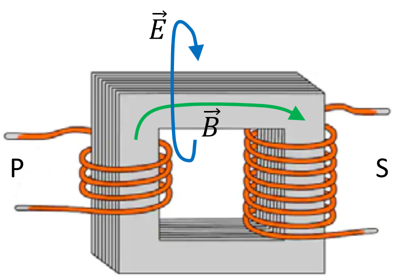
Q30.2: Um transformador de voltagem é um dispositivo usado para modificar o nível de voltagem em um sistema elétrico. Na usina hidrelétrica de Itaipu, por exemplo, um gerador produz uma voltagem senoidal com amplitude de 18 kV (https://www.itaipu.gov.br). Nas subestações os transformadores de voltagem elevam o nível de voltagem para cerca de 700 kV, que é o nível nas linhas de transmissão de energia elétrica. Depois esse nível de voltagem deve ser reduzido algumas vezes por outros transformadores, para percorrer as linhas de distribuição nos centros urbanos e estar acessível ao consumidor final. A elevação do nível de voltagem na linha de transmissão diminui as perdas de energia por efeito Joule (RI^2) nos fios. Maior voltagem V implica em menor corrente I (mantendo a potência P= V I) e menores perdas na linha.

Os transformadores funcionam basicamente por indução: um solenóide (primário) é alimentado por uma voltagem V_P senoidal. Esse solenóide produz no espaço ao seu redor um campo magnético oscilatório e um campo elétrico induzido oscilatório. Um segundo solenóide (secundário) é mergulhado nesses campos e tem induzido nele uma força eletromotriz (FEM). Essa FEM produz entre os terminais do solenóide secundário uma voltagem senoidal V_S (que pode ser medida através de um voltímetro ligado a esses terminais). Não há nenhuma conexão elétrica entre esses dois solenóides, eles se comunicam através de seus campos de força que se propagam no espaço. A relação entre V_S e V_P depende basicamente dos números de espiras em cada solenóide. Portanto, controlando esses parâmetros, conseguimos produzir transformadores que modificam a amplitude da voltagem conforme nossa escolha. Podemos elevar ou baixar o nível de voltagem que sai em relação ao nível de voltagem que entra. Fica claro, então, que o princípio de funcionamento de um transformador de voltagem é a lei de indução de Faraday, que diz que o campo elétrico induzido $\vec{E}$ está relacionado com o campo magnético $\vec{B}$ por:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$$

sendo C uma curva fechada e A uma superfície aberta que tem como borda a curva C. Pense que nesse contexto C é o percurso helicoidal do solenóide secundário e A é a área tubular definida por esse solenóide (se as espiras são circulares, de raio R, e há N espiras, então, basicamente: $C = N\, 2\,\pi\, R$ e $A = N\,\pi\, R^2$).



A Figura ao lado ilustra um transformador: dois solenóides P (primário) e S (secundário) enrolados em torno de um núcleo comum (geralmente feito de uma liga de ferro). O campo magnético $\vec{B}$ está basicamente confinado à região do núcleo e o campo elétrico induzido tem linhas de força que circulam em torno desse núcleo, na direção tangente às espiras dos solenóides (ou seja, $\vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ nas espiras dos solenóides, curva C). Idealmente, o fluxo magnético através de uma espira do primário (ϕ_1^P) é igual ao fluxo magnético através de uma espira do secundário (ϕ_1^S) (mesma área e mesmo campo $\vec{B}$). Portanto, os fluxos magnéticos ϕ^P e ϕ^S através dos solenóides primário e secundário são tais que:

$$\phi_1^P = \phi_1^S \Rightarrow \frac{\phi^P}{N_P} = \frac{\phi^S}{N_S}$$

Da lei de Faraday, a FEM em cada um dos solenóides é dada por:

$$\varepsilon_P = -\frac{d}{dt}\phi^P = -N_P\frac{d}{dt}\phi_1^P \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_S = -\frac{d}{dt}\phi^S = -N_S\frac{d}{dt}\phi_1^P$$

Portanto:

$$\frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_S} = \frac{N_P}{N_S}$$

Conclusão: a relação de transformação (elevação ou redução) de voltagem (ou de FEM) é dada (idealmente) apenas pela razão entre os números de espiras nos solenóides primário e secundário. Se você quiser fabricar um transformador tal que uma voltagem de 127 V no primário leve a uma voltagem de 1.000 V no secundário, basta enrolar solenóides tais que:

$$\frac{N_P}{N_S} = \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_S} = \frac{127}{1.000} = 0{,}127$$

Se no solenóide primário você enrolar 100 espiras, concluímos que no solenóide secundário deveria haver 787 espiras (pois 100/787≅0,127).

Se alimentarmos o solenóide primário de um transformador de voltagem com uma voltagem contínua, esse solenóide vai produzir em sua vizinhança um campo magnético estático e:

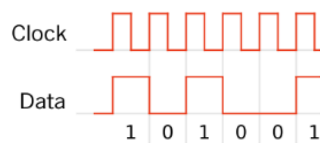
$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA = 0$$

qualquer que seja a superfície S no espaço. Portanto, não haverá campo elétrico induzido e nem voltagem no solenóide secundário. Um transformador de voltagem só funciona com voltagens variáveis no tempo.

Essa é uma grande vantagem da corrente alternada (CA) em relação à corrente contínua (CC) e explica seu triunfo sobre a corrente contínua na batalha entre essas duas “tecnologias” que se deu por volta de 1880 (Ref. Triumph of AC, Carl L. Sulzberger, IEEE Power and Energy Magazine (2013)). Nessa batalha, Tomas Edison, o inventor da lâmpada incandescente, tentou por todos os meios defender seu sistema de lâmpadas e geradores de corrente contínua. O problema desse sistema é que ele envolvia baixas DDPs e, por isso, tinha um alcance apenas de pequenas distâncias (por causa das perdas no caminho). O gerador tinha que ficar próximo das lâmpadas, pois, no caso contrário, as perdas de energia na linha de transmissão inviabilizavam o sistema. Em sua defesa, Edison alegou que as altas voltagens utilizadas no sistema CA eram perigosas e isso foi demonstrado através do sacrifício de animais que foram eletrocutados com correntes CA. Essa prática inspirou a invenção da cadeira elétrica. O sistema CA acabou triunfando, pois, através do uso de transformadores de voltagem, que só funcionam com correntes variáveis no tempo, a energia elétrica podia ser transmitida para longas distâncias, com poucas perdas (elevando o nível de voltagem e reduzindo a corrente na transmissão).

Considere que a energia perdida na linha de transmissão é proporcional à potência $P_L = R_L\, I^2$, sendo R_L a resistência elétrica dos fios da linha e I a corrente que circula nesses fios. A potência que deve ser entregue ao sistema elétrico conectado no final dessa linha é, por sua vez: $P = V\, I$, sendo V a voltagem (DDP) entre os dois fios da linha de transmissão. A ideia é que podemos obter a mesma P com diferentes valores de V e I. Por exemplo, se elevarmos V para o valor $V' = 1000\, V = 10^3 V$, a corrente na linha passará a ser $I' = 10^{-3} I$ e a potência no final da linha estará mantida, pois $V'I' = V\, I$. Mas, nessa linha de "alta tensão" as perdas de energia na linha são dadas por $P_L' = R_L\, {I'}^2 = 10^{-6} P_L$, ou seja, com essa elevação na voltagem por um fator mil conseguimos uma perda de energia um milhão de vezes menor. Não é pouca coisa.

É verdade que dentro da maioria dos aparelhos eletrônicos, como uma TV ou um computador, a corrente elétrica é contínua, ou seja, ela flui sempre no mesmo sentido. Ela pode ser uma função pulsante, como os "sinais" digitais (0s e 1s) de "clock" e de dados mostrados na Figura ao lado, mas é contínua, pois não inverte de sentido. Esses sistemas requerem um processo de retificação da corrente alternada, que a transforma em corrente contínua. Isso é facilmente obtido através do uso de diodos retificadores. A fonte de uma TV ou de um computador é alimentada pela voltagem CA da tomada, retifica essa voltagem e alimenta os circuitos desses aparelhos com DDPs constantes (5 volts CC, por exemplo).



Q30.4: A auto indutância L de um circuito C pode ser definida através do seguinte algoritmo: i) suponha uma corrente elétrica I fluindo nesse circuito; ii) calcule o campo magnético que esse circuito produz no espaço, usando, por exemplo, a lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} I \oint_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

ou a lei de Ampère (se a simetria do circuito ajudar).

iii) calcule o fluxo magnético que o circuito produz nele mesmo (o autofluxo):

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA$$

S é a superfície delimitada pela curva C, ou seja, pelo circuito. É bom frisar que essa superfície S nem sempre é simples de ser identificada. Nesses casos é mais fácil usar o método da energia para obter L ($U = LI^2/2$).

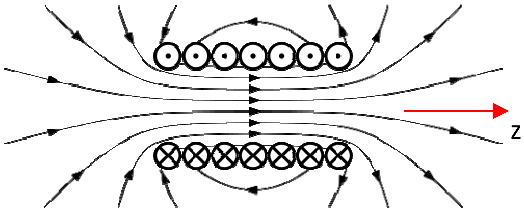
iv) finalmente, a auto-indutância L do circuito C é:

$$L = \frac{\phi}{I}$$

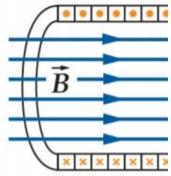
Tudo parece muito simples, mas há poucos sistemas em que conseguimos um cálculo analítico do campo magnético, sem nenhuma aproximação. Sistemas com simetrias simples são aqueles em que temos mais chances de conseguir tal façanha. O problema é que as simetrias são quebradas nas regiões de borda, produzindo as distorções no campo magnético (em relação ao campo com alta simetria), que é o que chamamos de "efeitos de borda". Um solenóide toroidal com as espiras bem juntas que preenchem toda a extensão do toróide (Figura ao lado) não possui borda e nem efeitos de borda. Seu campo magnético pode ser calculado analiticamente através da lei de Ampère.

Vale lembrar que não devemos ser tão otimistas. Ao usar a lei de Biot-Savart ou a lei de Ampére para calcular o campo magnético de um circuito com corrente não estacionária $I(\vec{r},t)$ estamos fazendo uma aproximação, pois essas duas leis só valem no regime estacionário. Obviamente, o contexto não-estacionário é exatamente o contexto em que o conceito de indutância ganha importância, pois a indução só existe mesmo em sistemas não estacionários (a indutância L pode ser definida em regimes estacionários, mas a indução mesmo, que é o fenômeno em que o conceito de indutância tem papel relevante só ocorre em regimes não estacionários). Portanto, suponha que você utilize o algoritmo acima para calcular a indutância de um solenóide toroidal e obtenha um valor (que vamos arbitrar aqui) L_0=0,6 H. Depois você constrói e conecta esse solenóide em um circuito em que a corrente que passa pelo solenóide é alternada com freqüência (alta) f= 100 MHz (M=mega=10^6). Você não deve ficar surpreso se nesse circuito o solenóide apresentar uma indutância (real) bem diferente do valor (nominal) L_0=0,6 H. Esse valor calculado L_0=0,6 H só vai ser observado se esse solenóide fizer parte de um circuito de baixa freqüência.

Q30.6: Considere um solenóide (helicoidal) com N espiras enrolado em volta de um tubo cilíndrico de raio r e comprimento C. Vamos calcular a auto-indutância desse solenóide, na aproximação em que os efeitos de borda são desprezíveis. A Figura ao lado ilustra os conceitos que utilizaremos no cálculo (pegamos a Figura emprestada em commons.wikimedia.org). A Figura mostra um corte de um solenóide curto com apenas 7 espiras. As bolinhas seriam as seções transversais do fio que compõe o solenóide. A corrente I entra pelo lado de baixo das espiras dá uma volta circular e sai pelo lado de cima. Notamos que o campo magnético no interior/centro do solenóide é mais intenso, porque as linhas de força do campo são mais



concentradas nessa região. Esse campo é basicamente axial (eixo z). Nas bordas do solenóide as linhas de força se espalham, refletindo uma redução na magnitude do campo nessas regiões (o campo se anula se $z \to \pm\infty$). Na parte externa central as linhas de força são afastadas, refletindo um campo externo fraco. Não pretendemos calcular a auto-indutância desse objeto, porque o cálculo analítico desse campo magnético é bastante complicado (mas factível). Consideremos agora a aproximação em que desprezamos os efeitos de borda, ou seja, imaginemos que o solenóide é muito longo, de tal forma que a região longe/entre as bordas é muito mais extensa do que as duas regiões das bordas. Nessa aproximação concluímos que: o campo magnético não se distorce, ele é sempre axial e de magnitude constante na região interna do solenóide e ele é nulo na região externa. As linhas de força de $\vec{B}$ ficam como na Figura ao lado, ao longo da extensão infinita do solenóide.



Da lei de Ampère obtemos no interior do solenóide:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{C}\, I\, \hat{z}$$

sendo N o número de espiras C o comprimento do solenóide (ambos supostos muito grandes). O fluxo magnético (positivo) através de uma espira que é um círculo de raio r é:

$$\phi_1 = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dA = \int_S \mu_0 \frac{N}{C}\, I\, \hat{z}\cdot\hat{n}\, dA = \mu_0 \frac{N}{C}\, I \int_S \hat{z}\cdot\hat{z}\, dA = \mu_0 \frac{N}{C}\, I\, A = \mu_0 \frac{N}{C}\, I\, \pi\, r^2$$

sendo S a superfície do disco de raio r delimitado pela espira de raio r, cuja área é $A = \pi\, r^2$. O vetor $\hat{n} = \hat{z}$ é ortogonal a esse disco e paralelo ao campo $\vec{B}$.

O fluxo magnético através do solenóide é o fluxo através de N espiras, ou seja:

$$\phi_N = N\, \phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{C}\, I\, \pi\, r^2$$

Portanto, a auto-indutância do solenóide, nessa aproximação, é:

$$L = \frac{\phi_N}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{C} \pi\, r^2$$

Se dobrarmos o raio desse solenóide, a auto-indutância se torna:

$$L' = \mu_0 \frac{N^2}{C} \pi\, (2r)^2 = 4\, L$$

Na aproximação em que desprezamos os efeitos de borda, a auto-indutância de um solenóide helicoidal é proporcional a r^2 e, portanto, se dobramos r a auto-indutância fica multiplicada por 4.

Q30.7: Um resistor pode ser fabricado enrolando-se um fio resistivo em torno de um núcleo cilíndrico. Se o fio possui uma resistência elétrica $\mathcal{R}$ por unidade de comprimento (Ω/m), o núcleo possui raio r e queremos obter um resistor de resistência R, basta que o número N de espiras seja tal que:

$$N\,2\pi\,r\,\mathcal{R} = R \Rightarrow N = \frac{R}{2\pi\,r\,\mathcal{R}} = \frac{R_{TOTAL}}{R_{1\,ESPIRA}}$$

Ao final vamos obter, além de um resistor de resistência R, um solenóide helicoidal de N espiras, ou seja, um dispositivo que possui resistência elétrica R e auto-indutância L. Essa auto-indutância pode ser inconveniente, pode afetar o funcionamento do circuito em que esse resistor será ligado.

Se enrolarmos metade das espiras em um sentido, digamos horário, e a outra metade sobreposta à primeira e no sentido anti-horário, reduzimos bastante o fluxo magnético no interior do solenóide, e conseqüentemente reduzimos bastante sua auto-indutância. A resistência elétrica não muda nada, pois ela só depende do comprimento $N\ 2\pi\ r$ (e do material) do fio. Quanto ao auto-fluxo magnético, ocorre basicamente que as $N/2$ espiras no sentido horário vão criar um campo magnético (ver a questão anterior) na região central do resistor (o eixo z é o eixo de simetria do resistor/solenóide cilíndrico):

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N/2}{C}\ I\ \hat{z}$$

As outras $N/2$ espiras no sentido anti-horário, por sua vez, vão criar um campo magnético:

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N/2}{C}\ I\ (-\hat{z})$$

De tal forma que o campo magnético no interior desse solenóide será:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0}$$

Na prática o cancelamento não será perfeito porque os dois enrolamentos em sentidos opostos não são exatamente coincidentes no espaço. Mas, com certeza essa estratégia levará a uma redução substancial no auto-fluxo e na auto-indutância desse resistor: posto que $\phi_{AUTO} = L\,I$.

Note que esse é o caso da resistência dos chuveiros elétricos. Essas resistências devem ter alta potência e dissipar o calor gerado pela passagem da corrente elétrica (efeito Joule) para a água. Elas são feitas de fios resistivos grossos e longos, que são enrolados como um solenóide, para caberem no volume do chuveiro (a Figura ao lado mostra um exemplo desse tipo de resistor). O resistor do chuveiro fica mergulhado na água, que flui carregando o calor produzido nele. Nesse caso específico, a auto-indutância do resistor é desprezível e não tem nenhum efeito importante sobre o funcionamento do chuveiro. Não há necessidade de enrolarmos uma metade do resistor em um sentido e a outra metade no sentido oposto (seria até difícil fazer isso nesse caso, pois o fio do resistor do chuveiro não é eletricamente isolado, ele é um fio nu).

Q30.8: A densidade de energia magnética (por unidade de volume) no vácuo é:

$$u_{MAG}^{VAC} = \frac{B^2}{2\,\mu_0}$$

Enquanto que em uma região preenchida por um material magnético de permeabilidade μ é:

$$u_{MAG}^{MAT} = \frac{B^2}{2\,\mu} = \frac{\mu_0}{\mu}\frac{B^2}{2\,\mu_0} = \frac{\mu_0}{\mu}u_{MAG}^{VAC}$$

Sendo geralmente $\mu > \mu_0$, segue que a densidade de energia magnética dentro de um material magnético é menor que no vácuo, se o módulo do campo magnético for o mesmo nos dois casos. Vale a pena repetir essa afirmação com sua hipótese: $u_{MAG}^{MAT} < u_{MAG}^{VAC}$ se o módulo do campo magnético for o mesmo nos dois casos.

Para um solenóide cilíndrico (helicoidal) longo de N espiras e comprimento C em que circula uma corrente I, já concluímos que o campo magnético está concentrado em seu interior e vale (ver questão 30.6):

$$\vec{B}^{VAC} = \mu_0 \frac{N}{C}\, I\, \hat{z}$$

sendo z o eixo do solenóide. Note que esse é o campo magnético no caso em que no interior do solenóide há o vácuo (é o que expressa o fator μ_0 nessa expressão). Portanto, se no interior desse solenóide houver o vácuo, a densidade de energia nessa região será:

$$u_{MAG}^{VAC} = \frac{(B^{VAC})^2}{2\,\mu_0} = \frac{1}{2\,\mu_0}\left(\mu_0 \frac{N}{C}\, I\right)^2 = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{N}{C}\, I\right)^2$$

Se no interior desse solenóide houver um material magnético de permeabilidade μ o campo magnético nessa região passa a ser mais intenso (lembrando que $\mu > \mu_0$), para uma mesma corrente I:

$$\vec{B}^{MAT} = \mu \frac{N}{C}\, I\, \hat{z}$$

e a densidade de energia será maior do que no caso do vácuo, se a corrente for a mesma nas duas situações:

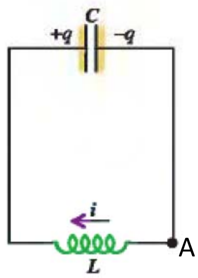
$$u_{MAG}^{MAT} = \frac{(B^{MAT})^2}{2\,\mu} = \frac{1}{2\,\mu}\left(\mu \frac{N}{C}\, I\right)^2 = \frac{\mu}{2}\left(\frac{N}{C}\, I\right)^2 = \frac{\mu}{\mu_0}u_{MAG}^{VAC}$$

Vale a pena repetir essa afirmação com sua hipótese: $u_{MAG}^{MAT} > u_{MAG}^{VAC}$ se a intensidade da corrente for a mesma nos dois casos.

Não há contradição aqui: a densidade de energia magnética dentro de um material magnético é menor que no vácuo, se o módulo do campo magnético for o mesmo nos dois casos. Sendo as correntes nos dois solenóides iguais, e não os campos magnéticos, segue que a densidade de energia magnética dentro do material magnético no interior do solenóide é maior que no vácuo. Isso ocorre porque o campo magnético é mais intenso no solenóide que tem o núcleo preenchido com material magnético. Sendo a energia quadrática no campo magnético, esse efeito domina sobre o fator μ_0/μ da relação entre as us.

Resumindo: como $u_{MAG} = B^2/2\mu$ (com $\mu = \mu_0$ correspondendo ao vácuo), para um mesmo B, se μ aumenta (devido a presença de um material no espaço), então u_{MAG} diminui. No interior de um solenóide o campo magnético possui módulo $B = \mu\,(N/C)I$. Portanto, para uma mesma corrente I, se μ aumenta nessa região dentro de um solenóide, B aumenta, pois é proporcional a μ, e u_{MAG} aumenta, pois o μ^2 em B^2 compensa o efeito do μ no denominador de u_{MAG}.

Portanto, se está passando uma corrente I em um solenóide e você quer aumentar a capacidade desse solenóide de acumular energia magnética, basta que você aumente a permeabilidade magnética μ do material que preenche o núcleo desse solenóide. Ligas de ferro são materiais comuns que desempenham esse papel. A presença dessa liga de ferro dentro do solenóide aumenta o campo magnético nessa região porque os átomos que compõem esse material se organizam (pela ação inicial do campo magnético da corrente no solenóide) e passam eles mesmos a contribuir intensamente para o campo magnético no espaço. Grosso modo, podemos pensar que uma liga de ferro possui dentro dela um número muito grande (o número de Avogadro) de pequenos imãs (momentos magnéticos $\vec{\mu}$) capazes de produzirem campo magnético no espaço. Não havendo corrente elétrica fluindo no solenóide, esses pequenos imãs estão orientados ao acaso (de fato eles formam domínios magnéticos) e produzem um campo magnético resultante nulo. Portanto, não há nenhum campo magnético no espaço. Ao ligarmos a corrente no solenóide, esta passa a produzir um campo magnético (fraco) que atua (exercendo torque) sobre os pequenos imãs dentro da liga de ferro, que giram e se alinham ao campo magnético da corrente (contribui para isso a interação entre esses pequenos imãs que favorece seu alinhamento mútuo: a interação de troca). Essa multidão de pequenos imãs alinhados entre si produz um campo magnético intenso no espaço, paralelo ao campo magnético original da corrente. Portanto, há um campo magnético intenso no espaço. Materiais que não possuem esses imãs microscópicos (com interação de troca) em sua estrutura, como o alumínio ou o cobre, não vão gerar esse mesmo efeito amplificador de $\vec{B}$ se forem colocados no núcleo de um solenóide.



Q30.9: Um circuito LC, como ilustrado ao lado. O capacitor está inicialmente com sua carga máxima $q(0) = Q > 0$ na placa da esquerda ($q(t)$ é a carga na placa esquerda do capacitor). Os autores do nosso livro texto arbitram nessa Figura o sentido positivo da corrente (horário), ou seja, a função $i(t)$ que dá a corrente em função do tempo estará representando uma corrente nesse sentido se ela for positiva. Caso essa função assuma um valor negativo, significa que a corrente estará nesse instante no sentido oposto ao indicado na Figura (sentido anti-horário). Aplicando a regra de Kirchhoff no sentido horário partindo do ponto A e indo primeiramente pelo indutor obtemos:

$$-L\frac{d}{dt}i(t)-\frac{q(t)}{C}=0$$

Note que a corrente está chegando na placa positiva e que, portanto (tendo a corrente o sentido do movimento de portadores de carga elétrica positiva), a carga elétrica nessa placa está crescendo na taxa:

$$\frac{d}{dt}q(t)=i(t)$$

Obtemos então a equação diferencial para a carga elétrica no capacitor:

$$L\frac{d^2}{dt^2}q(t)+\frac{q(t)}{C}=0$$

Note que essa equação diferencial diz que:

$$\frac{d}{dt}i(t)=-\frac{q(t)}{L\,C}$$

Portanto, em t=0 segue que:

$$\left.\frac{d}{dt}i(t)\right]_{t=0}=-\frac{Q}{L\,C}$$

Sendo Q positiva, segue que a corrente terá derivada negativa em t=0, o que parece um paradoxo, pois geralmente associamos derivada negativa com o decaimento de uma função e nesse caso a corrente está saindo do zero em t=0, só podendo crescer.

Enfim, os autores fizeram essa escolha para o sentido positivo da corrente e produziram esse aparente paradoxo.

Fato é que se o capacitor inicia em t=0 com sua carga máxima Q (na placa da esquerda), a corrente terá que ter, inicialmente, o sentido inverso ao adotado na Figura, ou seja, a corrente terá que ser inicialmente negativa. De fato, olhando o resultado que os autores obtêm:

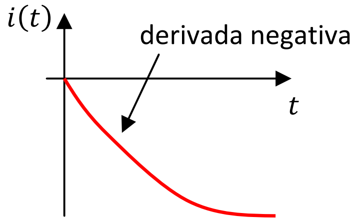
$$i(t)=-Q\omega\,\mathrm{sen}(\omega\,t+\varphi)$$

vemos que esse é o caso (note que $\omega=1/\sqrt{L\,C}$). Como $i(t=0)=0$ e $q(t=0)=Q$ segue que $\varphi=0$. Portanto, para $t\cong 0$ segue que (usando a série de Taylor da função seno) :

$$i(t\cong 0)=-Q\omega\,\mathrm{sen}(\omega\,t)\cong -Q\omega(\omega\,t)=-Q\,\omega^2\,t$$

Uma corrente negativa de derivada negativa é uma corrente que está aumentando de intensidade (módulo). A Figura abaixo ilustra essa ideia (apenas nos momentos iniciais da evolução do sistema, ou seja, a curva vermelha abaixo é um pedaço da função $-\,\mathrm{sen}(\omega\,t)$ para ts pequenos).

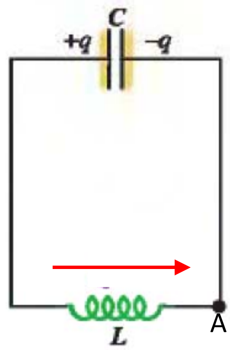
Então, a corrente sai do zero com derivada negativa, porque ela circula inicialmente no sentido oposto ao arbitrado como positivo. A corrente está crescendo, em módulo. Não há paradoxo: uma função negativa ($i(t)$) com derivada negativa é uma função que está crescendo em módulo. Logo após o circuito começar a funcionar a carga $q(t)$ diminui, pois sua derivada ($i(t)$) é negativa e a corrente aumenta em módulo, pois sua derivada ($di(t)/dt$) é negativa.



Arbitrando o sentido positivo da corrente como sendo anti-horário, esse aparente paradoxo desaparece, pois esse é mesmo o sentido (real) da corrente nos momentos iniciais: o capacitor, estando inicialmente com sua carga máxima, vai descarregar e, portanto, a corrente no circuito terá inicialmente o sentido indicado na Figura que segue (seta vermelha). Percorrendo esse circuito no sentido anti-horário, partindo de A e passando primeiro pelo capacitor, obtemos:

$$\frac{q(t)}{C} - L\frac{d}{dt}i(t) = 0$$

Note que a corrente está saindo da placa positiva e que, portanto (tendo a corrente o sentido do movimento de portadores de carga elétrica positiva), a carga elétrica nessa placa está diminuindo na taxa:



$$\frac{d}{dt}q(t) = -i(t)$$

Daí, obtemos a equação diferencial para a carga elétrica no capacitor:

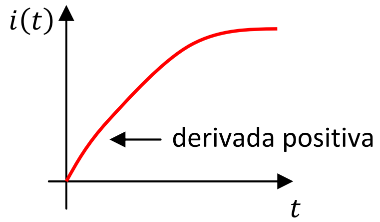
$$L\frac{d^2}{dt^2}q(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$$

Note que no final das contas obtemos a mesma equação para a carga e, por isso, fica claro que não há nada de errado com a escolha dos autores do livro. Ela apenas pode não ser a escolha mais conveniente para o entendimento do que está acontecendo no circuito assim que ele começa a funcionar.

Com nossa escolha, ao final vamos obter uma corrente que é positiva nos momentos iniciais da evolução do sistema:

$$i(t) = Q\omega\,\mathrm{sen}(\omega\, t)$$

O gráfico da corrente ficará como na Figura ao lado (apenas nos momentos iniciais da evolução do sistema, ou seja, a curva vermelha ao lado é um pedaço da função $\mathrm{sen}(\omega\, t)$ para ts pequenos).



Note que agora vale:

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{q(t)}{L\,C}$$

e que, portanto:

$$\left.\frac{d}{dt}i(t)\right]_{t=0} = \frac{Q}{L\,C}$$

Concluindo: é mais conveniente e simples de entender quando arbitramos a corrente no sentido que esperamos que ela flua. A escolha oposta só serve para confundir, apesar de não estar errada. Se o circuito vai começar a funcionar com o capacitor carregado e a corrente nula, a corrente só vai poder começar a fluir no sentido que sai da placa positiva do capacitor. Mas enfim, a corrente nesse circuito é alternada e seu sentido inverte periodicamente.

De fato, em circuitos de corrente alternada, a escolha da relação entre carga $q(t)$ e corrente $i(t)$:

$$\frac{d}{dt}q(t) = i(t)$$

é mais simples que a escolha:

$$\frac{d}{dt}q(t) = -i(t)$$

posto que há um sinal de menos (-) a menos na primeira equação. Por essa razão, essa será nossa convenção de sinal quando estudarmos circuitos de corrente alternada no próximo capítulo. Essa escolha significa que nos instantes em que as funções $i(t)$ e $q(t)$ possuem o mesmo sinal, o capacitor está carregando: se $q(t) > 0$ e $dq(t)/dt > 0$ então $q(t)$ está aumentando e se $q(t) < 0$ e $dq(t)/dt < 0$ então $q(t)$ está aumentando em módulo (nos dois casos o capacitor está carregando).

Na Figura ao lado vemos novamente o circuito com os sentidos positivo de $q(t)$ (placa da esquerda positiva) e positivo de $i(t)$ (corrente horária). Concluímos que (usando que $i(t) = dq(t)/dt$) nos instantes iniciais ($t \cong 0$) vale $q(t) \simeq Q > 0$ e $i(t) \simeq -Q\,\omega^2\,t < 0$. Portanto, isso corresponde a uma corrente no sentido (real ou de fato) anti-horário e a um capacitor descarregando.