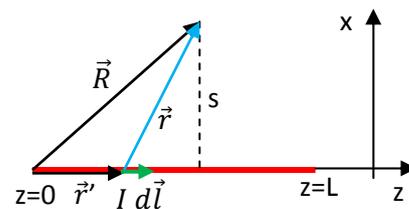


Q28.3: Considere um fio reto de comprimento L que transporta uma corrente I . Vamos calcular o campo magnético em um ponto equidistante das duas extremidades do fio, conforme a Figura ao lado. O segmento de fio está ao longo do eixo z . Note que o eixo y está ortogonal à tela apontando para fora. O elemento infinitesimal de corrente $I d\vec{l}$ na posição arbitrária \vec{r}' do fio contribui para o campo magnético em \vec{R} com um infinitésimo de campo dado por (Lei de Biot-Savart):



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Essa contribuição decai com o quadrado da distância, r , do elemento de corrente até o ponto onde o campo está sendo calculado (note que preferimos essa notação em que não aparece o vetor unitário $\hat{r} = \vec{r}/r$ na expressão de $d\vec{B}$). Note da Figura que:

$$\vec{r}' + \vec{r} = \vec{R} \Rightarrow \vec{r} = \vec{R} - \vec{r}'$$

No nosso sistema de coordenadas cilíndricas podemos escrever:

$$\vec{R} = \frac{L}{2} \hat{z} + s \hat{x}$$

sendo s o raio das coordenadas cilíndricas (distância ao eixo z). Vale ainda: $\vec{r}' = z' \hat{z}$ com $z' \in [0, L]$. Portanto:

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}' = \left(\frac{L}{2} - z'\right) \hat{z} + s \hat{x}$$

Segue que: $r = \sqrt{\left(\frac{L}{2} - z'\right)^2 + s^2}$.

Note também que $I d\vec{l} = I dz' \hat{z}$. Portanto:

$$I d\vec{l} \times \vec{r} = I dz' \hat{z} \times \left[\left(\frac{L}{2} - z'\right) \hat{z} + s \hat{x}\right] = I s dz' \hat{y}$$

Utilizamos $\hat{z} \times \hat{z} = \vec{0}$ e $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$. Note no ponto que estamos considerando o unitário \hat{y} é exatamente o unitário $\hat{\phi}$, um vetor unitário tangente às circunferências coaxiais ao eixo z e apontando para fora da página no ponto \vec{R} mostrado na Figura acima.

Finalmente, somando sobre todo o comprimento do fio, ou seja, varrendo o intervalo $z' \in [0, L]$:

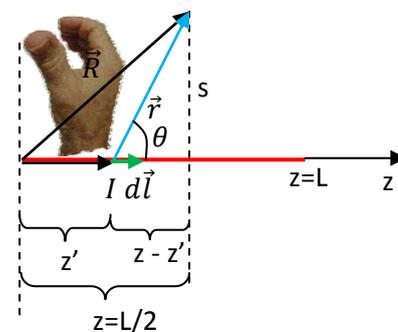
$$\vec{B} = \int_{\text{FIO}} d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'=0}^{z'=L} \frac{I s dz' \hat{y}}{\left(\left(\frac{L}{2} - z'\right)^2 + s^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I s \hat{y} \int_{z'=0}^{z'=L} \frac{dz'}{\left(\left(\frac{L}{2} - z'\right)^2 + s^2\right)^{3/2}}$$

Note que $(\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$. Integrando (usando o Maple) obtemos:

$$\vec{B}_L = \frac{\mu_0}{4\pi} I s \hat{\phi} \frac{1}{s^2} \frac{2L}{\sqrt{L^2 + 4s^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \frac{L}{\sqrt{(L/2)^2 + s^2}} \hat{\phi}$$

Note que passaremos a denotar por \vec{B}_L o campo magnético do fio de comprimento L (em um ponto equidistante das duas extremidades do fio).

Enfim, se você achou muito complicado o raciocínio anterior, note na Figura ao lado que o vetor $d\vec{l} \times \vec{r}$ está ortogonal ao plano da página e para fora da página (sentido do polegar da mão direita, quando os outros dedos giram no sentido do $d\vec{l}$ para o \vec{r}). Essa é a direção que estamos chamando de \hat{y} e que é a direção de $d\vec{B}$ e de \vec{B} . O triângulo retângulo com hipotenusa \vec{r} (em azul) mostra também que $r^2 = s^2 + (z - z')^2 = s^2 + (L/2 - z')^2$. Vemos ainda que:



$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = dl r \sin(\theta) = dl r \frac{s}{r} = s dl$$

Portanto, apenas obtemos por outro caminho o mesmo resultado anterior:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I s dl}{r^3} \hat{y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I s dl}{(s^2 + (L/2 - z')^2)^{3/2}} \hat{y}$$

Para um fio de comprimento infinito obtemos um campo magnético de magnitude:

$$B_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} B_L = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \frac{L}{\sqrt{(L/2)^2 + s^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \frac{L}{\sqrt{(L/2)^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Este, como não poderia deixar de ser, é o mesmo campo que obtemos via lei de Ampère aplicada ao fio infinito.

Note então que \vec{B}_∞ é o campo magnético em qualquer ponto na vizinhança do fio infinito porque qualquer ponto pode ser considerado “um ponto equidistante das duas extremidades do fio” para um fio infinito (as distâncias de qualquer ponto até as duas extremidades são ambas infinitas). Para um fio finito isso não é verdade e o campo \vec{B}_L obtido acima só vale para pontos equidistantes das duas extremidades do fio finito. Para outros pontos o campo \vec{B}_L vai ganhar uma dependência em z , de tal forma que $\vec{B}_L(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ (se nos afastamos do fio ao longo de z seu campo se anula). Note também que \vec{B}_L não pode ser obtido pela aplicação da lei de Ampère, porque essa lei não vale para fios abertos, como é o caso do fio finito. A lei de Ampère só se aplica a correntes fechadas: espiras e fios infinitos. Se você tentar aplicar a lei de Ampère para calcular \vec{B}_L , você vai obter \vec{B}_∞ , ou seja, um campo de um fio de comprimento L que independe de L , o que é um absurdo.

Agora podemos responder à pergunta: quando L é suficientemente grande para que $B_L \cong B_\infty$?

Obviamente, a resposta vai depender do grau de precisão exigido na comparação.

Para s/L pequeno obtemos (lembre-se que $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$ se $\varepsilon \cong 0$), retirando um termo $(L/2)^2$ de dentro da raiz no denominador:

$$B_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \frac{L}{\sqrt{(L/2)^2 + s^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \frac{2}{\sqrt{1 + (2s/L)^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} [1 + (2s/L)^2]^{-1/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{L} \right)^2 \right]$$

Concluindo:

$$B_L = B_\infty \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{L} \right)^2 \right]$$

Portanto, vemos que se:

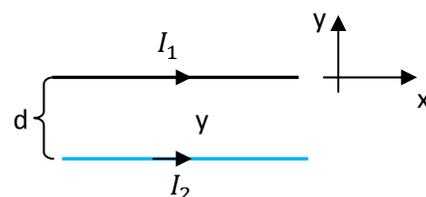
$$2 \left(\frac{s}{L} \right)^2 \ll 1$$

a aproximação de fio infinito é razoável, ou seja, $B_L = B_\infty$. Isso vale para fios muito longos ($L \gg 1$) e também para pontos muito próximos do centro do fio ($s \ll 1$), mesmo que o fio não seja muito longo.

Q28.4: Dois fios longos se atraindo mutuamente.

A força de atração no fio 1 (preto) é, levando em conta a Figura ao lado:

$$\vec{F}_{2/1} = I_1 \vec{L}_1 \times \vec{B}_2 = I_1 L_1 \hat{x} \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{z}$$



Portanto:

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} L_1 (-\hat{y})$$

Note que estamos usando aqui o campo magnético produzido por um fio longo, infinito para todos os efeitos.

Correntes de mesmo sentido se atraem mutuamente. O fio 1 é puxado para baixo. Analogamente, $\vec{F}_{1/2} = I_2 \vec{L}_2 \times \vec{B}_1$ e o fio 2 é puxado para cima. A atração é mútua.

Suponha que o fio 1 desça uma distância $\Delta d > 0$ pequena (e que o fio 2 esteja fixo). Então, o trabalho de $\vec{F}_{2/1}$ nesse deslocamento será:

$$W = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} L_1 \Delta d$$

A força magnética está realizando trabalho? Essa componente $\vec{F}_{2/1}$ da força magnética no fio 1 sim. É o que está escrito acima. Mas, existe outra componente da força magnética, que teremos que levar em conta. Se somarmos os trabalhos das duas componentes da força magnética no fio 1 obteremos um trabalho nulo.

Qual a origem da outra componente da força magnética? Ora, se o fio 1 está descendo com velocidade $V(-\hat{y})$ então haverá uma nova força magnética nos portadores de carga no fio 1, uma força na direção:

$$\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B} = qV(-\hat{y}) \times B_2 \hat{z} = qV B_2(-\hat{x})$$

Note que essa força (uma FEM de movimento, conforme veremos em breve) se opõe à corrente no fio 1, ela quer frear os portadores de carga no fio 1 (que estão fluindo ao longo de $+x$), cancelando a corrente (por isso chamamos de força contra-eletromotriz). Se calcularmos o trabalho dessa nova força magnética (que é negativo) e somarmos com o trabalho W da componente da força magnética na direção y , obteremos exatamente zero (não faremos essa conta aqui).

Concluindo: para que o fio 1 desça uma distância pequena Δd , ganhando energia cinética à medida que se aproxima do fio 2 é necessário um trabalho:

$$W = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 \pi d} L_1 \Delta d$$

Quem faz esse trabalho? O agente externo (uma bateria, por exemplo) que mantém fixa a corrente no fio 1 (se opondo à força \vec{F}) enquanto ele desce. A força magnética não realiza trabalho.

Em um motor elétrico há vários desses fios transportando corrente que se movem, enquanto o rotor gira. Graças à força magnética nesses fios, o motor possui capacidade de realizar trabalho. Se o motor realiza um trabalho W , de onde vem essa energia, da força magnética? Não, vem da tomada (ou bateria) em que o motor está ligado. Essa tomada (ou bateria) mantém a corrente no motor e é responsável pela energia W .

Conclusão: se identificamos precisamente a força magnética resultante atuando nos portadores de carga em um circuito, vamos sempre concluir corretamente que o trabalho dessa força é nulo. Tem que ser assim, porque a força magnética $\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B}$ é ortogonal ao deslocamento $d\vec{l}: \vec{V} = d\vec{l}/dt$.

Q28.5: A ideia é relativamente simples. A corrente entra por um fio do cabo e sai pelo outro fio. Portanto, esses dois fios criam campos magnéticos de sentidos contrários. O campo magnético na vizinhança do cabo é a superposição dos campos magnéticos desses dois fios. Quanto mais próximo um fio do outro, mais efetivamente vai acontecer um cancelamento dos campos magnéticos dos dois fios na vizinhança do cabo. Eles nunca vão se cancelar de fato, pois, para isso os dois fios do cabo teriam que ocupar a mesma posição no espaço, o que é absurdo. Portanto, a estratégia de torcer os fios um no outro pode ser efetiva para que ocorra uma redução substancial do campo magnético na região fora do cabo. Com isso reduzimos a possibilidade de interferência (força) de um aparelho elétrico em outro. De fato,



não parece que essa estratégia seja muito comum, como afirma o enunciado da questão. Torcer os fios um contra o outro não é uma estratégia muito prática (aumentaria o consumo de fio, por exemplo). O mais comum é que os dois fios simplesmente se estendam paralelamente um ao outro dentro do cabo. Esse tipo de cabo é chamado de “cabo paralelo” e pode ser comprado em qualquer loja de material elétrico. A primeira Figura acima mostra um pedaço de cabo paralelo. Mas, é verdade que existem cabos torcidos e eles podem ser comprados na internet. A segunda Figura ao lado mostra um pedaço desse tipo de cabo.

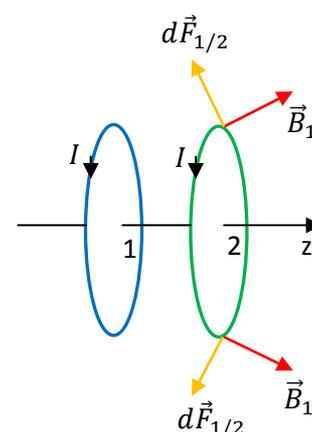


Q28.9: Porque correntes paralelas entre si se atraem mutuamente.

Uma corrente circulando em um solenóide helicoidal flexível faz com que ele se contraia, porque uma espira é atraída pela outra. De fato, a corrente em uma espira é paralela à corrente em outra espira próxima, daí elas se atraem (como na Q28.4). A Figura ao lado ilustra essa ideia, em que separamos duas espiras adjacentes para melhor compreensão, mas não podemos nos esquecer que elas estão ligadas entre si (em série).



Nessa Figura ilustramos duas setas (em vermelho) do campo magnético criado pela espira 1 (azul) sobre a espira 2 (verde). Ilustramos também as forças infinitesimais (em laranja) sobre dois elementos de corrente infinitesimais na espira 2:



$$d\vec{F}_{1/2} = I d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

Note que $d\vec{F}_{1/2}$ sempre tem uma componente radial (s) e uma componente ao longo de $-z$. Somando as forças sobre toda a espira 2 obtemos:

$$\vec{F}_{1/2} = \int_{ESP.2} d\vec{F}_{1/2} = F_{1/2}(-\hat{z})$$

ou seja, as componentes radiais da força magnética se cancelam (por simetria) e só resta a componente z, que é uma atração da espira 2 pela espira 1. Enfim as espiras se atraem mutuamente e, se o solenóide for suficientemente flexível, isso vai resultar em uma contração do solenóide, quando a corrente elétrica passar por ele.

Q28.12: A magnitude do campo magnético na vizinhança de um fio reto e muito longo transportando uma corrente I é:

$$B(s) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s}$$

sendo s a distância (raio) até o fio. A direção desse campo é tangente aos círculos centrados no fio (direção $\hat{\phi}$ das coordenadas cilíndricas).

Se a uma distância $s = R$ o campo magnético vale B , então:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R}$$

O campo magnético terá magnitude $3B$ a uma distância s dada por:

$$3B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s} \Rightarrow 3 \frac{\mu_0 I}{2 \pi R} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s} \Rightarrow \frac{3}{R} = \frac{1}{s} \Rightarrow s = \frac{R}{3}$$

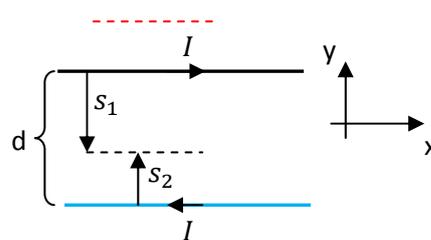
O campo é mais intenso na região mais próxima do fio. Se a distância cai a $1/3$, o campo triplica.

Para um fio de espessura desprezível (um modelo simplificado para um fio muito fino), o campo magnético diverge ($B \rightarrow \infty$) sobre o fio: $s \rightarrow 0$. Para fios realistas (de raio $a \neq 0$), o campo magnético tem um máximo na superfície do fio (em $s = a$). Fora desse fio realista, tudo funciona como se ele fosse de espessura nula, ou seja, $B(s)$ decai com $1/s$ se $s > a$.

Q28.13: Dois fios finos, retos e longos paralelos entre si com correntes elétricas de mesma magnitude mas de sentidos opostos. Há algum lugar onde o campo magnético resultante dos dois fios é nulo?

A Figura ao lado ilustra a situação. Considere que o eixo z do referencial está saindo ortogonalmente da página.

Se houver alguma chance dos campos dos dois fios se anularem será em pontos no plano que contém os dois fios, pois nesse plano os campos podem ser anti-colineares.



O campo magnético do fio 1 (preto) nos pontos sobre a linha tracejada (preta) é (tudo no plano da tela):

$$\vec{B}_1(s_1) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s_1} (-\hat{z})$$

O campo magnético do fio 2 (azul) nos mesmos pontos sobre a linha tracejada (preta) é:

$$\vec{B}_2(s_2) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi s_2} (-\hat{z})$$

Portanto, o campo magnético resultante nesses pontos é:

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) (-\hat{z})$$

Não há possibilidade desse campo se anular, \vec{B}_1 e \vec{B}_2 são colineares nessa região.

Para pontos acima do fio 1 (sobre a linha tracejada vermelha) basta inverter o sentido de \vec{B}_1 :

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) (-\hat{z})$$

Esse campo poderia se anular, pois \vec{B}_1 e \vec{B}_2 são anticolineares, mas deveria valer $s_1 = s_2$, o que é impossível, pois $s_2 = s_1 + d$ nesse caso (sobre a linha tracejada vermelha).

Enfim, não há chance desses dois campos se anularem.

Se uma das correntes inverter seu sentido, digamos a corrente no fio 2 de baixo (azul), então as correntes ficam paralelas entre si e o campo resultante nos pontos sobre a linha tracejada (preta) mostrada na Figura fica:

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right) (-\hat{z})$$

Esse campo pode se anular, pois \vec{B}_1 e \vec{B}_2 são anticolineares, desde que valha $s_1 = s_2$, o que ocorre na linha eqüidistante (e no mesmo plano) dos dois fios ($s_1 = s_2 = d/2$). Essa linha é a única região onde o campo magnético resultante dos dois fios é nulo.

Enfim, para que \vec{B}_1 e \vec{B}_2 se cancelem mutuamente eles devem ser anticolineares e de mesmo módulo. Isso só poderia ocorrer em algum lugar no plano que contém os fios. Para que os campos tenham o mesmo módulo em um ponto, este ponto deve estar eqüidistante dos fios: $s_1 = s_2$. Só resta, portanto, a possibilidade dos campos se anularem na linha central paralela e eqüidistante dos dois fios. De acordo com a regra da mão direita que dá o sentido do campo magnético de um fio reto (polegar no sentido de I e os outros dedos curvando no sentido de \vec{B}), isso só pode ocorrer se as correntes nos fios forem iguais e paralelas entre si.

Q28.18: Basicamente, a diferença entre os átomos de um material paramagnético e os de um material diamagnético está na existência (para) ou não (dia) de uma polaridade magnética (pólos S e N) intrínseca nesses átomos. Os átomos de um material paramagnético possuem pólos S e N intrínsecos, eles são ímãs em miniatura. Os átomos de um material diamagnético não possuem uma polaridade magnética intrínseca. Essa polaridade magnética intrínseca pode ser quantificada através do momento magnético $\vec{\mu}$ do átomo. Então:

$$\vec{\mu}_{\text{ATOMO}}^{(DIA)} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\mu}_{\text{ATOMO}}^{(PARA)} \neq \vec{0}$$

Um átomo pode ser pensado como um aglomerado de correntes elétricas microscópicas, provenientes dos movimentos orbitais e de spin (giro em torno de si mesmos) dos elétrons que compõem o átomo. A cada corrente associamos um momento magnético $\vec{\mu}_i$, de tal forma que (Z é o número atômico):

$$\vec{\mu}_{\text{ATOMO}} = \sum_{i=1}^Z \left(\vec{\mu}_i^{(ORB)} + \vec{\mu}_i^{(SPIN)} \right)$$

Tendo em vista as regras de preenchimento dos orbitais eletrônicos (regras de Hund) pelos Z elétrons, é esperado que em orbitais completos valha $\vec{\mu}_{\text{ORBITAL}} = \vec{0}$. Portanto, o paramagnetismo deve ser uma propriedade de materiais cujos átomos possuam orbitais incompletos (elétrons desemparelhados). Para o Cloro (Cl, $Z=17$), por exemplo, os orbitais são preenchidos de acordo com a configuração $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$. Portanto, no orbital $3p$ há um elétron sobrando sozinho e $\vec{\mu}_{\text{ATOMO}} \neq \vec{0}$. Trata-se de um material paramagnético. Outro exemplo é o Alumínio (Al, $Z=13$) com configuração $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$. O Zinco (Zn, $Z=30$), por sua vez, possui a configuração eletrônica $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2$. Todos os orbitais estão completos e $\vec{\mu}_{\text{ATOMO}} = \vec{0}$. Trata-se de um material diamagnético.

Como sói acontecer, na prática as coisas nem sempre são tão simples assim. Por exemplo, em materiais compostos de moléculas essa ideia deve ser aplicada ao $\vec{\mu}_{\text{MOLECULA}}$. No caso de um átomo de Hidrogênio (H, $Z=1$), por exemplo, ele só possui um elétron e, portanto, poderíamos esperar que um gás Hidrogênio fosse paramagnético. Mas, devido à formação das moléculas H_2 , resulta que esse gás é diamagnético. O Cobre (Cu, $Z=29$) possui a configuração eletrônica $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$ e poderíamos esperar que ele fosse paramagnético (um átomo é), mas o metal cobre é diamagnético, porque o elétron desemparelhado se torna um elétron livre no metal (elétron de condução).

Em um nível macroscópico, a diferença entre um material paramagnético e um material diamagnético está no fato que um é atraído (para) enquanto que o outro é repelido (dia) na presença de um ímã próximo. Esses são efeitos muito fracos (bem diferente da situação em que um ímã interage com uma liga de ferro) e não espere observá-los em um experimento “feito em casa” usando as mãos e os olhos como aparelhos de medida.