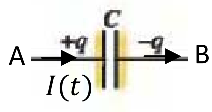


Q31.3: Em um capacitor que está carregando, a corrente $I(t)$ flui da placa negativa (B) para a placa positiva (A) (note que os portadores de carga não fluem entre as placas do capacitor, eles fluem pelo circuito externo). Nesse processo, os portadores de carga estão ganhando energia potencial eletrostática, pois o potencial em A é maior que em B. Enquanto o capacitor se carrega, um campo elétrico $\vec{E}_q$ está acumulando no espaço entre as placas, apontando da placa positiva para a placa negativa. Um portador de carga $\Delta Q > 0$, ao passar de B para A (através do circuito externo) no instante t ganha a energia potencial elétrica:

$$\Delta U_E = U_E^f - U_E^i = \Delta Q\,[V_A(t) - V_B(t)] = \Delta Q\, V_{AB}(t)$$

sendo $V_{AB}(t)$ a DDP entre as placas do capacitor no instante t. A taxa (potência) $P_E(t)$ com que o capacitor acumula energia potencial elétrica U_E (em sua distribuição de cargas) é:

$$P_E(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U_E}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}\, V_{AB}(t) = I(t) V_{AB}(t)$$

Note que essa taxa será positiva quando o capacitor estiver carregando ($I(t) > 0$ e $V_{AB}(t) > 0$: corrente chegando na placa A positiva, ou $I(t) < 0$ e $V_{AB}(t) < 0$: corrente saindo da placa A negativa) ou negativa quando o capacitor estiver descarregando ($I(t) < 0$ e $V_{AB}(t) > 0$: corrente saindo da placa A positiva, ou $I(t) > 0$ e $V_{AB}(t) < 0$: corrente chegando na placa A negativa). Uma potência negativa significa simplesmente que a energia potencial acumulada no capacitor está diminuindo com o tempo. Quando o capacitor carrega, ele acumula energia potencial elétrica, ou seja, $P_E(t) > 0$ e quando ele descarrega, ele perde energia potencial elétrica, ou seja, $P_E(t) < 0$. Da definição de capacitância:

$$V_{AB}(t) = \frac{q_A(t)}{C}$$

Da conservação da carga elétrica:

$$I(t) = \frac{d}{dt} q_A(t)$$

Portanto:

$$P_E(t) = I(t) V_{AB}(t) = \frac{q_A(t)}{C} \frac{d}{dt} q_A(t)$$

Como em um circuito CA um capacitor (ideal) só faz isso, carregar e descarregar (não há, idealmente, dissipação de energia), é natural que sua potência alterne de sinal e que em uma média no tempo valha:

$$P_{MED} = \langle P(t) \rangle_t = 0$$

Note que a média temporal de uma grandeza periódica qualquer $f(t)$ de período T é definida por:

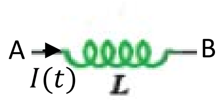
$$< f(t) >_t = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} f(t)dt$$

Nesse caso então, dada a periodicidade da função carga elétrica ($q_A(t) = q_A(t+T)$), obtemos:

$$P_{MED} = \langle P_E(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \frac{q_A(t)}{C} \frac{d}{dt} q_A(t)\, dt = \frac{1}{T} \frac{1}{C} \int_{t=0}^{t=T} q_A\, d\, q_A = \frac{1}{TC} \left[\frac{q_A^2(T)}{2} - \frac{q_A^2(0)}{2} \right] = 0$$

Vamos discutir agora o caso do indutor ideal, um dispositivo que acumula fluxo magnético e que tem, portanto, uma auto-indutância L.

Em um indutor ideal os portadores de carga fluem entre seus terminais, dentro de um condutor perfeito (condutividade $\sigma \to \infty$ por hipótese, senão ele não seria um indutor ideal). Portanto, não pode existir campo elétrico dentro desse condutor, pois isso levaria a uma corrente divergente, conforme a lei de Ohm microscópica $\vec{J} = \sigma\, \vec{E}$ com $\sigma \to \infty$. Considere na Figura ao lado a corrente $I(t)$ crescendo no tempo. Sabemos que nessa região há um campo elétrico induzido $\vec{E}_I$ apontando de B para A, se opondo ao crescimento da corrente. Concluímos que deve haver um outro campo elétrico $\vec{E}_q$, oposto a $\vec{E}_I$, ou seja, de A para B, produzido por pequenos acúmulos de cargas na superfície do condutor do indutor. Conclusão, um portador flui de A para B através de um campo elétrico resultante nulo:



$$\vec{E} = \vec{E}_I + \vec{E}_q = \vec{0}$$

o que leva a uma corrente finita (bem definida) no indutor, pois $\vec{J} = \sigma\, \vec{E} = \infty\, \vec{0}$.

Há duas forças atuando no portador de carga ΔQ, que se anulam. Ele simplesmente desliza por uma região sem arraste. Uma força, $\Delta Q \vec{E}_q$ impulsiona o portador para a frente, de A para B. Essa força é produzida pelas cargas que são acumuladas nos terminais A e B, pela ação da bateria/fonte e de outros dispositivos conectados ao circuito, além da FEM induzida. A outra força, $\Delta Q \vec{E}_I$ impulsiona o portador para trás, de B para A. Essa força é associada à variação do fluxo magnético no indutor (lei de Faraday). Ela se opõe ao crescimento da corrente e do campo magnético. Note, ela se opõe ao crescimento da corrente enquanto esse crescimento ocorre (como a força de atrito cinético, que se opõe ao movimento, enquanto ele ocorre).

O campo $\vec{E}_q$ sempre aponta no sentido do decaimento do potencial elétrico V. Portanto, nesse caso, segue que $V_A > V_B$. Um portador de carga positiva que atravessa o indutor de A para B perde energia potencial elétrica U_E. Se não há resistência elétrica entre A e B, essa energia potencial elétrica perdida não pode estar sendo dissipada na forma de calor. Ela está sendo convertida em energia magnética. Um indutor é um dispositivo acumulador de campo magnético e de energia magnética. De fato, enquanto a corrente elétrica aumenta (que foi nossa hipótese inicial), aumenta o campo magnético produzido pelo indutor e aumenta sua capacidade de se auto-induzir e de realizar trabalho positivo sobre os portadores de carga, através do campo elétrico auto-induzido $\vec{E}_I$. Quando o campo elétrico induzido $\vec{E}_I$ realiza um trabalho positivo sobre a corrente, a energia magnética armazenada no indutor diminui. Isso acontece, por exemplo, no circuito RL no seu processo de descarga (sem bateria), em que o próprio indutor faz a corrente circular no circuito, por alguns instantes. No presente caso está ocorrendo o contrário: o campo $\vec{E}_I$ está oposto à corrente (porque ela está aumentando, por hipótese) e realizando um trabalho negativo sobre os portadores de carga. A energia magnética U_M armazenada no solenóide está aumentando. Resumindo, sendo $\vec{E}_I = -\vec{E}_q$, segue que o trabalho de $\vec{E}_I$ é sempre igual ao trabalho de $\vec{E}_q$, mas com sinal contrário, ou seja, a energia potencial elétrica U_E perdida (ganha) é igual à energia magnética U_M ganha (perdida).

Um portador de carga $\Delta Q > 0$, ao fluir de A para B (através do indutor) no instante t varia sua energia potencial elétrica de:

$$\Delta U_E = U_E^f - U_E^i = \Delta Q\, [V_B(t) - V_A(t)] = -\Delta Q\, V_{AB}(t)$$

Note que no presente caso (corrente crescendo no tempo) vale $\Delta U_E < 0$ porque $V_A > V_B$ e $V_{AB}(t) > 0$. O portador de carga está perdendo energia potencial elétrica, ao atravessar o indutor.

Portanto, nesse mesmo instante o indutor está ganhando a energia magnética ΔU_M dada por:

$$\Delta U_M = -\Delta U_E = \Delta Q\, V_{AB}(t)$$

A taxa (potência) $P_M(t)$ com que o indutor acumula energia magnética U_M é:

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U_M}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} V_{AB}(t) = I(t) V_{AB}(t)$$

Da definição de indutância:

$$V_{AB}(t) = L \frac{d}{dt} I(t)$$

Portanto:

$$P_M(t) = I(t) V_{AB}(t) = L\, I(t) \frac{d}{dt} I(t)$$

O indutor acumula energia magnética ($P_M(t) > 0$) enquanto a corrente chega em A ($I(t) > 0$) e cresce ($dI(t)/dt > 0$), ou enquanto a corrente sai de A ($I(t) < 0$) e cresce em magnitude ($dI(t)/dt < 0$), ou seja, enquanto a corrente e o campo magnético crescem em magnitude. Enquanto a corrente e o campo magnético decrescem em magnitude, o indutor perde energia magnética ($P_M(t) < 0$) e os portadores de carga no circuito ganham energia potencial elétrica. Isso acontece, por exemplo, no processo de descarga do circuito RL (sem bateria).

Como em um circuito CA um indutor (ideal) só faz isso, carregar e descarregar, novamente devemos esperar que sua potência alterne de sinal e que em uma média no tempo valha:

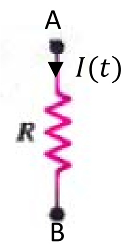
$$P_{MED} = \langle P_M(t) \rangle_t = 0$$

De fato (dada a periodicidade da corrente elétrica, $I(t) = I(t+T)$), obtemos:

$$P_{MED} = \langle P_M(t) \rangle_t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} L\, I(t) \frac{d}{dt} I(t)\, dt = \frac{1}{T} L \int_{t=0}^{t=T} I\, d\, I = \frac{L}{T}\left[\frac{I^2(T)}{2} - \frac{I^2(0)}{2}\right] = 0$$

Vamos discutir agora o caso do resistor ideal, um dispositivo que não acumula quantidades grandes de carga e nem de fluxo magnético, ele apenas oferece arraste (atrito) ao movimento dos portadores de carga dentro dele.

No caso de um resistor, os portadores de carga fluem por dentro dele, sob ação de um campo elétrico $\vec{E}_q$, apontando de A para B, produzido por pequenos acúmulos de carga na superfície do resistor. Esses acúmulos são produzidos pela bateria/fonte e por outros dispositivos conectados ao circuito, além do próprio resistor. O portador se move pela ação de $\vec{E}_q$ e perde energia pela ação do arraste (efeito Joule).



Um resistor é um dispositivo que obedece à lei de Ohm. Portanto, é fácil ver na Figura ao lado que, sendo $\vec{J} = \sigma\, \vec{E}_q$, segue que se a corrente flui de A para B então o campo $\vec{E}_q$ dentro do resistor aponta de A para B, ou seja $V_A > V_B$.

Um portador de carga $\Delta Q > 0$, ao fluir de A para B (através do resistor) no instante t varia sua energia potencial elétrica de:

$$\Delta U_E = U_E^f - U_E^i = \Delta Q\, [V_B(t) - V_A(t)] = -\Delta Q\, V_{AB}(t)$$

Note que no presente caso vale $\Delta U_E < 0$ porque $V_A > V_B$ e $V_{AB}(t) > 0$. O portador de carga está perdendo energia potencial elétrica. Em um resistor os portadores sempre perdem energia potencial elétrica, pela ação do arraste. A energia potencial elétrica perdida é exatamente igual à energia dissipada pelo resistor na forma de calor (efeito Joule). Se chamarmos essa energia de E_T, energia térmica dissipada, obtemos a igualdade:

$$\Delta E_T = -\Delta U_E$$

A taxa (potência) $P_T(t)$ com que o resistor dissipa energia térmica E_T, ou calor (devido ao arraste nos portadores), é:

$$P_T(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E_T}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U_E}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} V_{AB}(t) = I(t) V_{AB}(t)$$

Da lei de Ohm macroscópica:

$$V_{AB}(t) = R\, I(t)$$

Portanto:

$$P_T(t) = R\, [I(t)]^2$$

Vemos que $P_T(t)$ é sempre positiva, um resistor apenas dissipa energia potencial elétrica na forma de calor para o ambiente, ele não é capaz de acumular e/ou de fornecer essa energia, na forma potencial elétrica, para os portadores de carga no circuito.

Logo, em uma média no tempo em um circuito CA:

$$P_{MED} = \langle P_T(t) \rangle_t \neq 0$$

De fato:

$$\langle P_T(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} R\, [I(t)]^2\, dt = R\, \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} [I(t)]^2 = R\, I_{RMS}^2$$

Um portador de carga dentro de um resistor está submetido a um arraste, que retira energia dos portadores e transfere para os íons/átomos, ou seja, para o restante do material que compõe o resistor. Esse mecanismo, de colisões, faz com que esse íons/átomos vibrem e percebemos então uma elevação na temperatura do resistor, que passa a dissipar calor para o ambiente. No regime estacionário, a taxa de dissipação de calor média pelo resistor é exatamente $P_{MED} = R\, I_{RMS}^2$.

Fazendo uma analogia com os sistemas mecânicos, os capacitores e indutores (ideais) se comportam como sistemas mecânicos conservativos, enquanto que os resistores se comportam como sistemas mecânicos que possuem atrito cinético, ou seja, dissipativos.

Concluindo: em um circuito elétrico a energia potencial elétrica U_E, associada à separação de cargas elétricas no espaço, desempenha um papel crucial. Note, U_E é uma energia posicional, parecida com a energia potencial gravitacional $U_g = m\, g\, h$ que estudamos na mecânica (h é uma posição no espaço). Por exemplo, para duas cargas pontuais separadas no espaço por uma distância r vale:

$$U_E = \frac{1}{4\, \pi\, \varepsilon_0} \frac{q_1\, q_2}{r}$$

Para um capacitor de capacitância C que acumula uma carga q vale:

$$U_E = \frac{q^2}{2\, C}$$

Nessa expressão, a dependência espacial (posicional) está embutida em C. Assim, enquanto um capacitor varia sua carga q, ele acumula ou entrega energia potencial elétrica ao circuito em que ele está conectado.

Uma bateria, por exemplo, produz U_E a partir de uma reação química, conforme já discutimos. Essa reação separa cargas elétricas no espaço, cargas positivas são acumuladas no terminal + e cargas negativas no terminal -. Ao separar as cargas no espaço, acumula-se U_E.

Basicamente, em um circuito, os portadores de carga Q se movem em um perfil de potencial elétrico V (uma espécie de relevo, com vales, planícies e montanhas), mudando suas posições e suas energias potenciais $U_E = q\,V$. Esse potencial é produzido por outras cargas, que não os portadores, cargas elétricas que se acumulam ao longo do circuito. Em um capacitor, por exemplo, há um grande acúmulo de cargas nas placas. Mas, em outros dispositivos também há acúmulos de carga, principalmente em suas extremidades (bordas). Ao longo de todo o circuito há um acúmulo de cargas elétricas, que produzem um campo elétrico $\vec{E}_q$ e um potencial V sob cuja influência fluem os portadores de carga (a corrente). Esses acúmulos de carga se formam rapidamente, logo após o circuito entrar em funcionamento, sob ação de alguma força eletromotriz.

É interessante notar que, olhando para o teorema do trabalho energia (TTE), basicamente $\Delta E = W$, vemos que as mudanças de energia de um sistema (ΔE) se dão através de forças/interações, mais especificamente através do trabalho dessas forças de interação do sistema com sua vizinhança. É interessante notar também que se $\vec{F}_{A/B}$ é a força que A faz em B, então, se o trabalho dessa força for positivo, isso significa que energia está fluindo de A para B.

No caso de um circuito elétrico, podemos nos concentrar em um portador de carga Q, pois todos os portadores fazem a mesma coisa. O TTE em sua forma mais fundamental é $\Delta K = W$, sendo W o trabalho de todas as forças que atuam no sistema, no caso, em um portador de carga. A energia cinética $K = m\,v^2/2$ desse portador de carga é desprezível, porque a massa e as velocidades envolvidas (velocidade de arraste) são ambas minúsculas (para um elétron $m \cong 10^{-31}$kg). Portanto, para um portador de carga obtemos $0 = W$, pois K é desprezível. Vamos agora olhar as forças que atuam em um portador de carga. Se $\vec{E}_q$ é o campo elétrico das cargas q acumuladas ao longo do circuito, então um portador de carga Q sofre a força $\vec{F}_{q/Q} = Q\vec{E}_q$ enquanto se move nesse circuito. Substituindo no TTE obtemos: $0 = W_1 + W_{OF}$ sendo W_1 o trabalho de $\vec{F}_{q/Q}$ e W_{OF} o trabalho das outras forças, que vamos discutir depois. Se o portador de carga vai de A para B, então:

$$W_1 = \int_A^B Q\vec{E}_q \cdot d\vec{l} = Q\int_A^B \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = Q[V(A) - V(B)] = U_E(A) - U_E(B)$$

Conclusão: vemos que o trabalho de $\vec{F}_{q/Q}$ de A até B é a variação ΔU_E na energia potencial elétrica do portador com o sinal trocado: $\Delta U_E = U_E(B) - U_E(A)$. O "sinal trocado" significa apenas que se U_E é a capacidade do campo de força $\vec{E}_q$ realizar trabalho, então, se esse trabalho é positivo, a capacidade U_E deve diminuir, ou seja: $W_1 > 0 \Rightarrow \Delta U_E < 0$. Esse resultado para W_1 é a confirmação do que já havíamos afirmado anteriormente: "em um circuito, os portadores de carga Q se movem em um perfil de potencial elétrico V, mudando suas posições e suas energias potenciais $U_E = q\,V$. Esse potencial é produzido por outras cargas, que não os portadores, cargas elétricas que se acumulam ao longo do circuito".

Considere agora um portador que atravessa um resistor. Além de $\vec{F}_{q/Q} = Q\vec{E}_q$, ele sofre uma força de arraste $\vec{F}_A$ e o TTE para esse portador fica:

$$0 = W_1 + W_A \Rightarrow -W_1 = W_A \Rightarrow \Delta U_E = W_A$$

sendo W_A o trabalho de $\vec{F}_A$. Note que esse trabalho é sempre negativo, pois a força $\vec{F}_A$ sempre se opõe ao movimento do portador. Portanto, vale $\Delta U_E < 0$: o portador que atravessa o resistor (sempre) perde energia potencial elétrica. Para onde vai essa energia? Quem faz a força $\vec{F}_A$? A energia que o portador perde vai para quem faz a força $\vec{F}_A$ no portador ($W_A < 0$ significa que a energia vai para quem faz a força $\vec{F}_A$). Trata-se de uma interação, de uma troca de energia. Quem exerce o arraste em um portador que se move em um meio condutor? São as partículas que compõem esse meio resistivo, que colidem com os portadores enquanto eles fluem dentro do material. Nessas colisões essas partículas adquirem energia cinética e passam a vibrar, elevando a temperatura do material condutor. É o que chamamos de efeito Joule.

Considere agora um caso mais "misterioso", um portador que atravessa um indutor de indutância L. Vamos supor que a corrente, da qual esse portador faz parte, está crescendo no tempo. Então, além de $\vec{F}_{q/Q} = Q\vec{E}_q$, há um campo elétrico induzido $\vec{E}_I$ oposto ao movimento do portador (de acordo com a lei de Lenz). Não há arraste, pois o indutor é ideal. O TTE fica:

$$0 = W_1 + W_I \Rightarrow -W_1 = W_I \Rightarrow \Delta U_E = W_I$$

sendo W_I o trabalho de $\vec{E}_I$. Sabemos que esse trabalho é negativo, pois $\vec{E}_I$ é oposto ao movimento do portador (porque estamos supondo a corrente crescendo). Portanto $\Delta U_E < 0$, o portador que atravessa esse indutor perde energia potencial elétrica. Para onde vai essa energia? Quem faz a força $\vec{E}_I$? A energia que o portador perde vai para quem faz a força $\vec{E}_I$ no portador. Trata-se de uma interação, de uma troca de energia. Quem produz o campo elétrico induzido na região do solenóide? Os próprios portadores que constituem a corrente. O campo elétrico induzido é o campo elétrico produzido por correntes elétricas variáveis no tempo (por isso tivemos que supor que a corrente está crescendo no tempo, para que $\vec{E}_I$ exista). Então, o portador de carga perde energia potencial elétrica ao mesmo tempo em que outra energia da corrente aumenta, ou seja, uma energia do conjunto dos portadores. Que tipo de energia é essa? A energia magnética. De fato, a energia magnética armazenada no indutor é:

$$U_M = \frac{1}{2} L\, I^2$$

e ela está aumentando, pois I está aumentando, por hipótese. Podemos ver que essa é uma energia da corrente I. De fato, como I envolve a velocidade de arraste v_A dos portadores de carga, podemos dizer que U_M envolve v_A^2, ou seja, U_M tem "cara" de energia cinética. É verdade, U_M é uma energia de movimento, pois corrente elétrica é constituída de cargas elétricas em movimento. Só que não devemos confundir U_M com K, pois U_M não envolve a massa dos portadores, U_M envolve corrente (movimento) e geometria (L). K é desprezível (pois envolve as massas) e U_M não. U_M não é desprezível, e deve ser levada em conta, desde que o circuito possua uma auto-indutância L não desprezível. Em circuitos sem auto-indutâncias, como em circuitos com apenas resistores e capacitores, a energia magnética é desprezível, assim como o campo elétrico induzido.

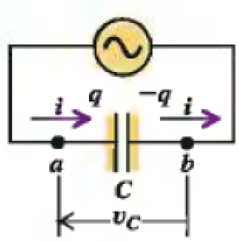
Se imaginarmos que a corrente através do indutor está diminuindo no tempo, haverá um campo elétrico induzido $\vec{E}_I$ paralelo ao movimento do portador (de acordo com a lei de Lenz). O TTE fica:

$$0 = W_1 + W_I \Rightarrow \Delta U_E = W_I$$

Agora W_I, o trabalho de $\vec{E}_I$, é positivo. Portanto $\Delta U_E > 0$, o portador que atravessa esse indutor ganha energia potencial elétrica. De onde vem essa energia? Novamente, quem faz a força $\vec{E}_I$? O portador de carga ganha energia potencial elétrica ao mesmo tempo em que a energia magnética da configuração de corrente, qual seja:

$$U_M = \frac{1}{2} L\, I^2$$

diminui, pois I está diminuindo, por hipótese. Isso acontece, por exemplo, no processo de descarga do circuito RL. Os portadores de carga ganham energia potencial elétrica no indutor e, na sequência, perdem essa energia no resistor, que dissipa calor. A corrente decai a zero exponencialmente, enquanto a energia magnética armazenada no sistema se esvai.



Q31.4: Olhando na Figura ao lado, vamos discutir a relação entre carga e corrente no capacitor. Queremos mostrar que a relação:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

vale sempre. $i(t)$ é a corrente mostrada na Figura, com o sentido positivo indicado pela seta (sentido anti-horário). Quando a corrente for negativa, significa que ela inverteu de sentido (sentido horário). Ao mesmo tempo, $q(t)$ é a carga na placa esquerda do capacitor, que pode ser positiva ou negativa

Imagine um instante em que a placa da esquerda possui carga $q(t)$ positiva e que $i(t)$ tem o sentido mostrado na Figura, ou seja, vale $i(t) > 0$. Vemos que nesse instante $q(t)$ está aumentando, pois portadores de carga positiva estão chegando nessa placa positiva (ou, equivalentemente, portadores de carga negativa estão saindo dessa placa). Então o capacitor está carregando com a polaridade +|-. Essa situação é compatível com a relação:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) > 0$$

Uma função $q(t)$ positiva com derivada positiva é uma função crescente (capacitor carregando).

Imagine um instante t em que a placa da esquerda possui carga $q(t)$ positiva, carga que está diminuindo nesse instante. Então o capacitor está descarregando com a polaridade +|-. Como

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) < 0$$

segue que a corrente terá o sentido oposto ao mostrado na Figura. Esse sentido está coerente com a ideia de que esse capacitor está, nesse instante, descarregando (portadores de carga positiva estão saindo dessa placa positiva).

Imagine um instante t em que a placa da esquerda possui carga $q(t)$ negativa que está aumentando em magnitude (ficando cada vez maior em módulo). Então o capacitor está carregando, com a polaridade oposta em relação ao discutido nos parágrafos anteriores, ou seja -|+. Como

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) < 0$$

segue que a corrente terá o sentido oposto ao mostrado na Figura, como esperamos que seja (portadores de carga positiva estão saindo dessa placa negativa). Para ficar mais evidente, sendo $q(t) < 0$ defina $q(t) = -|q(t)|$. Então:

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{d}{dt}[-|q(t)|] = -\frac{d}{dt}|q(t)| < 0$$

pois $|q(t)|$ está aumentando, por hipótese.

Finalmente, imagine um instante t em que a placa da esquerda possui carga $q(t)$ negativa, carga que está diminuindo em magnitude (ficando cada vez menor em módulo, ou seja, tendendo para zero). Então o capacitor está descarregando, com a polaridade -|+. Como

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) > 0$$

segue que a corrente terá mesmo o sentido mostrado na Figura, como esperamos que seja (portadores de carga positiva estão chegando nessa placa negativa). Para ficar mais evidente, sendo $q(t) < 0$ defina $q(t) = -|q(t)|$. Então:

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{d}{dt}[-|q(t)|] = -\frac{d}{dt}|q(t)| > 0$$

pois $|q(t)|$ está diminuindo, indo para zero, por hipótese.

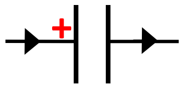
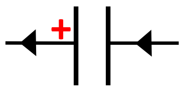
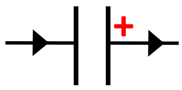
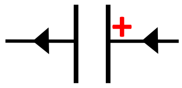
Enfim, é sempre válida a relação:

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t)$$

Para simplificar as coisas, podemos sempre pensar que (por convenção) $i(t)$ é a corrente chegando na placa positiva do capacitor de carga $q(t)$ e que $i(t) = dq(t)/dt$. Se o capacitor estiver carregando, então $q(t)$ está aumentando e a corrente tem mesmo esse sentido, chegando na placa positiva. Se o capacitor estiver descarregando, então $q(t)$ está diminuindo e a corrente é negativa, ou seja, tem o sentido oposto ao anterior, saindo da placa positiva.

Concluindo, após arbitrarmos o sentido positivo da corrente $i(t)$ (horário ou anti-horário), podemos arbitrar que a placa do capacitor onde essa corrente positiva está chegando é, nesse mesmo instante, a placa positiva do capacitor, ou seja, a placa onde $q(t) > 0$ (conforme a Figura mostrada nessa questão). Daí podemos dizer que $i(t) = dq(t)/dt$. Com o passar do tempo, os sentidos/sinais de $i(t)$ e $q(t)$ vão mudando, mas sempre respeitando a relação $i(t) = dq(t)/dt$.

A tabela abaixo resume essa ideia.

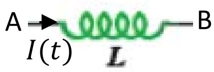
	$q(t) > 0$ aumentando	$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} > 0$
	$q(t) > 0$ diminuindo	$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} < 0$
	$q(t) < 0$ diminuindo em módulo	$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} > 0$
	$q(t) < 0$ aumentando em módulo	$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} < 0$

Note que essa tabela é compatível com a expressão para a potência com que o capacitor acumula energia potencial elétrica:

$$P_C(t) = \frac{d}{dt}\frac{[q(t)]^2}{2\,C} = \frac{1}{C}q(t)\frac{d}{dt}q(t) = \frac{1}{C}q(t)I(t) = V_C(t)I(t)$$

Vemos que nos instantes em que o capacitor está carregando, instantes em que $q(t)$ e $I(t)$ possuem o mesmo sinal, vale $P_C(t) > 0$. Esses são sempre instantes em que $|q(t)|$ está crescendo, posto que $U_E(t) = [q(t)]^2/2C$. A DDP $V_C(t) = q(t)/C$ alterna de sentido/sinal seguindo o sentido/sinal da carga $q(t)$.

Q31.6: Conforme já discutimos na Q31.3, em um indutor ideal os portadores de carga fluem dentro de um condutor perfeito (por hipótese). Portanto, não pode existir campo elétrico resultante dentro desse condutor, pois isso levaria a uma corrente divergente, conforme a lei de Ohm. Considere na Figura ao lado a corrente $I(t)$ crescendo. Sabemos



que nessa região há um campo elétrico induzido $\vec{E}_I$ apontando de B para A, se opondo ao crescimento da corrente (lei de Lenz). Concluímos que deve haver outro campo elétrico $\vec{E}_q$, oposto a $\vec{E}_I$, ou seja, de A para B, produzido por pequenos acúmulos de cargas na superfície do condutor do indutor. Conclusão, um portador flui de A para B através de um campo elétrico resultante nulo:

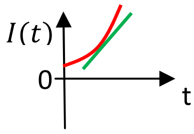
$$\vec{E} = \vec{E}_I + \vec{E}_q = \vec{0}$$

A diferença de potencial entre A e B é (usando a lei de Faraday):

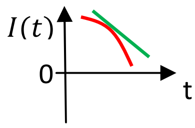
$$V_A(t) - V_B(t) = V_{AB}(t) = \int_A^B \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{E}_I \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \vec{E}_I \cdot d\vec{l} = \frac{d\phi_B(t)}{dt} = L\frac{dI(t)}{dt}$$

Vamos discutir a validade geral dos sinais envolvidos na equação $V_{AB}(t) = L\,dI(t)/dt$. Lembre-se que $L > 0$ sempre.

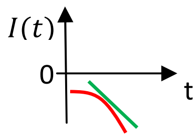
Quando $I(t)$ flui de A para B ($I > 0$) e está crescendo ($dI/dt > 0$), o campo elétrico $\vec{E}_I$ se opõe a esse crescimento, apontando de B para A. Portanto, $\vec{E}_q$ aponta de A para B, o que implica que $V_A > V_B$ ($V_{AB} > 0$), de acordo com a expressão $V_{AB}(t) = L\,dI(t)/dt$. Lembre-se que o campo $\vec{E}_q$ sempre aponta no mesmo sentido do decaimento do potencial elétrico. A Figura ao lado mostra a curva $I(t) \times t$ nesse caso.



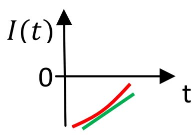
Quando $I(t)$ flui de A para B ($I > 0$) e está decrescendo ($dI/dt < 0$), o campo elétrico $\vec{E}_I$ se opõe a esse decaimento, apontando de A para B. Portanto, $\vec{E}_q$ aponta de B para A, o que implica que $V_A < V_B$ ($V_{AB} < 0$), de acordo com a equação $V_{AB}(t) = L\,dI(t)/dt$. A Figura ao lado mostra a curva $I(t) \times t$ nesse caso.



Quando $I(t)$ flui de B para A ($I < 0$) e está crescendo em módulo ($dI/dt < 0$), o campo elétrico $\vec{E}_I$ se opõe a esse crescimento, apontando de A para B. Portanto, $\vec{E}_q$ aponta de B para A, o que implica que $V_A < V_B$ ($V_{AB} < 0$), de acordo com a equação $V_{AB}(t) = L\,dI(t)/dt$. Note que quando uma função negativa cresce em módulo ela tem derivada negativa, conforme a Figura ao lado para a curva $I(t) \times t$.



Quando $I(t)$ flui de B para A ($I < 0$) e está decrescendo em magnitude ($dI/dt > 0$), o campo elétrico $\vec{E}_I$ se opõe a esse decaimento, apontando de B para A. Portanto, $\vec{E}_q$ aponta de A para B, o que implica que $V_A > V_B$ ($V_{AB} > 0$), de acordo com a equação $V_{AB}(t) = L\,dI(t)/dt$. Note que quando uma função negativa diminui em módulo ela tem derivada positiva, conforme a Figura ao lado para a curva $I(t) \times t$.

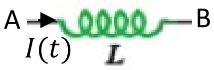
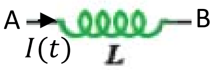
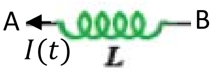
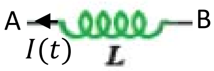


Enfim, a DDP entre os terminais de um indutor é sempre:

$$V_{AB}(t) = V_A(t) - V_B(t) = L\frac{dI(t)}{dt}$$

sendo $I(t)$ a corrente que flui de A para B.

A tabela abaixo resume essa ideia.

	$I(t) > 0$ aumentando	$V_{AB}(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt} > 0$
	$I(t) > 0$ diminuindo	$V_{AB}(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt} < 0$
	$I(t) < 0$ diminuindo em módulo	$V_{AB}(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt} > 0$
	$I(t) < 0$ aumentando em módulo	$V_{AB}(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt} < 0$

Note que essa tabela é compatível com a expressão para a potência com que o indutor “consome” energia potencial elétrica e acumula energia magnética:

$$P_L(t) = \frac{d}{dt}L\frac{[I(t)]^2}{2} = L\,I(t)\frac{d}{dt}I(t) = \ I(t)L\frac{d}{dt}I(t) = V_L(t)I(t)$$

Vemos que nos instantes em que $V_L(t)$ e $I(t)$ possuem o mesmo sinal, corrente chegando ao terminal de maior potencial (portadores atravessando o indutor e perdendo energia potencial elétrica), vale $P_L(t) > 0$: o indutor está acumulando (mesmo) energia magnética. Esses são sempre instantes em que $I(t)$ está crescendo, posto que $U_{MAG}(t) = L[I(t)]^2/2$. A DDP $V_L(t) = L\,dI(t)/dt$ alterna de sentido/sinal seguindo o sentido/sinal da derivada de $I(t)$.

Q31.7: O fator de potência (FP) em um circuito RLC série é:

$$\mathrm{FP} = \cos(\varphi)$$

com o ângulo de fase φ dado por:

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L - X_C}{R}$$

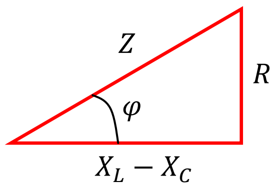
Sabendo que:

$$\tan(\varphi) = \frac{\mathrm{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

e que $\text{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$, podemos provar que:

$$\text{FP} = \cos(\varphi) = \frac{R}{Z}$$

sendo $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ a impedância do circuito.



Essas relações ficam evidentes no triângulo das impedâncias mostrado ao lado.

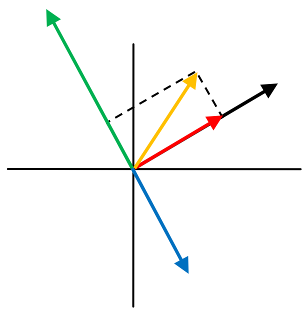
Fica claro, portanto, que não tem como ocorrer $FP = 0$, já que $R \neq 0$, por hipótese.

Enfim, a potência média dissipada no circuito é:

$$P_{MED} = \frac{1}{2} V_0 \, I_0 \cos(\varphi) = V_{RMS} \, I_{RMS} \, FP$$

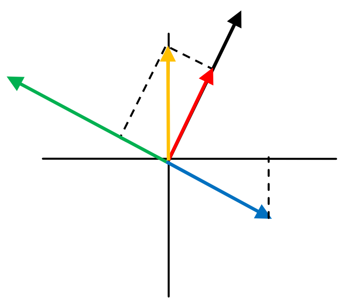
Portanto, se valesse $FP = 0$, a potência dissipada no circuito seria nula, o que seria um absurdo completo. Isso porque a resistência R do circuito é fruto de um arraste nos portadores de carga e esse arraste tem que dissipar energia. Não há como os portadores de carga se moverem nesse circuito sem dissipar energia na forma de calor (efeito Joule). O caso $FP = 0$ ocorre somente no circuito ideal LC ($R = 0$), em que não há arraste nos portadores de carga e $P_{MED} = 0$.

Q31.8: Considere o diagrama fasorial para um circuito RLC série.



A corrente $I(t)$ em preto, $V_R(t)$ em vermelho, $V_L(t)$ em verde, $V_C(t)$ em azul e $V(t)$ em laranja (voltagem da fonte CA). O valor instantâneo de qualquer grandeza é o valor da projeção de seu fasor no eixo horizontal. As setas estão todas girando juntas no sentido anti-horário, como um corpo rígido, mantendo fixas suas diferenças de fase.

Note que se o tamanho da seta laranja é V_0, a amplitude da voltagem na fonte, então o tamanho da seta preta é $I_0 = V_0/Z$ (a amplitude da corrente), da seta vermelha é $R\, I_0 = (R/Z)V_0$ (a amplitude da voltagem no resistor), da seta verde é $X_L I_0 = (X_L/Z)V_0$ (a amplitude da voltagem no indutor) e da seta azul é $X_C I_0 = (X_C/Z)V_0$ (a amplitude da voltagem no capacitor). A impedância do circuito é dada por $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$. Note então que a amplitude da voltagem em R é a única que é sempre menor que a amplitude da voltagem na fonte, pois vale sempre $Z > R$ ($Z = R$ somente no caso especial da ressonância), ou seja, a seta vermelha é sempre menor que a seta laranja, conforme podemos ver na Figura (a seta vermelha é uma projeção da seta laranja). Essas duas setas seriam iguais somente se valesse $X_L = X_C$, ou seja, na ressonância (seta azul do mesmo tamanho da seta verde).

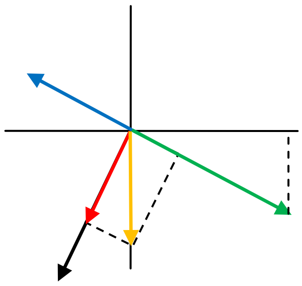


a) Pode valer $V_C(t) > V(t)$ (valores instantâneos) em algum instante?

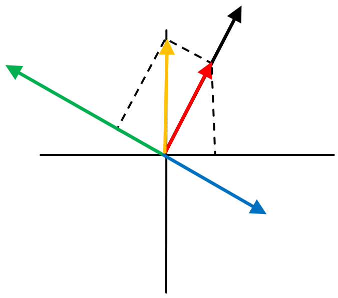
Sim, considere o instante mostrado na figura logo acima. Nesse instante a projeção da seta azul no eixo horizontal, que é o valor instantâneo de $V_C(t)$ é maior que a projeção da seta laranja (o valor instantâneo de $V(t)$), que é nula. O capacitor está carregado, independentemente da fonte.

b) Pode valer $V_L(t) > V(t)$ em algum instante?

Sim, considere o instante mostrado ao lado. Nesse instante a projeção da seta verde no eixo horizontal, que é o valor instantâneo de $V_L(t)$ é maior que a projeção da seta laranja (o valor instantâneo de $V(t)$), que é nula. O indutor está se auto-induzindo, independentemente da fonte.



c) Pode valer $V_R(t) > V(t)$ em algum instante?



Sim, considere o instante mostrado ao lado. Nesse instante a projeção da seta vermelha no eixo horizontal, que é o valor instantâneo de $V_R(t)$ é maior que a projeção da seta laranja (o valor instantâneo de $V(t)$), que é nula. Está passando corrente no resistor, independentemente da fonte. Note que a seta vermelha é sempre menor que a seta laranja, refletindo uma relação entre as amplitudes das voltagens $V_R(t)$ e $V(t)$. Mas, nada impede que instantaneamente valha $V_R(t) > V(t)$, como mostramos aqui.

Essa demonstração geométrica é muito mais simples que uma demonstração algébrica, baseada nas expressões das voltagens em função do tempo.

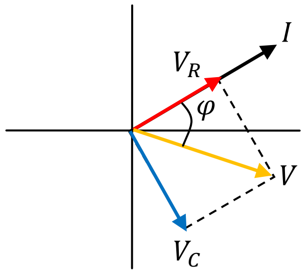
Enfim, apenas enfatizando a curiosidade desse resultado, a lei das malhas aplicada ao circuito RLC série diz que para todo instante t vale:

$$V(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t)$$

O que mostramos aqui é que em um dado instante o valor de $V(t)$ (a voltagem "resultante") pode ser menor que os valores individuais de $V_R(t)$, $V_C(t)$ ou $V_L(t)$. Esse fato é conseqüência das defasagens entre essas funções e, portanto, entre seus fasores. Se todas as voltagens estivessem em fase, o que mostramos aqui seria impossível de ocorrer.

Q31.12: Uma lâmpada incandescente (um resistor R) é ligado em série com um capacitor (C) e esse sistema é ligado a uma fonte de voltagem alternada. Trata-se de um circuito RC série.

A Figura ao lado ilustra o diagrama fasorial desse circuito.



A amplitude da corrente na lâmpada (tamanho do fasor preto) é (apenas fazendo $X_L = 0$ no circuito RLC série):

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

com V_0 a amplitude da voltagem na fonte (tamanho do fasor laranja) e $X_C = 1/\omega C$ a reatância capacitiva. O brilho da lâmpada está determinado pela potência média que ela dissipa, que é dada por:

$$P_{MED} = V_{RMS}\, I_{RMS} \cos(\varphi) = \frac{V_0\, I_0}{2} \cos(\varphi)$$

sendo $\cos(\varphi) = R/Z$ o fator de potência do circuito (ângulo entre o fasor preto e o fasor laranja, note que $\varphi < 0$). Portanto:

$$P_{MED} = \frac{V_0}{2} \frac{V_0}{Z} \frac{R}{Z} = \frac{V_0^2}{2} \frac{R}{R^2 + X_C^2}$$

Explicitando a capacitância:

$$P_{MED} = \frac{V_0^2}{2} \frac{R}{R^2 + (1/\omega C\,)^2}$$

Vemos que quanto maior a capacitância, maior o brilho da lâmpada (mantendo os outros parâmetros independentes fixos).

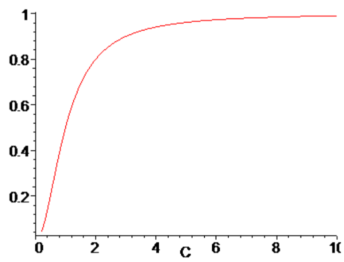
Note que poderíamos ter escrito também:

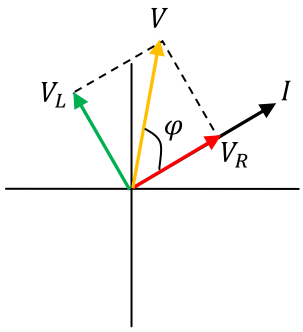
$$P_{MED} = R\, I_{RMS}^2 = R\, \frac{I_0^2}{2} = R\, \frac{I_0}{2} \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0\, I_0}{2}\, \frac{R}{Z}$$

Se o capacitor tinha inicialmente ar (basicamente o vácuo) entre as placas e depois introduzimos um dielétrico de constante dielétrica K, a capacitância vai aumentar, pois:

$$C^{(DIEL)} = K\, C^{(VÁCUO)}$$

e $K > 1$. Com o aumento da capacitância, o brilho da lâmpada (P_{MED}) vai aumentar. Quanto maior a capacitância, menor a reatância capacitiva, menor a impedância do circuito e mais facilmente a corrente flui no circuito e na lâmpada. O gráfico ao lado ilustra o comportamento de P_{MED} versus C. À medida que C cresce, a lâmpada vai atingindo um brilho máximo constante.





Q31.13: Uma lâmpada incandescente (um resistor R) é ligado em série com um indutor (L) e esse sistema é ligado a uma fonte de voltagem alternada. Trata-se de um circuito RL série.

A Figura ao lado ilustra o diagrama fasorial desse circuito (note que $\varphi > 0$).

A amplitude da corrente na lâmpada é (apenas fazendo $X_C = 0$ no circuito RLC série):

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

com V_0 a amplitude da voltagem na fonte e $X_L = \omega L$ a reatância indutiva. O brilho da lâmpada está determinado pela potência média que ela dissipa, que é dada por:

$$P_{MED} = V_{RMS}\, I_{RMS} \cos(\varphi) = \frac{V_0\, I_0}{2} \cos(\varphi)$$

sendo $\cos(\varphi) = R/Z$ o fator de potência do circuito. Portanto:

$$P_{MED} = \frac{V_0}{2}\frac{V_0}{Z}\frac{R}{Z} = \frac{V_0^2}{2}\frac{R}{R^2 + X_L^2}$$

Explicitando a indutância:

$$P_{MED} = \frac{V_0^2}{2}\frac{R}{R^2 + (\omega\, L\,)^2}$$

Vemos que quanto maior a indutância, menor o brilho da lâmpada (mantendo os outros parâmetros independentes fixos).

Se o indutor tinha inicialmente ar (basicamente o vácuo) em seu núcleo e depois introduzimos um núcleo de ferro de permeabilidade magnética $\mu = K_m\, \mu_0$ com $K_m \gg 1$, a indutância vai aumentar pois:

$$L^{(FERRO)} = K_m\, L^{(VÁCUO)}$$

Com o aumento da indutância, o brilho da lâmpada (P_{MED}) vai diminuir. Quanto maior a indutância, maior a reatância indutiva, maior a impedância do circuito e mais difícil fica para a corrente fluir no circuito e na lâmpada. O gráfico ao lado ilustra o comportamento de P_{MED} versus L. Se L cresce muito, a lâmpada vai apagando.