO}} = \frac{1}{K}\, \Delta V_{VACUO}$$

Sabemos que:

$$\Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E\, d$$

vemos logo que $E_{OLEO} < E_{VACUO}$. De fato:

$$E_{OLEO} = \frac{\Delta V_{OLEO}}{d} = \frac{\Delta V_{VACUO}/K}{d} = \frac{1}{K}\frac{\Delta V_{VACUO}}{d} = \frac{E_{VACUO}}{K}$$

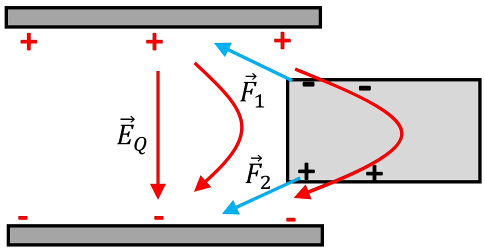
Note que $\vec{E}_{OLEO}$ é o campo elétrico resultante entre as placas na presença do óleo, ou seja, $\vec{E}_{OLEO} = \vec{E}_Q + \vec{E}_P$, enquanto que $\vec{E}_{VACUO} = \vec{E}_Q$, conforme nossa discussão anterior.

A maneira mais simples de medir um campo elétrico é através da diferença de potencial, partindo do pressuposto de que existe uma relação simples entre essas duas grandezas. Isso nem sempre é verdade, mas no caso do capacitor de placas paralelas com placas próximas, por exemplo, vale a relação linear:

$$\Delta V = E\, d$$

Portanto, conhecendo a distância d, podemos deduzir o valor de E usando um simples voltímetro conectado entre os terminais (ou entre as placas) do capacitor. Na situação descrita nessa questão, se você conectar um voltímetro entre os terminais do capacitor fora do óleo e ele indicar uma diferença de potencial de, digamos, 10 V, você vai notar que à medida que o capacitor vai sendo imerso no óleo a diferença de potencial vai caindo, até que quando ele estiver totalmente imerso no óleo o voltímetro indique, digamos 8 V. Nesse caso, a constante dielétrica do óleo seria: $K = \Delta V_{VACUO}/\Delta V_{OLEO} = 10/8 = 1{,}25$. A constante dielétrica da água, por exemplo, é aproximadamente igual a 80. Portanto, se o voltímetro lia 10 V com o capacitor fora da água, após ele ser todo inserido dentro da água a leitura do voltímetro vai ser aproximadamente $\Delta V_{AGUA} \cong \frac{10}{80} = 0{,}125$ V. A DDP é 80 vezes menor porque o campo elétrico entre as placas é 80 vezes menor, graças às cargas de polarização da água (pólos + e -) que blindam as cargas elétricas depositadas nas placas. As moléculas de água possuem uma dipolaridade intrínseca forte, devido à forma assimétrica dessas moléculas e, por isso, seus efeitos de polarização são intensos.

Q24.14: Ao aproximarmos um bloco dielétrico da região entre as placas de um capacitor de placas paralelas vamos perceber que esse bloco é atraído para o interior dessa região. Note que para que o bloco seja atraído deve atuar nele uma força paralela às placas do capacitor, mostrando que esse efeito de atração é, de fato, um efeito de borda. Se não houvesse efeito de borda o campo elétrico entre as placas seria ortogonal às placas e não seria capaz de exercer força paralela às placas no bloco dielétrico. A Figura ao lado ilustra a idéia. A porção do bloco dielétrico mergulhada no campo elétrico produzido pelas cargas nas placas do capacitor se polariza e ganha densidades de cargas de polarização superficiais, que são atraídas pelas cargas elétricas (de polaridades opostas) nas placas, através de seu campo elétrico. Nessa Figura, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são as forças que o campo elétrico $\vec{E}_Q$ exerce sobre as cargas depositadas nas faces do bloco dielétrico. Note que se não houvesse encurvamento das linhas de força de $\vec{E}_Q$ (ou seja, um efeito de borda), essas forças seriam ortogonais às placas e não haveria força resultante ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2$) puxando o bloco dielétrico para o interior da região entre as placas. Nesse caso valeria $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$.



Já comentamos em uma questão anterior que podemos considerar que a energia potencial eletrostática U é a energia que gastamos para carregar o capacitor, e que fica, portanto, armazenada nele. Considere então dois processos: 1) um capacitor com um bloco dielétrico entre suas placas é carregado recebendo uma carga Q em sua placa positiva. 2) Um capacitor com vácuo entre suas placas é carregado recebendo uma carga Q em sua placa positiva. Após isso inserimos o bloco dielétrico entre as placas. Notamos que esses dois processos levam ao mesmo resultado final e devem custar, portanto, o mesmo gasto energético, ou seja, levar à mesma energia U armazenada no capacitor carregado e com dielétrico entre as placas. De acordo com nossa discussão anterior, vimos que o bloco dielétrico é puxado para a região entre as placas. Portanto, um agente externo que insere esse bloco nessa região deve freá-lo, para que ele apenas mude de lugar (indo de fora para dentro do capacitor com velocidade/energia cinética desprezível). Esse agente externo deverá realizar um trabalho negativo: $W_{EXT} < 0$ (enquanto o bloco desliza para a direita o agente externo faz força para a esquerda, freando o bloco). Conclusão, o capacitor com vácuo armazena mais energia do que um capacitor com um bloco dielétrico entre as placas, supondo que os dois tenham a mesma carga Q. Isso porque, pensando no processo (2), ganhamos energia quando inserimos o bloco dielétrico ou, da mesma forma, gastamos energia quando retiramos o bloco dielétrico da região entre as placas. Podemos dizer que:

$$U_{DIEL} = U_{VACUO} + W_{EXT}$$

Sendo $W_{EXT} < 0$ (o trabalho do agente externo para inserir o dielétrico), segue que $U_{VACUO} > U_{DIEL}$.

Analogamente, conforme nossa discussão na questão 24.5, a energia potencial elétrica U armazenada no capacitor é exatamente a capacidade de realizar trabalho das forças elétricas que o campo elétrico do capacitor pode exercer em outros corpos. Portanto, enquanto o bloco dielétrico é inserido entre as placas, essas forças elétricas realizam um trabalho positivo (força e deslocamento colineares), ou seja, U diminui com a introdução do bloco dielétrico: $U_{DIEL} < U_{VACUO}$ (se realizo um trabalho positivo, minha capacidade de realizar trabalho diminui).

De fato, pensando em um capacitor com o espaço entre as placas todo preenchido por um dielétrico de constante dielétrica $K > 1$, obtemos:

$$U = \frac{Q^2}{2\,C} \Rightarrow U_{VACUO} = \frac{Q^2}{2\,C_{VACUO}} = \frac{Q^2}{2\,C_{DIEL}/K} = K\frac{Q^2}{2\,C_{DIEL}} = K\,U_{DIEL}$$

ou seja, $U_{VACUO} > U_{DIEL}$, que foi nossa conclusão para um capacitor com um dielétrico apenas parcialmente inserido (nesse caso de inserção parcial não vale exatamente $U_{VACUO} = KU_{DIEL}$, pois não vale exatamente $C_{VACUO} = C_{DIEL}/K$).

Conclusão: Comparando dois capacitores de mesma geometria e com mesma carga elétrica, o com vácuo entre as placas acumula mais energia. Basicamente porque $U = Q^2/2C$ e $C_{VACUO} < C_{DIEL}$.

Em contraste, quando esses dois capacitores estão submetidos à mesma DDP ΔV que se mantém fixa com a inserção do dielétrico (através de uma bateria, por exemplo), o capacitor com dielétrico entre as placas é capaz de acumular mais carga elétrica que o capacitor de mesma geometria com vácuo entre as placas. De fato:

$$Q = C\,\Delta V \Rightarrow Q_{DIEL} = C_{DIEL}\,\Delta V = K\,C_{VACUO}\,\Delta V = KQ_{VACUO}$$

Nessa situação, o capacitor com dielétrico vai armazenar mais energia do que o capacitor com vácuo, pois:

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 \Rightarrow U_{DIEL} = \frac{1}{2}C_{DIEL}(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}K\,C_{VACUO}\,(\Delta V)^2 = K\,U_{VACUO}$$

Conclusão: Comparando dois capacitores de mesma geometria e com mesma ΔV, o com vácuo entre as placas acumula menos energia. Basicamente porque $U = C\,(\Delta V)^2/2$ e $C_{VACUO} < C_{DIEL}$.

Não devemos confundir esse caso com o que foi discutido anteriormente nessa questão, em que comparamos dois capacitores de mesma geometria, um com dielétrico e outro com vácuo, com a mesma carga Q. Nesse caso, conforme já discutimos, o capacitor com dielétrico vai armazenar menos energia que o capacitor com vácuo:

$$U_{DIEL} = \frac{U_{VACUO}}{K}$$

Note, o fato de valer $U_{DIEL} = K\ U_{VACUO}$ no caso dos capacitores com a mesma ΔV não implica que nesse caso, ao inserir o bloco dielétrico (mantendo ΔV constante), um agente externo vai realizar um trabalho W_{EXT} positivo, ou as forças elétricas vão realizar um trabalho negativo. Nada muda: o bloco é atraído e devemos freá-lo enquanto ele é inserido na região entre as placas: W_{EXT} continua sendo negativo e as forças elétricas das cargas nas placas realizam um trabalho positivo. Mas, estando o capacitor com ΔV constante enquanto inserimos o bloco, ele não pode estar isolado, o capacitor deve estar conectado o tempo todo a uma bateria. Portanto, para computar a diferença de gasto de energia entre o capacitor com vácuo e o capacitor com o bloco inserido devemos levar em conta também o trabalho positivo da bateria W_{BAT} durante o processo de inserção do dielétrico. Ao fazer corretamente o balanço energético concluímos que, com a mesma ΔV, o capacitor com dielétrico vai armazenar mais energia do que o capacitor com vácuo. Basicamente:

$$U_{DIEL} = U_{VACUO} + W_{EXT} + W_{BAT}$$

com $W_{EXT} < 0$ e $W_{BAT} > 0$ de tal forma que, no final das contas, $U_{DIEL} > U_{VACUO}$.

No caso anterior, em que a carga no capacitor era constante enquanto inseríamos o dielétrico, não havia bateria e, portanto, $W_{BAT} = 0$ e forçosamente valia $U_{DIEL} < U_{VACUO}$, já que vale sempre $W_{EXT} < 0$.

Resumindo, a energia armazenada em um capacitor é sempre dada por:

$$U = \frac{Q^2}{2\,C}$$

Se o capacitor não está conectado a nada, então Q é constante e a inserção do dielétrico entre as placas produz um aumento na capacitância e, consequentemente, uma redução em U. Quantitativamente:

$$U_{DIEL} = \frac{U_{VACUO}}{K}$$

Se a energia armazenada no capacitor diminui, para onde vai a diferença de energia? Vimos que o dielétrico é atraído para a região entre as placas, ele é sugado e podemos usar essa energia cinética para fazer algo útil, retirando energia do capacitor enquanto o dielétrico penetra nele. Ao final teremos um capacitor com dielétrico e com menos energia potencial elétrica armazenada.

Se o capacitor está conectado a uma bateria, então ΔV é constante e a inserção do dielétrico entre as placas produz um aumento na capacitância (como sempre acontece). Portanto, como vale:

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

vemos logo que a inserção do dielétrico entre as placas produz um aumento na capacitância e, consequentemente, um aumento em U. Se a energia armazenada no capacitor aumentou, de onde veio a diferença de energia? O dielétrico continua sendo atraído para a região entre as placas, ele continua sendo sugado e podemos usar essa energia cinética para fazer algo útil, retirando energia do capacitor enquanto o dielétrico penetra nele. Mas, ao final teremos um capacitor com dielétrico e com mais energia potencial elétrica armazenada. De onde veio o saldo positivo de energia? Só pode ter vindo da bateria, que é um agente externo que está interagindo com o capacitor enquanto o dielétrico penetra nele. De fato, olhando pela primeira igualdade $U = Q^2/C$, concluímos que a inserção do dielétrico aumenta C, mas a carga elétrica Q armazenada no capacitor também aumenta, ela vem da bateria para as placas, sendo atraída pelas cargas de polarização produzidas nas interfaces dielétrico/placas. Resultado: Q aumenta e C também aumenta e no final das contas a razão $U = Q^2/C$ aumenta. Quantitativamente:

$$U_{DIEL} = K\, U_{VACUO}$$