Q26.1: Duas lâmpadas (1 e 2) com DDPs (diferenças de potencial, tensões ou voltagens) e potências nominais tais que:

$$V_1 = V_2 = V = 120 \text{ Volts}$$

$$P_2 = 2\,P_1 \;\; (P_1 = 60\,W \text{ e } P_2 = 120\,W)$$

Note, quando nos referimos a valores "nominais" queremos dizer os valores que o fabricante recomenda, para o perfeito funcionamento do dispositivo. São aqueles valores que vêm escritos no dispositivo. Por exemplo, nada nos impede de pegar uma lâmpada com DDP nominal de 120 V e ligá-la em uma bateria de 12 V. Nesse caso ela não dissiparia sua potência nominal, ela dissiparia uma potência (real) menor. Mas ela funcionaria sem problemas. Arriscado seria ligá-la em uma DDP maior que 120 V. Nesse caso muito provavelmente ela iria queimar, por excesso de calor.

a) Qual filamento possui maior resistência?

Sabemos que $P = V^2/R$. Portanto:

$$R_2 = \frac{V^2}{P_2} = \frac{V^2}{2\,P_1} = \frac{1}{2}\frac{V^2}{P_1} = \frac{1}{2}\,R_1$$

A lâmpada de maior potência (2) possui menor resistência ($R_1 = 240\,\Omega$ e $R_2 = 120\,\Omega$).

Muitos estudantes se surpreendem com esse fato, pois eles esperam que, como a origem do calor (efeito Joule) está na resistência elétrica, uma maior potência requereria mais calor, que requereria maior resistência. Basicamente esses estudantes se esquecem que a origem do calor está na resistência, mas também na quantidade de portadores fluindo dentro do material e enfrentando essa resistência. Afinal, uma lâmpada pode ter uma resistência elétrica muito grande em seu filamento, mas se ela estiver desligada, o calor gerado é nulo. Como $P = V^2/R$, vemos logo que para duas lâmpadas com a mesma DDP nominal V, a de potência maior vai ter resistência menor. Como $V = R\,I$ (lei de Ohm), ou mesmo de $P = V\,I$, vemos que a lâmpada de potência maior vai ser percorrida por uma corrente maior (mais portadores fluindo no filamento). Como $P = R\,I^2$, concluímos que a lâmpada de maior potência tem resistência menor e corrente maior, de tal forma que o produto $R\,I^2$ é maior. Na lâmpada de maior potência há menor resistência, mas há um maior fluxo de portadores, há mais colisões e maior produção de calor.

b) As lâmpadas ligadas em série: então $I_2 = I_1 = I$. As DDPS (reais) nos terminais das duas lâmpadas serão (da lei de Ohm):

$$\Delta V_2 = R_2\,I = \frac{1}{2}\,R_1\,I = \frac{1}{2}\,\Delta V_1$$

Na lâmpada de potência maior a DDP (real) é menor. Note que $I = 120/(R_1 + R_2) \cong 0{,}33$ A e, portanto: $\Delta V_1 = 80$ V e $\Delta V_2 = 40$ V . Para as duas lâmpadas em série: $\Delta V_1 + \Delta V_2 = 80 + 40 = 120$ V.

A lâmpada de maior potência vai brilhar menos, pois as potências reais (P_1' e P_2') são tais que:

$$P_2' = R_2\, I^2 = \frac{1}{2} R_1\, I^2 = \frac{1}{2} P_1'$$

A idéia é simples: como a quantidade de portadores que atravessa as duas lâmpadas é a mesma, a de resistência menor (a de maior potência nominal) vai aquecer menos e brilhar menos: $P_1' = 26{,}66$ W e $P_2' = 13{,}33$ W. Note: a lâmpada de maior potência (nominal) brilha menos que a lâmpada de menor potência (nominal) porque a conexão série das lâmpadas produz esse resultado aparentemente contraditório (em um circuito residencial "normal" as lâmpadas estão ligadas em paralelo).

c) Agora as lâmpadas estão ligadas em paralelo: então: $\Delta V_2 = \Delta V_1 = \Delta V$.

Isso não muda as resistências dos filamentos das lâmpadas, já calculadas acima. Agora a lâmpada de maior potência (2) vai brilhar mais (conforme esperamos que aconteça), pois as potências reais são tais que:

$$P_2' = \frac{{\Delta V_2}^2}{R_2} = \frac{\Delta V^2}{R_1/2} = 2\,\frac{\Delta V^2}{R_1} = 2\,P_1'$$

Nesse caso a corrente na lâmpada de maior potência é maior, conforme já discutimos anteriormente. Estando as lâmpadas ligadas em suas DDPs nominais ($\Delta V_2 = \Delta V_1 = 120$ V), elas vão dissipar suas potências nominais: $P_1' = P_1 = 60$ W e $P_2' = P_2 = 120$ W. Note que as correntes nas lâmpadas são diferentes: $I_1 = 120/240 = 0{,}5$ A e $I_2 = 120/120 = 1$ A. Na lâmpada de maior potência passa mais corrente (o dobro).

Em uma residência as lâmpadas estão todas em paralelo, conectadas às suas DDPs nominais e dissipando suas potências nominais. A lâmpada de maior potência (nominal) brilha mais que a lâmpada de menor potência (nominal) porque as potências reais são aproximadamente iguais às potências nominais nesse caso.

Q26.2: Duas lâmpadas (1 e 2) com DDPs e potências nominais tais que:

$$V_1 = V_2 = V = 120 \text{ volts}$$

$$P_2 = 8\,P_1 \;\; (P_1 = 25\,W \text{ e } P_2 = 200\,W)$$

foram ligadas em série e a uma fonte de DDP $V' = 240 \text{ volts} = 2\,V$. Uma lâmpada queimou. Qual?

A situação sugere que o responsável por essa ligação imaginou que os 240 V ligados às duas lâmpadas em série fossem se dividir igualmente em 120 V na lâmpada 1 e 120 V na lâmpada 2 e tudo ia funcionar normalmente. É verdade que dois resistores em série funcionam como um divisor de tensão (ou de DDP), mas a divisão não é igualitária. Para dois resistores R_1 e R_2 em série a DDP total ΔV se divide entre os resistores da seguinte forma:

$I = \dfrac{\Delta V}{R_1 + R_2}$	$\Delta V_1 = R_1 I = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\Delta V$	$\Delta V_2 = R_2 I = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\Delta V$	$\dfrac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$

Vemos que a DDP se divide igualmente entre os resistores ($\Delta V_1/\Delta V_2 = 1$) somente se as resistências forem iguais. Não é esse o caso aqui. Para resistores diferentes em série, o de resistência maior fica com uma DDP maior entre seus terminais.

Fato é que uma lâmpada incandescente não pode dissipar mais que sua potência nominal. Se ela tentar fazer isso, seu filamento vai aquecer demais e vai derreter: a lâmpada vai queimar. Portanto, para descobrir qual lâmpada vai queimar basta calcular as potências dissipadas (reais) P' e comparar com as potências nominais P. Se $P' > P$, queima.

Em termos das resistências dos filamentos e da DDP nominal as potências nominais das lâmpadas são:

$$P_1 = \frac{V^2}{R_1} \qquad\qquad P_2 = \frac{V^2}{R_2}$$

Portanto, as resistências dos filamentos são:

$$R_2 = \frac{V^2}{P_2} = \frac{V^2}{8\,P_1} = \frac{1}{8}\frac{V^2}{P_1} = \frac{1}{8}\,R_1$$

A lâmpada de maior potência (2) tem menor resistência elétrica (já vimos isso, para lâmpadas com a mesma DDP nominal).

Como as lâmpadas estão em série, a resistência equivalente do circuito é:

$$R_T = R_1 + R_2 = R_1 + \frac{1}{8}\,R_1 = \frac{9}{8}R_1 = 8\,R_2 + R_2 = 9\,R_2$$

Portanto, a corrente que estará circulando no circuito conectado à DDP $V' = 2V$ será:

$$I = \frac{V'}{R_T} = \frac{8}{9}\frac{V'}{R_1} = \frac{8}{9}\frac{(2V)}{R_1} = \frac{16}{9}\frac{V}{R_1} = \frac{(2\,V)}{9\,R_2} = \frac{2}{9}\frac{V}{R_2}$$

Então, as lâmpadas estarão dissipando as potências (reais):

$$P_2' = R_2\,I^2 = R_2\left(\frac{2\,V}{9\,R_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{9}\right)^2\frac{V^2}{R_2} = \frac{4}{81}\,P_2 < P_2$$

$$P_1' = R_1\,I^2 = R_1\left(\frac{16}{9}\frac{V}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2\frac{V^2}{R_1} = \frac{256}{81}P_1 > P_1$$

Vemos que a lâmpada 1 vai queimar. A lâmpada 1 vai tentar dissipar o triplo da potência para a qual ela foi projetada. Ela não vai conseguir. A lâmpada 2 vai estar folgada. De fato, como a lâmpada 1 vai queimar, ambas irão apagar, pois elas estão em série.

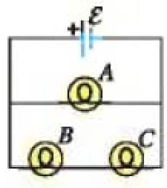
Note que a DDP (real) entre os terminais da lâmpada 1 será:

$$V_1' = R_1\, I = R_1 \frac{16}{9}\frac{V}{R_1} = \frac{16}{9}\, V > V$$

enquanto que a DDP (real) entre os terminais da lâmpada 2 será:

$$V_2' = R_2\, I = R_2 \frac{2\,V}{9\,R_2} = \frac{2}{9} V < V$$

A lâmpada 1 estará submetida a uma DDP maior que sua DDP nominal e por isso ela queima. As duas coisas estão interligadas: a lâmpada 1 estará ligada a uma DDP maior que seu valor nominal e, por isso, vai tentar dissipar mais energia que seu valor nominal. Daí ela queima. Note que como as lâmpadas estão em série: $V_1' + V_2' = (16/9 + 2/9)\, V = 2\, V$. A voltagem total $2\,V$ se divide entre as duas lâmpadas, mas não se divide igualmente.



Q26.4: Três lâmpadas iguais estão conectadas a uma bateria conforme a Figura ao lado. Seja R a resistência elétrica de qualquer uma das lâmpadas. Vemos que B e C estão em série e que essa associação está em paralelo com A. A DDP entre os terminais de A é ε e, portanto, a corrente que circula nessa lâmpada é:

$$I_A = \frac{\varepsilon}{R}$$

A DDP entre os terminais do ramo que contém B e C também é ε e, portanto, a corrente que circula nessas duas lâmpadas (cuja resistência equivalente é $2\,R$) é:

$$I_B = I_C = \frac{\varepsilon}{2\,R} = \frac{1}{2} I_A$$

Portanto, na lâmpada A circula uma corrente maior (porque o ramo de A tem resistência menor que o ramo de B e C). A DDP entre os terminais das lâmpadas B e C é:

$$\Delta V_B = R\, I_B = \frac{\varepsilon}{2} = \Delta V_C$$

No ramo das lâmpadas B e C a DDP ε se divide igualmente entre as duas lâmpadas: $\Delta V_B / \Delta V_C = 1$.

Vemos que a DDP é maior entre os terminais da lâmpada A, que dissipa a potência (real):

$$P_A = R\, I_A^2 = \frac{\varepsilon^2}{R}$$

As lâmpadas B e C dissipam, cada uma, as potências (reais):

$$P_B = R\, I_B^2 = R \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{R^2} = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{R} = P_C = \frac{1}{4} P_A$$

Apesar das lâmpadas serem iguais, a conexão entre elas é tal que a lâmpada A brilha mais e as lâmpadas B e C possuem brilhos iguais.

Se retirarmos a lâmpada A do circuito (desconectando-a de seu bocal) nada muda para as lâmpadas B e C. Apenas a bateria vai ter uma folga, pois ela vai ter que fornecer menos corrente e menos energia para o circuito. Se retirarmos a lâmpada B (ou C) do circuito (desconectando-a de seu bocal) nada muda para a lâmpada A, mas a lâmpada C (ou B) apaga, pois a corrente no ramo que contém B e C vai a zero (esse ramo fica aberto no bocal sem lâmpada). A bateria vai ter uma folga, pois ela vai ter que fornecer menos corrente e menos energia para o circuito.

Q26.5: Dois resistores conectados em série, conforme a Figura ao lado (com $R_2 > R_1$). Vamos analisar as afirmações colocadas na questão, se verdadeiras ou falsas.

a) $I_1 = I_2 = I_3$. **Verdadeiro**. Se a corrente que está chegando em um resistor fosse diferente da corrente que está saindo pelo outro terminal desse resistor haveria um acúmulo constante de carga elétrica dentro do resistor. Nesse caso o circuito não estaria funcionando em regime estacionário, que é a hipótese (implícita) aqui. Um desbalanço entre a corrente que chega e a corrente que sai é possível, mas não em um circuito de corrente contínua estacionária. Esse desbalanço é possível apenas em um transiente muito rápido, por exemplo, nos instantes iniciais em que o circuito acabou de ser ligado. Enfim, estando os resistores em série, necessariamente vale que a mesma corrente que passa por um passa pelo outro.

b) A corrente é maior em R_1. **Falso**. As correntes em resistores ligados em série são iguais: $I_1 = I_2 = I_3 = I$.

c) Os resistores dissipam potências iguais. **Falso**. O resistor 1 está dissipando a potência $P_1 = R_1\, I^2$ e o resistor 2 está dissipando a potência $P_2 = R_2\, I^2$. Essas potências seriam iguais somente se as resistências fossem iguais. No caso aqui, sendo $R_2 > R_1$, segue que $P_2 > P_1$.

d) Vale $P_2 > P_1$**. Verdadeiro**, pois como dito acima, se $R_2 > R_1$ segue que $P_2 = R_2\, I^2 > P_1 = R_1\, I^2$.

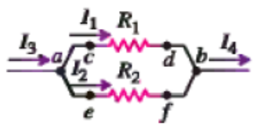
e) As DDPs nos resistores (que o enunciado chama de “queda de potencial”) são iguais. **Falso**. Da lei de Ohm, a DDP entre os terminais de R_1 é $\Delta V_1 = R_1 I$ e entre os terminais de R_2 é $\Delta V_2 = R_2 I$ e essas DDPs seriam iguais somente se as resistências fossem iguais. No caso aqui, sendo $R_2 > R_1$, segue que $\Delta V_2 > \Delta V_1$.

f) $V_A = V_C$. **Falso**. De fato, percorrendo o ramo de A até C obtemos: $V_A - R_1\, I - R_2 I = V_C \Rightarrow V_A - V_C = (R_1 + R_2)\, I$. Se valesse $V_A = V_C$, a corrente elétrica não estaria fluindo de A para C através dos resistores. Nesse caso, qual energia estaria sendo dissipada nos resistores? Vemos que $V_A > V_C$ e os portadores de carga (positiva) que fluem de A para C perdem energia potencial elétrica, que é transformada em calor nos resistores. Os portadores de carga que atravessam um resistor devem perder energia potencial elétrica, justificando a produção de energia térmica (efeito Joule). Por isso, os portadores de carga positiva sempre fluem (no sentido da corrente) do potencial maior para o potencial menor: $V_A > V_C$.

g) $V_B < V_C$. **Falso**. Percorrendo o caminho pelo resistor R_2 obtemos: $V_B - R_2\, I = V_C \Rightarrow V_B - V_C = R_2\, I > 0$. A corrente sempre flui em um resistor no sentido do potencial maior para o potencial menor. Então, se a corrente flui em R_2 indo de B para C, segue que $V_B > V_C$. Os portadores de carga (positiva) que fluem de B para C perdem energia potencial elétrica, que é transformada em calor no resistor R_2: $V_B > V_C$.

h) $V_C < V_B$. **Verdadeiro**, como já foi explicado acima: $V_B - V_C = R_2\, I > 0$ (a corrente em um resistor sempre flui no sentido do decaimento do potencial). Se a corrente flui de B para C através de R_2, então $V_C < V_B$.

Q26.6: Dois resistores estão conectados em paralelo como na Figura ao lado (supondo $R_2 > R_1$). Vamos analisar as afirmações colocadas na questão, se verdadeiras ou falsas.



a) $I_1 = I_2$. **Falso**. De fato, percorrendo o ramo de R_1 obtemos: $V_a - R_1\, I_1 = V_b$

Pelo ramo de R_2 obtemos: $V_a - R_2\, I_2 = V_b$

Subtraindo as duas equações obtemos: $R_1\, I_1 = R_2\, I_2$ (DDPs iguais para resistores em paralelo). Essas correntes seriam iguais somente se as resistências fossem iguais. Sendo $R_2 > R_1$, segue que $I_2 < I_1$. Pelo ramo (paralelo) de maior resistência elétrica passa menos corrente.

b) $I_3 = I_4$. **Verdadeiro**. Da lei dos nós no nó (a): $I_3 = I_1 + I_2$. Analogamente, no nó (b): $I_1 + I_2 = I_4$. Então $I_3 = I_4 = I_1 + I_2$. A corrente que chega ao conjunto de dois resistores é a mesma que sai. Ela não pode sumir ou aumentar no meio do caminho (funciona como água fluindo em canos que se dividem e se juntam).

c) $I_1 > I_2$. **Verdadeiro**, como já discutido acima. Como $R_2 > R_1$ e $R_1\, I_1 = R_2\, I_2$ (mesma DDP para resistores em paralelo) segue que $I_2 < I_1$. No ramo paralelo de maior resistência passa menos corrente.

d) $P_1 = P_2$. **Falso**. O resistor 1 está dissipando a potência $P_1 = V_{ab}^2/R_1$ e o resistor 2 está dissipando a potência $P_2 = V_{ab}^2/R_2$. Essas potências seriam iguais somente se as resistências fossem iguais. Note que $P_1 R_1 = P_2 R_2$. Portanto, o resistor de menor resistência dissipa uma potência maior na forma de calor.

e) $P_2 > P_1$. **Falso**, como já discutido acima. Se $R_2 > R_1$ segue que $P_2 < P_1$ (já que $P_1 R_1 = P_2 R_2$).

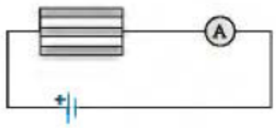
f) $V_{cd} = V_{ef} = V_{ab}$. **Verdadeiro**. Os pontos “a”, “e” e “c” estão no mesmo potencial, pois são conectados entre si por um condutor perfeito. Da mesma forma, os pontos “b”, “d” e “f” estão no mesmo potencial. Quantitativamente: $V_c - R_1\, I_1 = V_d \Rightarrow V_{cd} = R_1\, I_1$; $V_e - R_2\, I_2 = V_f \Rightarrow V_{ef} = R_2\, I_2 = R_1\, I_1$ e ainda $V_a - R_1\, I_1 = V_b \Rightarrow V_{ab} = R_1\, I_1$.

g) $V_c > V_d$. **Verdadeiro**. Percorrendo o caminho por R_1 obtemos: $V_c - R_1\, I_1 = V_d \Rightarrow V_c - V_d > 0$ (em um resistor a corrente sempre flui no sentido do decaimento do potencial). Se a corrente em R_1 flui de C para D, então com certeza vale $V_c > V_d$.

h) $V_f > V_e$. **Falso**. Pelas mesmas razões do item anterior. Percorrendo o caminho por R_2 obtemos: $V_e - R_2\, I_2 = V_f \Rightarrow V_e - V_f > 0$ (em um resistor a corrente sempre flui no sentido do decaimento do potencial). Se a corrente em R_2 flui de E para F, então com certeza vale $V_e > V_f$.

i) $V_c > V_e$. **Falso**. Conforme já vimos anteriormente: $V_c = V_e = V_a$ (três pontos no circuito conectados por condutores perfeitos = equipotencial). De fato, vale $V_c - V_e = R_{ce}\, I_{ce}$ sendo R_{ce} a resistência elétrica equivalente ao longo do circuito entre os pontos C e E e I_{ce} a corrente que flui entre esses dois pontos. Sendo $R_{ce} = 0$ (condutor perfeito) segue que $V_c = V_e$.

Q26.8: Um resistor é formado por três tiras de metal iguais conectadas em paralelo, conforme a Figura ao lado. O que acontece com a leitura do amperímetro se uma tira for retirada? O amperímetro mede a corrente que passa pelas três tiras metálicas, que funcionam como um resistor conectado a uma bateria de fem ε.



Seja R a resistência elétrica de uma única tira. A associação de duas tiras em paralelo vai resultar em uma resistência equivalente:

$$R' = \frac{R\,R}{R+R} = \frac{R}{2}$$

Associando essa associação com mais um resistor R em paralelo obtemos finalmente um resistor equivalente de resistência:

$$R_T = \frac{R\,R'}{R+R'} = \frac{R}{3}$$

Equivalentemente (para três resistores R em paralelo):

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}$$

Portanto, na presença das três tiras a leitura do amperímetro (ideal) é (ε é a FEM da bateria ideal):

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{R_T} = 3\,\frac{\varepsilon}{R}$$

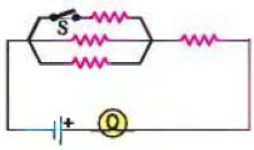
Se retiramos uma tira, a leitura do amperímetro passa a ser:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R'} = 2\,\frac{\varepsilon}{R}$$

Conclusão: Ao retirar uma tira, a resistência equivalente do circuito aumenta e a corrente diminui. Está claro que a corrente I_3 se divide igualmente entre as três tiras e em cada tira passa a corrente ε/R. Com as três tiras a corrente total é $\varepsilon/R + \varepsilon/R + \varepsilon/R = 3\varepsilon/R = I_3$. Ao retirar uma tira as correntes nas outras duas tiras que sobram não se alteram e a corrente total passa a ser $\varepsilon/R + \varepsilon/R = 2\varepsilon/R = I_2$.

Se o amperímetro não fosse ideal a conclusão seria a mesma, a corrente diminui.

Q26.9: A chave S vai ser fechada, o que acontecerá com o brilho da lâmpada (em amarelo)?



Sejam ε a FEM da bateria ideal, R a resistência de cada um dos quatro resistores (em vermelho) e r a resistência da lâmpada.

Com a chave S aberta há 2 resistores R em paralelo (resistência equivalente $R/2$), em série com mais um resistor R e com a lâmpada r. Portanto, a resistência equivalente do circuito é:

$$R_{TSA} = \frac{R}{2} + R + r = \frac{3}{2}R + r$$

(TSA = total com S aberta). A corrente circulando na bateria, e na lâmpada, será:

$$I_{SA} = \frac{\varepsilon}{R_{TSA}} = \frac{\varepsilon}{\frac{3}{2}R + r}$$

A potência dissipada pela lâmpada será:

$$P_{SA} = r\, I_{SA}^2 = r\left(\frac{\varepsilon}{\frac{3}{2}R + r}\right)^2$$

Com a chave S fechada há 3 resistores R em paralelo (resistência equivalente $R/3$), em série com mais um resistor R e com a lâmpada r. Portanto, a resistência equivalente do circuito é:

$$R_{TSF} = \frac{R}{3} + R + r = \frac{4}{3}R + r$$

(TSF = total com S fechada). A corrente circulando na bateria, e na lâmpada, será:

$$I_{SF} = \frac{\varepsilon}{R_{TSF}} = \frac{\varepsilon}{\frac{4}{3}R + r}$$

A potência dissipada pela lâmpada será:

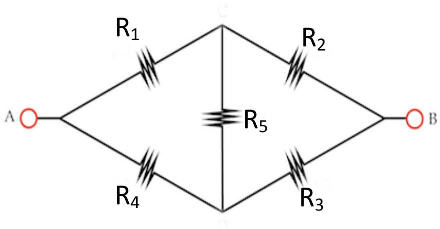
$$P_{SF} = r\, I_{SF}^2 = r\left(\frac{\varepsilon}{\frac{4}{3}R + r}\right)^2$$

Fazendo a razão “Aberta/Fechada” obtemos:

$$\frac{P_{SA}}{P_{SF}} = \left(\frac{\frac{4}{3}R + r}{\frac{3}{2}R + r}\right)^2$$

Vemos que $P_{SF} > P_{SA}$ (pois 4/3=8/6 < 3/2=9/6). Ao fechar a chave, a lâmpada brilha mais. Basicamente: ao fechar a chave S diminuímos a resistência total em série com a lâmpada, aumentamos a corrente na lâmpada e ela brilha mais.

Q26.13: Há conexões entre resistores mais complicadas que a série e paralela? Sim. A conexão “ponte de Wheatstone” mostrada na Figura ao lado é um exemplo de conexão que não pode ser reduzida a simples associações série/paralela.



Considere a resistência entre os terminais A e B. Note que R_1, por exemplo, não está nem em série e nem em paralelo com qualquer um dos outros resistores.

Esse tipo de arranjo é utilizado para a medição e fabricação de resistores de alta precisão. Considere que os resistores que encontramos no mercado são geralmente resistores de baixa precisão, com erros da ordem de 10% nos valores de suas resistências. Então, quando compramos um resistor de 100 Ω, recebemos um resistor cuja resistência pode ter qualquer valor entre 90 e 110 Ω. Para muitas aplicações esse erro não é crítico, mas existem aplicações que exigem resistores de alta precisão, por exemplo, com erro menor que 1%. Nesse caso, ao invés de comprar um resistor na loja, pode-se apelar para a construção “na mão” do resistor. Considere também que os ohmímetros comerciais medem resistência sem muita precisão. Portanto, a idéia de se medir uma resistência com grande precisão através de um desses ohmímetros é inútil. Enfim, ao comprar um resistor na loja, dificilmente você vai ter informação precisa sobre o valor real da resistência dele. Mesmo que você tenha o seu ohmímetro.

No uso da ponte de Wheatstone para a fabricação de resistores, o resistor central R_5 é substituído por um amperímetro (ou galvanômetro) que indica a corrente nesse ramo central. Outros três resistores das laterais são resistores com valores conhecidos com grande precisão: digamos R_1, R_2 e R_3. Agora colocamos na posição de R_4 um resistor que pretendemos fabricar, ajustando sua resistência para um valor preciso desejado. Podemos, por exemplo, utilizar um resistor comercial de 90 Ω, com baixa precisão, e fabricar, a partir dele, um resistor com 100 Ω de grande precisão. Colocamos esse resistor de 90 Ω no lugar de R_4 e percebemos que o amperímetro central marca uma corrente qualquer. Pegamos uma lima fina (ou uma lixa fina) e vamos limando suavemente o resistor de 90 Ω, de tal forma que sua resistência vai aumentando lentamente (porque a seção transversal vai diminuindo). Notamos que a corrente no amperímetro vai variando nesse processo. Quando essa corrente no amperímetro se anular vale exatamente:

$$R_1R_3 = R_2R_4 \Rightarrow R_4 = \frac{R_1R_3}{R_2}$$

Dessa forma, se tivermos ajustado previamente a ponte de tal forma que:

$$\frac{R_1R_3}{R_2} = 100\ \Omega$$

a corrente vai se anular exatamente quando valer R_4=100 Ω. Daí, retiramos R_4 do circuito, envernizamos e está pronto um resistor de precisão de $100\ \Omega$.

A Figura ao lado mostra uma ponte de Wheatstone de uso comercial para a medição e fabricação de resistores de precisão. Os cinco botões grandes alinhados mais no centro permitem ajustar o valor de resistência que, estando no lugar de R_4 , conforme nossa discussão anterior, vai anular a corrente no amperímetro (na parte central superior). Então, se quisermos medir um resistor, conectamos ele à ponte e vamos mexendo nesses botões, até que a corrente se anule. As escalas nos botões vão indicar o valor preciso de R_4. Se quisermos fabricar um resistor com um dado valor preciso de resistência, colocamos esse valor de resistência almejado nos botões, conectamos um resistor à ponte e vamos modificando ele até que a corrente se anule. Infelizmente trata-se de um aparelho caro. Encontramos um anunciado na internet* por "apenas" 11.000 dólares. Aparelhos de medição elétrica precisos são caros.

* https://www.testequipmentdepot.com/yokogawa/ground-resistance-testers/precision-wheatstone-bridge-276800.htm

Q26.14: Considere duas partículas de cargas elétricas q e $-q$ fixas e separadas por uma distância inicial d_0. Essas partículas estão se atraindo mutuamente com uma força dada pela lei de Coulomb:

$$F = k\frac{q(-q)}{d_0^2}$$

Se quisermos separar mais essas partículas, vamos ter que gastar energia, pois elas se atraem. Imagine que aumentemos a distância entre as partículas, que passa a ser fixa no valor $d_f > d_0$. Quanto de energia temos que gastar para fazer isso? Basta calcular a diferença (final menos inicial) entre as energias potenciais elétricas das duas configurações:

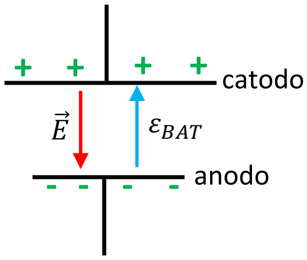
$$\Delta U = k\frac{q(-q)}{d_f} - k\frac{q(-q)}{d_0} = k\,q^2\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_f}\right) > 0$$

Portanto, o agente externo que, através de suas forças e de sua energia, produziu essa separação de cargas forneceu a esse sistema de cargas elétricas a energia ΔU. Podemos dizer que esse agente externo possui uma capacidade de realizar trabalho sobre as cargas elétricas, separando as cargas positivas das negativas. Esse agente externo, o que quer que seja ele, é uma fonte de energia elétrica. À medida que ele continua esse processo, de separação de cargas elétricas, ele vai fornecendo energia potencial elétrica para o sistema de cargas elétricas. Isso é o que uma bateria elétrica faz, utilizando como fonte de energia uma reação química. Um gerador de energia elétrica também produz separação de cargas, utilizando como fonte de energia a energia cinética da água ou do vento. Uma célula fotoelétrica utiliza a energia luminosa para produzir separação de cargas. A grandeza que quantifica essa capacidade de produzir energia potencial elétrica, a partir de outra forma de energia, é a força eletromotriz (FEM). O nome força eletromotriz é causa de confusão porque não se refere de fato a uma força, mas sim ao trabalho de uma força. Mas o termo "força eletromotriz" se perpetuou e não podemos lutar contra isso. Fato é que o conceito de FEM é útil na análise de circuitos elétricos posto que, por conveniência, não analisamos esses circuitos através dos conceitos de força, mas sim dos conceitos de energia. A FEM de um dispositivo é a energia potencial elétrica que ele fornece para os portadores de carga em um circuito (as cargas que se movem através do circuito), por unidade de carga. No nosso exemplo acima, a FEM (que representamos tipicamente por ε) do dispositivo/agente externo seria dada por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta U}{q} = k\,q\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_f}\right)$$

Note que ao produzir uma separação de cargas no espaço, automaticamente se produz um campo elétrico e uma diferença de potencial (DDP) V entre os pontos desse espaço. Por isso os conceitos de FEM e de DDP estão geralmente conectados entre si e são muitas vezes confundidos. Contribui para essa confusão o fato dessas duas grandezas possuírem a mesma dimensão/unidade, que é a razão energia/carga elétrica, ou seja, joule/coulomb (J/C) ou volt (V).

Uma bateria, graças à sua FEM, ou seja, à sua capacidade de separar cargas elétricas no espaço, é capaz de produzir e manter uma DDP entre seus terminais. Uma bateria de 9 volts, por exemplo, separa as cargas elétricas, depositando-as em seus terminais + e -, mantendo entre eles uma DDP de 9 volts. Um capacitor, por sua vez, também possui uma DDP entre seus terminais, mas não possui FEM. As cargas que estão depositadas nas placas do capacitor não foram depositadas lá pelo próprio capacitor, ele não tem essa capacidade, ele não tem FEM. Elas foram depositadas por algum outro dispositivo que foi conectado a ele, talvez uma bateria (ou um gerador, ou uma fotocélula). Ao conectarmos um capacitor a um circuito de resistores, rapidamente a DDP entre suas placas decai a zero, porque ele não possui capacidade de manter essa DDP, ou seja, ele não possui FEM.



Uma bateria possui uma força eletromotriz (FEM) porque uma reação química dentro dela resulta no transporte de elétrons (de carga $-e$) do terminal positivo para o terminal negativo. Esse transporte requer energia, porque os elétrons ganham energia potencial elétrica quando viajam através do interior da bateria, do + para o – (lembre-se que $U = q\ V$, que $q = -e$ é negativa nesse caso e que o potencial do terminal + é maior que o potencial do terminal -). A energia requerida para o transporte de um único elétron, U_1, por unidade de carga (e), é exatamente o valor da FEM da bateria ($\varepsilon_{BAT} = U_1/e$). Essa energia vem da reação química. Há tipicamente três materiais envolvidos nessa reação, o material do catodo (+), o material do anodo (-) e o material da solução eletrolítica que permeia o espaço entre o catodo e o anodo (o eletrólito). Dessa forma, a solução eletrolítica reage com o material do catodo (+) e arranca elétrons dele, tornando-o carregado positivamente. Analogamente, a solução eletrolítica reage com o material do anodo (-) e deposita elétrons nele, tornando-o carregado negativamente. No final das contas, podemos resumir a idéia como se fosse de fato um simples transporte de elétrons do catodo para o anodo. Enfim, dentro da bateria a FEM impulsiona a corrente do anodo para o catodo (sentido do movimento dos portadores de carga positivos). Esse é o sentido da FEM ε_{BAT} da bateria, de seu terminal – (anodo) para seu terminal + (catodo). A polarização do anodo e do catodo produz um campo elétrico dentro (e fora) da bateria, apontando do + para o -, ou seja, oposto à FEM na região do eletrólito. A Figura acima ilustra essa idéia. Sendo a bateria ideal, ou seja, não havendo resistência elétrica nos materiais da bateria (não havendo dissipação interna de energia) segue que:

$$U_1 = -e(V_- - V_+) = e\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l} = e\ \Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{U_1}{e} = \varepsilon_{BAT}$$

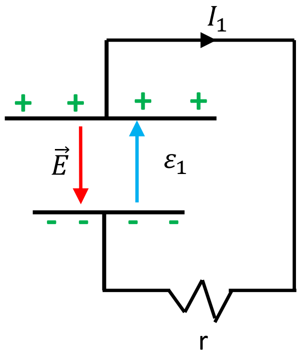
ou seja, a diferença de potencial entre os terminais da bateria é igual à sua FEM. Esse equilíbrio existe se a bateria está desconectada ou conectada, fornecendo corrente para o circuito, desde que seus materiais reagentes ainda sejam capazes de manter a reação química necessária para o transporte de elétrons do catodo (+) para o anodo (-). Quando isso não for mais possível, a bateria se torna inútil. Na Figura acima representamos esse equilíbrio desenhando as duas setas, de $\vec{E}$ e da FEM, do mesmo tamanho (e opostas), mas note essa é apenas uma representação pictórica dessas grandezas: $\vec{E}$ é uma força e a FEM é um trabalho (ambos por unidade de carga). Estando a bateria desconectada, o equilíbrio entre as ações do campo $\vec{E}$ e da FEM estanca a reação, mantendo fixa a polarização dos terminais da bateria (mantendo a diferença de potencial ΔV). Uma bateria desconectada não consome (idealmente) seus reagentes (na prática consome, lentamente).

O sentido da FEM de uma bateria está determinado pelos seus produtos reagentes e sempre aponta do terminal – para o terminal +. Quando uma bateria (1) está sendo carregada, conectada a uma outra bateria (2) de FEM maior, o sentido da corrente na bateria 1 se inverte, ou seja, a reação química se dá no sentido inverso e os reagentes originais dessa bateria vão se regenerando (supondo que a bateria seja recarregável, ou seja, que sua reação química seja reversível). Elétrons são transferidos do terminal – para o terminal + da bateria 1. Mas, a capacidade dos reagentes transferirem elétrons do terminal + para o terminal – ainda está presente, ou seja, a FEM da bateria 1 continua lá, no mesmo sentido, mesmo enquanto ela está sendo carregada. Ela apenas está sendo suplantada por um agente externo (a bateria 2) que está invertendo o sentido da corrente.

Podemos imaginar uma analogia mecânica: um bloco estava indo para a direita sob ação de uma força $\vec{F}_1$. Uma outra força $\vec{F}_2$ é aplicada nesse bloco, com o sentido oposto à $\vec{F}_1$ e de magnitude maior. O bloco passa a viajar no sentido oposto, mas a força $\vec{F}_1$ ainda está lá, no mesmo sentido.

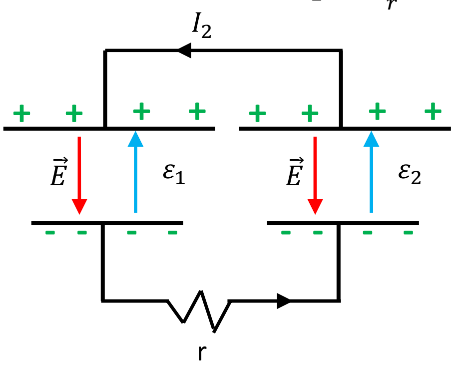
As Figuras abaixo ilustram as situações de descarga e carga da bateria 1.

Bateria 1 descarregando: $I_1 = \frac{\varepsilon_1}{r}$



Descarga: no anodo (-) os elétrons chegam, vindo do eletrólito, carregados por íons negativos. No catodo (+) os elétrons são consumidos pelos íons positivos que vêm do eletrólito. Os elétrons fluem pelo circuito externo que conecta anodo e catodo (corrente I_1). Os elétrons vão do anodo (-) para o catodo (+) pelo circuito externo, através dos fios condutores, ou seja, I_1 tem o sentido horário (sentido convencional da corrente = sentido do movimento dos portadores de carga positiva, quer eles existam ou não). Pensando em termos de portadores (equivalentes) de carga positiva, dentro da bateria eles fluiriam do – para o + (ganhando energia potencial, que vem da reação química) e no circuito externo eles fluiriam do + para o – (perdendo energia potencial, dissipada em r).

Bateria 1 carregando: $I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r}$



Considere agora a bateria 1 sendo carregada pela bateria 2. Na bateria 2 tudo acontece como no caso anterior, o eletrólito 2 arranca elétrons do catodo 2 (+) e deposita elétrons no anodo 2 (-). Os elétrons vão do anodo 2 (-) para o catodo 2 (+) pelo circuito externo. Na bateria 1 o trânsito dos elétrons é invertido: os elétrons vão do "catodo" 1 (+) para o "anodo" 1 (-) pelo circuito externo. Elétrons são arrancados do "catodo" 1 (+), sendo "sugados " pela bateria 2 (corrente I_2). Elétrons são depositados no "anodo" 1 (-), elétrons que são fornecidos pelo anodo 2 (-) da bateria 2. Íons são formados nas placas da bateria 1 e retornam para o eletrólito 1. Dessa forma os reagentes na bateria 1 se regeneram e ela se renova. Tudo isso pressupõe $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

Para tornar essa discussão mais concreta, podemos tomar o exemplo da bateria de chumbo/ácido que é geralmente utilizada em automóveis. Vamos deixar de lado quais são os compostos específicos que compõem essa bateria (chumbo, dióxido de chumbo e solução de ácido sulfúrico em água) e imaginar que o anodo (-) é uma placa sólida condutora feita de um material A. O catodo (+) é uma placa sólida condutora de material C. O eletrólito, por sua vez, é uma solução que contém os íons P^+ (positivo) e N^- (negativo) dissolvidos em água. O íon P^+ possui um déficit de um elétron e carga elétrica $+e$. O íon N^-, por sua vez, possui um elétron sobrando e carga elétrica $-e$. Durante o processo de descarga ocorrem as seguintes reações na bateria:

No anodo (-): $A + N^- \to AN + e^-$. Ou seja, íons N^- chegam (colidem) na (com a) placa - e o produto AN vai se formando (e se depositando) no anodo e elétrons (e^-) livres vão sendo liberados e acumulando nessa placa condutora, que era neutra, mas se torna negativa.

No catodo (+): $C + P^+ + e^- \to CP$. Ou seja, íons P^+ chegam (colidem) na (com a) placa + e o produto CP vai se formando (e se depositando) no catodo e elétrons livres (e^-) vão sendo consumidos nessa placa, que vai ficando positiva. Imagine que o e^- já estava na placa, que é condutora e inicialmente eletricamente neutra, mas com muitos elétrons livres em seu volume. Com a chegada de P^+ nessa placa esse elétron livre participa da reação que produz CP, resultando em um déficit de um elétron. A placa que era neutra fica positiva.

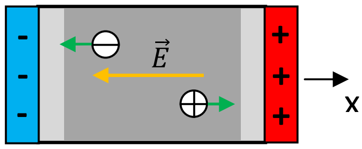
As duas reações são espontâneas e liberam energia (química), que está sendo armazenada na bateria na forma de energia potencial elétrica. Ao final, as reações no catodo e no anodo resultam no "desaparecimento" de um elétron no catodo, que tinha energia potencial elétrica $-e\,V_+$, e no "surgimento" de um elétron no anodo, com energia potencial elétrica $-e\,V_-$. A energia potencial "criada" é: $U_1 = \Delta U = -e(V_- - V_+) = e\,\Delta V$, sendo ΔV a diferença de potencial positiva entre catodo e anodo. De onde veio essa energia? Só pode ter vindo das energias liberadas nas reações químicas nas placas.

Na bateria de chumbo/ácido, curiosamente, os produtos AN e CP são de fato o mesmo composto ($AN = CP$), os íons que participam da reação são divalentes (contém carga elétrica $\pm 2e$), e a água da solução também é parte ativa nas reações. Aqui estamos tentando simplificar a idéia. Se você quiser saber mais sobre isso pode consultar um livro de eletroquímica (boa sorte).

Durante essas reações químicas acontecem dois fenômenos, que competem entre si e levam finalmente ao equilíbrio e ao fim das próprias reações (supondo que a bateria não esteja conectada a nada). Primeiramente o consumo de íons na vizinhança das placas (devido às reações) diminui as concentrações desses íons nessas regiões e produzem fluxos de íons em direção às placas, por difusão. Essa difusão alimenta a reação. Íons são sugados (devido à diferença de concentração) e migram da solução para as superfícies das placas, onde reagem. Mas, essas mesmas reações químicas acumulam cargas elétricas nas placas e fazem surgir um campo elétrico dentro do eletrólito, apontando da placa + para a placa -. Esse campo repele os íons

N^- que se difundiriam para o anodo e os íons P^+ que iriam para o catodo. Essa repulsão se opõe e freia a reação. À medida que a reação ocorre e as cargas vão acumulando nas placas e o campo elétrico entre as placas vai crescendo até que ele finalmente equilibra a difusão de íons para as placas e a reação é interrompida. As placas ficam carregadas e uma diferença de potencial elétrico constante fica estabelecida entre elas.

A Figura ao lado ilustra essas idéias. A região cinza é o eletrólito entre as placas + (vermelha) e − (azul). A região cinza mais clara representa as vizinhanças das placas onde houve depleção nas concentrações de íons, devido às reações que acontecem nessas interfaces placas/eletrólito, que consomem esses íons. Essas diferenças de concentração produzem difusão de íons P^+ e N^- em direção às placas (setas verdes). Ao mesmo tempo, o campo elétrico $\vec{E} = -E\,\hat{x}$ vai se estabelecendo e freia as difusões, pois a força elétrica nos íons P^+ está ao longo de –x ($\vec{F}_+ = e\,\vec{E}$) e a força nos íons N^- está ao longo de +x ($\vec{F}_- = -e\,\vec{E}$). As placas repelem os íons que reagem nelas. No equilíbrio, a difusão e a reação, de efeitos opostos, cessam.



Ao conectar a bateria a um circuito externo, uma lâmpada, por exemplo, as cargas nas placas fluem pelos condutores desse circuito externo, imediatamente o campo elétrico entre as placas diminui (de uma quantidade mínima) e a difusão de íons para as placas se restabelece, ligando novamente as reações químicas nas placas. Agora a lâmpada brilha, pela passagem da corrente, e as reações químicas nas interfaces placas/eletrólito mantêm as cargas depositadas nas placas e a diferença de potencial ΔV entre elas. A energia química "desaparece" enquanto a lâmpada brilha.

Essa diferença de potencial ΔV está definida basicamente pela capacidade de reação desses compostos, pois a reação produz a difusão de íons que deve ser freada pelo campo elétrico entre as placas, que define a diferença de potencial entre os terminais da bateria:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_{+}^{-} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Uma reação mais intensa nas placas vai produzir maior depleção de íons no eletrólito, maior difusão de íons, maior campo elétrico necessário para frear essa difusão e concomitantemente maior diferença de potencial entre as placas. No caso da bateria de chumbo/ácido a diferença de potencial estabelecida entre as duas placas é de aproximadamente 2 volts (uma bateria de 12 volts contém 6 dessas "células galvânicas" ligadas em série).

Vamos considerar agora o processo de carga da bateria, em que os compostos AN e CP devem ser quebrados para reconstituir os compostos originais A e C das placas, bem como o eletrólito.

Conectamos essa bateria (1) a ser carregada em outra bateria (2), que estabelece, forçosamente, uma corrente na bateria 1 com sentido oposto àquela que existia no processo de descarga dessa bateria.

No terminal negativo 1 (-) (que os químicos passam a chamar de catodo, ao invés de anodo, porque o catodo, por definição, é o terminal em que chegam os elétrons vindos do circuito externo, ou seja, no circuito externo a corrente flui do catodo para o anodo), ao invés de serem produzidos elétrons para o circuito externo ($A + N^- \rightarrow AN + e^-$), agora chegam elétrons vindo da bateria 2 e a seguinte reação ocorre: $AN + e^- \rightarrow A + N^-$. O íon N^- de desprende da placa, vai para a solução e recompõe o eletrólito da bateria 1.

No terminal positivo 1 (+) (que agora deveria ser chamado de anodo), em que eram consumidos elétrons ($C + P^+ + e^- \rightarrow CP$) que vinham do circuito externo, agora são arrancados elétrons pela bateria 2 e a seguinte reação ocorre: $CP - e^- \rightarrow C + P^+$. O íon P^+ se desprende da placa, vai para a solução e recompõe o eletrólito da bateria 1. As duas reações consomem energia, que está sendo fornecida pela bateria 2.

Ao final, se tudo funcionar, haverá as mesmas placas e solução eletrolítica originais na bateria 1.

Q26.22: Considere que um segmento de fio longo de comprimento L e área de seção transversal A, feito de um material de resistividade ρ está sendo atravessado por uma corrente I. Então, a potência (constante) com que esse fio produz calor (efeito Joule) é:

$$P = R\, I^2 = \rho \frac{L}{A} I^2$$

Em um tempo Δt a energia térmica (calor) produzida no fio será:

$$Q = P\, \Delta t = \rho \frac{L}{A} I^2\, \Delta t$$

Se m é a massa desse fio, c o calor específico do material do fio e ΔT sua variação de temperatura associada à absorção dessa quantidade de calor, então:

$$Q = P\, \Delta t = \rho \frac{L}{A} I^2 \Delta t = m\, c\, \Delta T$$

Se ρ_m é a densidade de massa (por unidade de volume) do material do fio, então: $m = \rho_m\, L\, A$ ($L\, A$ é o volume do fio). Portanto:

$$\rho \frac{L}{A} I^2 \Delta t = \rho_m\, L\, A\, c\, \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\rho}{\rho_m} \left(\frac{I}{A}\right)^2 \frac{1}{c} \Delta t$$

Note que a temperatura do fio vai aumentando com o tempo e que esse aumento não depende de L. Fios mais finos (menor A) aquecem mais rapidamente, para uma mesma corrente.

Não podemos nos esquecer que o fio está gerando calor, mas está também dissipando calor, de tal forma que o equilíbrio (geração/dissipação) deve se estabelecer a uma temperatura superior à temperatura ambiente. A temperatura do fio não vai subir indefinidamente. A lei de Stefan-Boltzmann diz que um corpo dissipa calor por emissão de radiação com uma taxa dada por:

$$P_{DISS} = \mathbb{A}\, k\, T^4$$

sendo k uma constante, T a temperatura (absoluta) do corpo (quanto mais quente mais calor é dissipado) e $\mathbb{A}$ a área da superfície desse corpo (mais área, mais fácil dissipar calor para o ambiente).

No nosso caso, para um cilindro vale: $\mathbb{A} = L\, 2\pi\, r$ (desprezando as áreas das duas tampas, $\pi\, r^2$).

Portanto, igualando a potência com que o calor é gerado dentro do fio com a potência com que ele dissipa calor, obtemos a equação de equilíbrio térmico:

$$\rho \frac{L}{A} I^2 = L\, 2\pi\, r\, k\, T^4$$

Vemos então que para uma determinada corrente o fio vai atingir uma temperatura de equilíbrio dada por:

$$T^4 = \frac{\rho \frac{1}{A} I^2}{2\pi\, r\, k}$$

que independe do comprimento L do fio. Sendo $A = \pi\, r^2$, podemos avançar mais um pouco e obter a expressão:

$$T^4 = \frac{\rho I^2}{2\pi^2\, r^3\, k}$$

Fios mais finos (menor r) e/ou feitos de materiais de maior resistividade ρ atingem temperaturas de equilíbrio maiores, para uma mesma corrente I.

Assim, a corrente máxima estaria determinada pela temperatura máxima de equilíbrio que desejamos para o fio, tendo em vista considerações de segurança. Um fio condutor sempre vai esquentar, com a passagem da corrente, mas ele não pode esquentar demais.

Note que essa corrente máxima e segura não depende do comprimento do fio, porque T não depende (basicamente porque aumentando o comprimento há mais produção de calor mas também há maior área de dissipação).

Esperamos que, em um regime estacionário, o fio seja capaz de dissipar esse calor, de tal forma que sua temperatura atinja um valor final fixo.

Em geral, para um mesmo material (k e ρ) e mesma temperatura máxima permitida, fios mais grossos (maior r) suportam maiores correntes (vemos acima que é possível aumentar r e I simultaneamente mantendo T constante). Fios feitos de materiais condutores mais nobres (menor ρ), como o cobre, esquentam menos, para uma mesma corrente I e mesmo raio r.

Fios mais grossos são mais seguros, mas também mais caros, requerem mangueiras de passagem mais grossas etc.